



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

JEFERSON LEITE DA COSTA NUNES

**DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA ONLINE DE
MODELAGEM 3D PARA FINS EDUCACIONAIS**

**MONTEIRO
2024**

JEFERSON LEITE DA COSTA NUNES

**DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA ONLINE DE
MODELAGEM 3D PARA FINS EDUCACIONAIS**

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado à coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Área de concentração: Matemática aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Brauner Gonçalves Coutinho

MONTEIRO

2024

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

N972 Nunes, Jeferson Leite da Costa.
Desenvolvimento de uma ferramenta online de modelagem 3D para fins educacionais [manuscrito] / Jeferson Leite da Costa Nunes. - 2024.
93 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. Brauner Gonçalves Coutinho, Coordenação do Curso de Matemática - CCHE".

1. Modelagem 3D. 2. Geometria espacial. 3. Ferramenta educacional. 4. Tecnologias digitais. 5. Three.js. I. Título

21. ed. CDD 516

JEFERSON LEITE DA COSTA NUNES

DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA ONLINE DE MODELAGEM 3D
PARA FINS EDUCACIONAIS

Monografia apresentado à
Coordenação do Curso de Matemática
da Universidade Estadual da Paraíba,
como requisito parcial à obtenção do
título de Licenciado em Matemática

Aprovada em: 25/11/2024.

Documento assinado eletronicamente por:

- **Natan de Assis Lima** (***.029.874-**), em **02/12/2024 10:29:48** com chave **80a1725eb0b111efb1451a7cc27eb1f9**.
- **Paulo Eduardo e Silva Barbosa** (***.886.504-**), em **02/12/2024 10:29:01** com chave **64c6e942b0b111efa96c1a7cc27eb1f9**.
- **Brauner Gonçalves Coutinho** (***.057.844-**), em **02/12/2024 13:52:13** com chave **c7598d1eb0cd11ef8de92618257239a1**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.

Tipo de Documento: Termo de Aprovação de Projeto Final

Data da Emissão: 11/12/2024

Código de Autenticação: df5cfe



*Este trabalho é dedicado ao meu pai, que mesmo não estando fisicamente aqui,
sei que sempre esteve ao meu lado e ao lado da minha mãe,
nos ajudando em cada momento.*

AGRADECIMENTOS

A conclusão deste Trabalho de Conclusão de Curso é um momento marcante em minha trajetória acadêmica, e muitos são os que merecem meu agradecimento por terem contribuído para que eu chegasse até aqui.

Primeiramente, agradeço à Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), por proporcionar um ambiente acadêmico de excelência e por ser o espaço onde pude aprender e crescer, tanto intelectual quanto pessoalmente. A todos os profissionais que fizeram parte dessa jornada, sou imensamente grato pela dedicação, apoio e troca de experiências ao longo dos anos.

Agradeço de forma especial à minha mãe, que sempre me incentivou a manter o foco nos estudos. Seu apoio incondicional, seus conselhos sábios e a forma como sempre se dispôs a fornecer os subsídios e o incentivo necessário foram fundamentais para que eu buscasse meus sonhos e jamais desistisse, mesmo diante dos desafios. Não há palavras suficientes para expressar minha gratidão por tudo o que fez por mim.

Quero também expressar minha profunda gratidão ao meu orientador, Professor Doutor Brauner Gonçalves Coutinho, que não apenas orientou o desenvolvimento deste trabalho, mas também me instruiu acerca dos passos essenciais para realizar uma pesquisa bem estruturada. Agradeço pela sua dedicação, pelos ensinamentos sobre como buscar fontes confiáveis e, principalmente, pelo exemplo de comprometimento e excelência no ensino e na pesquisa.

Agradeço ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e à FAPESQ (Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba) pelo apoio financeiro e pela concessão das duas cotas de Iniciação Científica, que foram essenciais para a realização deste trabalho.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a concretização deste trabalho. Cada ajuda, palavra de incentivo e gesto de apoio foi valioso para que eu alcançasse este objetivo.

A todos, meu sincero agradecimento.

“A coisa mais bela que podemos experimentar é o misterioso. É a emoção fundamental que está no berço da verdadeira arte e ciência. Aquele que não conhece essa emoção, que não pode mais se maravilhar ou sentir admiração, está praticamente morto, como uma vela apagada.”
(Albert Einstein)

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de uma ferramenta online de modelagem 3D, chamada *Modela3D*, voltada para o ensino de geometria espacial no contexto educacional. A plataforma, construída com tecnologias modernas como Three.js e React, permite a criação, manipulação e visualização de objetos tridimensionais interativos diretamente no navegador, por meio de comandos simples. A ferramenta oferece uma variedade de objetos predefinidos, como sólidos platônicos, esferas, cubos e cones, e ainda possibilita a importação de modelos externos, além de criar superfícies utilizando funções matemáticas. Para simplificar a construção de sólidos regulares, foram implementadas relações matemáticas que convertem o comprimento da aresta no raio da esfera circunscrita a cada sólido. Além disso, a plataforma dispõe de um blog, que objetiva promover o compartilhamento de experiências e conhecimentos entre usuários. A eficácia e os pontos de melhoria do *Modela3D* foram avaliados em diferentes cenários educacionais, incluindo um minicurso sobre modelagem 3D do sistema solar e atividades em aulas de Desenho Geométrico. A análise dos resultados, baseada em questionários com escala Likert, mostrou que a ferramenta contribuiu significativamente para a compreensão de conceitos geométricos espaciais, facilitando a visualização e a manipulação de objetos 3D, além de estimular habilidades como a visualização espacial e raciocínio lógico. Este estudo conclui que a ferramenta é uma alternativa promissora aos métodos tradicionais de ensino de geometria espacial, com o potencial de fomentar alternativas para o ensino e aprendizado de geometria espacial de maneira integrada.

Palavras-chave: Modelagem 3D, Geometria Espacial, Ferramenta Educacional, Tecnologias Digitais, Three.js

ABSTRACT

This paper describes the development of an online 3D modeling tool called *Modela3D*, designed to teach spatial geometry in a practical and interactive way. The platform, built with modern technologies such as Three.js and React, enables users to create, manipulate, and visualize 3D objects directly in the browser using simple commands. The tool provides pre-made objects, such as Platonic solids, spheres, cubes, and cones, and also supports importing external models or creating surfaces using mathematical functions. To simplify the creation of regular solids, formulas were implemented to convert the edge length into the radius of the circumscribed sphere of each solid. Additionally, the platform includes a blog for users to share experiences and knowledge. The tool was tested in different educational contexts, such as a mini-course on the solar system and activities in Geometry Drawing classes. The results, evaluated through Likert-scale questionnaires, showed that *Modela3D* helps in understanding spatial geometry concepts, facilitates the visualization and manipulation of 3D objects, and stimulates skills like logical reasoning and spatial visualization. It is concluded that *Modela3D* is a promising alternative to traditional methods of teaching geometry, with great potential to integrate teaching and technology.

Keywords: 3D Modeling, Spatial Geometry, Education, Digital Technologies, Three.js.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Os cinco sólidos de Platão	25
Figura 2 – Significado filosófico de cada um dos cinco sólidos de Platão.	26
Figura 3 – Cubo composto por pirâmides retas.	28
Figura 4 – Uma pirâmide reta elementar com base em um n-polígono regular é retirada de um poliedro regular.	29
Figura 5 – Base da pirâmide	41
Figura 6 – Utilização de coordenadas polares para posicionar vértices da base da pirâmide em uma circunferência	41
Figura 7 – Código implementado para converter o tamanho do lado do sólido para o valor correspondente do raio da esfera circunscrita.	54
Figura 8 – Página inicial da aplicação.	56
Figura 9 – Versões e exemplos disponíveis na aplicação.	57
Figura 10 – Planos de aula e objetos disponíveis.	58
Figura 11 – Interface da aplicação.	58
Figura 12 – Representação gráfica de alguns objetos listados na Tabela 1.	60
Figura 13 – Importação de um modelo GLB.	61
Figura 14 – Uso do modelo GLB importado	61
Figura 15 – Blog da aplicação com postagens de usuários.	62
Figura 16 – Perfil de um usuário no blog.	63
Figura 17 – Modelagem 3D da Terra vista do espaço.	65
Figura 18 – Terra vista do espaço na missão Apollo 8.	65
Figura 19 – Modelagem 3D da Terra vista do espaço utilizando modelo GLB.	65
Figura 20 – Modelagem 3D das estações do ano.	66
Figura 21 – Exemplo com a modelagem do sistema Terra-Lua-Sol.	67
Figura 22 – Configuração para a criação de uma superfície tridimensional com a função definida.	69
Figura 23 – Criação de um hemisfério de uma esfera por meio de sua equação no <i>Modela3D</i>	70
Figura 24 – Criação de um hemisfério de uma esfera por meio de sua equação no Geogebra.	70
Figura 25 – Simulação física de queda livre no Geogebra.	71
Figura 26 – Simulação física de queda livre no <i>Modela3D</i>	72
Figura 27 – Código utilizado para criar a simulação física de queda livre no <i>Modela3D</i>	73
Figura 28 – Criação da esfera que simula o sol.	74
Figura 29 – Alunos durante a modelagem do sistema solar no minicurso.	75

Figura 30 – Participantes do minicurso com a modelagem das estações do ano ao fundo.	75
Figura 31 – Solução de um dos estudantes para o problema.	76
Figura 32 – Solução de um dos estudantes para o problema.	77
Figura 33 – Alunos durante a resolução da atividade de posicionamento das três esferas.	77
Figura 34 – Solução de um dos estudantes para o problema.	78
Figura 35 – Castelo de exemplo com dimensões especificadas	78
Figura 36 – Solução de um dos estudantes para o problema.	79
Figura 37 – Estudantes construindo um castelo posicionando sólidos geométricos.	80
Figura 38 – Solução de um dos estudantes para o problema.	80
Figura 39 – Estudante planificando o tetraedro.	81
Figura 40 – Estudantes durante o desafio de posicionamento de cubos.	81
Figura 41 – Estudantes durante a resolução do segundo desafio, criando uma esfera inscrita em um cubo com opacidade ajustada em um ambiente.	82
Figura 42 – Frequência das respostas da escala Likert sobre a percepção dos alunos em relação à ferramenta de modelagem 3D utilizada para o estudo de sólidos geométricos.	83

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Alguns objetos disponíveis	59
-------------------------------------------------	----

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Ângulo entre arestas laterais consecutivas da pirâmide reta elementar
ω	Ângulo sólido subentendido por cada face no centro do poliedro
π	Constante matemática Pi, razão entre o perímetro e o diâmetro de um círculo
n_f	Número de faces do poliedro regular
n	Número de lados de cada face (polígono regular)
H	Altura da pirâmide reta elementar
R_i	Raio interno (toca todas as faces do poliedro)
R_o	Raio externo (passa por todos os vértices do poliedro)
R_m	Raio médio (raio de esfera com mesmo volume do poliedro)
M	Ponto médio da aresta do sólido
O	Ponto central da face do sólido
C	Centro do sólido
A_s	Área da superfície do poliedro
V	Volume do poliedro

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	19
2.1	Transição da Geometria Plana para a Geometria Espacial . . .	19
2.2	O potencial das TDICs	21
2.3	Resolução de problemas e programação de computadores . . .	23
2.4	Os poliedros regulares	25
2.4.1	<i>Relações geométricas em poliedros regulares</i>	27
2.4.1.1	<i>Raio interno de um poliedro regular</i>	31
2.4.1.2	<i>Raio externo de um poliedro regular</i>	31
2.4.1.3	<i>Área da superfície de um poliedro regular</i>	31
2.4.1.4	<i>Volume de um poliedro regular</i>	32
2.4.1.5	<i>Dedução da fórmula de HCR</i>	33
3	METODOLOGIA	37
3.1	A tecnologia	38
3.2	A matemática	40
3.2.1	<i>Construção da pirâmide</i>	40
3.2.2	<i>Aplicação da fórmula de HCR para os sólidos platônicos</i> . .	42
3.2.2.1	<i>Tetraedro regular</i>	42
3.2.2.2	<i>Hexaedro regular</i>	44
3.2.2.3	<i>Octaedro regular</i>	45
3.2.2.4	<i>Dodecaedro regular</i>	47
3.2.2.5	<i>Icosaedro regular</i>	50
3.2.2.6	<i>Aplicação no Software</i>	52
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	55
4.1	A ferramenta “Modela 3D”	55
4.1.1	<i>A interface</i>	57
4.1.2	<i>O blog</i>	60
4.2	Primeiras modelagens	63
4.2.1	<i>A Terra vista pela tripulação da Apollo 8</i>	64
4.2.2	<i>Os movimentos da Terra</i>	64
4.2.3	<i>Uma experiência com embalagens</i>	66
4.2.4	<i>Plotando funções tridimensionais</i>	67
4.2.5	<i>Uma breve comparação com o Geogebra</i>	68
4.3	Experiências em sala de aula	73
4.3.1	<i>Modelando o Sistema Solar</i>	73
4.3.2	<i>Aulas de geometria espacial e poliedros regulares</i>	75

4.3.2.1	<i>Primeira intervenção</i>	76
4.3.2.2	<i>Segunda intervenção</i>	80
4.4	Avaliação dos estudantes sobre o uso da ferramenta	83
5	CONCLUSÃO	87
	REFERÊNCIAS	89
	APÊNDICE A – PLANO DE AULA	91

1 INTRODUÇÃO

A atual sociedade vivencia uma substancial transformação digital que repercute em diversos contextos da vida humana, inclusive na educação. A incorporação das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) no ambiente educacional abre portas para a exploração de novos recursos pedagógicos, simplificando a transmissão de conhecimentos que, outrora, eram veiculados primordialmente através de métodos tradicionais, como o uso do quadro negro, livro didático, entre outros. As TDICs desempenham um papel primordial na integração de variados elementos do programa educacional, ao mesmo tempo em que promovem a inclusão dos discentes na era da informação digital, o que pode ser essencial no mercado de trabalho.

Nesse cenário de ampla transformação, a tecnologia de modelagem 3D surge como uma ferramenta promissora para aprimorar o processo de ensino e aprendizagem, especialmente em disciplinas como matemática, física, química e biologia, onde conceitos complexos frequentemente se beneficiam de representações visuais tridimensionais. A modelagem 3D permite a criação de representações tridimensionais de objetos e ambientes virtuais, tornando a compreensão de conceitos abstratos muito mais intuitiva e envolvente. No campo da matemática, em particular, a modelagem 3D oferece a oportunidade de explorar de forma visual e interativa conceitos geométricos e algébricos, estimulando o engajamento dos alunos e a compreensão mais profunda desses conceitos. Além disso, a acessibilidade de softwares gratuitos para modelagem 3D elimina barreiras financeiras, permitindo que educadores e alunos de diferentes origens socioeconômicas tenham acesso a essa tecnologia.

Nesta perspectiva, o presente trabalho apresenta o desenvolvimento de uma ferramenta gratuita de modelagem 3D com enfoque educacional. A ferramenta foi projetada para ser intuitiva e de fácil utilização, permitindo ao usuário criar e visualizar objetos 3D interativos diretamente do navegador. Desenvolvido com base no *framework React*, o aplicativo oferece uma ampla gama de opções para criar objetos tridimensionais, como vetores, planos, esferas, sólidos platônicos e superfícies parametrizadas. Por meio de comandos simples em *JavaScript*, os usuários podem definir propriedades como cor, tamanho e posição dos objetos, enquanto observam em tempo real como essas mudanças afetam a cena, possibilitando a experimentação e a validação de hipóteses na elaboração de uma determinada cena. Além disso, a ferramenta permite a importação de sólidos e texturas, tornando-a ainda mais versátil para a criação de modelos mais realistas. As cenas criadas são interativas, permitindo que os usuários modifiquem a posição da câmera para visualizar os objetos sob diferentes ângulos e perspectivas, facilitando a análise da geometria, disposição e comportamento dos objetos tridimensionais na cena.

Ao longo deste trabalho, exploraremos o potencial da modelagem 3D como uma ferramenta para promover a construção do conhecimento matemático, permitindo que os alunos desempenhem um papel ativo em sua aprendizagem, à semelhança dos princípios do Construtivismo de Piaget. Nesse contexto, os ambientes digitais se apresentam como uma ferramenta poderosa que estimula a criatividade, o pensamento crítico e o desenvolvimento de habilidades relacionadas à resolução de problemas. Em particular, nossa pesquisa concentra-se na área desafiadora do ensino da geometria espacial, que envolve a compreensão de conceitos em três dimensões. A transição da geometria plana para o espaço tridimensional requer uma mudança na maneira como representamos objetos e fenômenos, tornando a modelagem digital e as ferramentas de software essenciais para a compreensão e resolução de problemas complexos nessa área.

Acreditamos que as TDICs têm o potencial de disponibilizar visualizações interativas que capacitam os estudantes a criar e explorar objetos tridimensionais em tempo real, tornando o processo de aprendizado mais envolvente e acessível. A plataforma online de modelagem 3D baseada em comandos de texto desenvolvida na presente pesquisa visa fornecer uma solução prática e gratuita para atender a essa necessidade, destacando a importância da modelagem 3D na educação e a necessidade de ferramentas acessíveis e interativas para apoiar o ensino da geometria espacial e conteúdos afins.

Em 29 de maio de 2024 o Conselho Nacional de Educação lançou a Resolução CNE/CP nº 4, com as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial em Nível Superior de Profissionais do Magistério da Educação Escolar Básica (CNE, 2024). Essa resolução apresenta diretrizes que incentivam o uso de ferramentas digitais como um recurso no processo de formação de professores, com vistas ao aprimoramento da prática pedagógica e ao desenvolvimento de competências digitais. As diretrizes reforçam a importância de processos formativos que preparem os futuros professores para uma prática docente que integre teoria e prática, permitindo uma visão ampla e sistêmica do ensino, da aprendizagem e da avaliação (CNE, 2024, p. 5). Nesse sentido, entendemos que o uso da modelagem 3D para o ensino de geometria espacial proporciona ao licenciando o contato com novas tecnologias, incentivando o pensamento crítico e o desenvolvimento de habilidades didáticas para lidar com conceitos complexos.

Além disso, o documento destaca o papel fundamental das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) na formação de competências digitais docentes (CNE, 2024, p. 5). A utilização de uma ferramenta de modelagem como a aqui apresentada pode permitir que o professor em formação se familiarize com as tecnologias aplicadas ao ensino de matemática, na busca por contribuir para o desenvolvimento de práticas pedagógicas mais interativas e visualmente atrativas, que podem favorecer o aprendizado dos alunos.

Outro aspecto ressaltado nas diretrizes é a importância de diferentes espaços de aprendizagem, incluindo laboratórios e ambientes digitais (CNE, 2024, p. 5). Nesse sentido,

a nossa ferramenta permite que os licenciandos explorem conceitos matemáticos em um ambiente digital que simula características reais dos sólidos geométricos, possibilitando uma aprendizagem mais prática e lúdica. Isso vai ao encontro da recomendação de ampliar os espaços de formação para além das salas de aula tradicionais, promovendo a construção do conhecimento em ambientes culturais e tecnológicos variados.

As diretrizes destacam também a importância do planejamento e execução de atividades integradas e coerentes nos diversos espaços formativos, como as instituições de Educação Básica e de Educação Superior, em conjunto com outros ambientes culturais, científicos, tecnológicos, físicos e virtuais (CNE, 2024, p. 5). Nesse contexto, a ferramenta proposta no presente trabalho torna-se um recurso estratégico, permitindo que o licenciando desenvolva projetos e atividades que estimulem a compreensão de conceitos geométricos, como volumes, áreas, formas e posicionamento de objetos no espaço.

É igualmente relevante destacar que as diretrizes enfatizam o desenvolvimento, execução, acompanhamento e avaliação de projetos educacionais que façam uso de tecnologias educacionais e incorporem uma variedade de recursos e estratégias didático-pedagógicas. (CNE, 2024, p. 5). A adoção desse tipo de ferramenta pode contribuir para a formação de professores capazes de integrar inovações tecnológicas à prática pedagógica, o que é essencial para o desenvolvimento de uma educação mais moderna e adaptada às necessidades da atual sociedade.

A pesquisa descrita neste trabalho foi desenvolvida no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), no decorrer duas cotas consecutivas (22/23 e 23/24). A escolha por essa área de pesquisa se deu pela conjunção de dois fatores: meu gosto e aptidão por programação de computadores e o crescente interesse em explorar novas tecnologias que possibilitem o aprimoramento do ensino de matemática. As primeiras ideias para o projeto surgiram a partir de experiências prévias com a biblioteca VPython, que já foi utilizada em projetos de simuladores desenvolvidos neste campus. Ao estudar alternativas para a construção e manipulação de objetos tridimensionais no contexto do navegador, notamos que a biblioteca Three.js poderia ser uma alternativa versátil tanto para a criação e manipulação de objetos, quanto para a criação de simulações físicas, justificando sua escolha como base tecnológica para o desenvolvimento deste trabalho.

A respeito da estrutura, o organizamos este trabalho em quatro capítulos. No Capítulo 2, abordamos os pressupostos que sustentam a investigação, enfatizando o papel das TDICs na educação matemática, a importância do ensino de geometria espacial e a relevância da modelagem 3D como recurso pedagógico auxiliar para seus estudo. Em seguida, o Capítulo 3 detalha os procedimentos adotados na pesquisa, incluindo a descrição da ferramenta de modelagem 3D desenvolvida, os métodos de coleta e análise de dados, e como se deu as primeiras aplicações da ferramenta em diferentes cenários educacionais. Também são discutidos os aspectos tecnológicos e os conceitos matemáticos que se mostraram

necessários para o desenvolvimento da pesquisa. No Capítulo 4, apresentamos alguns resultados obtidos com a aplicação da ferramenta, incluindo a análise de questionários e a discussão sobre as experiências dos alunos. Por fim, o Capítulo 5 sintetiza os principais resultados da pesquisa, discute as implicações da utilização de ferramentas digitais para o ensino de geometria espacial e sugere caminhos para futuras investigações.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No cenário atual, é notável a proliferação dos recursos tecnológicos que têm atraído uma considerável parcela da sociedade, independente de faixa etária, culminando na incorporação da internet como uma fonte versátil de entretenimento, comunicação e acesso à informação, por meio de dispositivos como computadores e, principalmente, smartphones. Esta crescente tendência nos motiva a explorar abordagens eficazes para a integração dessas ferramentas no ambiente educativo, visando otimizar o processo de ensino e aprendizagem. Abordagens pedagógicas interdisciplinares revelam-se altamente eficazes quando empregam ambientes computacionais para o estudo de determinados objetos de aprendizagem. O computador ou smartphone, nesse contexto, se transforma em uma ferramenta poderosa para fomentar a aprendizagem, abrindo caminho para diversas possibilidades pedagógicas.

No ensino da Matemática, frequentemente considerada uma disciplina desafiadora para estudantes de todas as idades, torna-se indispensável adotar metodologias que facilitem o aprendizado e ampliem o interesse dos alunos. Nesse cenário, as tecnologias digitais desempenham um papel importante, oferecendo simulações interativas, representações e recursos visuais que podem tornar o conteúdo mais acessível e contextualizado. Esses recursos se mostram especialmente úteis na introdução de temas como a geometria espacial, pois auxiliam na construção de uma transição mais simples entre a compreensão da geometria plana e a exploração de conceitos em três dimensões.

2.1 Transição da Geometria Plana para a Geometria Espacial

A geometria plana, devido à sua natureza bidimensional, frequentemente se presta a uma representação mais simples em superfícies planas, como quadros-negros ou páginas de livros didáticos. Entretanto, quando lidamos com modelos e conteúdos que envolvem três dimensões, a complexidade na compreensão e na abordagem aumenta consideravelmente. Dessa forma, uma parcela significativa de estudantes enfrenta desafios ao tentar entender e solucionar problemas no espaço tridimensional.

A transição para três dimensões exige uma mudança na maneira como representamos objetos e fenômenos, visto que agora devemos considerar não apenas largura e altura, mas também profundidade, o que acrescenta uma camada extra de complexidade, que se reflete não apenas na visualização dos problemas, mas também na formulação e na resolução dos mesmos. Sendo assim, o estudo da geometria espacial demanda o uso de representações gráficas avançadas, modelagem digital e ferramentas de software que permitam explorar e manipular objetos em três dimensões. Estudos corroboram essa ideia, indicando que as habilidades espaciais podem ser aprimoradas por meio de treinamento, e que ambientes

virtuais funcionam como laboratórios interativos que podem ser empregados para aprender diversos conteúdos matemáticos, tanto no ensino fundamental quanto no ensino superior (Kaufmann, 2011).

