UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATHEUS FELIPE SILVA DE SOUZA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: UM ESTUDO INTRODUTÓRIO À EQUAÇÃO DA ONDA COM SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

CAMPINA GRANDE - PB
2024

MATHEUS FELIPE SILVA DE SOUZA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: UM ESTUDO INTRODUTÓRIO À EQUAÇÃO DA ONDA COM SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais.

Orientador: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

CAMPINA GRANDE - PB
2024

S729e Souza, Matheus Felipe Silva de.

Equações Diferenciais Parciais [manuscrito] : um estudo introdutório à equação da onda com simulações numéricas / Matheus Felipe Silva de Souza. - 2024.

76 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. Aldo Trajano Louredo, Departamento de Matemática - CCT".

1. Equações Diferenciais Parciais. 2. Equação da Onda. 3. GeoGebra. 4. Python. I. Título

21. ed. CDD 515.353

Elaborada por Lêda Cristina Diniz Andrade - CRB - 15/1032 BC

MATHEUS FELIPE SILVA DE SOUZA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: UM ESTUDO INTRODUTÓRIO À EQUAÇÃO DA ONDA COM SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em: 14/11/2024.

Documento assinado eletronicamente por:

- **Emanuela Régia de Sousa Coelho** (***.622.214-**), em **04/12/2024 21:47:28** com chave **80a4c9c0b2a211efb82b06adb0a3afce.**
- **Pammella Queiroz de Souza** (***.541.264-**), em **05/12/2024 19:39:52** com chave **d7951886b35911ef862606adb0a3afce.**
- **Aldo Trajano Louredo** (***.317.454-**), em **04/12/2024 16:40:23** com chave **9a556594b27711ef975e1a1c3150b54b.**

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.
Tipo de Documento: Termo de Aprovação de Projeto Final
Data da Emissão: 05/12/2024
Código de Autenticação: 08134d

À minha mãe, pelo incentivo, confiança e exemplo, dedico.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por me abençoar, diariamente, em minha jornada, me proporcionando saúde, sabedoria e coragem.

Agradeço à minha mãe, Josivânia, por ser minha base. Obrigado pelos ensinamentos e por toda paciência e compreensão referentes à minha dedicação exclusiva aos estudos. Agradeço também ao meu pai, Deuzanilton, pelo apoio incondicional. À minha avó, Dona Cila, pelo seu exemplo e amor. Aos meus irmãos, Diangni e Layza, pelos momentos juntos vividos. À minha família, pela confiança depositada em mim.

Agradeço à minha querida esposa, Jéssica Paz, com a qual compartilhei cada passo dessa caminhada. Você faz parte dessa conquista.

Ao meu professor e orientador, Aldo Trajano Lourêdo, meu sincero agradecimento pela oportunidade de me orientar em um Projeto de Iniciação Científica. Agradeço, ainda, pela compreensão e paciência durante esse percurso. Agradeço pelas aulas de Variáveis Complexas ensinadas com amor. Agradeço por confiar em meu potencial. Agradeço pelos conselhos e ensinamentos. Agradeço, por fim, pelo companheirismo e pela excelente orientação. Espero que estejamos juntos em outros projetos.

Agradeço aos meus padrinhos, Josiel e Lucileia. A esta por toda torcida e carinho. Àquele por ter me inspirado a cursar Matemática. Vocês foram e são fundamentais em minha trajetória.

Agradeço ao meu eterno professor e amigo, Zé Carlos, por todos os conselhos e convites para cursar Letras Português. Obrigado por tudo.

Agradeço, ainda, aos meus colegas de curso, que tornaram os dias mais leves e divertidos, em especial a João Batista, por todos os momentos compartilhados na UEPB.

Minha gratidão aos professores da UEPB, por todo o aprendizado compartilhado. Agradeço especialmente a Gustavo da Silva Araújo, pela confiança depositada em mim em meu primeiro PIBIC. A Vandenberg Lopes Vieira, pela amizade e ensinamentos, eu agradeço. A Joelson Pimentel de Almeida, pelos conselhos e ensinamentos em história da Matemática, meu muito obrigado. Agradeço a Maxwell Aires da Silva, por sua parceria e exemplo.