Nesse contexto, é interessante observar a perspectiva de Sorby (2007), que, ao citar Piaget, sugere que as habilidades espaciais passam por três estágios de desenvolvimento. No primeiro estágio, adquirem-se habilidades topológicas, predominantemente bidimensionais (2D), sendo assimiladas pela maioria das crianças entre 3 e 5 anos. Com essas habilidades, as crianças conseguem reconhecer a proximidade de um objeto em relação a outros, sua ordem em um grupo e seu isolamento ou envolvimento por um ambiente maior. O segundo estágio envolve a visualização de objetos tridimensionais e a percepção de como eles se pareceriam a partir de diferentes pontos de vista, ou como seriam se fossem rotacionados ou transformados no espaço. A maioria das crianças adquire essa habilidade até a adolescência; no entanto, quando o objeto é desconhecido, muitos estudantes no ensino médio ou mesmo na faculdade enfrentam dificuldades na visualização nesse estágio de desenvolvimento. No terceiro estágio, as pessoas conseguem visualizar os conceitos de área, volume e distância em combinação com aqueles de translação, rotação e reflexão. Nesse estágio, portanto, uma pessoa é capaz de combinar conceitos de medição com suas habilidades projetivas previamente adquiridas.

Esses estágios de desenvolvimento reforçam a importância da geometria espacial, pois suas aplicações vão além da sala de aula e podem ser úteis em diversos aspectos da vida pessoal e profissional dos estudantes. A compreensão de formas tridimensionais, volumes e áreas é fundamental para carreiras como arquitetura, engenharia civil, design de interiores e até mesmo animação 3D. Profissionais que lidam com construção, criação de produtos e tecnologia precisam dominar conceitos de geometria espacial para planejar e executar projetos de forma eficiente. Além disso, o raciocínio lógico e a capacidade de visualizar objetos em três dimensões, desenvolvidos no estudo da geometria espacial, são habilidades valorizadas em qualquer área do conhecimento.

Sob essa perspectiva, o domínio da geometria espacial transcende o ambiente acadêmico e revela-se essencial em diversas áreas profissionais. De acordo com Sorby (2007, p.1-2), habilidades espaciais são valorizadas em mais de 84 carreiras, especialmente nas áreas técnicas, como a engenharia, onde a capacidade de visualizar e rotacionar mentalmente objetos é fundamental. Essa competência é indispensável não apenas para interpretar projetos complexos, mas também para operar softwares de modelagem tridimensional. Conforme observado por Sorby (2000), essas habilidades espaciais estão diretamente ligadas à eficácia no aprendizado e na utilização de ferramentas de design assistido por computador, destacando sua relevância para o desempenho profissional.

2.2 O potencial das TDICs

As Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs) têm grande potencial de disponibilizar visualizações interativas que capacitam os estudantes a criar e explorar objetos tridimensionais em tempo real, conferindo ao processo de aprendizado um caráter mais envolvente. As ferramentas de modelagem 3D se apresentam como uma alternativa para o ensino, viabilizando aos alunos a visualização de conceitos abstratos que abrangem diversas disciplinas, como Matemática, Física, Química, entre outras. Através da utilização dessas ferramentas, é possível trabalhar com ambientes tridimensionais mais detalhados e interativos por meio do computador. Esses ambientes oferecem uma experiência razoavelmente realista de tridimensionalidade, permitindo que os usuários explorem e interajam com objetos como se estivessem imersos fisicamente nesse espaço virtual.

Com o uso das TDICs, o custo para criar esses modelos é praticamente zero, principalmente quando são usados programas de modelagem 3D gratuitos, acessíveis a qualquer estudante. Além disso, o uso de programas oferece uma vantagem significativa ao evitar gastos com materiais físicos comumente usados em laboratórios de matemática. Ao utilizar softwares de modelagem, elimina-se a necessidade de comprar itens como papel, tesoura, cola, canudos, palitos de picolé, cartolina, madeira, pregos e parafusos, que são materiais frequentemente utilizados para construir modelos geométricos de forma manual. Além dos gastos com os materiais usados, a construção muitas vezes pode envolver o uso de ferramentas como estiletes, martelos, tesouras, que também envolvem custos e podem acabar em acidentes para aqueles menos habilidosos em atividades manuais. A abordagem digital permite que os alunos experimentem diferentes formas e estruturas de maneira prática, sem desperdício de materiais ou tempo de preparação, sendo uma alternativa sustentável e segura, ao mesmo tempo em que pode complementar o aprendizado prático com materiais físicos. É importante ressaltar que a modelagem digital não deve, em hipótese alguma, substituir completamente a manipulação de materiais concretos em laboratório. Sabemos que o contato físico com objetos tridimensionais oferece uma compreensão tátil e visual que complementa o aprendizado digital, permitindo que os alunos percebam de maneira mais intuitiva as propriedades dos sólidos geométricos. A combinação de ambas as abordagens, digital e manual, enriquece a experiência de aprendizagem, oferecendo um entendimento mais abrangente da geometria espacial.

Uma estratégia para realizar a modelagem tridimensional é utilizar uma linguagem de programação, como acontece com a biblioteca *VPython*, apresentada por Scherer, Dubois e Sherwood (2000), que pode ser usada por alunos com pouca experiência em programação. Nela, toda a modelagem de cenas e objetos 3D é feita por meio do código-fonte, a partir do qual o usuário cria formas geométricas, como esferas, caixas, cilindros e cones, setas e outros objetos. Cada um deles é definido por suas propriedades geométricas (posição, escala, orientação), que podem ser modificadas dinamicamente, permitindo criar animações

e simulações. Também é possível trabalhar com a iluminação e opacidade dos objetos, além de texturas, que são definidas por imagens que revestem as superfícies, enriquecendo a visualização e proporcionando um realismo maior. Essa abordagem pode ser explorada de forma educativa, estimulando a criatividade e aprimorando as habilidades dos estudantes na resolução de problemas.

Além de reforçar a importância de tecnologias digitais no processo formativo de professores, é relevante considerar como essas ferramentas podem não apenas facilitar o ensino de conceitos complexos, mas também estimular competências essenciais, como a criatividade. Desenvolver essa capacidade é fundamental para preparar os estudantes para um mundo em constante transformação. De acordo com a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), o pensamento criativo é essencial para que os jovens se adaptem às rápidas mudanças contemporâneas (Peduzzi, 2024). Este pensamento envolve a capacidade de gerar, avaliar e aprimorar ideias que resultem em soluções originais e eficazes, além de avanços no conhecimento e expressões impactantes da imaginação.

Ambientes digitais desempenham um papel crucial no estímulo da criatividade dos alunos. Ferramentas tecnológicas proporcionam espaços interativos onde os estudantes podem experimentar, colaborar e inovar de maneiras que não são possíveis em ambientes tradicionais. Segundo a pesquisa da OCDE, a utilização de pedagogias que incentivam a criatividade nas salas de aula está associada a um melhor desempenho no pensamento criativo (Peduzzi, 2024). Essas abordagens pedagógicas incluem atividades como artes, teatro, redação e aulas de programação, que promovem a expressão de ideias originais e a resolução de problemas.

Além disso, a pesquisa destaca que a participação regular em atividades criativas está correlacionada com um aumento significativo na capacidade dos alunos de pensar de forma original e diversificada. Nos países com melhor desempenho em pensamento criativo, como Singapura, Letônia e Coreia, mais de 88% dos estudantes demonstraram proficiência básica nessa habilidade, em comparação com a média da OCDE de 78% (Peduzzi, 2024). Esses resultados indicam que a integração de tecnologias digitais e metodologias que podem fomentar a criatividade no currículo escolar.

A pesquisa da OCDE também revela uma interessante correlação entre o pensamento criativo e outras áreas do conhecimento, como a matemática. Aproximadamente metade dos alunos com melhor desempenho em pensamento criativo também alcançou alto desempenho em matemática, indicando que a habilidade de solucionar problemas criativos pode estar associada a competências analíticas e de raciocínio lógico (Peduzzi, 2024). Esse dado sugere que promover a criatividade em sala de aula pode não apenas beneficiar o desenvolvimento de ideias originais, mas também reforçar o aprendizado em disciplinas fundamentais como a matemática.

Nesse contexto, as TDICs emergem como aliadas para promover não apenas a

criatividade, mas também o pensamento lógico e a análise crítica, habilidades fundamentais em um ambiente educacional voltado para o desenvolvimento integral dos estudantes. Essa interação entre criatividade e raciocínio lógico pode servir como ponte para outra dimensão essencial da educação matemática: a resolução de problemas. É nesse terreno que a programação de computadores se destaca como uma prática educativa capaz de transformar o processo de aprendizado em uma experiência estruturada e orientada à articulação de conhecimentos.

2.3 Resolução de problemas e programação de computadores

Krulik e Rudnik (1993) salientam a crescente inclusão de cursos de alfabetização em informática e programação de computadores nas escolas. Eles destacam que a programação de um computador exige o uso de várias habilidades empregadas na resolução de problemas. Ao escrever um programa, os estudantes são desafiados a analisar a tarefa em questão, recorrer ao conhecimento e às experiências prévias e elaborar um plano organizado de passos, operações e comandos que resultem nos resultados desejados. Os autores definem um problema como sendo uma situação que demanda pensamento e síntese de conhecimento prévio para ser resolvido, destacam os fins didáticos do uso de programação para a resolução de problemas e como isso acaba exigindo várias habilidades do estudante:

Quando os estudantes são solicitados a escrever um programa, eles devem analisar a tarefa em questão, basear-se em seu conhecimento e experiência anteriores, e montar um plano organizado de etapas, operações e comandos que produzem os resultados corretos. Esse formato de um programa é muito parecido com o padrão heurístico da resolução de problemas (Krulik; Rudnik, 1993, p. 65, tradução nossa).

Essa estrutura de um programa é comparada ao padrão heurístico da resolução de problemas. Para tal finalidade de integração tecnológica, diversas linguagens podem ser utilizadas, como LOGO, BASIC, etc. Além disso, Krulik e Rudnik (1993) observam que atividades como as apresentadas nos problemas por eles propostos proporcionam aos estudantes a oportunidade de desenvolver habilidades necessárias para analisar e resolver problemas. Essa abordagem pode permitir aos alunos revisar e aprimorar seu conhecimento, promovendo uma compreensão mais profunda dos conceitos abordados. Em consonância à definição de problema proposta por Krulik e Rudnik (1993), nas normas impostas pelo *National Council of Teachers of Mathematics* NCTM (1991, p. 11) fica evidente que:

Um problema genuíno é uma situação em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda de ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel. (NCTM, 1991, p. 11)

Ao escrever códigos para criar modelos 3D, os alunos se envolvem ativamente no processo de construção, permitindo-lhes experimentar diferentes abordagens, ajustar parâmetros específicos e testar hipóteses em tempo real. Essa metodologia fomenta o desenvolvimento do pensamento crítico, da lógica e da capacidade de depurar erros. Neste sentido, Valente (1993) ressalta como as linguagens de programação desempenham um papel crucial ao utilizar o computador como uma ferramenta educacional centrada na solução de problemas:

O computador adiciona uma nova dimensão - o fato do aprendiz ter que expressar a resolução do problema segundo uma linguagem de programação. Isto possibilita uma série de vantagens. Primeiro, as linguagens de computação são precisas e não ambíguas. Neste sentido, podem ser vistas como uma linguagem matemática. Portanto, quando o aluno representa a resolução do problema segundo um programa de computador ele tem uma descrição formal, precisa, desta resolução. Segundo, este programa pode ser verificado através da sua execução. Com isto o aluno pode verificar suas ideias e conceitos. Se existe algo errado o aluno pode analisar o programa e identificar a origem do erro. Tanto a representação da solução do problema como a sua depuração são muito difíceis de serem conseguidas através dos meios tradicionais de ensino. (Valente, 1993, p. 13)

O ato de programar um computador para a resolução de problemas está de acordo com o Construcionismo de Papert (1986), uma vez que o aluno age ativamente, “ensinando” ao computador a realizar aquela tarefa, através de uma linguagem de programação. O Construcionismo é uma modalidade onde o aluno utiliza o computador como uma ferramenta através da qual ele próprio constrói o seu próprio conhecimento (Papert, 1986). Essa abordagem tem relação direta com o Construtivismo de Piaget, uma metodologia educacional onde o aluno deve aprender fazendo, interagindo com o meio no qual está inserido.

Na BNCC (Base Nacional Comum Curricular) há diversas recomendações sobre uso de tecnologias como ferramentas didáticas, o que pode ser encarado como um reconhecimento de que educar matematicamente com recursos e metodologias tradicionais está muito aquém das demandas das gerações atuais. Entre as competências gerais para a educação básica descritas no documento destacamos:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (Brasil, 2018, p. 9).

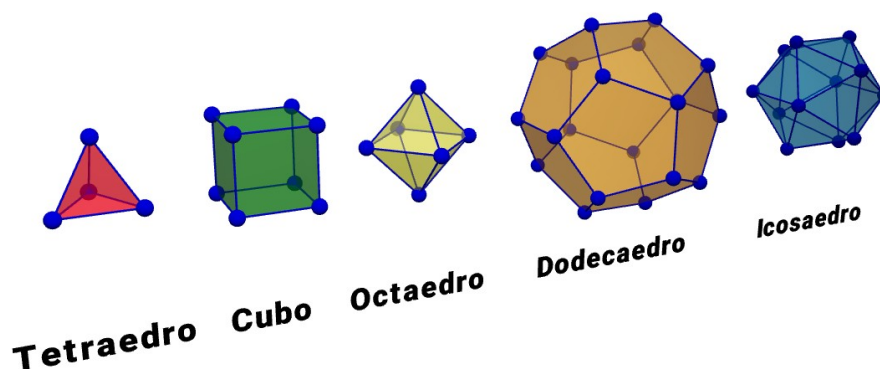
A integração de tecnologias digitais no ensino de matemática, como sugerido pela BNCC, vai ao encontro da proposta de uso de ferramentas inovadoras que fomentam o

protagonismo e a autoria dos estudantes. A ferramenta de modelagem aqui apresentada não apenas permite a renderização de uma ampla variedade de sólidos geométricos, como esferas, paralelepípedos, cilindros e cones, mas também oferece os recursos necessários para a criação de pirâmides e outras formas tridimensionais. Dentre os objetos disponíveis, os clássicos sólidos de Platão se destacam tanto pela sua simetria e propriedades geométricas quanto pelas diversas associações filosóficas relacionadas à sua origem e representatividade. Esses sólidos, que capturam a essência da beleza matemática, são também conhecidos como os poliedros regulares.

2.4 Os poliedros regulares

Um poliedro regular é um sólido geométrico que possui todas as faces formadas por polígonos regulares e congruentes além de possuir uma superfície convexa. Exemplos clássicos desses poliedros são os cinco sólidos platônicos: tetraedro regular, cubo, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular, mostrados na Figura 1.

Figura 1 – Os cinco sólidos de Platão



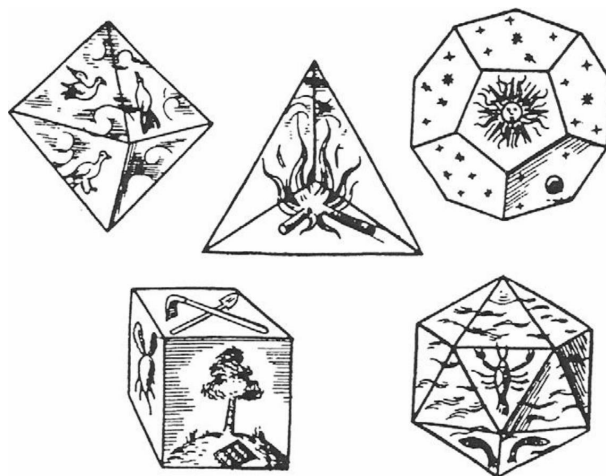
Fonte: autoria própria.

Os sólidos platônicos, também conhecidos como sólidos de Platão recebem esse nome devido aos estudos do filósofo grego Platão (428-347 a.C.), que relacionou essas figuras com os elementos fundamentais do universo: o tetraedro ao fogo, o cubo à terra, o octaedro ao ar e o icosaedro à água, reservando o dodecaedro ao éter, ou à estrutura do cosmos em si (Lopes, 2013). Apesar desta nomenclatura, os sólidos platônicos eram conhecidos desde a antiguidade. De acordo com Marek-Crnjac (2011), modelos parecidos com essas figuras foram encontrados entre as esferas de pedra esculpidas pelos povos neolíticos da Escócia, aproximadamente mil anos antes de Platão.

Os gregos antigos estudaram extensivamente esses sólidos. Algumas fontes creditam a descoberta dos sólidos a Pitágoras, embora ele talvez conhecesse apenas o tetraedro, o cubo e o dodecaedro. Já a descoberta do octaedro e do icosaedro é atribuída a Teeteto, contemporâneo de Platão, que forneceu uma descrição matemática de todos os cinco e

demonstrou que não existem outros poliedros convexos regulares (Marek-Crnjac, 2011). Posteriormente, Aristóteles adicionou um quinto elemento, o “éter”, sugerindo que o céu seria composto por esse elemento, embora ele não tenha se interessado em associá-lo ao dodecaedro.

Figura 2 – Significado filosófico de cada um dos cinco sólidos de Platão.



Fonte: Marek-Crnjac (2011).

A obra de Euclides, *Elementos*, forneceu uma descrição matemática abrangente dos sólidos platônicos (Marek-Crnjac, 2011). Mais tarde, no século XVI, o astrônomo alemão Johannes Kepler tentou estabelecer uma relação entre os cinco planetas conhecidos na época e os cinco sólidos platônicos. Em 1611, ele publicou o trabalho intitulado “*A new year’s gift – on six cornered snow flakes*”, onde começou discutindo a estrutura hexagonal de flocos de neve e colmeias. A partir desse ponto, Kepler avançou para o estudo da geometria do empacotamento esférico, analisando aspectos como o número de vizinhos em contato e a forma das células locais em diferentes arranjos regulares. Em sua investigação, ele descobriu que um arranjo específico permitia que doze esferas se tocassem ao redor de uma esfera central, um fenômeno conhecido atualmente como empacotamento em rede cúbica de faces centradas. Essa descoberta não apenas enriqueceu o entendimento da geometria dos sólidos, mas também lançou as bases para futuras conjecturas sobre o empacotamento de esferas em três dimensões (Marek-Crnjac, 2011).

A associação entre os sólidos platônicos e os elementos naturais na filosofia de Platão, bem como suas propriedades geométricas, exemplifica a interseção entre matemática e filosofia no pensamento grego antigo. Os sólidos platônicos também podem ser descritos conforme as seguintes características geométricas:

1. $n = 3$ e $n_f = 4$: Tetraedro regular com quatro faces congruentes, cada uma delas formando um triângulo equilátero.

2. $n = 4$ e $n_f = 6$: Hexaedro regular, ou cubo, com seis faces congruentes, cada uma delas formando um quadrado.
3. $n = 3$ e $n_f = 8$: Octaedro regular com oito faces congruentes, cada uma delas formando um triângulo equilátero.
4. $n = 5$ e $n_f = 12$: Dodecaedro regular com doze faces congruentes, cada uma delas formando um pentágono regular.
5. $n = 3$ e $n_f = 20$: Icosaedro regular com vinte faces congruentes, cada uma delas formando um triângulo equilátero.

A análise dos sólidos platônicos revela relações geométricas fundamentais que caracterizam suas estruturas. Do tetraedro, com suas quatro faces triangulares, ao icosaedro, com suas vinte faces, cada poliedro regular apresenta propriedades distintas que refletem os princípios básicos da geometria. Este estudo, portanto, necessita da análise das relações geométricas em poliedros regulares.

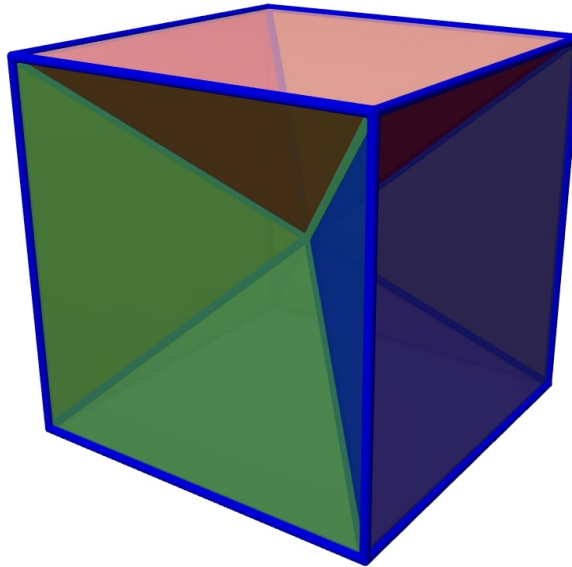
2.4.1 Relações geométricas em poliedros regulares

Esta seção descreve um conteúdo que se mostrou essencial para o desenvolvimento da ferramenta utilizando o *Three.js*, devido à forma como a biblioteca define os objetos. No *Three.js*, a propriedade “*radius*” é utilizada para determinar o tamanho de um poliedro, correspondendo ao raio da esfera que circunscreve o objeto. Contudo, para possibilitar que o usuário especifique o comprimento do lado do poliedro em vez do raio dessa esfera, tornou-se necessário estabelecer uma correspondência matemática precisa entre esses dois parâmetros. As tentativas iniciais, baseadas em conceitos elementares de geometria espacial, demonstraram que essa relação não poderia ser facilmente determinada. Assim, foi imprescindível recorrer a abordagens mais avançadas e rigorosas, encontradas em trabalhos especializados, para desenvolver uma solução adequada, como será discutido a seguir.

Conforme detalhado por Rajpoot (2014), em seu trabalho “*HCR’s or H. Rajpoot’s Formula for Regular Polyhedron*”, um n -poliedro regular é um sólido geométrico cujas faces são polígonos regulares congruentes. Cada face, sendo um polígono regular de n lados, corresponde à base de uma pirâmide reta cujo vértice coincide com o centro do poliedro. Dessa forma, o poliedro pode ser dividido em um número de pirâmides retas congruentes igual ao número de faces.

A pirâmide reta elementar é aquela cuja base é um polígono regular de n lados, idêntico à face do poliedro regular, e cujo vértice coincide com o centro do poliedro (Rajpoot, 2014). As pirâmides retas elementares de um poliedro regular são sempre congruentes. Ao unir todas essas pirâmides, mantendo seus vértices coincidentes, o poliedro original é reconstruído, como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Cubo composto por pirâmides retas.



Fonte: autoria própria.

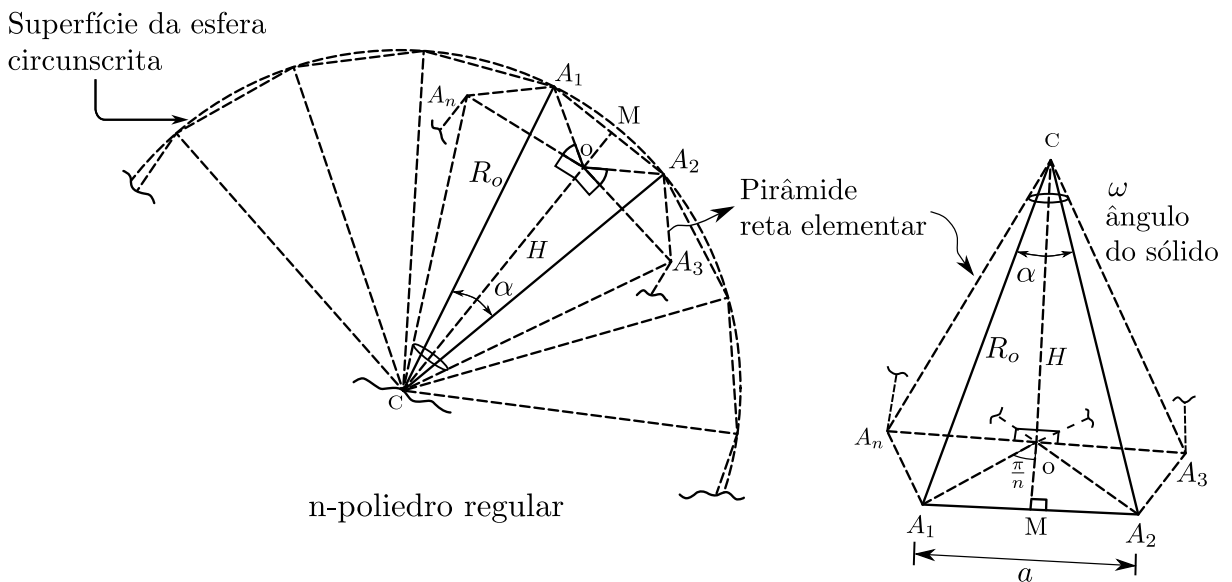
Um dos objetivos do trabalho de Rajpoot (2014) é calcular parâmetros importantes como raio interno (R_i), raio externo (R_o), área da superfície (A_s) e volume (V) de um poliedro regular, correlacionando os parâmetros das pirâmides retas elementares com o poliedro.

Retomando para o cálculo dos parâmetros dos poliedros regulares, Rajpoot (2014) propõe analisar a pirâmide reta elementar associada. Considere a pirâmide mostrada na Figura 4. Ao determinar a altura (H), o comprimento da aresta lateral (CA_1), a área da base (A_b), o volume (V_1) e o ângulo (α) entre as arestas laterais dessa pirâmide, torna-se possível determinar os seguintes parâmetros do poliedro regular: raio interno (R_i), raio externo (R_o), raio médio (R_m), área da superfície (A_s) e volume (V). Vale ressaltar que o raio interno corresponde ao raio da esfera inscrita no poliedro, enquanto o raio externo corresponde ao raio da esfera circunscrita ao sólido. A Figura 4 ilustra uma pirâmide reta elementar extraída de um n-poliedro regular, sendo:

- n_f : Número de faces do poliedro regular = Número de pirâmides retas elementares.
($\forall n_f \in \mathbb{N}$ e $n_f \geq 4$)
- n : Número de lados em cada face (i.e., número de lados em cada polígono regular) = Número de arestas em cada face (n_e). ($\forall n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$)
- α : Ângulo entre quaisquer duas arestas laterais consecutivas na pirâmide reta elementar = Ângulo da aresta (ângulo paramétrico) da pirâmide reta elementar.
($\forall \alpha = f(n, n_f)$ e $n < n_f$)
- a : Comprimento da aresta, i.e., comprimento do lado de cada face.

- H : Altura normal da pirâmide reta elementar.
- ω : Ângulo sólido subentendido por cada uma das faces no centro do poliedro = Ângulo sólido subentendido pela pirâmide reta elementar em seu ápice (i.e., centro do poliedro).
- R_i : Raio interno (raio de uma superfície esférica imaginária tocando todas as faces do poliedro) = H (altura vertical da pirâmide reta elementar).
- R_o : Raio externo, i.e., raio de uma superfície esférica imaginária passando por todos os vértices = Comprimento da aresta lateral da pirâmide reta elementar (CA_1).
- R_m : Raio médio (raio de uma superfície esférica imaginária tendo volume igual ao do poliedro).
- A_s : Área da superfície do poliedro = Número de faces \times área da face (base da pirâmide elementar) = $n_f \times A_b$.
- V : Volume do poliedro = Número de faces \times volume da pirâmide reta elementar = $n_f \times V_1$.

Figura 4 – Uma pirâmide reta elementar com base em um n-polígono regular é retirada de um poliedro regular.



Fonte: Adaptado de Rajpoot (2014).

De acordo com Rajpoot (2014), o ângulo α é função apenas de dois inteiros positivos mutuamente dependentes n e n_f . Portanto, o ângulo α é o parâmetro decisivo para a construção de um poliedro regular. Considerando uma pirâmide reta elementar com base como um polígono regular $A_1A_2A_3 \dots A_n$ tendo n lados, cada um com comprimento “a”,

o ângulo entre duas arestas laterais consecutivas é α e a altura normal “H” é retirada de um poliedro regular dado (como mostrado na Figura 4). Conectando todos os vértices $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ da base ao centro “O”; assim, obtemos “n” triângulos isósceles congruentes $\Delta A_1OA_2, \Delta A_2OA_3, \dots, \Delta A_nOA_1$, nos quais o ângulo \hat{O} de cada triângulo corresponde a $2\pi/n$. No triângulo retângulo ΔOMA_1 , temos que o ângulo $A_1\hat{O}M$ será $\frac{2\pi/n}{2} = \pi/n$. Daí,

$$\operatorname{tg}\angle A_1OM = \frac{MA_1}{OM}$$

ou ainda

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{OM} \implies OM = \frac{a}{2} \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.$$

No triângulo retângulo ΔCOM :

$$CM^2 = OC^2 + OM^2 \quad \text{ou} \quad CM = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2} \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}\right)^2}.$$

Daí,

$$CM = \frac{1}{2} \sqrt{4H^2 + a^2 \operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{n}}. \quad (2.1)$$

No triângulo retângulo ΔCMA_2 :

$$\operatorname{tg}\angle A_2CM = \frac{MA_2}{CM}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{CM} \quad \text{ou} \quad CM = \frac{a}{2} \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}. \quad (2.2)$$

Agora, igualando os valores de CM das equações (2.1) e (2.2), temos

$$\frac{a}{2} \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{4H^2 + a^2 \operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{n}}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} a^2 \operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} &= 4H^2 + a^2 \operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{n} \\ \implies 4H^2 &= a^2 \left(\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Daí,

$$H = \frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{n}}. \quad (2.3)$$

2.4.1.1 Raio interno de um poliedro regular

O raio interno (inscrito) (R_i) de um poliedro regular, conforme descrito por Rajpoot (2014), é o raio de uma superfície esférica imaginária que tangencia todas as faces do poliedro. Além disso, esse raio é sempre igual à altura normal (H) da pirâmide reta elementar. Assim, temos:

$$R_i = \frac{a}{2} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}}. \quad (2.4)$$

2.4.1.2 Raio externo de um poliedro regular

O raio externo (circunscrito) (R_o) de um poliedro regular é definido como o raio de uma superfície esférica imaginária que passa por todos os vértices do poliedro. Segundo Rajpoot (2014), esse raio é igual ao comprimento da aresta lateral da pirâmide reta elementar e é calculado da seguinte forma:

Considerando o triângulo retângulo ΔCMA_1 , temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \angle A_1 C M &= \frac{MA_1}{CA_1} \\ \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} &= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{CA_1} \\ CA_1 &= \frac{a}{2} \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} \quad (\text{já que, } \angle A_1 C A_2 = \alpha). \end{aligned}$$

Dessa forma, como CA_1 corresponde ao segmento que interliga o centro do sólido a um dos vértices, temos que tal segmento corresponderá ao raio da esfera circunscrita ao poliedro. Portanto,

$$R_o = \frac{a}{2} \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}. \quad (2.5)$$

2.4.1.3 Área da superfície de um poliedro regular

Considerando que a base da pirâmide reta é um n-polígono regular, a área da superfície de um poliedro regular (A_s) é a soma das áreas de todas as suas faces. Essa área pode ser calculada da seguinte forma:

Primeiramente, analisaremos a área do triângulo isósceles $\Delta A_1 O A_2$ (ver Figura 4).

$$\begin{aligned} \text{Área do triângulo } \Delta A_1 O A_2 &= \frac{1}{2} \times (A_1 A_2)(OM) \\ &= \frac{1}{2} \times a \left(\frac{a}{2} \cotg \frac{\pi}{n} \right) = \frac{1}{4} a^2 \cotg \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

Como a base da pirâmide reta elementar é composta por n triângulos isósceles congruentes a $\triangle A_1OA_2$, a área da base (ou seja, a face do poliedro regular), denotada por A_b , é dada por:

$$\begin{aligned} A_b &= n \times (\text{área de } \triangle A_1OA_2) \\ &= n \times \frac{1}{4}a^2 \cotg \frac{\pi}{n} \\ &= \frac{1}{4}na^2 \cotg \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

Como um n-poliedro regular possui n_f faces congruentes, cada uma sendo um n-polígono regular, a área da superfície A_s do n-poliedro regular é:

$$\begin{aligned} A_s &= n_f \times (\text{área de uma face, } A_b) \\ &= n_f \times \left(\frac{1}{4}na^2 \cotg \frac{\pi}{n} \right) \\ &= \frac{1}{4}nn_f a^2 \cotg \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

Daí,

$$A_s = \frac{1}{4}nn_f a^2 \cotg \frac{\pi}{n}. \quad (2.6)$$

2.4.1.4 Volume de um poliedro regular

O volume (V_1) da pirâmide reta elementar, cuja base é um n-polígono regular, é calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}(\text{área da base})(\text{altura normal}) = \frac{1}{3}(A_b)(H) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}na^2 \cotg \frac{\pi}{n} \right) \left(\frac{a}{2} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}} \right) \quad (\text{substituindo o valor de H da eq. (2.3)}) \\ &= \frac{1}{24}na^3 \cotg \frac{\pi}{n} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}}. \end{aligned}$$

Considerando que o poliedro regular de n lados é composto por n_f pirâmides regulares congruentes, o volume (V) do poliedro regular é a soma de todos esses volumes elementares, dado por:

$$\begin{aligned}
V &= n_f \times (\text{volume de uma pirâmide regular, } V_1) \\
&= n_f \times \left(\frac{1}{24} n a^3 \cotg \frac{\pi}{n} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}} \right) \\
&= \frac{1}{24} n n_f a^3 \cotg \frac{\pi}{n} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

Assim, temos a expressão final para o volume de um poliedro regular:

$$V = \frac{1}{24} n n_f a^3 \cotg \frac{\pi}{n} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}}. \quad (2.7)$$

2.4.1.5 Dedução da fórmula de HCR

É evidente pelas equações (2.4), (2.5) e (2.7) que os raios interno, externo e o volume de um poliedro regular dependem de um ângulo paramétrico particular α , ou seja, o ângulo da aresta da pirâmide reta elementar. Portanto, segundo Rajpoot (2014), para determinar o valor do ângulo da aresta desconhecido α , precisamos extrair uma pirâmide reta elementar de um determinado poliedro regular, o que é praticamente difícil de fazer na prática. Desconstruir o poliedro e medir o ângulo desconhecido α com a precisão desejada é difícil. Portanto, se houver um erro no valor do ângulo desconhecido α , então haverá um erro nos valores do raio interno, raio externo, volume e raio médio de um poliedro regular. Mas essa dificuldade é facilmente superada ao deduzir uma fórmula chamada de Fórmula de HCR para um poliedro regular. Esta fórmula não depende de nenhuma das dimensões geométricas de um poliedro regular, depende apenas do número de faces (n_f) e do número de arestas em uma face (n), por isso também é chamada de *fórmula adimensional de HCR*.

A teoria do polígono de HCR (HCR's Theory of Polygon), conforme Rajpoot (2014), define o ângulo sólido (ω) subentendido por um polígono regular de n lados, cada um com comprimento a , em qualquer ponto a uma distância normal (altura) H do centro do plano como:

$$\omega = 2\pi - 2n \arcsen \left(\frac{2H \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\sqrt{4H^2 + a^2 \cotg^2 \frac{\pi}{n}}} \right). \quad (2.8)$$

Como cada uma das faces congruentes, como um n-polígono regular, do n-poliedro regular está a uma distância normal H do centro, aplicando o valor de H da Equação (2.3) na Equação (2.8), obtemos o valor do ângulo sólido (ω) subentendido por cada face n-poligonal regular no centro do poliedro regular dado.

$$\begin{aligned}
\omega &= 2\pi - 2n \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{2 \left(\frac{a}{2} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\sqrt{4 \left(\frac{a}{2} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}} \right)^2 + a^2 \cotg^2 \frac{\pi}{n}}} \right) \\
&= 2\pi - 2n \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}}}{\sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n} + \cotg^2 \frac{\pi}{n}}} \right) \\
&= 2\pi - 2n \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}}}{\cotg \frac{\alpha}{2}} \right) \\
&= 2\pi - 2n \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}}}}{\cotg \frac{\alpha}{2}} \right) \\
&= 2\pi - 2n \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{\cotg \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\omega = 2\pi - 2n \operatorname{arc\,sen} \left(\cos \frac{\pi}{n} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right). \quad (2.9)$$

Segundo Rajpoot (2014), como existem um total de n_f faces como n-polígonos regulares congruentes em um determinado poliedro regular, cada uma das faces subtende um ângulo sólido igual (ω) no centro do poliedro.

Conforme Arecchi, Messadi e Koshel (2007), o ângulo sólido total é dado por:

$$\hat{\text{ângulo sólido total}} = \frac{\text{área da superfície de um esfera}}{\text{raio da esfera } (r)^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi.$$

Portanto, segundo Rajpoot (2014), o ângulo do sólido (ω) subentendido por cada uma das n_f faces no centro do poliedro regular é dado por:

$$\frac{\hat{\text{ângulo sólido total}}}{n_f} = \frac{4\pi}{n_f}.$$

Assim,

$$\omega = \frac{4\pi}{n_f}. \quad (2.10)$$

Agora, igualando os dois resultados da Equação (2.9) e da Equação (2.10), temos:

$$\begin{aligned}
 2\pi - 2n \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\cos \frac{\pi}{n} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right) &= \frac{4\pi}{n_f} \\
 \implies 2n \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\cos \frac{\pi}{n} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right) &= 2\pi \left(1 - \frac{2}{n_f} \right) \\
 \implies \cos \frac{\pi}{n} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} &= \operatorname{sen} \left\{ \frac{\pi}{n} \left(1 - \frac{2}{n_f} \right) \right\} \\
 \implies \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} &= \frac{\operatorname{sen} \left\{ \frac{\pi}{n} \left(1 - \frac{2}{n_f} \right) \right\}}{\cos \frac{\pi}{n}} \\
 \implies \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{\operatorname{sen}^2 \left\{ \frac{\pi}{n} \left(1 - \frac{2}{n_f} \right) \right\}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \quad (\text{elevando ambos os lados ao quadrado}) \\
 \implies \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} - \frac{\operatorname{sen}^2 \left\{ \frac{\pi}{n} \left(1 - \frac{2}{n_f} \right) \right\}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} - \frac{\operatorname{sen}^2 \left\{ \frac{\pi}{n} \left(1 - \frac{2}{n_f} \right) \right\}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \\
 \implies \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n} - \operatorname{sen}^2 \left\{ \frac{\pi}{n} \left(1 - \frac{2}{n_f} \right) \right\}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \\
 \implies \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n} - \operatorname{sen}^2 \left\{ \frac{\pi}{n} \left(1 - \frac{2}{n_f} \right) \right\}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n} - \operatorname{sen}^2 \left\{ \frac{\pi}{n} \left(1 - \frac{2}{n_f} \right) \right\}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}} \\
 \implies \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \sec \frac{\pi}{n} \sqrt{\operatorname{sen} \left\{ \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \left(1 - \frac{2}{n_f} \right) \right\} \operatorname{sen} \left\{ \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n} \left(1 - \frac{2}{n_f} \right) \right\}}
 \end{aligned}$$

como $\operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B = \operatorname{sen}(A - B) \operatorname{sen}(A + B)$, temos que

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sec \frac{\pi}{n} \sqrt{\operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi}{nn_f} \right\} \operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi}{n} \left(1 - \frac{1}{n_f} \right) \right\}} = \sec \frac{\pi}{n} \sqrt{\operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi}{nn_f} \right\} \operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi(n_f - 1)}{nn_f} \right\}}.$$

Daí,

$$\implies \alpha = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sec \frac{\pi}{n} \sqrt{\operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi}{nn_f} \right\} \operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi(n_f - 1)}{nn_f} \right\}} \right), \quad \forall \alpha \leq \frac{2\pi}{n}. \quad (2.11)$$

Onde $n, n_f \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $n_f \geq 4$ e $n < n_f$.

A Equação (2.11) permite calcular o ângulo α em função do número de faces n_f e do número de arestas de cada face n , sendo aplicável a todos os poliedros platônicos. Essa

relação mostra-se essencial para estabelecer relações geométricas importantes, como o raio interno e o raio externo de esferas inscritas e circunscritas a cada um desses poliedros, tópicos que serão discutidos na próxima seção. Assim, a expressão obtida para α forneceu uma base matemática sólida para a modelagem precisa dos poliedros platônicos, facilitando a construção desses objetos com a biblioteca Three.js.

3 METODOLOGIA

Este trabalho tem uma metodologia qualitativa, centrada na análise e interpretação das atividades realizadas e dos dados coletados. Segundo Gerhardt e Silveira (2009), a pesquisa qualitativa visa explorar e compreender a complexidade de um fenômeno em contextos específicos, sem priorizar a representatividade numérica, mas sim o entendimento mais detalhado de como os sujeitos interagem com o tema em questão.

A pesquisa se caracteriza também como um estudo de campo, uma vez que a ferramenta de modelagem 3D desenvolvida foi aplicada em três cenários práticos com alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campus VI, Monteiro. Conforme indicado por Fiorentini e Lorenzato (2009), na pesquisa de campo, a coleta de dados acontece diretamente no contexto em que o fenômeno ocorre, utilizando métodos variados como observação participante, pesquisa-ação, entrevistas, questionários, entre outros métodos de obtenção de dados.

Os questionários utilizados no estudo incluíram questões fechadas (em escala Likert) e abertas, como indicado por Fiorentini e Lorenzato (2009). Segundo os autores, questões fechadas fornecem alternativas específicas de resposta, facilitando a análise de dados quantitativos e a identificação de padrões. Já as questões abertas permitem que os alunos expressassem suas opiniões e dificuldades de forma mais livre, enriquecendo a coleta com informações adicionais e inesperadas. A combinação desses tipos de questões proporcionou uma visão abrangente e detalhada dos impactos pedagógicos e práticos do uso da ferramenta nas aulas de geometria.

A primeira aplicação do *Modela 3D* ocorreu em um minicurso sobre modelagem 3D do sistema solar, onde os alunos puderam explorar conceitos básicos de geometria espacial enquanto construíam representações tridimensionais dos planetas e suas órbitas. Na segunda aplicação, a ferramenta foi utilizada em uma aula de Desenho Geométrico, permitindo aos alunos visualizar e interagir com sólidos geométricos, reforçando a compreensão de temas complexos da geometria espacial. Por fim, na terceira aplicação, um plano de aula detalhado foi desenvolvido e implementado em outra aula de Desenho Geométrico, com o objetivo de aprofundar os conceitos de geometria espacial e modelagem 3D, utilizando a ferramenta para construir sólidos, explorar relações geométricas no espaço e explorar variadas funcionalidades disponíveis na ferramenta.

Para desenvolver a ferramenta de modelagem de sólidos geométricos em 3D, foi adotada uma abordagem interdisciplinar, integrando conceitos matemáticos, como geometria espacial, álgebra vetorial, ângulos entre faces e coordenadas polares com fundamentos computacionais voltados para a renderização gráfica em três dimensões. Utilizando a

biblioteca Three.js em JavaScript, que permite a criação de cenas, objetos e animações em 3D, foi possível construir uma interface que permite a criação, manipulação e visualização dos sólidos geométricos. Alinhado com a metodologia STEM¹, o trabalho integrou principalmente as áreas de Tecnologia e Matemática, proporcionando uma experiência interdisciplinar e prática.

3.1 A tecnologia

O aplicativo de modelagem 3D cujo desenvolvimento é aqui descrito ilustra como o *React* e o *Three.js* podem ser aplicados na criação de aplicações interativas diversas, inclusive para com fins educacionais. O *React* é uma biblioteca criada pelo *Facebook* (atual *Meta*) e amplamente utilizada para construir interfaces de usuário (UI) em aplicações web. Para iniciar o desenvolvimento com uma base mais bem estruturada, optamos por usar o *framework*² *Next.js*, que ofereceu uma fundação sólida para o desenvolvimento da aplicação. O *Three.js*, por sua vez, é uma biblioteca que possibilita a criação e renderização de objetos tridimensionais diretamente no navegador, utilizando *WebGL*, uma API³ (Interface de Programação de Aplicação) que viabiliza a renderização de gráficos em 2D e 3D. Esta biblioteca oferece um amplo leque de classes e métodos para conceber geometrias, materiais, fontes de luz, câmeras e animações, que podem ser utilizados para compor cenas tridimensionais complexas. Mais detalhes sobre a biblioteca podem ser encontrados em sua documentação oficial⁴.

No processo de desenvolvimento do aplicativo, também utilizamos a biblioteca “*@react-three/drei*” para simplificar a criação de elementos comuns do *Three.js*, como o ambiente, objetos e controles de câmera. Adicionalmente, empregamos outras bibliotecas auxiliares, a exemplo da biblioteca “*three-bvh-csg*”, que oferece uma implementação eficiente de CSG (*Constructive Solid Geometry*, ou Geometria Sólida Construtiva), baseada em BVH (*Bounding Volume Hierarchy*, ou Hierarquia de Volumes Limitantes), uma estrutura de dados que acelera as operações de intersecção entre objetos.

Optamos pela biblioteca *React* devido à sua integração eficiente com o *Three.js*, o que nos permitiu gerenciar de maneira simplificada o estado da aplicação, a interface do usuário e a lógica dos comandos. Em relação ao funcionamento do *software*, cada função inserida pelo usuário no editor de código da aplicação é mapeada como um componente

¹ STEM é um acrônimo em inglês para *Science, Technology, Engineering, and Mathematics* (Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática), representando um sistema de aprendizado que busca integrar essas disciplinas.

² Um framework de software fornece uma estrutura que serve como base para a construção de software, permitindo evitar a criação de lógica adicional desnecessária desde o início Olawanle (2022).

³ Uma API, ou interface de programação de aplicativos, é um conjunto de regras ou protocolos que permitem que aplicativos de software se comuniquem entre si para trocar dados, recursos e funcionalidades. Goodwin (2024).

⁴ Disponível em: <https://threejs.org/docs/index.html#manual/pt-br/introduction/Creating-a-scene>.

React, que recebe os parâmetros definidos pelo usuário e retorna o objeto 3D correspondente. Por exemplo, a função “Caixa” permite que o usuário especifique atributos como largura, altura, profundidade e posição, e retorna um componente `<Box>` que é renderizado na janela de visualização da ferramenta.

Em busca de promover o compartilhamento de experiências entre os usuários da nossa ferramenta, criamos um blog com o objetivo de oferecer um espaço de interação, troca de ideias e aprendizado. Durante o desenvolvimento, utilizamos o *framework* Next.js, que facilitou significativamente a criação das rotas de *API*, permitindo uma integração direta com o banco de dados onde armazenamos as postagens, informações dos usuários, curtidas e comentários.

Para otimizar o desempenho e melhorar a experiência ao lidar com dados do banco de dados, integramos a biblioteca TanStack Query. Essa biblioteca, anteriormente conhecida como React Query, é amplamente reconhecida como uma ferramenta para gerenciamento de dados em aplicações web. A TanStack Query torna o processo de buscar, armazenar em cache, sincronizar e atualizar estados do servidor muito mais eficiente e simplificado. Isso significa que os dados do blog, como postagens e comentários, são armazenados em cache entre as requisições, reduzindo a carga no servidor e melhorando a velocidade de carregamento para os usuários.

Para implementar algumas funcionalidades dentro da aplicação, tivemos que superar diversos desafios técnicos que surgiram ao longo do processo. Uma das dificuldades primordiais encontradas no desenvolvimento da ferramenta foi a carência de exemplos de implementações detalhadas do *Three.js*, que é uma biblioteca amplamente utilizada para criação de conteúdo 3D na web. Dessa forma, devido à natureza específica do projeto, que demandava a criação, manipulação e renderização de objetos em três dimensões em tempo real a partir de comandos digitados pelo usuário, a ausência de referências suficientes tornou-se um entrave significativo. Em muitos casos, problemas técnicos surgiram durante o processo de desenvolvimento, exigindo soluções complexas e demandando um tempo considerável para resolução. Por vezes, semanas foram dedicadas à resolução de um único obstáculo, impactando diretamente o cronograma do projeto.

Uma das razões centrais para essa dificuldade foi a falta de exemplos de implementações que se alinhassem diretamente com as necessidades específicas do projeto. Embora houvesse recursos disponíveis que demonstravam conceitos básicos do *Three.js*, como criação de formas geométricas simples e manipulação de texturas, a aplicação desses conceitos de forma apropriada ao contexto do software desenvolvido revelou-se desafiadora.

Diversas vezes, a estrutura e organização da aplicação se mostraram inadequadas para seu crescimento. Ao passo que novas funcionalidades eram adicionadas, ficava cada vez mais difícil realizar a manutenção do software. Então, no início do presente ano, a aplicação foi completamente reescrita. A reformulação permitiu corrigir diversos problemas

de desempenho, como a re-renderização desnecessária de texturas a cada interação do usuário. Além disso, separamos a aplicação em diferentes contextos, aplicando o princípio da decomposição, um dos pilares do pensamento computacional, para atribuir responsabilidades claras a cada parte do software. Também removemos trechos de código repetitivos, aproveitando melhor os conceitos de abstração e reconhecimento de padrões, o que resultou em um código mais limpo e eficiente. Com essas melhorias, conseguimos reduzir o número total de linhas de código de aproximadamente 245.645 para 107.269, uma redução de cerca de 56%, mesmo com a inclusão de novas funcionalidades na versão mais atual.