Agradeço às professoras pelo aceite em participar da minha banca. À Profa. Emanuela Régia de Sousa Coelho, agradeço pelas risadas sinceras, bebidas e amizade, além dos ensinamentos em Análise Matemática. Mais que professora, você foi uma amiga. À Profa. Pammella Queiroz de Souza, agradeço a leitura e as contribuições ao meu trabalho. Muito obrigado.

À UEPB, pelas oportunidades, e ao CNPq, pelo apoio financeiro, eu sou grato.

Por fim, minha sincera gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.”

Isaac Newton.

RESUMO

O desenvolvimento das equações diferenciais está intimamente ligado ao avanço geral da Matemática. No século XVII, Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) inauguraram estudos muito relevantes envolvendo esse tipo de equação, que, em geral, dependia apenas de uma variável, e que hoje é conhecida como Equação Diferencial Ordinária (EDO). Posteriormente, devido à necessidade de modelar problemas físicos mais sofisticados, outros matemáticos passaram a estudar as chamadas Equações Diferenciais Parciais (EDPs), que por sua vez dependem de mais de uma variável. Sob essa perspectiva, objetivou-se, por meio deste trabalho, proceder com um estudo introdutório às Equações Diferenciais Parciais, investigando técnicas de resolução dessas equações, referentes à existência, unicidade de solução e dependência contínua de dados iniciais. Neste contexto, a ênfase foi sobre a equação da onda, que é do tipo $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Ela é uma EDP clássica que modela fenômenos como o som, a luz e as ondas sísmicas. Neste sentido, foram utilizados o Método de D'Alembert e o Método de Fourier para resolver problemas mistos envolvendo a equação da onda. Trata-se, portanto, de um estudo de natureza bibliográfica, uma vez que foram explorados textos que versam sobre o tema como pilares da pesquisa, com o intuito de investigar e aprender sobre as EDPs. A partir disto, foram desenvolvidas simulações gráficas nos softwares computacionais GeoGebra e Python, com o intuito de tornar didática a visualização de alguns resultados obtidos durante a pesquisa, como a interpretação geométrica da solução de D'Alembert e a convergência de uma série de Fourier para a função associada a ela.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais; Equação da Onda; GeoGebra; Python.

ABSTRACT

The development of differential equations is closely tied to the overall advancement of mathematics. In the 17th century, Isaac Newton (1643-1727) and Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) pioneered significant studies involving this type of equation, which generally depended on a single variable, and which today is known as Ordinary Differential Equation (ODE). Later, due to the need to model more sophisticated physical problems, other mathematicians began to study the so-called Partial Differential Equations (PDEs), which in turn depend on more than one variable. From this perspective, the the objective of this work was to conduct an introductory study of Partial Differential Equations, investigating techniques for solving these equations, particularly concerning existence, uniqueness of solutions, and continuous dependence on initial data. In this context, the emphasis was on the wave equation, which takes the form $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. It is a classical PDE that models phenomena such as sound, light and seismic waves. In this context, the D'Alembert Method and the Fourier Method were used to solve mixed problems involving the wave equation. This is, therefore, a bibliographic study, since texts that deal with the topic were explored as pillars of the research, with the aim of investigating and learning about PDEs. From this, graphical simulations were developed in the computer software GeoGebra and Python, with the aim of making the visualization of some results obtained during the research more instructional, such as the geometric interpretation of the D'Alembert solution and the convergence of a Fourier series for the function associated with it.

Keywords: Partial Differential Equations; Wave Equation; GeoGebra; Python.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, Kline [4] afirma que os matemáticos passaram a estudar diversos problemas físicos que os levaram, primeiramente, às Equações Diferenciais Ordinárias e, posteriormente, às Equações Diferenciais Parciais. Equações deste tipo não foram criadas de maneira deliberada, mas sim deduzidas a partir da exploração de problemas físicos que levavam à formulação de declarações matemáticas que proporcionaram uma melhor compreensão dos princípios físicos adjacentes aos fenômenos estudados. O estudo do deslocamento de uma corda vibrante, por exemplo, foi estudado inicialmente como uma função do tempo e da distância de um ponto da corda à sua extremidade. A partir disso, se realizou o estudo do deslocamento como uma função de duas variáveis, e a tentativa de compreender todos os movimentos possíveis levou a uma Equação Diferencial Parcial, que é o principal tema de nossa pesquisa, com ênfase justamente na equação da onda, dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

A escolha desse tema foi, em primeiro lugar, devido ao fato dessa pesquisa ser fruto de um projeto no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), cota 2023-2024. Por outro lado, também cabe destacar a relevância desse tema para um primeiro contato com uma matemática mais formal, que permite ao graduando em matemática se familiarizar com conteúdos da matemática pura e, consequentemente, iniciar na área da pesquisa. Outro motivo foi a importância do estudo das Equações Diferenciais Parciais para estudantes que almejam seguir estudando em nível de pós-graduação, especificamente no campo da Análise Matemática.

Neste sentido, objetivou-se proceder com um estudo introdutório às Equações Diferenciais Parciais, investigando técnicas de resolução dessas equações, referentes à existência, unicidade de solução e dependência contínua dos dados iniciais. Por outro lado, a pesquisa também teve como objetivo o aprendizado de ferramentas cada vez mais exigidas no mundo atual, como o uso de softwares computacionais para o tratamento de dados e produção de gráficos. Em vista disso, foram utilizados os softwares GeoGebra e Python, o que possibilitou uma apresentação mais didática de alguns dos resultados obtidos.

A metodologia empregada na pesquisa foi de natureza bibliográfica, uma vez que foram explorados diversos materiais que abordam o tema das Equações Diferenciais Parciais, com o intuito de compreender os conteúdos e simular resultados por meio de softwares computacionais.

Esta pesquisa está dividida em 5 Capítulos principais. O Capítulo 1 corresponde à introdução do trabalho. No Capítulo 2, são enunciados alguns teoremas e definições que serão importantes para fundamentar alguns conceitos ao longo do texto. O Capítulo 3 versa sobre noções de Séries de Fourier, que serão fundamentais para se trabalhar com o método de Fourier. O Capítulo 4, por sua vez, corresponde à maior parte da pesquisa, em que se trabalha a Equação Diferencial para Pequenas Oscilações de uma Corda. Nesse capítulo é deduzida a equação da onda e também são trabalhados os métodos de D'Alembert e de Fourier para encontrar existência de soluções, unicidade de soluções e dependência contínua dos dados iniciais. Finalmente, o Capítulo 5 trata das simulações em softwares computacionais que foram realizadas, especificamente no software GeoGebra e na linguagem de programação Python.

2 PRELIMINARES

Inicialmente, vamos enunciar alguns resultados que foram indispensáveis para o desenvolvimento do trabalho, juntamente com as principais referências. São definições e teoremas que servem como base para a pesquisa e permitem uma compreensão mais rápida e uma leitura mais fluida do texto.

2.1 Tópicos de Análise Matemática

Os tópicos de Análise Matemática foram muito importantes para a compreensão e aplicação de alguns conceitos mais formais da matemática, que foram muito úteis nas demonstrações dos teoremas e lemas presentes no trabalho. Assim, as referências [6], [7] e [8] foram fundamentais para o desenvolvimento da pesquisa e nelas são encontrados os teoremas e definições abaixo enunciados.

Definição 2.1. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ implicam $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Simbolicamente,

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0;\ x \in X,\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Definição 2.2. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua quando, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$ e $|x - y| < \delta$ implicam $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Definição 2.3. Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que f é de classe C^n, e escreve-se $f \in C^n$, para significar que f é n vezes derivável em I e $x \mapsto f^{(n)}(x)$ é uma função contínua em I.