3.2 A matemática

No decorrer do desenvolvimento da ferramenta, além da programação, nos deparamos com a necessidade de aplicar diversos conceitos matemáticos para a criação e manipulação de sólidos geométricos. Com isso, aprofundamos nosso entendimento sobre a composição e construção desses sólidos, assim como sobre as propriedades intrínsecas de cada um deles. Utilizamos conceitos fundamentais de álgebra vetorial, como a multiplicação de vetores por escalares, operações entre vetores e sua normalização.

Para implementar as animações de planificação de sólidos, como no caso do objeto `Cubo`, foi necessário trabalhar intensivamente com ângulos entre faces no espaço tridimensional, bem como com operações de rotação e translação de sistemas de coordenadas. Essas operações revelaram-se desafiadoras, especialmente ao ajustarmos o centro de rotação das faces para obter a correta animação de planificação, aumentando a complexidade em sólidos mais elaborados, como pirâmides com base poligonal de n lados, que podem ser construídas na aplicação.

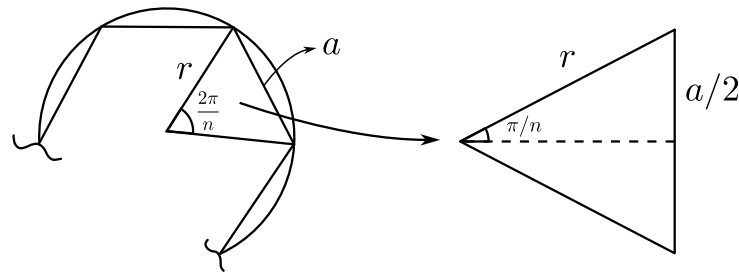
Neste sentido, também foi necessário construir geometrias específicas não presentes por padrão na biblioteca `Three.js`, como o objeto `Piramide` mencionado anteriormente, cuja construção será discutida na próxima seção.

3.2.1 Construção da pirâmide

Para modelar uma pirâmide reta, foi necessário construir sua base poligonal e distribuir manualmente seus vértices ao longo de uma circunferência. Os vértices da base foram posicionados em uma circunferência de raio r , ajustados conforme o comprimento do lado da base. Para isso, utilizamos coordenadas polares no plano xz , uma vez que, por padrão, os objetos na aplicação são modelados nesse plano. A posição de cada vértice foi calculada pelas coordenadas $x = r \cdot \cos(\theta)$ e $z = r \cdot \sin(\theta)$, onde θ varia de 0 a 2π . A definição do raio, essencial para assegurar que a circunferência englobe a base poligonal, envolveu relações trigonométricas básicas, como mostrado a seguir. Seja n o número de lados da base, a o comprimento do lado e r o raio da circunferência circunscrita, conforme

ilustrado na Figura 5.

Figura 5 – Base da pirâmide



Fonte: autoria própria.

Utilizando a trigonometria, temos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{r} \implies r = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Assim, o raio r que contém os vértices da base em função de n lados é dado por $r = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}$. A Figura 6 ilustra a implementação dessa lógica no código-fonte.

Figura 6 – Utilização de coordenadas polares para posicionar vértices da base da pirâmide em uma circunferência

```
const baseVertices = [];

for (let i = 0; i < sides; i++) {
  const angle = ((2 * Math.PI) / sides) * i;
  baseVertices.push(radius * Math.cos(angle), 0, radius * Math.sin(angle));
}
```

Fonte: autoria própria.

No código exibido na Figura 6, o ângulo que define a posição de cada vértice da base é calculado dividindo uma volta completa no círculo, 2π , pelo número de lados da pirâmide. Em seguida, o resultado é multiplicado por i , onde i é o índice do iterador, variando entre 0 e $n - 1$, com n representando o número total de lados. Esse procedimento garante que, a cada iteração, o ângulo calculado determina a abertura necessária para posicionar um novo vértice da base da pirâmide.

A partir desses valores angulares, são adicionadas ao array de vértices as coordenadas x , y e z correspondentes a cada novo vértice. Posteriormente, esses vértices são processados pela classe `THREE.Float32BufferAttribute`, disponibilizada pela biblioteca Three.js, que gera corretamente o polígono da base da pirâmide.

Entretanto, o maior desafio foi implementar a construção dos sólidos platônicos com base na definição do comprimento de suas arestas, um requisito necessário devido à forma como a biblioteca Three.js constrói esses sólidos. Para essa etapa, realizamos uma consulta à literatura sobre o tema, bem como discussões informais com docentes do campus VI. Durante nossa pesquisa, destacou-se o trabalho de Rajpoot (2014), conforme apresentado na Seção 2.4.1, onde demonstramos a dedução das relações matemáticas necessárias para a modelagem dos sólidos de Platão em nosso projeto. A seguir, apresentamos a aplicação da fórmula de HCR para cada um desses sólidos.

3.2.2 Aplicação da fórmula de HCR para os sólidos platônicos

Como já foi mencionado, cinco poliedros regulares são chamados sólidos platônicos, nos quais todas as faces são n -polígonos regulares congruentes. Vamos calcular os parâmetros importantes de todos os cinco poliedros regulares (sólidos platônicos), de acordo com Rajpoot (2014), aplicando a fórmula de HCR.

3.2.2.1 Tetraedro regular

Um tetraedro regular, reconhecido como o poliedro regular mais simples e o menor entre os cinco sólidos platônicos, possui quatro faces congruentes que são triângulos equiláteros. Ele pode ser facilmente construído unindo-se quatro pirâmides retas congruentes com a base de tais pirâmides correspondendo a um triângulo equilátero com ângulo de aresta (α) (ou seja, ângulo entre as arestas laterais da pirâmide reta elementar), aquele entre as arestas laterais da pirâmide reta elementar. Agora, seja um tetraedro regular tendo cada aresta de comprimento a , considerando $n = 3$ (número de arestas em uma face) e $n_f = 4$ (número de faces), podemos facilmente encontrar todos os seus parâmetros usando a fórmula de HCR, Equação (2.11), como mostrado a seguir.

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sec \frac{\pi}{3} \sqrt{\operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi}{(3 \times 4)} \right\} \operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi(4-1)}{(3 \times 4)} \right\}} \right) \\
 &= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sec \frac{\pi}{3} \sqrt{\operatorname{sen} \left\{ \frac{\pi}{6} \right\} \operatorname{sen} \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}} \right) \\
 &= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(2 \sqrt{\frac{1}{2} \times 1} \right) \\
 &= 2 \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}) \\
 &= 2 \operatorname{arc\,cotg} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right).
 \end{aligned}$$

Agora, definindo $\alpha = 2 \operatorname{arc\,cotg} \left(1/\sqrt{2} \right)$, $n = 3$, $n_f = 4$ e comprimento da aresta $= a$, todos os parâmetros de um tetraedro regular são estabelecidos.

Raio interno:

No tetraedro regular, a distância entre o centro de uma face e o centro do sólido, denominada raio interno (R_i), é calculada por meio da seguinte relação:

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{a}{2} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{a}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \cotg^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{1}{6}} \\ &= \frac{a}{2\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$R_i = \frac{a}{2\sqrt{6}}. \quad (3.1)$$

Raio externo:

O raio externo (R_o) de um tetraedro regular é a distância do centro do tetraedro até um de seus vértices, sendo calculado da seguinte forma:

$$R_o = \frac{a}{2} \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \left(\cotg \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Portanto,

$$R_o = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad (3.2)$$

Área da superfície:

Em um tetraedro regular, a área da superfície (A_s) corresponde à soma das áreas de suas quatro faces e pode ser obtida por meio da relação:

$$A_s = \frac{1}{4} n n_f a^2 \cotg \frac{\pi}{n} = \frac{1}{4} (3 \times 4) a^2 \cotg \frac{\pi}{3} = 3a^2 \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} a^2.$$

Portanto,

$$A_s = \sqrt{3} a^2. \quad (3.3)$$

Volume:

O volume (V) de um tetraedro regular corresponde ao espaço ocupado pelo tetraedro. Ele pode ser calculado da forma:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{24} n n_f a^3 \cotg \frac{\pi}{n} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{24} (3 \times 4) a^3 \cotg \frac{\pi}{3} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \cotg^2 \frac{\pi}{3}} \\
 \implies V &= \frac{a^3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{a^3}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$V = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}. \quad (3.4)$$

3.2.2.2 Hexaedro regular

Estamos muito familiarizados com a geometria de um cubo e os resultados obtidos relevantes para um cubo podem ser facilmente verificados. Um cubo também é um tipo de poliedro regular chamado hexaedro regular, tendo seis faces congruentes, cada uma como um quadrado. Ele pode ser facilmente construído unindo seis pirâmides retas congruentes com base como um quadrado e ângulo de aresta (α). Seja um hexaedro regular (cubo) tendo cada aresta de comprimento a , considerando $n = 4$ e $n_f = 6$, podemos facilmente encontrar todos os seus parâmetros usando a fórmula de HCR, Equação (2.11), como mostrado a seguir.

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sec \frac{\pi}{4} \sqrt{\operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi}{(4 \times 6)} \right\} \operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi(6-1)}{(4 \times 6)} \right\}} \right) \\
 &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sec \frac{\pi}{4} \sqrt{\operatorname{sen} \left\{ \frac{\pi}{12} \right\} \operatorname{sen} \left\{ \frac{5\pi}{12} \right\}} \right) \\
 &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{2} \operatorname{sen} 15^\circ \operatorname{sen} 75^\circ) = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{2} \operatorname{sen} 75^\circ \operatorname{sen} 15^\circ) \\
 &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\cos(75^\circ - 15^\circ) - \cos(75^\circ + 15^\circ)} \right).
 \end{aligned}$$

Como ($2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$), temos que:

$$\alpha = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{\cos 60^\circ}) = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \right) = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2 \operatorname{arc} \operatorname{cotg} (\sqrt{2}).$$

Raio interno:

O raio interno (R_i) de um cubo, representando a distância entre o centro de uma face quadrada e o centro do cubo, pode ser determinado por:

$$R_i = \frac{a}{2} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{a}{2} \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \cotg^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{2 - (1)^2} = \frac{a}{2} \sqrt{1} = \frac{a}{2} = 0,5a.$$

Portanto,

$$R_i = 0,5a. \quad (3.5)$$

Raio externo:

Calculando a distância do centro do cubo a um de seus vértices, obtemos o raio externo (R_o):

$$R_o = \frac{a}{2} \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \left(\cotg \frac{\alpha}{2} \right)^2} = \frac{a}{2\sqrt{1 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{a}{2\sqrt{1+2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto,

$$R_o = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \quad (3.6)$$

Área da superfície:

A área da superfície (A_s) de um cubo, representando a soma das áreas de suas seis faces quadradas, é simplesmente:

$$A_s = \frac{1}{4} n n_f a^2 \cotg \frac{\pi}{n} = \frac{1}{4} (4 \times 6) a^2 \cotg \frac{\pi}{4} = 6a^2 = 6 \times (\text{comprimento da aresta do cubo})^2.$$

Portanto,

$$A_s = 6a^2. \quad (3.7)$$

Volume:

O volume (V) de um cubo, que mede o espaço ocupado por esse sólido, pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{24} n n_f a^3 \cotg \frac{\pi}{n} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{24} (4 \times 6) a^3 \cotg \frac{\pi}{4} \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \cotg^2 \frac{\pi}{4}} \\ &= a^3 \sqrt{2-1} = a^3 = (\text{comprimento da aresta do cubo})^3. \end{aligned}$$

Portanto,

$$V = a^3. \quad (3.8)$$

3.2.2.3 Octaedro regular

Considere um octaedro regular tendo oito faces congruentes, cada uma como um triângulo equilátero e comprimento de aresta a , considerando $n = 3$ e $n_f = 8$, podemos facilmente encontrar todos os seus parâmetros usando a fórmula de HCR, Equação (2.11), como mostrado a seguir.

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sec \frac{\pi}{3} \sqrt{\operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi}{(3 \times 8)} \right\} \operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi(8-1)}{(3 \times 8)} \right\}} \right) = 2 \operatorname{arc\,tg} \left(2 \sqrt{\operatorname{sen} \left\{ \frac{\pi}{12} \right\} \operatorname{sen} \left\{ \frac{7\pi}{12} \right\}} \right) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2} \operatorname{sen}15^\circ \operatorname{sen}105^\circ) = 2 \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2} \operatorname{sen}105^\circ \operatorname{sen}15^\circ) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{2(\cos(105^\circ - 15^\circ) - \cos(105^\circ + 15^\circ))} \right) = 2 \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}(\cos 90^\circ - \cos 120^\circ)) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{2 \left(0 - \left(-\frac{1}{2} \right) \right)} \right) = 2 \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{1}) = 2 \operatorname{arc\,tg}(1) = 90^\circ.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\alpha = 90^\circ \implies \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = 1.$$

Agora, substituindo o valor de α , $n = 3$, $n_f = 8$ e comprimento da aresta = a , todos os parâmetros de um octaedro regular também podem ser calculados.

Raio interno:

Para o octaedro regular, o raio interno (R_i) — a distância do centro de uma face triangular ao centro do octaedro — é dado por:

$$\begin{aligned}
R_i &= \frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{a}{2} \sqrt{(1)^2 - \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{a}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2} \\
&= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3-1}{3}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\
&= \frac{a}{\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R_i = \frac{a}{\sqrt{6}}. \quad (3.9)$$

Raio externo:

O raio externo (R_o) em um octaedro regular, que vai do centro a um vértice, é determinado por:

$$R_o = \frac{a}{2} \operatorname{cossec} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \operatorname{cossec} 45^\circ = \frac{a}{2} \times \sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Portanto,

$$R_o = \frac{a}{\sqrt{2}}. \quad (3.10)$$

Área da superfície:

Para determinar a área da superfície (A_s) de um octaedro regular, somamos as áreas de suas oito faces triangulares, obtendo:

$$A_s = \frac{1}{4}nn_f a^2 \cotg \frac{\pi}{n} = \frac{1}{4}(3 \times 8)a^2 \cotg \frac{\pi}{3} = 6a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 2\sqrt{3}a^2.$$

Portanto,

$$A_s = 2\sqrt{3}a^2. \quad (3.11)$$

Volume:

Para o octaedro regular, o volume (V), que corresponde ao espaço interno delimitado por suas faces, é expresso por:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{24}nn_f a^3 \cotg \frac{\pi}{n} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{24}(3 \times 8)a^3 \cotg \frac{\pi}{3} \sqrt{(1)^2 - \cotg^2 \frac{\pi}{3}} \\ &= a^3 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2} = \left(\frac{a^3}{\sqrt{3}} \right) \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3. \end{aligned}$$

Portanto,

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3. \quad (3.12)$$

3.2.2.4 Dodecaedro regular

Um dodecaedro regular é caracterizado por ter doze faces congruentes, sendo cada uma delas um pentágono regular, com comprimento de aresta a , considerando $n = 5$ e $n_f = 12$, podemos facilmente encontrar todos os seus parâmetros usando a fórmula de HCR, Equação (2.11), como mostrado a seguir.

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sec \frac{\pi}{5} \sqrt{\operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi}{(5 \times 12)} \right\} \operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi(12-1)}{(5 \times 12)} \right\}} \right) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sec \frac{\pi}{5} \sqrt{\operatorname{sen} \left\{ \frac{\pi}{30} \right\} \operatorname{sen} \left\{ \frac{11\pi}{30} \right\}} \right) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg} (\sec 36^\circ \sqrt{\operatorname{sen} 6^\circ \operatorname{sen} 66^\circ}) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sec 36^\circ \sqrt{2 \operatorname{sen} 66^\circ \operatorname{sen} 6^\circ} \right) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sec 36^\circ \sqrt{\cos(66^\circ - 6^\circ) - \cos(66^\circ + 6^\circ)} \right) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\cos 36^\circ} \sqrt{\cos 60^\circ - \cos 72^\circ} \right) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen} 18^\circ}{2 \cos^2 36^\circ}} \right) = 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{\frac{1}{2} - \frac{(\sqrt{5}-1)}{4}}{(\sqrt{5}+1)^2}} \right).
\end{aligned}$$

Substituindo os valores de $\operatorname{sen} 18^\circ$ e $\cos 36^\circ$, temos:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{\frac{(2 - \sqrt{5} + 1)}{4}}{2 \left(\frac{5 + 2\sqrt{5} + 1}{16} \right)}} \right) = 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{\frac{(3 - \sqrt{5})}{4}}{4 \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4} \right)}} \right) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}} \right) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{(3 - \sqrt{5})^2}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}} \right) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{(3 - \sqrt{5})^2}{4}} \right) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \\
\Rightarrow \alpha &= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) = 2 \operatorname{arc\,cotg} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right).
\end{aligned}$$

Agora, substituindo o valor de α , $n = 5$, $n_f = 12$ e comprimento da aresta = a , todos os parâmetros de um dodecaedro regular podem ser calculados.

Raio interno:

No dodecaedro regular, R_i , a distância que separa o centro de uma face pentagonal do centro do sólido, é calculada como:

$$\begin{aligned}
R_i &= \frac{a}{2} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{a}{2} \sqrt{\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \cotg^2 \frac{\pi}{5}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{9 + 5 + 6\sqrt{5}}{4} - \left(\frac{\cos 36^\circ}{\text{sen} 36^\circ}\right)^2} \\
&= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{\frac{\sqrt{5} + 1}{4}}{\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}}\right)^2} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} - \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{10 - 2\sqrt{5}}} \\
&= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{14 + 6\sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{(3 + \sqrt{5})^2}{10 - 2\sqrt{5}}} \\
&= \frac{(3 + \sqrt{5})a}{2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = \frac{(3 + \sqrt{5})a}{8 \text{sen} 36^\circ}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R_i = \frac{(3 + \sqrt{5})a}{8 \text{sen} 36^\circ}. \quad (3.13)$$

Raio externo:

Para o dodecaedro, o raio externo (R_o), que mede a distância entre o centro e um vértice, pode ser expresso como:

$$\begin{aligned}
R_o &= \frac{a}{2} \text{cossec} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \left(\cotg \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^2} \\
&= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3(6 + 2\sqrt{5})}{4}} \\
&= \frac{a\sqrt{3}}{4} \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} + 1)a}{4}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R_o = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} + 1)a}{4}. \quad (3.14)$$

Um fato interessante é que podemos reescrever a (3.14) da seguinte forma:

$$R_o = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Sabemos que o número de ouro φ é exatamente $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, o que nos permite reescrever (3.14) da seguinte maneira:

$$R_o = \varphi \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Isso destaca como o número de ouro, φ , surge naturalmente na estrutura geométrica dos sólidos regulares. A presença do número de ouro evoca o que Livio (2002, p. 4) descreve como uma “experiência do misterioso”, algo que o físico Albert Einstein valorizava profundamente. Segundo Livio (2002), Einstein afirmou: “A coisa mais bela que podemos experimentar é o misterioso. É a emoção fundamental que está no berço da verdadeira arte e ciência. Aquele que não conhece essa emoção, que não pode mais se maravilhar ou sentir admiração, está praticamente morto, como uma vela apagada”.

Área da superfície:

No caso do dodecaedro regular, com suas doze faces pentagonais, a área da superfície (A_s) é calculada por:

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{1}{4} n n_f a^2 \cotg \frac{\pi}{n} = \frac{1}{4} (5 \times 12) a^2 \cotg \frac{\pi}{5} = 15 a^2 \left(\frac{\cos 36^\circ}{\text{sen} 36^\circ} \right) = 15 a^2 \left(\frac{\frac{\sqrt{5} + 1}{4}}{\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}} \right) \\ &= 15 a^2 \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \right) = 15 \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \right) a^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A_s = 15 \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \right) a^2. \quad (3.15)$$

Volume:

O volume (V) ocupado por um dodecaedro regular pode ser determinado pela relação:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{24} n n_f a^3 \cotg \frac{\pi}{n} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{1}{24} (5 \times 12) a^3 \cotg \frac{\pi}{5} \sqrt{\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \cotg^2 \frac{\pi}{5}} \\ &= \frac{5}{2} a^3 \left(\frac{\cos 36^\circ}{\text{sen} 36^\circ} \right) \sqrt{\frac{9 + 5 + 6\sqrt{5}}{4} - \left(\frac{\cos 36^\circ}{\text{sen} 36^\circ} \right)^2} = \frac{(15 + 7\sqrt{5})}{4} a^3. \end{aligned}$$

Portanto,

$$V = \frac{(15 + 7\sqrt{5})}{4} a^3. \quad (3.16)$$

3.2.2.5 Icosaedro regular

Um icosaedro regular é composto por vinte faces congruentes, sendo cada uma delas um triângulo equilátero com comprimento de aresta a . considerando $n = 3$ (número

de arestas em uma face) e $n_f = 20$ (número de faces), podemos facilmente encontrar todos os seus parâmetros usando a fórmula de HCR, Equação (2.11), como mostrado a seguir.

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sec \frac{\pi}{3} \sqrt{\operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi}{(3 \times 20)} \right\} \operatorname{sen} \left\{ \frac{2\pi(20-1)}{(3 \times 20)} \right\}} \right) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(2 \sqrt{\operatorname{sen} \left\{ \frac{\pi}{30} \right\} \operatorname{sen} \left\{ \frac{19\pi}{30} \right\}} \right) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg}(2\sqrt{\operatorname{sen}6^\circ \operatorname{sen}114^\circ}) = 2 \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\sqrt{2\operatorname{sen}114^\circ \operatorname{sen}6^\circ}) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{2}\sqrt{\cos(114^\circ - 6^\circ) - \cos(114^\circ + 6^\circ)} \right) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{2}\sqrt{\cos(90^\circ + 18^\circ) - \cos 120^\circ} \right) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\sqrt{-\operatorname{sen}18^\circ + \cos 60^\circ}) = 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)} \right) \\
&= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{2 \left(\frac{2 - \sqrt{5} + 1}{4} \right)} \right) \\
\Rightarrow \alpha &= 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \right) = 2 \operatorname{arc\,cotg} \left(\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Agora, substituindo o valor de α , $n = 3$, $n_f = 20$ e comprimento da aresta = a , todos os parâmetros de um icosaedro regular são determinados.

Raio interno:

Em um icosaedro regular, o raio interno (R_i), que mede a distância entre o centro de uma face triangular e o centro do icosaedro, é obtido pela seguinte relação:

$$\begin{aligned}
R_i &= \frac{a}{2} \sqrt{\operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{n}} = \frac{a}{2} \sqrt{\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{9 + 3\sqrt{5} - 2}{6}} \\
&= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{14 + 6\sqrt{5}}{12}} = \frac{a}{4} \sqrt{\frac{(3 + \sqrt{5})^2}{3}} = \frac{(3 + \sqrt{5})}{4\sqrt{3}} a.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R_i = \frac{(3 + \sqrt{5})}{4\sqrt{3}} a. \quad (3.17)$$

Raio externo:

No icosaedro regular, a distância do centro ao vértice, ou seja, o raio externo (R_o), pode ser calculado pela relação:

$$\begin{aligned}
R_o &= \frac{a}{2} \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \cotg^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2 + 3 + \sqrt{5}}{2}} \\
&= \frac{a}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R_o = \frac{a\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}. \quad (3.18)$$

Área da superfície:

A área da superfície (A_s) de um icosaedro regular, que possui vinte faces triangulares, é dada por:

$$A_s = \frac{1}{4} n n_f a^2 \cotg \frac{\pi}{n} = \frac{1}{4} (3 \times 20) a^2 \cotg \frac{\pi}{3} = 15a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 5\sqrt{3}a^2.$$

Portanto,

$$A_s = 5\sqrt{3}a^2. \quad (3.19)$$

Volume:

No icosaedro regular, o volume (V) — a medida do espaço tridimensional que ele contém — é dado por:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{24} n n_f a^3 \cotg \frac{\pi}{n} \sqrt{\cotg^2 \frac{\alpha}{2} - \cotg^2 \frac{\pi}{n}} \\
&= \frac{1}{24} (3 \times 20) a^3 \cotg \frac{\pi}{3} \sqrt{\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \cotg^2 \frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{5}{2} a^3 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1}{3}} = \left(\frac{5a^3}{2\sqrt{3}}\right) \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}} = \left(\frac{5a^3}{6}\right) \sqrt{\frac{14 + 6\sqrt{5}}{4}} \\
&= \left(\frac{5a^3}{6}\right) \sqrt{\frac{(3 + \sqrt{5})^2}{4}} = \frac{5}{12} (3 + \sqrt{5}) a^3.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$V = \frac{5}{12} (3 + \sqrt{5}) a^3. \quad (3.20)$$

3.2.2.6 Aplicação no Software

Como já ressaltamos ao longo deste trabalho, na implementação de objetos geométricos no Three.js, é comum definir poliedros a partir de parâmetros que especificam o raio

da esfera circunscrita ao sólido. No entanto, como muitos sólidos geométricos são inicialmente definidos pelo comprimento de seus lados, é necessário realizar uma conversão entre o valor do lado e o raio, de forma que a geometria do Three.js se adeque às expectativas de escala e proporção. Para isso, desenvolvemos uma classe chamada `HCRRadiusConversions`, que encapsula as relações matemáticas detalhadas na 3.2.2 para calcular o raio da esfera circunscrita ao poliedro a partir do lado fornecido pelo usuário.