Teorema 2.1. (Regra de Leibniz ou derivação sob o sinal da integral). *Dado $U \subset \mathbb{R}^n$, aberto, seja $f : U \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:*

1) Para todo $x \in U$, a função $t \longmapsto f(x, t)$ é integrável em $a \leq t \leq b$.

2) A i-ésima derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)$ existe para cada $(x, t) \in U \times [a, b]$ e a função $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, assim definida, é contínua.

Então a função $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\phi(x) = \int_a^b f(x, t)dt$, possui i-ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, sendo

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)dt.$$

Em síntese, pode-se derivar sob o sinal da integral, desde que o integrante resultante seja uma função contínua.

Demonstração. Ver [7], pág. 148. □

Antes de apresentar os próximos resultados, precisamos relembrar das seguintes definições:

Definição 2.4. Um subconjunto $H \subset \mathbb{R}^n$ é dito fechado se a sua fronteira (que é denotada por ∂F) é tal que $\partial F \subset H$.

Definição 2.5. Um subconjunto $H \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado se $|H| \leq C, \forall x \in H$.

Definição 2.6. Um subconjunto $H \subset \mathbb{R}^n$ é dito compacto se H for fechado e limitado.

A partir das definições anteriores, podemos enunciar os próximos resultados.

Teorema 2.2. (Borel-Lebesgue). *Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda cobertura aberta de A possui uma subcobertura finita. Em outras palavras, $A \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, A é fechado e limitado.*

Demonstração. Ver [6], pág. 180. □

Teorema 2.3. *Seja X um conjunto compacto. Toda função contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Ver [6], pág. 243. □

Teorema 2.4. *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se X é compacto, então $f(X)$ é compacto.*

Demonstração. Ver [6], pág. 238. □

Corolário 2.1. (Weierstrass). *Toda função contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida num compacto X é limitada e atinge seus extremos.*

2.2 Tópicos de Cálculo Diferencial e Integral

Alguns tópicos de Cálculo Diferencial e Integral foram indispensáveis ao desenvolvimento da pesquisa, uma vez que este trabalho está concentrado na área de Equações Diferenciais Parciais. Os teoremas e definições abaixo podem ser encontrados, principalmente, nas referências [1], [2] e [5].

Considerando que o conceito de derivadas de funções reais está bem estabelecido, apresentamos o seguinte resultado:

Teorema 2.5. (Regra da Cadeia). *Sejam f e g funções tais que $f'(g(x))$ e $g'(x)$ existem. Então, $(f \circ g)'(x)$ existe e $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.*

Demonstração. Ver [2], pág. 42. □

Definição 2.7. (Integral definida segundo Riemann). Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Quando o limite

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i$$

existe, em que $\|P\| = \max\limits_{1 \le i \le n} \{x_i - x_{i-1}\}$ é a norma da partição de $[a, b]$, diz-se que f é integrável em $[a, b]$ e escreve-se

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i.$$

Quando cada partição tem n subintervalos todos com o mesmo comprimento $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ também escreve-se

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i.$$

O próximo resultado estabelece uma relação direta entre a integral e a primitiva de uma função f.

Teorema 2.6. (Teorema Fundamental do Cálculo). *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ for contínua e se F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então vale*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração. Ver [2], pág. 96. □

Sabemos que, para cada regra da diferenciação, há uma regra correspondente de integração. No próximo resultado, veremos uma regra correspondente à regra do produto.

Teorema 2.7. (Integração por partes). *Se f, g são funções deriváveis com derivadas f', g' contínuas, então vale*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx, \tag{2.1}$$

que é chamada de Fórmula de Integração por Partes.

Isso ocorre pois

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x),$$

isto é,

$$f(x)g'(x) = (fg)'(x) - g(x)f'(x),$$

de onde obtemos a igualdade (2.1).

Se $u = f(x)$ *e* $v = g(x)$*, então temos* $du = f'(x)dx$ *e* $dv = g'(x)dx$ *e, assim, a fórmula de Integração por Partes se torna, simplesmente,*

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

No caso das integrais definidas, temos as fórmulas análogas

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

e

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Demonstração. Ver [14], pág. 442. □

Definição 2.8. Seja f uma função real contínua em $[a,b]$ e com derivada contínua em (a,b). Seja C a curva do gráfico de f, compreendida entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Definimos a função comprimento de arco s como sendo:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx;\ a \leq x \leq b.$$

Proposição 2.1. *Seja* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua, com* $f(x) \geq 0, \forall\, x \in [a,b]$ *e* $\int_a^b f(t)dt = 0$*. Então,*

$$f(x) = 0, \forall\, x \in [a,b].$$

O próximo resultado estabelece uma relação entre a integral de linha sobre uma curva fechada simples C e uma integral dupla na região D delimitada por C.

Teorema 2.8. (Teorema de Green). *Sejam* M *e* N *funções de duas variáveis* x *e* y*, de tal modo que tenham derivadas parciais primeiras contínuas em um disco aberto* B *em* $\mathbb{R}^2$*. Se* C *for uma curva fechada simples seccionalmente suave, contida inteiramente em* B*, e se* R *for a região limitada por* C*, então*

$$\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int\int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA.$$

Demonstração. Ver [5], pág. 1100. □

3 NOÇÕES SOBRE SÉRIES DE FOURIER

Para se trabalhar com o método de Fourier, serão necessários alguns resultados sobre séries de Fourier, a fim de que o método de trabalho para resolver a equação de pequenas oscilações de uma corda seja autossuficiente. Neste sentido, vamos estudar algumas noções sobre séries de Fourier, com o intuito de estabelecer alguns resultados básicos que irão facilitar a compreensão do método de separação de variáveis para o caso da corda. Assim, o objetivo deste capítulo será apresentar de forma didática e detalhada os resultados referentes às Séries de Fourier, os quais serão utilizados para a solução da equação da onda por meio do método de Fourier.

Primeiramente, vamos enunciar um lema elementar da trigonometria.

Lema 3.1. *Para todo x real tal que* $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ *é diferente de zero, tem-se*

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Demonstração. Sabe-se que

$$\operatorname{sen}(p+q)=\operatorname{sen}p\cos q+\operatorname{sen}q\cos p$$

e

$$\operatorname{sen}(q-p)=\operatorname{sen}q\cos p-\operatorname{sen}p\cos q.$$

Daí, temos

$$\operatorname{sen}(p+q)-\operatorname{sen}(q-p)=2\operatorname{sen}p\cos q$$

Fazendo-se $p=\frac{x}{2}$ e $q=kx$, obtemos

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos(kx)=\operatorname{sen}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)-\operatorname{sen}\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right).$$

Aplicando o somatório com k variando de 1 a n em ambos os lados da equação acima, temos

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Isso ocorre pois o lado direito da equação nos dá

$$\sum_{k=1}^{n} 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos kx$$

e o lado esquerdo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sen}\left(k-\frac{1}{2}\right)x &= \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)\\ &+ \operatorname{sen}\left(\frac{7x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{5x}{2}\right) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\\ &- \operatorname{sen}\left(\frac{2n-3}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)\\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

Daí, temos

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)},$$

que é o Lema 3.1. □

Sabemos que, pela regra de L'Hôpital, $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = n + \frac{1}{2}$, quando $x = 0$, e que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} = n + \frac{1}{2}$. Neste sentido, o Lema 3.1 será válido para todo x desde que se defina o valor do somatório igual a $n + \frac{1}{2}$, quando $x = 0$.

Definição 3.1. Denomina-se série trigonométrica uma série de funções da forma

$$\alpha + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\operatorname{sen}(kx)),$$

sendo $\alpha, a_k, b_k, k = 1, 2, \ldots$ constantes.