A classe `HCRRadiusConversions` permite converter o comprimento do lado de todos os poliedros regulares, ou seja, o tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro, para o valor do raio correspondente. Essa conversão é fundamental para garantir que os parâmetros geométricos definidos pelo usuário sejam corretamente interpretados na aplicação, ajustando automaticamente o raio dos objetos no Three.js e mantendo a coerência geométrica dos elementos visuais.

Para facilitar a implementação, o valor do raio é primeiramente armazenado em uma constante, utilizando-se o método específico da classe `HCRRadiusConversions` associado ao poliedro desejado. Assim, uma vez convertido o comprimento do lado para o raio, o valor obtido é passado como argumento para a geometria do dodecaedro no Three.js, garantindo uma escala apropriada para o objeto 3D. Esse processo garante que a geometria do Three.js corresponda exatamente às dimensões especificadas pelo usuário, mesmo que a definição original seja dada pelo comprimento do lado. A Figura 7 ilustra a classe `HCRRadiusConversions` e seus métodos específicos para cada poliedro, cada um com a fórmula correspondente para o cálculo do raio.

Com essa abordagem, a implementação torna-se mais modular e flexível, uma vez que o código centraliza as conversões matemáticas em uma única classe reutilizável. Além disso, essa classe permite que o software se adapte a diferentes poliedros platônicos com facilidade, bastando o usuário especificar o comprimento do lado, enquanto o sistema realiza automaticamente as conversões necessárias para o Three.js.

Assim, essa configuração proporciona uma aplicação prática e intuitiva para o usuário, que pode definir o tamanho dos objetos geométricos de forma simplificada e sem necessidade de cálculos manuais. Além disso, o sistema se torna mais robusto, pois evita erros de escalamento e de proporção, e garante que o software seja adaptável a diversas aplicações de visualização e modelagem 3D.

Figura 7 – Código implementado para converter o tamanho do lado do sólido para o valor correspondente do raio da esfera circunscrita.

```
export class HCRRadiusConversions {
  tetrahedron(side: number): number {
    return (side / 2) * Math.sqrt(3 / 2);
  }

  hexahedron(side: number): number {
    return (side * Math.sqrt(3)) / 2;
  }

  octahedron(side: number): number {
    return side / Math.sqrt(2);
  }

  dodecahedron(side: number): number {
    return (Math.sqrt(3) * (Math.sqrt(5) + 1) * side) / 4;
  }

  icosahedron(side: number): number {
    return (side * Math.sqrt(10 + 2 * Math.sqrt(5))) / 4;
  }
}
```

Fonte: autoria própria.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com o desenvolvimento da ferramenta de modelagem 3D além das primeiras aplicações da mesma em diferentes contextos educacionais. Inicialmente, apresentaremos mais detalhes da própria ferramenta. Em seguida, exploraremos as experiências proporcionadas pela ferramenta na construção de um modelo 3D para o sistema Terra-Lua-Sol, possibilitando visualizar nosso planeta suspenso no espaço e estudar fenômenos como estações do ano, o amanhecer e o anoitecer. Depois, detalharemos três aplicações da ferramenta: a primeira descreve a utilização do *software* em um minicurso sobre modelagem 3D do sistema solar; a segunda aborda a utilização da ferramenta no ensino de geometria espacial em uma aula de Desenho Geométrico no curso de Licenciatura em Matemática da UEPB Campus VI; e a terceira apresenta um plano de aula detalhado que foi aplicado em outra turma de Desenho Geométrico na mesma instituição, explorando conceitos de geometria espacial e modelagem 3D.

4.1 A ferramenta “Modela 3D”

Atualmente denominada “Modela 3D,” a nossa ferramenta foi desenvolvida com o intuito de facilitar e fornecer uma alternativa metodológica para o ensino e o aprendizado de conceitos de física e matemática por meio de modelagem 3D. Esta aplicação possui três versões principais: uma aplicação em JavaScript com suporte à física, uma versão interativa voltada para usuários que desejam explorar modelos tridimensionais sem a necessidade de escrever códigos e uma aplicação que suporta a sintaxe do Python, destinada a usuários que procuram uma maior flexibilidade e que estão mais familiarizados com a sintaxe dessa linguagem, que é amplamente utilizada no meio acadêmico e científico.

Todas as versões são facilmente acessíveis na página inicial da plataforma, conforme ilustrado na Figura 8. A ferramenta é disponibilizada gratuitamente e pode ser acessada através do endereço: <https://modela3d.vercel.app>. Na interface principal, o usuário pode escolher entre as diferentes versões da aplicação, conforme suas necessidades.

Além das versões da aplicação, a página inicial exibe uma galeria de exemplos de projetos já criados, destacando a versatilidade e aplicabilidade da ferramenta em diferentes contextos, Figura 9. Entre os exemplos disponíveis, destacam-se:

- **Todos os Objetos:** uma cena que apresenta todos os objetos e formas geométricas disponibilizados pela aplicação, permitindo ao usuário explorar visualmente cada item;

Figura 8 – Página inicial da aplicação.



Fonte: autoria própria

- **Pêndulos:** uma simulação de pêndulos em movimento, ideal para o estudo do período de um pêndulo em movimento;
- **Cronômetro:** um exemplo que demonstra o uso de cronômetros em simulações de queda livre de esferas, permitindo acompanhar os respectivos tempos de queda;
- **Braquistócrona:** uma modelagem da curva braquistócrona que ilustra a diferença de velocidades entre a trajetória curva e a reta, mostrando o tempo que uma esfera precisa para percorrer cada percurso;
- **Sistema Terra-Lua-Sol:** um modelo astronômico simplificado que simula os movimentos da Terra, Lua e Sol, ilustrando a órbita de cada objeto e permitindo explorar diversos fenômenos, como eclipse do Sol e ca Lua, estações do ano, movimentos da Terra, etc.;
- **Animação do Círculo Trigonométrico:** uma simulação visual do círculo trigonométrico, que pode ser útil como recurso didático para a compreensão das funções trigonométricas seno e cosseno.

Além dos exemplos de simulações, a tela inicial da aplicação apresenta uma seção dedicada a planos de aula, que sugere atividades práticas para explorar conceitos teóricos

Figura 9 – Versões e exemplos disponíveis na aplicação.



Fonte: autoria própria

com a ferramenta. Esses planos, com instruções detalhadas para professores e alunos, poderão ser expandidos futuramente com a criação de um repositório colaborativo para disponibilização de material didático, aberto a contribuições de usuários de todo o mundo. A seção também inclui uma pré-visualização dos principais objetos disponíveis para as simulações, desde formas geométricas a elementos físicos, conforme ilustrado na Figura 10.

4.1.1 A interface

A interface padrão da versão “Aplicação em Javascript com Física” é ilustrada na Figura 11. A janela de código ocupa o lado esquerdo e é usada para a entrada de comandos na aplicação. O botão em formato de seta executa o código mais recente e gera a cena correspondente na janela de visualização 3D, localizada no lado direito da tela. Acima da janela de visualização há alguns botões que podem ser utilizados para habilitar/desabilitar eixos ou grades, abrir a modelagem em tela cheia, restaurar a câmera da cena para a posição original e um botão para pausar/rodar as interações físicas entre os objetos. No canto superior direito encontra-se o botão que abre o menu lateral. É por meio deste menu que o usuário pode importar imagens do computador para serem usadas como texturas, possibilitando melhorar a estética e personalização dos objetos 3D. Depois de prontos, os projetos podem ser baixados por meio de um botão disponível no menu lateral e o arquivo baixado pode ser importado posteriormente também por intermédio do menu lateral, por meio do botão nomeado “importar”. A documentação interna, também disponível no menu lateral, fornece exemplos de códigos para auxiliar os usuários que por ventura estejam com

Figura 10 – Planos de aula e objetos disponíveis.



Fonte: autoria própria

alguma dificuldade na criação de objetos 3D.

Figura 11 – Interface da aplicação.



Fonte: autoria própria

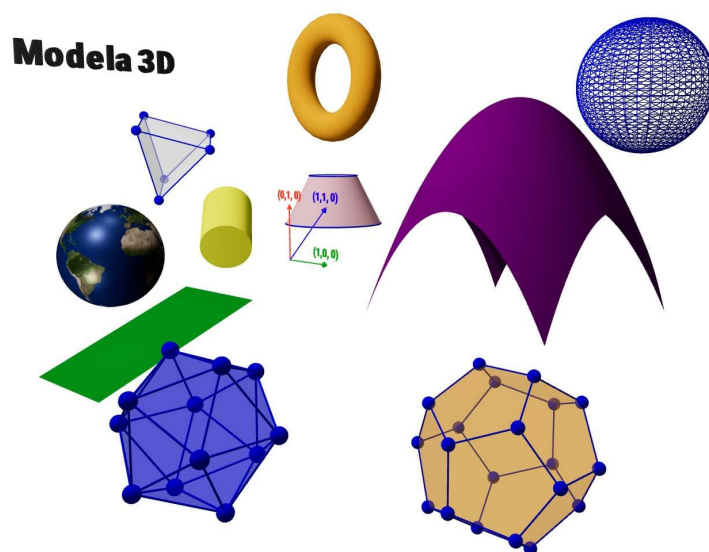
Até o presente momento, o aplicativo oferece recursos para a criação de uma ampla variedade de objetos tridimensionais, cada um com suas próprias características e propriedades únicas. Na Tabela 1 estão listados alguns dos objetos e um exemplo de sua respectiva utilização. Para fins ilustrativos, a Figura 12 mostra uma cena criada com alguns destes elementos. Além dos objetos listados na Tabela 1, alguns outros já estão disponíveis para uso, podendo ser consultados na documentação da ferramenta, atualmente disponibilizada em <https://modela3d-docs.vercel.app/docs/intro>.

Tabela 1 – Alguns objetos disponíveis

Objeto	Exemplo
LuzAmbiente	LuzAmbiente({ intensidade: 0.5 })
Caixa	Caixa({ largura: 1, altura: 1, comprimento: 1 })
Cone	Cone({ raio: 1, altura: 1 })
Cilindro	Cilindro({ raio: 1, altura: 1 })
Dodecaedro	Dodecaedro({ lado: 1 })
Ambiente	Ambiente({ lugar: "parque"})
OperadorGeometrico	const c = Caixa() const e = Esfera({ posicao: [0, 1, 0] }) OperadorGeometrico({ elemento: c, subtracao: [e] })
ModeloGLB	ModeloGLB({ modelo: "nome_do_modelo"})
Icosaedro	Icosaedro({ lado: 1 })
ModeloOBJ	ModeloOBJ({ modelo: "nome_do_modelo"})
Octaedro	Octaedro({ lado: 1 })
Pendulo	Pendulo({ tamanhoFio: 6, posicao: [0, 6, 0] })
Plano	Plano({ largura: 1, altura: 1 })
Luz	Luz({ posicao: [0, 1, 0] })
Poligono	Poligono({ pontos: [[-2, 0, 0], [-1, 1, 0], [1, 1, 0], [2, 0, 0]] })
Prisma	Prisma({ lados: 5, altura: 1, lado: 1 })
Piramide	Piramide({ lados: 5, altura: 1, lado: 1 })
Regua	Regua({ ponto1: [0, 0, 0], ponto2: [1, 0, 0] })
Ceu	Ceu({ posicaoDoSol: [0, 100, 0] })
Esfera	Esfera({ raio: 1 })
LuzDirecional	LuzDirecional({ direcao: [0, -1, 0] })
Estrelas	Estrelas({ quantidade: 1000 })
Superficie	Superficie({ funcao: "2*(sin(x/2) * cos(z))"})
Tetraedro	Tetraedro({ lado: 1 })
Texto	Texto({ texto: "Olá mundo!"})
Toroide	Toroide({ raio: 1, raioTubo: 0.5 })
Tubo	Tubo({ raioInterno: 0.3, raioExterno: 1 })
Vetor	Vetor(0, 1, 0)
Vetor (customizado)	Vetor(0, 1, 0, { cor: "white"})
OperacaoVetores	OperacaoVetores({ vetor1: [0, 1, 0], vetor2: [1, 0, 0], operacao: "soma" })

Fonte: autoria própria.

Figura 12 – Representação gráfica de alguns objetos listados na Tabela 1.



Fonte: autoria própria

A aplicação foi criada com uma interface ao usuário intuitiva que permite a interação com os objetos e a cena 3D. Os usuários podem mover a câmera para explorar a cena sob diferentes ângulos, bem como selecionar e modificar objetos individualmente. O usuário pode usar um gizmo posicionado na parte inferior da interface, que facilita o alinhamento preciso da câmera em relação aos eixos cartesianos, tornando mais simples a orientação da visualização da cena tridimensional.

Visando expandir as capacidades de modelagem, o aplicativo permite a importação de modelos *OBJ*¹ e *GLB*² que podem ser baixados de repositórios na internet ou criados e exportados por diversas ferramentas de modelagem, como o *Blender*, *Maya*, *Tinkercad*, entre outras. Para importar um modelo GLB por exemplo, o usuário deve usar o menu lateral da aplicação, como mostra a Figura 13. Na sequência, o usuário pode utilizar o objeto `ModeloGLB`, inserindo o nome do modelo importado no parâmetro `modelo`, como mostra a Figura 14.

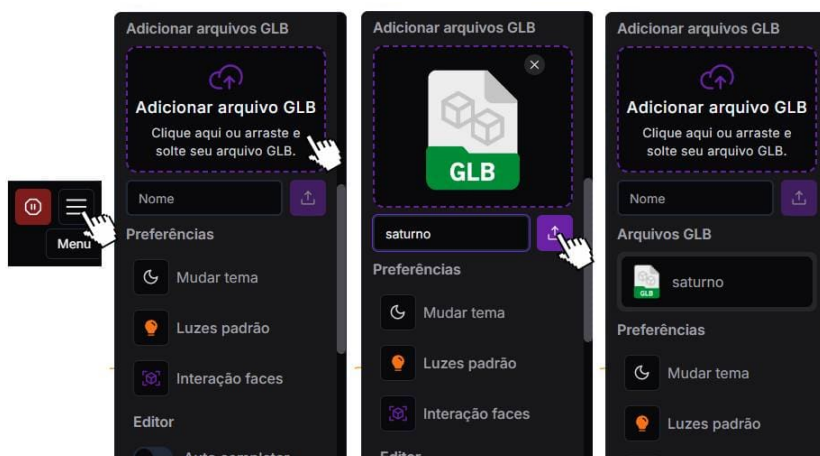
4.1.2 O blog

O blog é uma plataforma projetada para incentivar o compartilhamento de experiências e conhecimentos entre os usuários, conforme ilustrado na Figura 15. Acessível por meio do endereço <https://modela3dblog.vercel.app/>, a plataforma visa construir uma comunidade engajada, oferecendo uma série de funcionalidades que promovem a criação

¹ Os arquivos *OBJ* (.obj) contém informações sobre a geometria de objetos 3D e podem ser usados para intercâmbio de informações entre aplicativos (Schechter, 2020b).

² Os arquivos *GLB* (.glb) é um formato de arquivo 3D utilizado em Realidade Virtual (RV), Realidade Aumentada (RA), jogos e aplicações web, pois suporta movimento e animação. Outra vantagem do formato é seu tamanho reduzido e tempos de carregamento rápidos. (Schechter, 2020a).

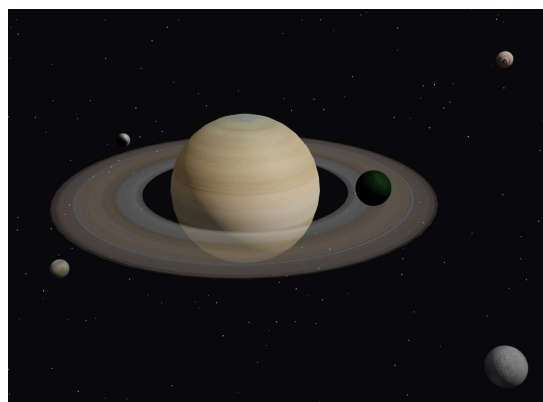
Figura 13 – Importação de um modelo GLB.



Fonte: autoria própria

Figura 14 – Uso do modelo GLB importado

```
Estrelas()
ModeloGLB({
  modelo: "saturno"
})
```



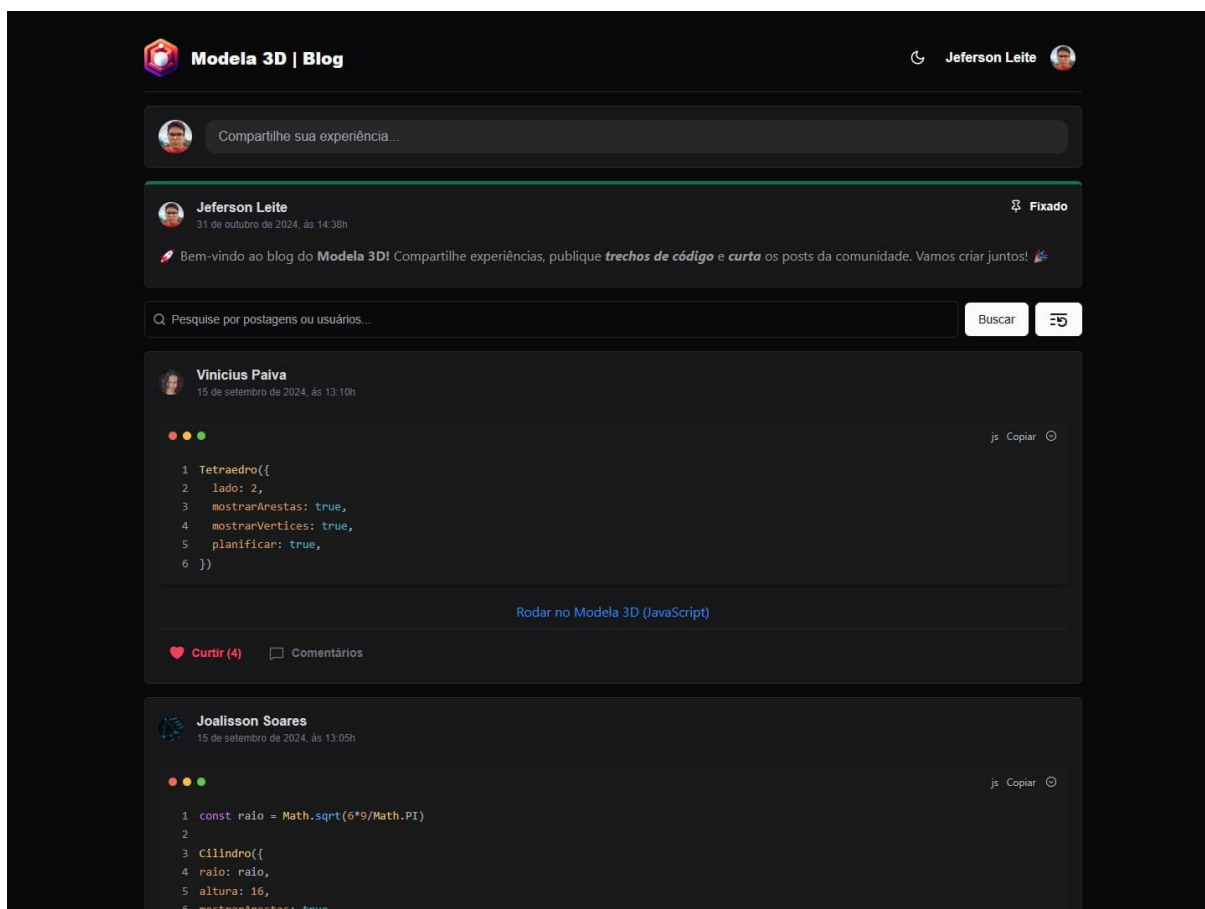
Fonte: autoria própria.

e o compartilhamento do conteúdo por meio de uma interface intuitiva. A seguir, são destacadas as principais funcionalidades do blog, que tem como objetivo enriquecer a experiência do usuário e fomentar o engajamento dos usuários.

O *Modela 3D Blog* foi estruturado para proporcionar uma experiência completa de interação social e de compartilhamento de conhecimento na área da modelagem 3D. Para isso, foram implementadas diversas funcionalidades que tornam o ambiente dinâmico e funcional:

- **Autenticação de usuários:** a plataforma conta com um sistema de autenticação seguro e personalizado, integrado com a solução *Clerk*, permitindo que cada usuário tenha uma experiência de acesso individualizada e segura;
- **Criação de postagens:** o blog disponibiliza um editor Markdown completo, o que possibilita aos usuários publicarem conteúdos de forma estruturada, como tutoriais, ideias e projetos. Ao inserir um ambiente de código em uma publicação, um link é

Figura 15 – Blog da aplicação com postagens de usuários.



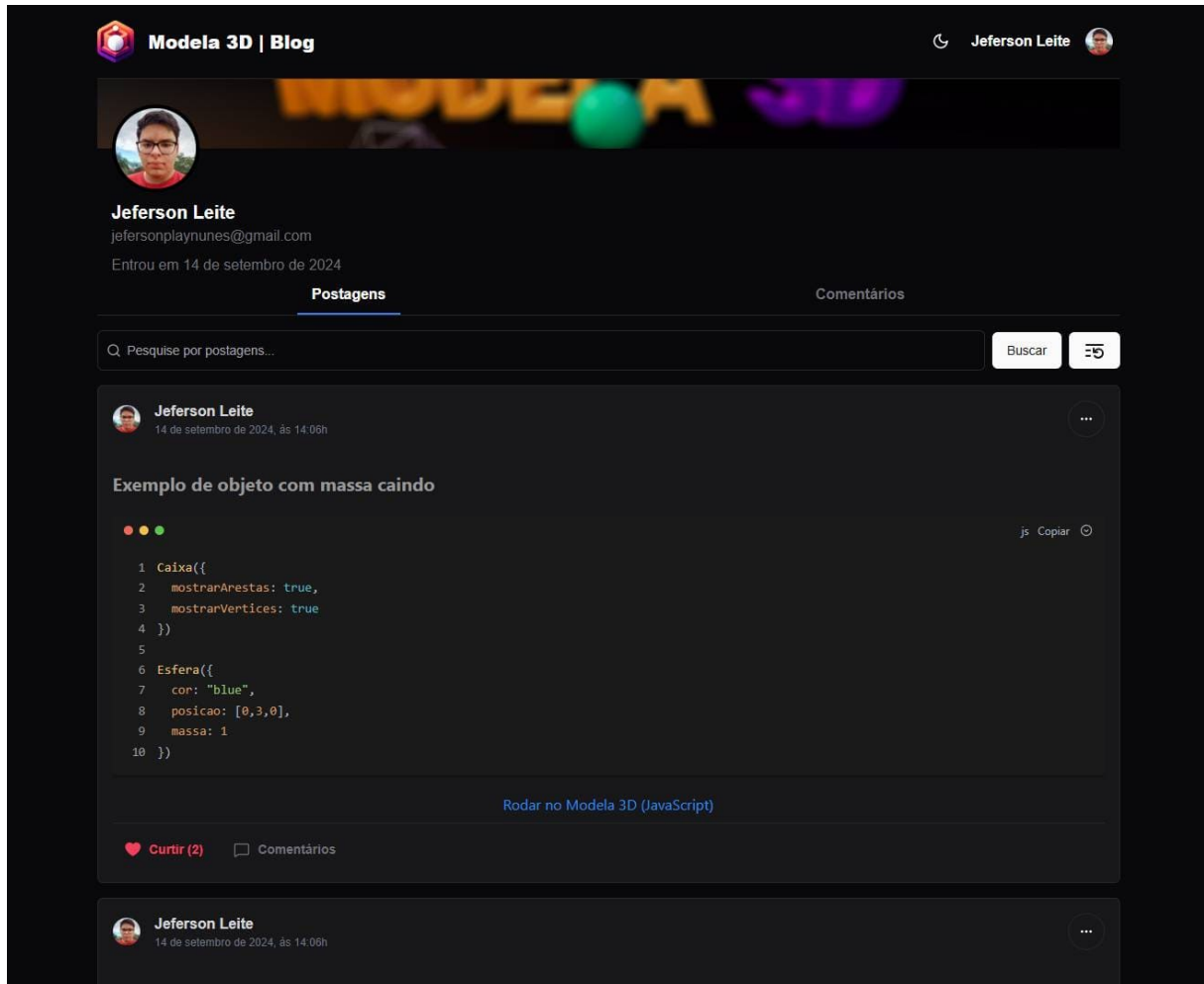
Fonte: autoria própria.

gerado automaticamente, permitindo que o usuário execute o código diretamente na ferramenta de modelagem 3D;

- **Feed de postagens:** um *feed* de postagens organizado com paginação está disponível, o que otimiza a navegação e permite que os usuários explorem conteúdos da comunidade de maneira fluida e acessível;
- **Perfil de usuário:** cada pessoa possui acesso a um perfil personalizado, onde é possível visualizar suas postagens e comentários, como mostra a Figura 16. Além disso, os perfis de outros usuários também podem ser explorados, facilitando a criação de conexões e o acompanhamento de conteúdos publicados por outros membros da plataforma;
- **Interação por curtidas e comentários:** para incentivar o engajamento, o blog permite que os usuários curtam postagens e façam comentários, promovendo a troca de ideias e o diálogo entre os participantes;
- **Funcionalidade de pesquisa:** uma barra de pesquisa foi implementada para que os usuários possam buscar postagens e perfis específicos, facilitando a descoberta de

conteúdos relevantes.

Figura 16 – Perfil de um usuário no blog.



Fonte: autoria própria.

Com essas funcionalidades, o blog busca servir como uma plataforma para o compartilhamento de conhecimentos no universo da modelagem 3D. A estrutura da aplicação, com autenticação de usuários, edição de conteúdos, *feed* organizado, perfil personalizado e recursos de interação, oferece um ambiente de rede social enriquecido que vai além de um simples repositório de informações, incentivando a formação de uma comunidade colaborativa e ativa.

4.2 Primeiras modelagens

Antes do uso da ferramenta como recurso didático em sala de aula, experimentamos a criação de algumas cenas e objetos com o intuito de testar as funcionalidades já implementadas.

4.2.1 A Terra vista pela tripulação da Apollo 8

A visualização da Terra do espaço é uma experiência que poucos tiveram a oportunidade de vivenciar. A magnitude do nosso planeta pode ser difícil de descrever, mas os astronautas que tiveram essa experiência tentam transmitir suas impressões e sentimentos. Em um artigo publicado na National Geographic em março de 2018, Nadia Drake descreve essa experiência única da seguinte maneira:

Desde 1961, apenas 556 pessoas tiveram esta experiência rara. Menos pessoas, apenas 24, observaram a Terra diminuir à distância, ficando cada vez menor até não ser maior do que o rosto de um relógio de pulso. E apenas seis estiveram completamente sozinhos atrás do lado mais distante da lua, sem visão do nosso planeta enquanto navegavam em um mar infinitamente profundo e estrelado. (Drake, 2018)

A ferramenta de visualização e modelagem 3D desenvolvida neste trabalho tem o potencial de proporcionar aos alunos uma noção, mesmo que mínima, do que esses astronautas experimentaram. Ao permitir a modelagem do planeta Terra com texturas realistas e movimentação, os discentes podem ter uma experiência imersiva de visualizar a Terra do espaço.

Para criar uma representação da Terra vista do espaço, como mostra a Figura 17, o usuário pode começar adicionando um elemento Ambiente com a cor definida como “*black*”. Isso simula o vasto vazio do espaço. Em seguida, o usuário pode criar uma Esfera e aplicar uma textura que represente a superfície da Terra. A movimentação dinâmica da câmera permite ao usuário visualizar a Terra de diferentes ângulos e distâncias, proporcionando uma experiência imersiva.

Além disso, a ferramenta pode ser usada para ensinar uma variedade de conceitos, abrangendo desde elementos fundamentais de física até objetos de aprendizagem da geografia e topografia. A experiência de visualizar a Terra do espaço, conforme descrito por Drake (2018), é uma experiência transformadora. Através da nossa ferramenta, esperamos proporcionar aos alunos uma experiência semelhante, permitindo-lhes ver a Terra de uma perspectiva única.

4.2.2 Os movimentos da Terra

Para avaliar o potencial educativo da ferramenta com simulações dinâmicas, desenvolvemos uma modelagem interativa que representa os movimentos do planeta Terra, mostrada na Figura 20. Esta representação tem como objetivo facilitar a compreensão dos movimentos de rotação e translação da Terra, especialmente para um público jovem. Tradicionalmente, as ilustrações estáticas encontradas em livros didáticos mostram esses movimentos de modo muito simplificado, dificultando a compreensão, principalmente para crianças. A simulação tridimensional foi concebida como uma ferramenta de apoio visual

Figura 17 – Modelagem 3D da Terra vista do espaço.



Fonte: autoria própria

Figura 18 – Terra vista do espaço na missão Apollo 8.



Fonte: NASA Earth Observatory (2008)

Figura 19 – Modelagem 3D da Terra vista do espaço utilizando modelo GLB.



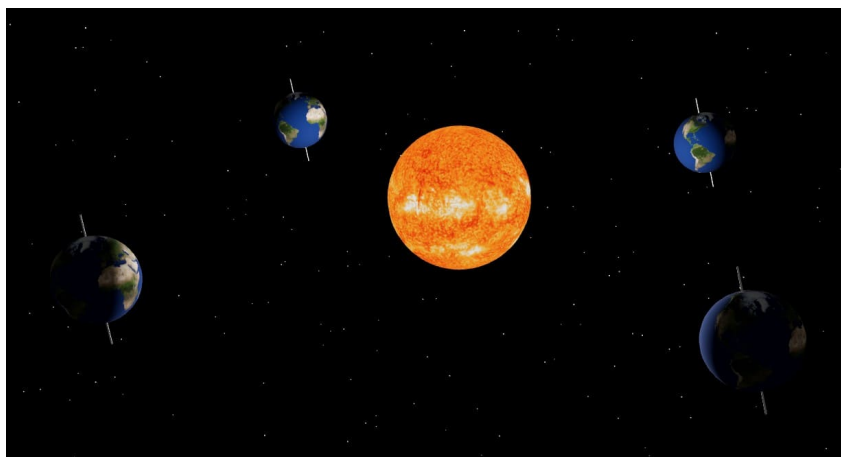
Fonte: autoria própria

para tornar mais tangíveis os movimentos da Terra, bem como suas consequências práticas, como a explicação dos ciclos diurnos e noturnos, além das estações do ano.

Para este caso, o movimento de translação da Terra em torno do Sol foi representado por meio de quatro posições distintas da Terra, permitindo que o usuário visualize a variação na posição do planeta durante seu movimento de translação. Além disso, o movimento de rotação em torno de seu eixo também é apresentado como uma animação, mostrando os ciclos diurnos e noturnos em diferentes regiões do planeta. O desvio na inclinação do eixo

da Terra, responsável pelas estações do ano, foi exibido por meio de uma representação visual do eixo terrestre. É importante ressaltar que, para fins de melhor visualização e compreensão, as escalas reais de diâmetros e distâncias não foram consideradas na construção da cena.

Figura 20 – Modelagem 3D das estações do ano.



Fonte: autoria própria

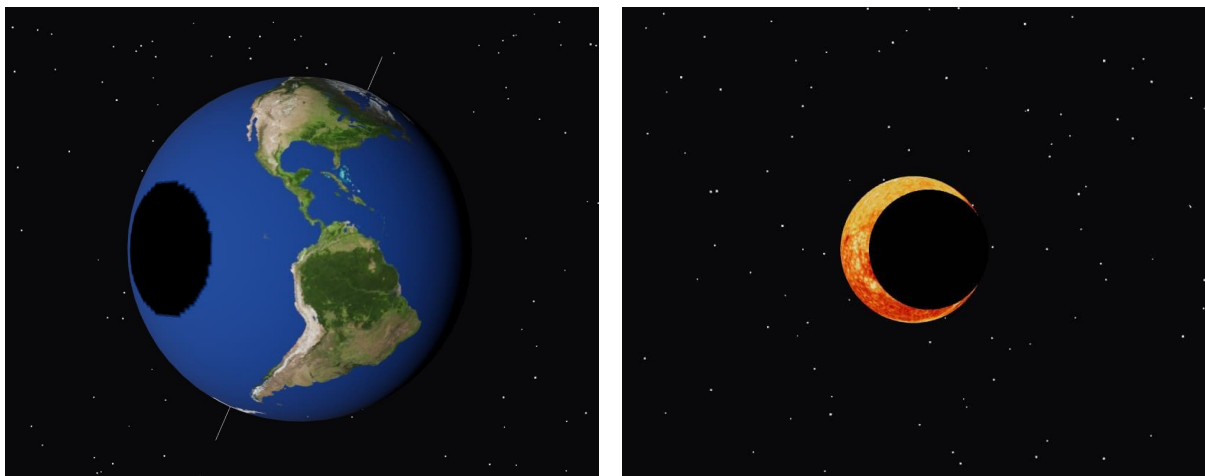
Uma alternativa para o estudo deste conteúdo seria a utilização de modelos mecânicos, que envolvem materiais de custo elevado e complexidade de construção. A simulação computacional, por outro lado, é acessível e gratuita, tornando-a uma ferramenta valiosa para o ensino e aprendizagem. A modelagem 3D elaborada por meio do aplicativo apresentado por nós oferece uma vantagem significativa em relação às ilustrações estáticas encontradas em livros didáticos. A representação dinâmica dos movimentos da Terra pode facilitar bastante a compreensão. Fenômenos físicos, como a rotação e a translação da Terra, o movimento da Lua em torno da Terra, tornam-se mais claros e compreensíveis por meio da animação 3D, facilitando o entendimento dos fenômenos associados.

Na página inicial da ferramenta, disponibilizamos uma modelagem do sistema Terra-Lua-Sol, que também pode ser acessado diretamente por meio desse endereço: <https://modela3d.vercel.app/physics?name=earth-moon-sun&autoplay=true>. Ao definir a propriedade `seguirTerraComCamera` como `true`, o usuário tem acesso à uma câmera acoplada à Terra, o que permite visualizar a cena na perspectiva da esfera que representa o planeta Terra. Com esse exemplo, é possível explorar variados tipos de eclipse, visto que a Lua realiza sem movimento de translação em torno da terra em tempo real, como mostra a Figura 21.

4.2.3 *Uma experiência com embalagens*

Na disciplina de Modelagem em Educação Matemática ofertada pelo curso de Licenciatura Plena em Matemática da UEPB Campus VI Monteiro, são requisitadas

Figura 21 – Exemplo com a modelagem do sistema Terra-Lua-Sol.



Fonte: autoria própria.

atividades de modelagem utilizando embalagens diversas. Uma dessas atividades é a comparação entre uma embalagem no formato de um prisma reto de base quadrada e uma embalagem no formato de um cilindro reto, a partir destas embalagens é feito um estudo sobre qual delas oferece um menor custo para se produzir, para isso é considerado que ambas possuem o mesmo volume e é feita a comparação entre as suas áreas superficiais.

Para realizar tal atividade, um aluno utilizou o software aqui tratado e nos deu o seguinte depoimento: “o software foi utilizado em sala durante uma apresentação na aula do componente curricular Modelagem em Educação Matemática com o intuito de estudar as formas geométricas comumente vistas nas embalagens de produtos que consumimos no dia-a-dia cujo foco era analisar a quantidade de material necessário para confeccionar embalagens na forma de prismas e cilindro e assim fazer um estudo comparativo. O software foi de suma importância para visualização deste sólidos onde foi utilizado diversas funcionalidades da aplicação como ambiente, ajuste de câmeras, planificação, visualização de arestas e vértices, opacidade e texturas. A experiência relatada pelo professor responsável pela turma é que o uso do software traz uma perspectiva de tirar muitas vezes o medo do aluno em utilizar tecnologia nos estudos de modelagem e trazer uma confiança para manuseio para outras plataformas”.

4.2.4 *Plotando funções tridimensionais*

A ferramenta possibilita ainda a modelagem de superfícies no espaço tridimensional através da definição de uma função matemática $y(x, z)$, especificada na propriedade `funcao` do objeto `Superficie`. Além da função, é possível delimitar a região da superfície por meio dos intervalos `intervaloX` e `intervaloY`, ambos definidos como arrays de duas posições, conforme ilustrado na Figura 22.

Com essa configuração, a ferramenta também permite o cálculo aproximado da área da superfície gerada ao definir a propriedade `calcularArea` como `true`. No exemplo demonstrado na Figura 22, a função $y = -\frac{x^2 + z^2}{2} + 1$ é utilizada sobre o domínio delimitado por $x \in [-1, 1]$ e $z \in [-1, 1]$, resultando em uma área total aproximada de 5,12 unidades de área.

Internamente, o cálculo da área é realizado através da decomposição da superfície em pequenos triângulos. Baseando-se em princípios do cálculo numérico, a área de cada triângulo é calculada individualmente, e, em seguida, todas as áreas são somadas para fornecer uma aproximação numérica da área total. Agora, vamos validar utilizando conceitos fundamentais do cálculo diferencial e integral.

Dada a função $y = -\frac{(x^2 + z^2)}{2} + 1$ definida para $-1 < x < 1$ e $-1 < z < 1$, temos que a área da superfície A_S será dada por:

$$A_S = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz.$$

Daí,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{-2x}{2} = -x \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{2z}{2} = -z.$$

Assim,

$$A_S = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2 + z^2} dx dz. \quad (4.1)$$

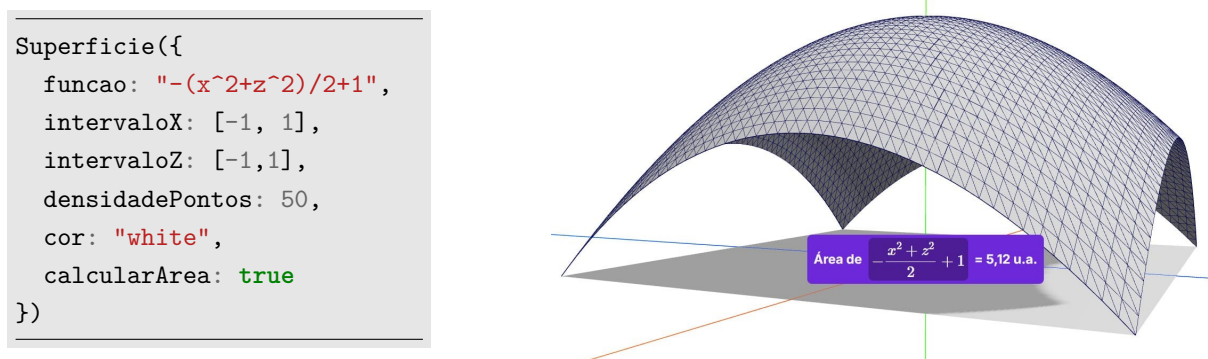
Determinando o valor numérico aproximado para a integral de superfície na Equação (4.1) utilizando uma calculadora numérica obtivemos um valor aproximado de 5,12316 unidades de área. Esse resultado é bastante próximo da área calculada pela ferramenta, que foi de 5,12 unidades de área, como ilustrado na Figura 22.

4.2.5 Uma breve comparação com o Geogebra

O Geogebra é um software de matemática dinâmica amplamente reconhecido e utilizado no meio acadêmico, oferecendo uma gama diversificada de recursos para o ensino e aprendizado da matemática. Abrange desde a geometria elementar até o cálculo avançado. Também permite visualização de objetos tridimensionais, tornando-se uma alternativa também gratuita para o estudo da geometria espacial, permitindo aos usuários explorar sólidos geométricos, gráficos de funções e outros conceitos matemáticos.

No entanto, apesar de sua versatilidade, o Geogebra apresenta algumas limitações no que tange à modelagem e manipulação de objetos 3D, bem como para simulações físicas.

Figura 22 – Configuração para a criação de uma superfície tridimensional com a função definida.



Fonte: autoria própria.

A ferramenta, por exemplo, não permite a texturização de sólidos de forma simplificada, restringindo as possibilidades de representação visual e dificultando a criação de modelos mais realistas. Além disso, a simulação de física no Geogebra, embora presente, não oferece a mesma flexibilidade e simplicidade de outras plataformas, como a possibilidade de definir a massa dos objetos e simular colisões de forma simples e com uma linguagem mais acessível ao usuário.

A Figura 24 ilustra um exemplo de limitação na renderização de superfícies no Geogebra. Ao gerar um hemisfério a partir da equação da esfera e limitá-lo verticalmente, observam-se algumas falhas, como tremulações e desaparecimento de partes da geometria, à medida que o usuário navega pela cena. Em contrapartida, o *Modela3D*, embora ainda em estágios iniciais de maturidade, propõe uma nova abordagem para a geração de geometrias tridimensionais, utilizando tecnologias mais recentes. A Figura 23 demonstra a renderização otimizada do mesmo hemisfério no *Modela3D*, sem os mesmos defeitos observados na renderização do Geogebra.

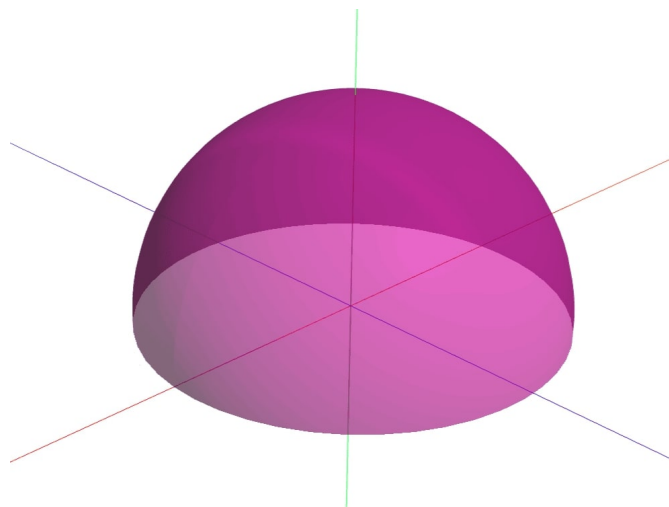
Além disso, o *Modela3D* busca oferecer uma interface mais amigável, com a maior parte dos comandos em português, visando atender especificamente às necessidades do público brasileiro, facilitando o acesso e a utilização da ferramenta por estudantes e educadores que falam este idioma.

Reconhecemos que o *Modela3D* ainda possui muitos pontos a serem aprimorados e não se propõe a substituir ferramentas já consolidadas como o Geogebra. No entanto, acreditamos que representa uma alternativa para o ensino e aprendizado de geometria espacial, oferecendo recursos específicos que podem complementar as funcionalidades de outras plataformas. Futuramente, com o desenvolvimento contínuo e as possíveis contribuições da comunidade, o *Modela3D* poderá fornecer ainda mais recursos para aprimorar a experiência do usuário.

No Geogebra, há suporte para a implementação de simulações físicas, como a modelagem de fenômenos relacionados à queda livre. Nessa perspectiva, o *Modela3D*

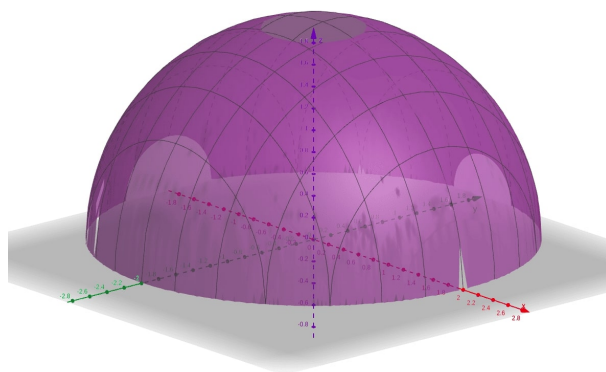
Figura 23 – Criação de um hemisfério de uma esfera por meio de sua equação no *Modela3D*.

```
Superficie({
  funcao: "x^2+y^2+z^2 = 1",
  intervaloY: [0, 1],
  opacidade: 0.6,
  cor: "#B4009D"
})
```



Fonte: autoria própria.

Figura 24 – Criação de um hemisfério de uma esfera por meio de sua equação no Geogebra.



Fonte: autoria própria.

também oferece recursos semelhantes, contando com um motor de física (*physics engine*) integrado. Essa integração permite que os usuários realizem simulações definindo apenas parâmetros básicos, como a massa dos objetos, o que facilita a exploração de conceitos físicos de forma interativa.

Uma das principais vantagens do *Modela3D* é sua capacidade de personalização da cena. Graças ao suporte para modelos no formato GLB e à possibilidade de aplicar texturas de imagem personalizadas, o ambiente de simulação pode ser configurado de maneira a representar cenários específicos, superando limitações comuns em outras ferramentas.

Para ilustrar uma aplicação prática, propomos a simulação de um mesmo problema físico, a queda livre de um objeto, utilizando tanto o Geogebra quanto o *Modela3D*. No caso do Geogebra, utilizaremos um exemplo de implementação disponível publicamente³. No *Modela3D*, a mesma simulação será realizada utilizando comandos básicos da ferramenta,

³ Acessível em: <https://www.geogebra.org/geometry/fxwsd2y7>

bem como recursos de texturização e um modelo GLB para criar a representação de uma árvore. Para isso, considere o problema descrito a seguir.

Quanto tempo, aproximadamente, uma fruta que caiu de uma árvore, localizada a uma altura de 25 m, leva para tocar o chão? Despreze a resistência do ar e considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- a) 2,24 s b) 3,0 s c) 4,45 s d) 5,0 s

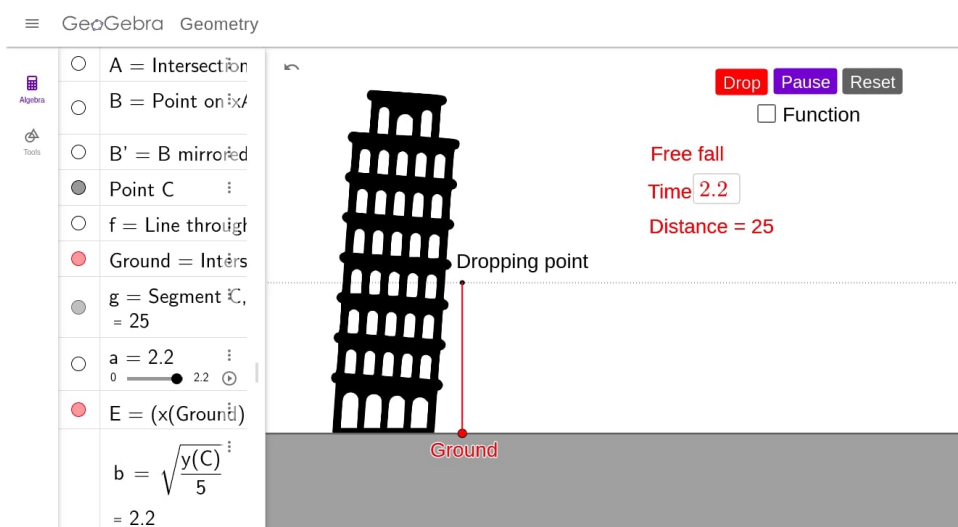
Analiticamente, para determinar o tempo de queda da fruta, podemos utilizar a equação que descreve a altura em função do tempo em um movimento de queda livre.

$$\begin{aligned} h &= \frac{gt^2}{2} \implies t^2 = \frac{2h}{g} \\ &\implies t^2 = \frac{2 \cdot 25 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2} \\ &\implies t^2 = 5 \text{ s}^2 \implies t \approx 2,24 \text{ s.} \end{aligned}$$

Portanto, a fruta, ao cair da árvore, atingirá o solo após aproximadamente 2,24 segundos.

Agora, vamos simular utilizando o Geogebra. Inserindo o valor da altura para o ponto que define o objeto, dado que nessa implementação o objeto que cairá em queda livre é representado por um ponto no plano, podemos notar na Figura 25 que o tempo de queda foi de aproximadamente 2,2 segundos.

Figura 25 – Simulação física de queda livre no Geogebra.



Fonte: <https://www.Geogebra.org/geometry/fxwsd2y7>.

Modelando a mesma situação problema no *Modela3D*, obtivemos o mesmo valor numérico aproximado de 2,2 segundos, como mostra a Figura 26.

Figura 26 – Simulação física de queda livre no *Modela3D*.



Fonte: autoria própria.

Como podemos notar na Figura 26, a qualidade de renderização e a capacidade de customização da cena é significativamente superior à modelagem feita no Geogebra. Como é perceptível na Figura 27, o código utilizado para modelar a cena contém majoritariamente comandos em português, com uma sintaxe que julgamos ser simples para definir e manipular objetos.

Vale ressaltar que alguns elementos da cena mostrada na Figura 26 exigiram a importação de recursos externos para garantir a correta renderização no *Modela3D*, por exemplo, no objeto *Caixa* que tem a textura de imagem definida como "grama" e no *ModeloGLB* que tem um modelo definido como "laranjeira", tivemos que importar uma imagem com o nome "grama" e um modelo GLB com o nome "laranjeira".