Para as aplicações pretendidas neste trabalho, será necessário um certo tipo de série trigonométrica na qual procuraremos motivar a definição. Desta forma, vamos considerar uma função $u(x)$ integrável no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ que possa ser representada como a soma de uma série trigonométrica, ou seja, para todo x desse intervalo, temos

$$u(x) = \alpha + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\operatorname{sen}(kx)). \tag{3.1}$$

Além disso, suponhamos que seja possível a integração termo a termo no intervalo $[-\pi, \pi]$. Assim, podemos determinar os coeficientes α, a_k, b_k, para $k = 1, 2, \ldots$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} u(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \alpha dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx))\right] dx \\
&= \alpha x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx)dx\right) \\
&= 2\alpha\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{1}{k} \operatorname{sen}(kx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + b_k \left(-\frac{1}{k}\right) \cos(kx)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) \\
&= 2\alpha\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \left(\frac{1}{k} \operatorname{sen}(k\pi) - \frac{1}{k} \operatorname{sen}(k\pi)\right) + b_k \left(-\frac{1}{k} \cos(k\pi) + \frac{1}{k} \cos(-k\pi)\right)\right] \\
&= 2\alpha\pi,
\end{aligned}$$

o que resulta

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x)dx.$$

Suponhamos agora que, ao multiplicarmos os membros da equação (3.1) por $\cos(nx)$ ou $\operatorname{sen}(nx)$, a integração termo a termo continue válida. Assim, ao multiplicar por $\cos(nx)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cos(nx)dx &= \alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx)dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \operatorname{sen}(kx)dx\right). \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Destaquemos, então, os seguintes resultados válidos:

$$\begin{cases}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(nx)dx = 0, \text{ se } k \neq n; \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \operatorname{sen}(nx)dx = 0; \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(kx)dx = \pi, \text{ se } k \neq 0.
\end{cases}$$

Notemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx)dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \operatorname{sen}(kx)dx\right) = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(kx)dx,$$

pois as parcelas em que $k \neq n$ são iguais a zero, restando apenas a parcela em que $k = n$. Desta forma, obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cos(kx)dx = \alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx + a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)dx,$$

ou ainda

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos(kx)dx, k = 1, 2, \ldots .$$

De forma análoga, ao multiplicarmos a série da equação (3.1) por $\operatorname{sen} nx$, vamos obter

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\operatorname{sen}(kx)dx, k = 1, 2, \ldots .$$

A partir das hipóteses de integração termo a termo, foi possível concluir que os coeficientes $\alpha = \frac{a_0}{2}, a_k, b_k, k = 1, 2, \ldots$ são bem determinados em função de u. Este fato motiva a definição seguinte.

Definição 3.2. Seja u real em $-\pi \leq x \leq \pi$ e integrável. Denomina-se série de Fourier de u a série trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\operatorname{sen}(kx)),$$

com os coeficientes dados por

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos(kx)dx, k = 0, 1, 2, \ldots$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\operatorname{sen}(kx)dx, k = 1, 2, \ldots .$$

Exemplo 3.1. Qual a série de Fourier da função $u(x) = |x|$ em $-\pi \leq x \leq \pi$?

Solução. Primeiramente, vamos encontrar os valores dos coeficientes a_0, a_k e b_k. Assim,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{|x|x}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(kx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\cos(kx)dx + \int_{0}^{\pi} x\cos(kx)dx\right]. \end{aligned}$$

Utilizando as propriedades de integração, obtemos

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{x\,\mathrm{sen}(kx)}{k} - \frac{\cos(kx)}{k^2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} + \left(\frac{x\,\mathrm{sen}(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{1}{k^2} + \frac{\pi\,\mathrm{sen}(k\pi)}{k} + \frac{\cos(k\pi)}{k^2}\right) + \left(\frac{\pi\,\mathrm{sen}(k\pi)}{k} + \frac{\cos(k\pi)}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(k\pi)-1}{k^2} + \frac{\cos(k\pi)-1}{k^2}\right] = \frac{2}{\pi k^2}[\cos(k\pi)-1], k = 1,2,\dots. \end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos $b_k = 0, k = 1, 2, \dots$.