Apesar das vantagens citadas, reconhecemos que o Geogebra oferece uma variedade mais ampla de ferramentas voltadas para a análise detalhada de gráficos, como os relacionados a movimentos. Embora o *Modela3D* possua recursos básicos para a geração de gráficos em tempo real, essa funcionalidade ainda necessita de maior desenvolvimento e refinamento para alcançar o mesmo nível de maturidade. Este é um ponto que consideramos prioritário para futuras atualizações e aprimoramentos, visando ampliar as capacidades analíticas e educativas da ferramenta.

Figura 27 – Código utilizado para criar a simulação física de queda livre no *Modela3D*.

```
Ambiente({
  lugar: "parque"
})
Caixa({
  posicao: [0, -0.5, 0],
  largura: 100,
  altura: 1,
  comprimento: 90,
  imagem: "grama",
  id: "chão"
})
ModeloGLB({
  modelo: "laranjeira",
  escala: [10,10,10]
})
Esfera({
  posicao: [10, 25, -5],
  raio: 0.5,
  massa: 1,
  cronometro: true,
  pararAoColidirEm: "chão",
  cor: "#ED9138",
  som: true
})
```

Fonte: autoria própria.

4.3 Experiências em sala de aula

Após os primeiros testes de modelagem sem o envolvimento de terceiros, chegou o momento de testar as potencialidades pedagógicas do “Modela3D” com turmas de alunos. Todas as experiências relatadas a seguir foram realizadas no LABINFO, Laboratório de Informática do CCHE, localizado na sede centro do Campus VI da UEPB, Monteiro.

4.3.1 Modelando o Sistema Solar

A Semana Acadêmica do CCHE (SEMAC) é um evento promovido pelo Centro de Ciências Humanas e Exatas (CCHE) da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), sediado no município de Monteiro/PB. Este evento teve sua primeira edição em 2008 e, desde então, ocorria a cada dois anos. Entretanto, devido à pandemia de COVID-19, sua realização foi interrompida, sendo a última edição realizada em 2018. Após um hiato mais de quatro anos, a 7ª edição do evento foi realizada de 06 a 10 de novembro de 2023, marcando o retorno das atividades presenciais como parte do III Congresso Universitário

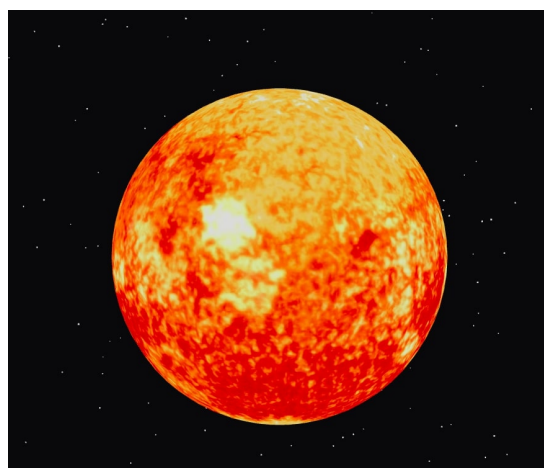
da UEPB, com o tema “Diversidade, equidade, inclusão social e digital na UEPB”.

Durante a SEMAC de 2023, ministramos um minicurso intitulado “*Matemática além do plano: introdução à modelagem 3D*”, no qual os participantes tiveram a oportunidade de explorar conceitos de geometria espacial por meio da *Modela 3D*. O foco do minicurso foi a modelagem do sistema solar, onde os alunos trabalharam com a escala dos corpos celestes, a texturização dos planetas e o posicionamento adequado dos objetos no espaço tridimensional.

Uma das atividades principais envolveu a criação do Sol e dos planetas ao redor, utilizando o comando `Luz()` para simular a emissão de luz a partir do Sol. A nossa estrela foi representada por uma esfera texturizada e configurada para emitir luz. O código-fonte para a modelagem do Sol pode ser visto na Figura 28.

Figura 28 – Criação da esfera que simula o sol.

```
Luz({  
  intensidade: 1000  
})  
  
// Sol  
Esfera({  
  imagem: 'sol',  
  emitirLuz: true,  
  intensidadeLuz: 0.8,  
  animacao: 'rotacao-y'  
})
```



Fonte: autoria própria.

Durante o minicurso, os participantes aplicaram o conceito de raio da esfera, o posicionamento no espaço e a relação matemática necessária para alinhar corretamente os planetas, levando em consideração suas escalas em comparação com o Sol. A atividade permitiu explorar, de maneira prática e interativa, conceitos fundamentais de geometria espacial e escalas astronômicas. A Figura 29 demonstra o engajamento dos alunos enquanto trabalhavam na modelagem do sistema solar, focados na criação e no posicionamento dos planetas no espaço tridimensional.

Ao término do minicurso, os alunos concluíram a modelagem completa dos planetas no sistema solar. Posteriormente, foi apresentado um exemplo prático de como a ferramenta de modelagem 3D pode ser aplicada ao estudo das estações do ano, enfatizando a influência da inclinação do eixo terrestre, de aproximadamente 23° , nas variações climáticas sazonais ao longo da translação da Terra. Na Figura 30, observa-se a turma de alunos e a projeção da simulação que ilustra como a inclinação do eixo terrestre afeta as estações, um dos conceitos discutidos durante o minicurso. Curiosamente, como o evento envolvia os quatro

Figura 29 – Alunos durante a modelagem do sistema solar no minicurso.



Fonte: autoria própria.

cursos oferecidos pelo CCHE, uma das participantes era discente do curso de Ciências Contábeis. Mesmo assim, a estudante demonstrou bastante entusiasmo em utilizar a ferramenta e completar a modelagem do Sistema Solar.

Figura 30 – Participantes do minicurso com a modelagem das estações do ano ao fundo.



Fonte: autoria própria.

Este minicurso teve como objetivo proporcionar uma experiência enriquecedora tanto para os ministrantes quanto para os participantes, permitindo a expansão de conhecimentos em matemática, geometria espacial, astronomia, física e modelagem 3D. Acreditamos que abordagens ativas de aprendizado incentivam maior engajamento dos alunos nas atividades, facilitando a compreensão e aplicação de conceitos matemáticos em situações reais.

4.3.2 Aulas de geometria espacial e poliedros regulares

No contexto do ensino de geometria espacial, a construção e manipulação de sólidos geométricos desempenham um papel crucial no desenvolvimento da compreensão dos conceitos fundamentais dessa área. Assim, com o intuito de promover um aprendizado

mais ativo e significativo, foram realizadas intervenções práticas nas turmas de Desenho Geométrico dos semestres letivos 2024.1 (noturno) e 2024.2 (diurno). O componente Desenho Geométrico é obrigatório no currículo do curso de Licenciatura em Matemática do Campus VI da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). As atividades envolveram a criação de diversos sólidos geométricos, como esferas, caixas, pirâmides e tetraedros, proporcionando aos alunos a oportunidade de aprofundar seu entendimento sobre conceitos essenciais, tais como localização, orientação, representação e planificação. A capacidade de visualizar esses sólidos sob diferentes perspectivas, bem como de realizar suas planificações, permitiu a assimilação mais concreta desses conceitos.

4.3.2.1 Primeira intervenção

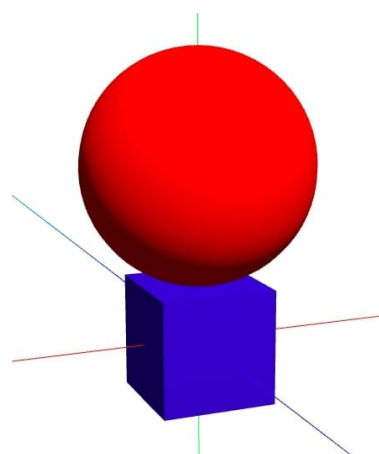
A seguir, são apresentadas as questões propostas e suas respectivas análises para a intervenção realizada na turma noturna de Desenho Geométrico do semestre 2024.1.

Questão 1: Construa uma esfera vermelha exatamente sobre uma caixa azul

Essa questão aborda a habilidade de visualização tridimensional, solicitando aos alunos que modelem e posicionem uma esfera de forma precisa sobre uma caixa. O desafio consistia em compreender a relação entre as posições relativas dos objetos, ajustando a esfera de modo que ela estivesse exatamente posicionada sobre a caixa. A tarefa visava também ao desenvolvimento da compreensão de conceitos como alinhamento, dimensões dos sólidos e posicionamento no espaço tridimensional, considerando as propriedades de cada sólido. A Figura 31 apresenta a solução de um dos alunos, evidenciando o uso de coordenadas espaciais para definir a posição dos objetos.

Figura 31 – Solução de um dos estudantes para o problema.

```
Cubo({  
  cor:"blue",  
  posicao:[0,0,0]  
})  
  
Esfera({  
  cor:"red",  
  posicao:[0,1.5,0]  
})
```



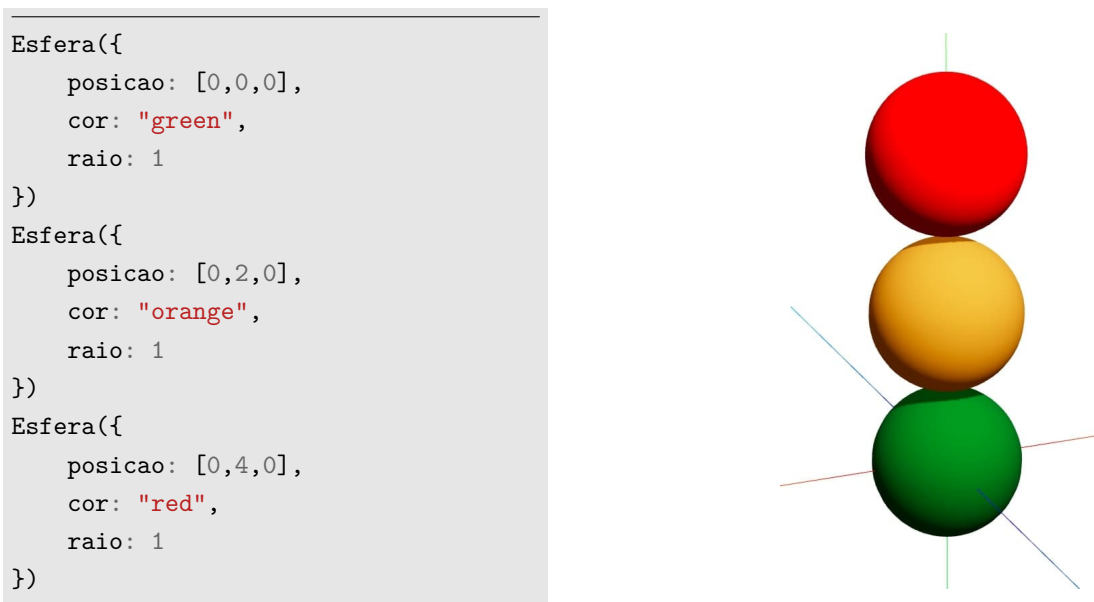
Fonte: autoria própria.

Questão 2: Construa e posicione três esferas, uma sobre a outra, com as cores indicadas na imagem

Essa atividade foi crucial para reforçar o entendimento sobre alinhamento e posicionamento de objetos no espaço tridimensional. Ao posicionar três esferas, uma sobre a outra, os alunos foram desafiados a garantir que todas estivessem corretamente centralizadas e tangenciando-se. Isso exigiu uma combinação de habilidades de visualização espacial e de raciocínio lógico-matemático, considerando o raio e o diâmetro das esferas. Embora alguns alunos tenham recorrido a uma solução por tentativa e erro, foram incentivados a pensar matematicamente para posicionar os objetos de forma precisa.

A Figura 32 mostra a solução de um estudante e a Figura 33 mostra a turma concentrada na resolução da atividade proposta.

Figura 32 – Solução de um dos estudantes para o problema.



Fonte: autoria própria.

Figura 33 – Alunos durante a resolução da atividade de posicionamento das três esferas.



Fonte: autoria própria.

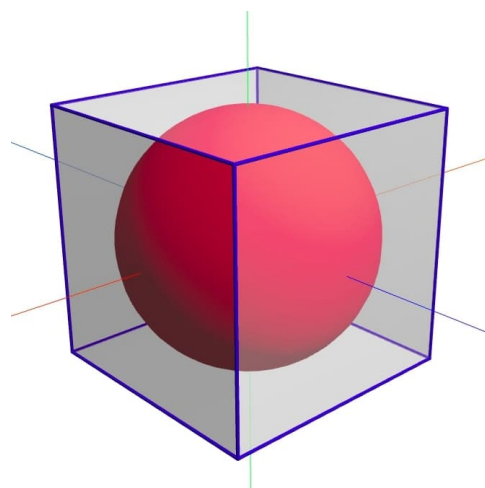
Questão 3: Construa uma esfera vermelha inscrita em uma caixa com opacidade de 0,5 e mostre as arestas da caixa

Neste exercício, os alunos foram desafiados a inscrever uma esfera dentro de uma caixa, ajustando as dimensões de modo que a esfera tocasse as faces internas da caixa ou, alternativamente, ampliando a caixa para que a esfera ficasse inscrita. O uso de opacidade para a caixa permitiu uma visualização mais detalhada da interação entre os sólidos, destacando o conceito de inscrição geométrica. A Figura 34 mostra a solução apresentada por um dos alunos.

Figura 34 – Solução de um dos estudantes para o problema.

```
Esfera({
  posicao: [0,0,0],
  cor: "red",
  raio: 1
})

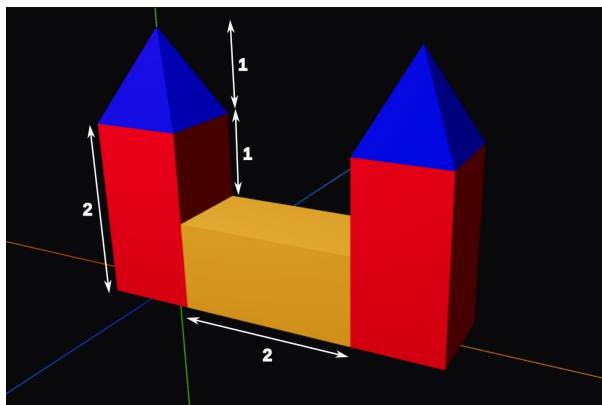
Caixa({
  altura: 2,
  largura: 2,
  comprimento: 2,
  posicao: [0,0,0],
  cor: "white",
  opacidade: 0.5,
  mostrarArestas: true,
})
```



Fonte: autoria própria.

Questão 4: Construa o castelo conforme o modelo usando os objetos pirâmide e caixa, seguindo as dimensões especificadas

Figura 35 – Castelo de exemplo com dimensões especificadas

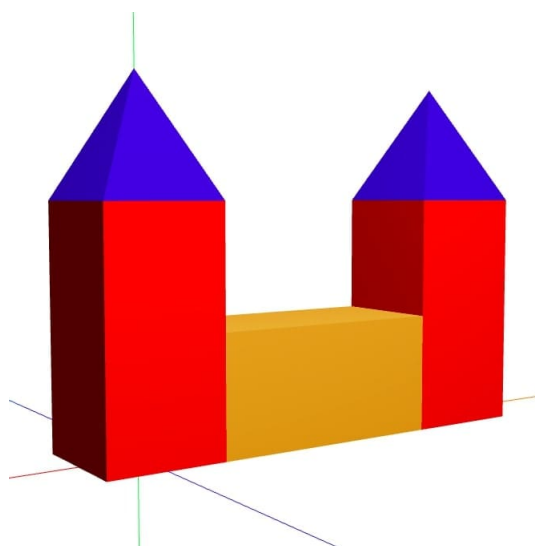


Fonte: autoria própria.

Essa questão baseia-se no clássico brinquedo “Brincando de Engenheiro”, que envolve a construção com peças de madeira de formatos variados. O modelo é mostrado na Figura 35. O exercício exigiu um alto nível de atenção aos detalhes e à combinação de sólidos para formar um objeto mais complexo. A Figura 36 mostra a solução enviada por um dos participantes. A Figura 37 mostra a turma implementando o código-fonte responsável por esta modelagem.

Figura 36 – Solução de um dos estudantes para o problema.

```
Caixa({
  cor:"red",
  posicao:[0,1,0],
  altura:2
})
Caixa({
  cor:"orange",
  posicao:[1.5,0.5,0],
  largura:2
})
Caixa({
  cor:"red",
  posicao:[3,1,0],
  altura:2
})
Piramide({
  cor:"blue",
  posicao:[0,2.5,0],
  rotacao:[0,3.1416/4,0,]
})
Piramide({
  cor:"blue",
  posicao:[3,2.5,0],
  rotacao:[0,3.1416/4,0,]
})
```

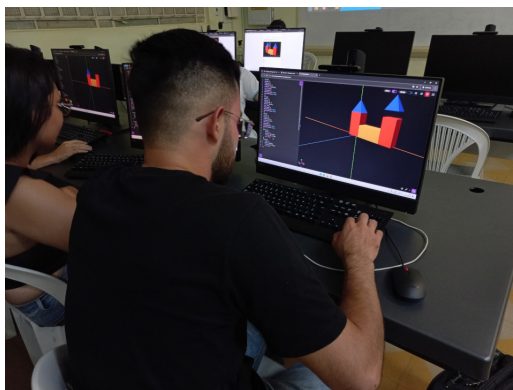


Fonte: autoria própria.

Questão 5: Construa um tetraedro com arestas de 2 unidades. Mostre as arestas e os vértices. Planifique-o e, com a ferramenta marcador, conte as arestas, vértices e faces

A última questão visou desenvolver habilidades de visualização espacial e aprofundar o entendimento geométrico. Ao construir o tetraedro, os alunos identificaram suas arestas e vértices, e posteriormente o planificaram, transferindo o sólido tridimensional para o plano bidimensional. Essa transição proporcionou uma exploração prática das propriedades geométricas, como evidenciado na solução de um dos alunos na Figura 38 e

Figura 37 – Estudantes construindo um castelo posicionando sólidos geométricos.

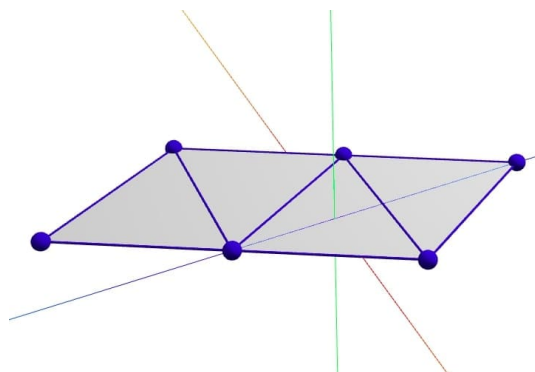


Fonte: autoria própria.

no desenvolvimento da solução, ilustrado pela Figura 39.

Figura 38 – Solução de um dos estudantes para o problema.

```
Tetraedro({  
  lado: 2,  
  mostrarArestas: true,  
  mostrarVertices: true,  
  planificar: true,  
  cor: "white"  
})
```



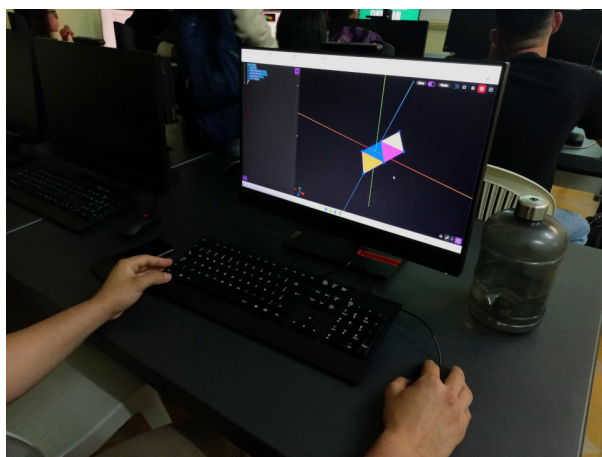
Fonte: autoria própria.

A aplicação das atividades e o uso de software de modelagem 3D contribuíram significativamente para o desenvolvimento das habilidades de visualização espacial, raciocínio lógico e compreensão geométrica. A visualização interativa de sólidos possibilitou uma compreensão mais aprofundada e prática dos conceitos, demonstrando o potencial das ferramentas digitais no ensino de geometria espacial. Além disso, a incorporação de tecnologias digitais no processo educacional promoveu a autonomia dos alunos e preparou-os para lidar com um mundo cada vez mais digital.

4.3.2.2 Segunda intervenção

O plano de aula, que está detalhado no Apêndice A, foi desenvolvido com o objetivo de proporcionar aos alunos uma compreensão mais profunda dos conceitos de geometria espacial por meio da criação e manipulação de objetos 3D utilizando a *Modela3D*. Essa atividade foi usada durante a intervenção na turma diurna de Desenho Geométrico do semestre 2024.2.

Figura 39 – Estudante planificando o tetraedro.



Fonte: autoria própria.

O plano de aula foi dividido em diferentes momentos, começando com uma introdução à ferramenta *Modela3D* e culminando em desafios práticos que exploravam conceitos de opacidade, coordenadas espaciais e volumes de sólidos tridimensionais. Durante o desenvolvimento das atividades, os alunos foram desafiados a criar cubos e esferas, calcular volumes e texturizar objetos, proporcionando uma experiência imersiva e interativa que ajudou a consolidar os conceitos geométricos de maneira prática.

No segundo momento da aula, os alunos foram introduzidos ao conceito de coordenadas espaciais e desafiados a posicionar cubos em uma configuração específica. A Figura 40 mostra os alunos interagindo com a ferramenta para a construção da cena.

Figura 40 – Estudantes durante o desafio de posicionamento de cubos.



Fonte: autoria própria.

No terceiro momento da aula, os alunos foram introduzidos ao comando `Ambiente()`, que permite modificar o fundo da cena utilizando cores ou imagens em 360°, criando uma experiência mais imersiva. O desafio proposto foi a criação de uma esfera inscrita em um

cubo, ajustando a opacidade da esfera para 50%. Além disso, os alunos deveriam criar um cenário imersivo e realista, aplicando um fundo específico, como mostra a Figura 41.

Figura 41 – Estudantes durante a resolução do segundo desafio, criando uma esfera inscrita em um cubo com opacidade ajustada em um ambiente.



Fonte: autoria própria.

Em seguida, foi promovida uma discussão sobre o conceito de porcentagem, explorando como ele se aplica à opacidade dos objetos. Outro ponto importante abordado foi o cálculo de volumes. Utilizando a propriedade `calcularVolume: true`, os alunos compararam o volume da esfera e do cubo. A diferença entre os volumes pode ser explicada com base nas relações geométricas entre o volume dos dois sólidos, reforçando o entendimento de que o volume de uma esfera inscrita (com raio de 0.5 unidades) é aproximadamente 52,4% do volume de um cubo de lado medindo 1 unidade. De fato,

- **Volume da esfera:** $V = \frac{4}{3}\pi(0.5)^3 = \frac{4}{3}\pi \times 0.125 \approx 0.5236 u.v.$
- **Volume do cubo:** $V = (1)^3 = 1 u.v.$

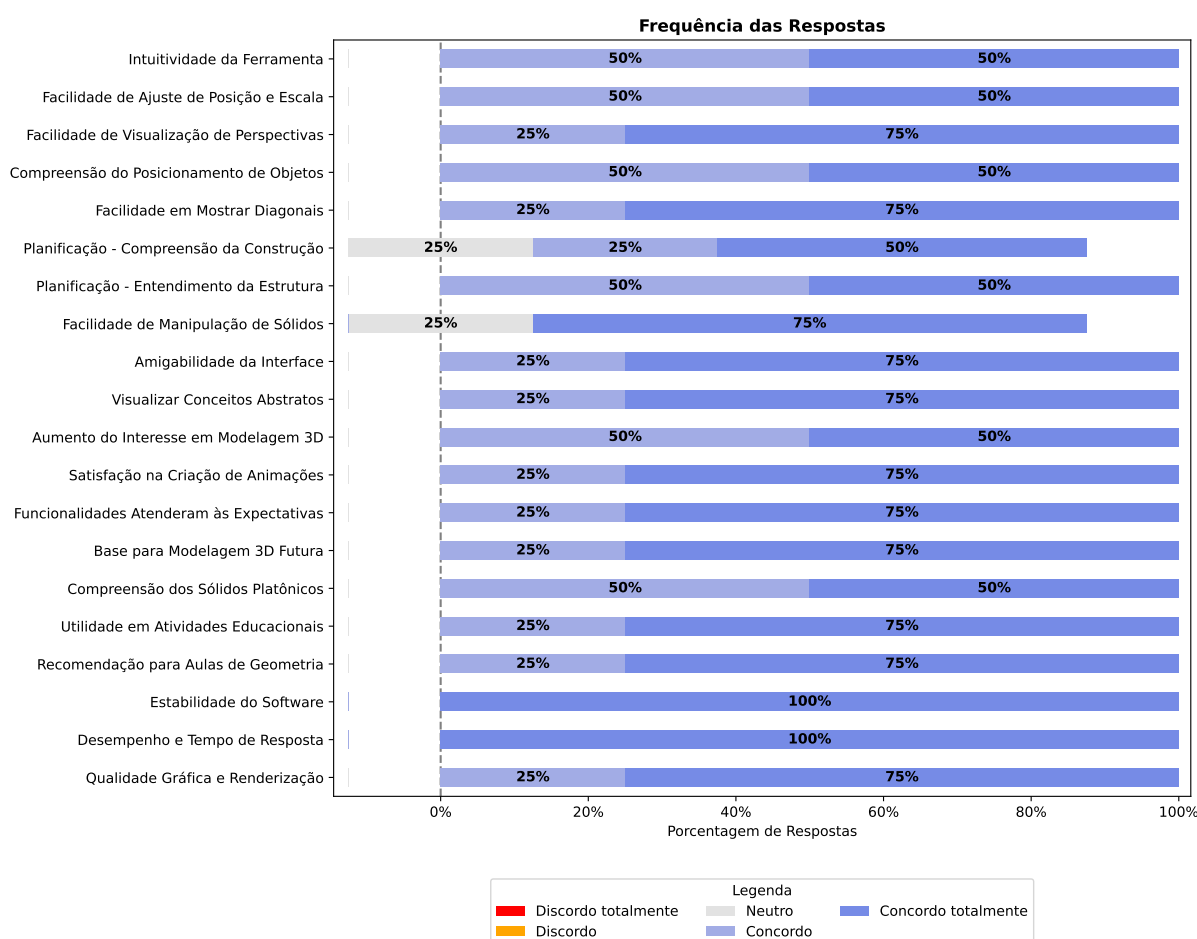
Essa comparação proporcionou uma compreensão mais profunda sobre a relação entre formas tridimensionais, auxiliando os alunos a desenvolverem uma visão espacial mais apurada.

A avaliação foi realizada de forma contínua, considerando a participação e o desempenho dos alunos nas atividades práticas. Os desafios de modelagem propostos foram desenvolvidos em grupos, promovendo a colaboração e a troca de ideias entre os participantes. O uso do *Modela3D* como ferramenta pedagógica se mostrou eficaz no ensino de conceitos espaciais, permitindo uma visualização concreta e intuitiva dos sólidos geométricos.

4.4 Avaliação dos estudantes sobre o uso da ferramenta

Após a segunda intervenção citada na seção anterior, solicitamos aos alunos que fizessem uma avaliação sobre o uso da *Modela3D* para o estudo de sólidos geométricos. Para isso foi usado um questionário baseado na escala Likert. A escala, com cinco níveis de resposta variando de “discordo totalmente” a “concordo totalmente”, permitiria analisar o grau de concordância dos alunos em relação a diferentes afirmações sobre a eficácia, facilidade de uso e o impacto da ferramenta em sua compreensão dos conceitos de geometria espacial.

Figura 42 – Frequência das respostas da escala Likert sobre a percepção dos alunos em relação à ferramenta de modelagem 3D utilizada para o estudo de sólidos geométricos.



Fonte: autoria própria.

Os dados apresentados na Figura 42 mostram a distribuição das respostas dos alunos em relação às afirmações sobre o uso da *Modela3D*. Para a afirmação “A ferramenta para marcar vértices e arestas dos sólidos foi intuitiva”, a maioria dos alunos indicou concordância, sinalizando que a interface da ferramenta é adequada para navegação intuitiva e facilitando o uso independente para a maioria dos usuários.

No que se refere ao item “Foi simples ajustar a posição, rotação e escala dos objetos

no software”, os dados apontam uma resposta predominante de concordância entre os alunos. Este aspecto pode indicar que a abordagem utilizada para a manipulação de objetos atendeu às expectativas dos usuários, facilitando a exploração dos sólidos geométricos no ambiente 3D e buscando promover uma melhor compreensão das propriedades espaciais dos objetos.

Quando questionados sobre a eficácia da ferramenta em facilitar a visualização de diferentes perspectivas dos sólidos no espaço, os alunos em sua maioria responderam de forma positiva. Isso sugere que a modelagem tridimensional presente na ferramenta é de grande ajuda na exploração visual dos sólidos, permitindo uma observação mais completa de projeções e perspectivas. Esse resultado reforça o papel da ferramenta em reduzir a complexidade da visualização espacial, comum nos métodos de ensino bidimensionais.

Outro ponto importante levantado pelo questionário foi o entendimento do posicionamento dos objetos no espaço. A maioria dos alunos relatou ter compreendido o uso da ferramenta para esse fim, o que demonstra a capacidade da ferramenta de reforçar a noção de orientação e disposição espacial dos objetos. Esse resultado aponta para a contribuição da ferramenta na construção do conhecimento espacial necessário ao entendimento mais aprofundado de aspectos relacionados aos sólidos geométricos.

No item referente à facilidade de visualização de diagonais internas e das faces dos sólidos platônicos, a maioria dos alunos afirmou que a ferramenta foi útil nesse aspecto. A funcionalidade de visualização interna facilita o entendimento das relações geométricas entre os elementos dos sólidos, como vértices e arestas, que muitas vezes são difíceis de observar em representações bidimensionais. Esse recurso possibilita uma compreensão mais clara das estruturas internas e da variação na quantidade de diagonais a depender do formato das faces ou da quantidade de faces dos sólidos.

Ao abordar a animação de planificação dos sólidos, os alunos indicaram que esse recurso contribuiu para o entendimento da construção do objeto, com a maior parte das respostas posicionadas em concordância. Essa funcionalidade ajuda a traduzir a teoria em uma prática visual, permitindo que os alunos visualizem a transformação dos sólidos em planos, o que auxilia na compreensão das relações entre as faces e arestas. Esse é um aspecto essencial para o estudo dos sólidos, especialmente na educação básica, onde os conceitos abstratos podem ser difíceis de assimilar.

Em relação à afirmação “Foi fácil manipular os sólidos para alterar suas propriedades”, observou-se uma predominância de respostas concordantes, embora alguns alunos tenham se mantido neutros. Essa resposta sugere que, embora a ferramenta permita manipulação, alguns usuários podem ter enfrentado dificuldades pontuais, talvez devido à falta de familiaridade inicial com a sintaxe do código-fonte. Esse resultado aponta para uma possível área de melhoria, com o desenvolvimento de tutoriais mais acessíveis que orientem os usuários no uso dessa funcionalidade.

A função de mensurar distâncias entre vértices, disponibilizada pela ferramenta de régua, foi amplamente apreciada, com a maioria dos alunos respondendo de forma positiva. Esse recurso é fundamental para que os alunos possam medir e entender as proporções dos sólidos e seus elementos. A ferramenta de medida precisa facilita a abordagem prática dos conteúdos, permitindo que os alunos relacionem a teoria à visualização direta das distâncias e dimensões entre os componentes do objeto.

A interface geral da ferramenta foi avaliada como amigável pela maioria dos alunos, com comentários indicando que a navegação entre os menus e funcionalidades é clara e direta. A satisfação com a interface reflete a facilidade de uso, algo essencial para garantir que os alunos, mesmo iniciantes, se sintam confortáveis e focados nos conteúdos geométricos, sem frustrações com comandos excessivamente complexos ou uma interface de difícil manipulação.

Com relação ao interesse em modelagem 3D, a resposta dos alunos foi positiva, o que sugere que a utilização da ferramenta desperta maior curiosidade e motivação em estudar a modelagem espacial. Esse impacto positivo pode ser explicado pela oportunidade de vivenciar a prática da modelagem, o que permite ao aluno associar o aprendizado de geometria com a realidade prática de profissões que utilizam essa habilidade.

No questionário, também havia uma questão aberta que solicitou aos alunos um texto breve sobre suas impressões a respeito da utilização de uma ferramenta de modelagem 3D para o estudo de sólidos geométricos, proporcionando uma análise qualitativa sobre a percepção dos mesmos quanto à contribuição da tecnologia no ensino de conceitos matemáticos. De maneira geral, os alunos demonstraram uma percepção positiva, considerando a ferramenta uma aliada para uma compreensão mais prática e visual dos sólidos geométricos. A maioria relatou que a visualização tridimensional facilitou o entendimento dos elementos de cada sólido, como faces, vértices e arestas, possibilitando a observação de características que seriam difíceis de assimilar apenas com representações bidimensionais.

Além da clareza proporcionada, os alunos destacaram a interface intuitiva do software, embora alguns encontrassem dificuldades iniciais em memorizar comandos específicos. Em termos de aplicabilidade, os alunos consideraram a ferramenta de modelagem 3D útil para tornar conceitos matemáticos abstratos mais concretos, permitindo, inclusive, trabalhar com valores e dimensões exatas, o que acrescentou maior clareza na compreensão dos sólidos.

Outro ponto relevante levantado nas respostas foi o potencial da ferramenta para estimular habilidades como imaginação e raciocínio espacial, o que, segundo os alunos, amplia o engajamento e a capacidade de aprendizado. Os alunos mencionaram ainda que recursos adicionais, como tutoriais e exemplos práticos, poderiam ser úteis para aprimorar a experiência de uso. De maneira geral, as respostas refletem um ponto de vista coletivo de que a tecnologia oferece um ambiente de aprendizagem dinâmico, valorizado por facilitar

o entendimento de conceitos geométricos e matemáticos através da experimentação e da visualização tridimensional.

A avaliação dos alunos sobre o uso da ferramenta de modelagem 3D para o ensino de sólidos geométricos foi positiva. A ferramenta mostrou-se eficiente no apoio ao aprendizado de conceitos geométricos complexos, principalmente por meio da visualização interativa e da manipulação direta dos objetos. Com alguns aprimoramentos específicos na interface e tutoriais mais aprofundados, acreditamos que o software tem potencial para se tornar uma ferramenta ainda mais útil para o ensino de conceitos matemáticos, geométricos e físicos.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou o desenvolvimento da ferramenta *Modela3D*, uma plataforma gratuita e online de modelagem tridimensional com foco educacional, especialmente voltada para o ensino de geometria espacial. Essa iniciativa foi motivada pela crescente demanda por recursos digitais que integrem tecnologia e educação, promovendo abordagens mais acessíveis para o aprendizado de conceitos matemáticos.

O desenvolvimento do *Modela3D* foi fundamentado em conceitos matemáticos e tecnológicos. Entre as contribuições matemáticas, destaca-se a utilização da fórmula de HCR, que foi essencial para viabilizar a criação de sólidos geométricos com base em propriedades familiares aos usuários, como o comprimento das arestas, especialmente na modelagem de sólidos platônicos, como o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. A relação entre a matemática e a tecnologia demonstrou como conceitos abstratos podem ser traduzidos em funcionalidades práticas, e nos possibilitou perceber a aplicação de diversos conceitos matemáticos para resolver problemas reais durante o desenvolvimento da aplicação.

No aspecto tecnológico, o uso de bibliotecas modernas como Three.js e React foi determinante para a criação de uma interface funcional. A ferramenta permite a manipulação direta de objetos tridimensionais, oferecendo recursos como a importação de modelos tridimensionais e a aplicação de texturas personalizadas, ampliando as possibilidades de personalização da cena. Além disso, a inclusão de funcionalidades de simulação física, baseada em um motor de física integrado ao *software*, destacou o potencial do *Modela3D* como uma plataforma mais abrangente, que possibilita a exploração de conceitos básicos de física.

Neste trabalho, ressaltamos a relevância da transição da geometria plana para a geometria espacial e o papel das TDICs na educação. Essa transição, frequentemente desafiadora para os alunos, foi abordada por meio de representações interativas, que buscaram facilitar a compreensão de conceitos espaciais como posicionamento, escala, área e volume de sólidos geométricos. Nesse sentido, o *Modela3D* se apresentou como uma alternativa para estimular o desenvolvimento de habilidades de visualização espacial e raciocínio lógico.

A aplicação prática do *Modela3D* incluiu atividades com diferentes grupos de alunos, a exemplo do minicurso sobre modelagem do sistema solar e intervenções em aulas de Desenho Geométrico. Nessas atividades, os alunos tiveram a oportunidade de modelar corpos celestes, visualizar as estações do ano e resolver problemas envolvendo sólidos geométricos, utilizando a ferramenta como suporte. A análise dessas experiências revelou

os pontos fortes do *Modela3D*, com destaque para as funcionalidades de planificação e estipulação de medidas, que foram amplamente elogiadas pelos participantes.

A avaliação da ferramenta, por meio de questionários com escala Likert, indicou uma recepção positiva, especialmente em relação à interface intuitiva e à facilidade de uso. No entanto, a pesquisa também revelou áreas de melhoria, como a necessidade de criar tutoriais mais detalhados para iniciantes. Essas observações são fundamentais para guiar futuras atualizações e aprimoramentos da plataforma.

Outro ponto relevante foi a comparação do *Modela3D* com ferramentas consolidadas como o Geogebra. Embora o Geogebra ofereça uma gama mais ampla de ferramentas analíticas, o *Modela3D* proporcionou uma personalização de cenas mais simplificada e uma maior qualidade de renderização, além de proporcionar uma experiência mais adaptada ao público brasileiro, com interface e comandos em português.

As contribuições deste trabalho vão além da criação de um software educacional. O *Modela3D* abre novas perspectivas para o uso de ferramentas digitais no ensino de matemática, destacando a importância da integração entre tecnologia e educação. Pesquisas futuras poderiam explorar a ampliação dos recursos da ferramenta, incluindo a integração com realidade virtual e aumentada, a criação de jogos educativos e um aprimoramento na geração de gráficos em tempo real.

De maneira geral, o *Modela3D* se mostrou uma alternativa promissora aos métodos tradicionais de ensino. Além disso, este trabalho reforça a importância de recursos gratuitos no contexto educacional brasileiro, com foco em atender às necessidades específicas dos professores e alunos. Espera-se que as ideias aqui apresentadas inspirem futuras iniciativas e contribuam para um ensino mais alinhado às demandas do século XXI.

REFERÊNCIAS

- ARECCHI, A. V.; MESSADI, T.; KOSHEL, R. J. **Field Guide to Illumination**. Bellingham, WA: SPIE Press, 2007. Citado na página 34.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica, 2018. <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 06 ago. 2022. Citado na página 24.
- CNE. **Resolução CNE - Conselho Nacional de Educação / CP nº 4, de 29 de maio de 2024**. 2024. <<https://example-link-to-document>>. Dispõe sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial em Nível Superior de Profissionais do Magistério da Educação Escolar Básica. Citado nas páginas 16 e 17.
- DRAKE, N. They saw earth from space. here's how it changed them. **National Geographic**, March 2018. Citado na página 64.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. (Coleção formação de professores). ISBN 978-85-7496-147-7. Citado na página 37.
- GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. 1. ed. Porto Alegre, RS: Editora da UFRGS, 2009. Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil - UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica - Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. Citado na página 37.
- GOODWIN, M. **O que é uma API (interface de programação de aplicativos)?** 2024. Disponível em: <<https://www.ibm.com/br-pt/topics/api>>. Citado na página 38.
- KAUFMANN, H. Virtual environments for mathematics and geometry education. **Themes in science and technology education**, v. 2, n. 1-2, p. 131–152, 2011. Citado na página 20.
- KRULIK, S.; RUDNIK, J. A. **Reasoning and Problem Solving: A Handbook for Elementary School Teachers**. Massachusetts: Allyn and Bacon, 1993. Disponível em: <<https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED301459.pdf>>. Citado na página 23.
- LIVIO, M. **The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number**. Broadway Books, 2002. ISBN 9780767908153. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=9kvvAAAAMAAJ>>. Citado na página 50.
- LOPES, R. **Timeu-Crítias**. [S.l.]: Imprensa da Universidade de Coimbra / Coimbra University Press, 2013. (Classica Digitalia). ISBN 9789892605142. Citado na página 25.
- MAREK-CRNJAC, L. Platonic solids and their connection to garnets. In: SCHWEITZER, H.; METZGER, J. (Ed.). **Garnet: Metamorphic History, Composition, Crystallization**. New York: Nova Science Publishers, Inc., 2011. cap. 9, p. 1–20. ISBN 978-1-61470-572-7. Citado nas páginas 25 e 26.

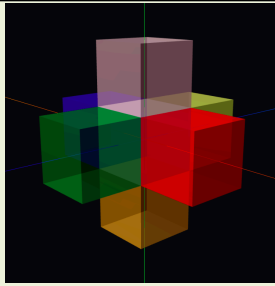
- NASA Earth Observatory. **Earth Viewed by Apollo 8**. 2008. Acesso em: 19 nov. 2024. Disponível em: <<https://earthobservatory.nasa.gov/images/36019/earth-viewed-by-apollo-8>>. Citado na página 65.
- NCTM. **Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar**. Lisboa: APM & IIE, 1991. Tradução portuguesa do original em inglês de 1989. Citado na página 23.
- OLAWANLE, J. **What is a Framework? Software Frameworks Definition**. 2022. Disponível em: <<https://www.freecodecamp.org/news/what-is-a-framework-software-frameworks-definition/>>. Citado na página 38.
- PAPERT, S. Constructionism: A new opportunity for elementary science education. 1986. Citado na página 24.
- PEDUZZI, P. **OCDE avalia pensamento criativo de estudantes em 64 países Singapura lidera ranking. Desempenho do Brasil é abaixo da média**. 2024. Acesso em: 1 nov. 2024. Disponível em: <<https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2024-06/ocde-avalia-pensamento-criativo-de-estudantes-em-64-paises>>. Citado na página 22.
- RAJPOOT, H. C. **HCR's or H. Rajpoot's Formula for Regular Polyhedron**. Gorakhpur-273010 (UP), India: [s.n.], 2014. HCR's Formula for Regular N-Polyhedron derived by H. C. Rajpoot (2014). Citado nas páginas 27, 28, 29, 31, 33, 34 e 42.
- SCHECHTER, S. **Everything You Need to Know About Using GLB Files**. 2020. Disponível em: <<https://3dcloud.com/glb-files/>>. Citado na página 60.
- SCHECHTER, S. **OBJ file format – samples and uses: Marxent**. 2020. Disponível em: <<https://www.marxentlabs.com/obj-files/>>. Citado na página 60.
- SCHERER, D.; DUBOIS, P.; SHERWOOD, B. Vpython: 3d interactive scientific graphics for students. **Computing in Science & Engineering, IEEE**, v. 2, n. 5, p. 56–62, 2000. Citado na página 21.
- SORBY, S. A. Spatial abilities and their relationship to effective learning of 3-d modeling software. **Engineering Design Graphics Journal**, v. 64, n. 3, 2000. Citado na página 20.
- SORBY, S. A. Developing 3d spatial skills for engineering students. **Australasian Journal of Engineering Education**, Taylor & Francis, v. 13, n. 1, p. 1–11, 2007. Citado na página 20.
- VALENTE, J. A. Diferentes usos do computador na educação. In: **Computadores e conhecimento: repensando a educação**. [S.l.]: Universidade Estadual de Campinas, Núcleo de Informática Aplicada à Educação, 1993. Citado na página 24.

APÊNDICE A – PLANO DE AULA

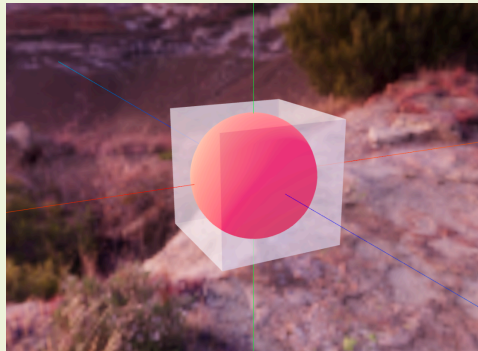


PLANO DE AULA

<p>Objetivo Geral: Compreender e aplicar conceitos de geometria espacial através da criação e manipulação de objetos 3D utilizando a ferramenta Modela3D.</p>
<p>Competência (s) e Habilidade (s):</p> <p>Competência específica 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.</p> <p>(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.</p>
<p>Objeto (s) de aprendizagem:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Noções de geometria espacial: cubos, esferas, arestas, vértices, diagonais. 2. Aplicação de conceitos de opacidade e porcentagem na modelagem de objetos. 3. Criação de ambientes virtuais imersivos e interativos.
<p>Metodologia: A aula será desenvolvida com base em demonstrações práticas e atividades colaborativas. Os alunos irão explorar a interface da ferramenta Modela3D e realizar atividades de criação de objetos e ambientes 3D, com foco na aplicação de conceitos geométricos e espaciais.</p>
<p>Avaliação: A avaliação será contínua, com base na participação dos alunos durante a aula prática e nas atividades de modelagem.</p>
<p>Recursos didáticos: Computadores com acesso ao software Modela3D, projetor para demonstrações, exercícios práticos, imagens de referência para atividades de modelagem.</p>
<p>Desenvolvimento</p>
<ul style="list-style-type: none"> ● 1º Momento: Introdução à ferramenta Modela3D <ul style="list-style-type: none"> ○ Apresentação da interface da Modela3D: área de código, área de renderização e ferramentas principais. ○ Demonstração da criação de um objeto simples: um cubo. ○ Comando básico: Cubo(). ○ Explicação das propriedades do cubo: lados, faces, cor, arestas, vértices, diagonais e opacidade. ● 2º Momento: Atividade prática - Posicionamento de cubos <ul style="list-style-type: none"> ○ Desafio 1: posicionar 7 cubos em uma configuração específica, seguindo uma imagem de base.



- Aplicação de conceitos de coordenadas espaciais e proporções.
- **3º Momento:** Ambientes e Texturização
 - Apresentação do comando `Ambiente()`: modificação do fundo da cena com cores ou imagens 360° para maior imersão.
 - **Desafio 2:** Criação de uma esfera inscrita em um cubo, com opacidade ajustada para 50% e criação de um cenário imersivo e realista utilizando um fundo específico, seguindo a imagem abaixo.



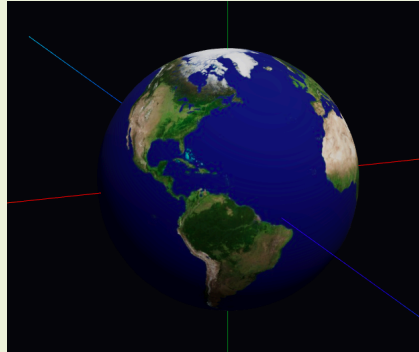
- Discussão sobre porcentagem e aplicação no conceito de opacidade.
- Discussão sobre volumes:
 - Utilização da propriedade `calcularVolume: true` para calcular e comparar o volume da esfera e do cubo.
 - Diferença entre os volumes: introdução aos conceitos de volume da esfera inscrita e do cubo com base nas equações.
 - Esfera: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
 - Cubo: $V = lado^3$
 - Relação entre o volume da esfera e do cubo: demonstração de que o volume da esfera inscrita (com raio de 0.5 u.) é aproximadamente 52,4% do volume do cubo (de lado 1 u.).
 - Esfera: $V \approx 0,524 u. v.$

- Cubo: $V = 1 u. v.$

- Discussão sobre a importância dessa relação na geometria e no entendimento de sólidos tridimensionais.

- **4º Momento:** Texturização de objetos

- Apresentação da adição de texturas em objetos.
- **Desafio 3:** Aplicação da textura do um planeta Terra em uma esfera.



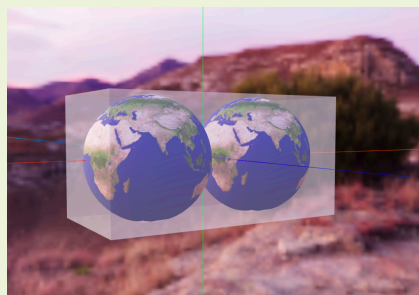
- Discussão sobre o uso de mapas de textura e seu impacto visual.

- **5º Momento:** Animação e Movimento

- Apresentação da propriedade *animacao: "rotacao-y"* para criar uma animação de rotação contínua em objetos.
- **Desafio 4:** adicionar rotação à esfera com textura do planeta Terra, simulando o movimento de rotação do planeta.

- **6º Momento:** Atividade prática - Criação de Caixa com esferas

- **Desafio 5:** criar uma caixa que acomode duas esferas tangentes, utilizando o conceito de diâmetro para determinar a largura da caixa.



- Discussão sobre o conceito de tangência e sua aplicação na modelagem 3D.