Portanto, a série de Fourier associada à função $u(x) = |x|$ é dada por

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi k^2}[\cos(k\pi)-1]\cos(kx)\right\} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + \cdots\right).$$

Desde que façam sentido as integrais que resultam nos números $a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$, podemos escrever a série de Fourier da função que deu origem a esses números. O principal problema é saber se a série de Fourier assim obtida converge para a função dada. Outro problema natural é o da convergência uniforme de uma série de Fourier. Vamos estudar essas questões a seguir. Embora seja possível estudar as séries de Fourier para uma ampla classe de funções, vamos nos limitar a uma classe pequena, bem próxima à das funções contínuas, precisamente a classe das funções contínuas por partes, segundo a definição seguinte.

Definição 3.3. Seja u uma função real num intervalo (a, b). Diz-se que u será contínua por partes em (a, b) quando ela for contínua em (a, b), exceto em um número finito de pontos de (a, b), satisfazendo às seguintes condições:

a) existe o limite de u à esquerda de b e à direita de a.

b) a função u possui limites laterais finitos em todo ponto de (a, b).

Exemplo 3.2. A função $u(x) = \lfloor x \rfloor$, em que $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira do número x, é contínua por partes para $-1 \le x \le 4$.

Exemplo 3.3. A função $u(x) = \dfrac{|x|}{x}$, se $x \neq 0$, é contínua por partes para $-1 \le x \le 1, x \neq 0$.

É importante destacar que segundo a Definição 3.3 os limites laterais devem ser finitos. Portanto, quando u é contínua por partes, ela é integrável no intervalo correspondente. Vamos representar por $u(x-0)$ o limite à esquerda do ponto x e por $u(x+0)$ o limite à direita do ponto x.

Lema 3.2. (Riemann-Lebesgue). *Se u é contínua por partes em (a, b), então*

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b u(x)\,\mathrm{sen}(kx)dx = 0$$

e

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b u(x)\cos(kx)dx = 0.$$

Demonstração. Suponhamos que u seja contínua em $[a,b]$. Seja $h = \dfrac{\pi}{k}$, com k suficientemente grande de tal modo que

$$a < a+h < b-h < b.$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)\cos(kx)dx &= \int_a^{a+h} u(x)\cos(kx)dx + \int_{a+h}^b u(x)\cos(kx)dx\\ &= \int_a^{a+h} u(x)\cos(kx)dx - \int_a^{b-h} u(x+h)\cos(kx)dx,\end{aligned}$$

pois

$$\int_{a+h}^b u(x)\cos(kx)dx = \int_a^{b-h} u(x+h)\cos(k(x+h))dx = \int_a^{b-h} u(x+h)\cos((kx+\pi))dx$$

e, usando a transformação trigonométrica

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b,$$

temos

$$\begin{aligned}\int_{a+h}^b u(x)\cos(kx)dx &= \int_a^{b-h} u(x+h)[\cos(kx)\cos\pi - \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}\pi]dx\\ &= -\int_a^{b-h} u(x+h)\cos(kx)dx.\end{aligned}$$

Ademais, obtém-se também

$$\int_a^b u(x)\cos(kx)dx = \int_a^{b-h} u(x)\cos(kx)dx + \int_{b-h}^b u(x)\cos(kx)dx.$$

Daí, adicionando-se, membro a membro, as duas igualdades obtidas, obtém-se

$$\begin{aligned}2\int_a^b u(x)\cos(kx)dx &= \int_a^{a+h} u(x)\cos(kx)dx + \int_{b-h}^b u(x)\cos(kx)dx\\ &+ \int_a^{b-h}[u(x)-u(x+h)]\cos(kx)dx.\end{aligned}$$

Como supomos u contínua em $[a,b]$, pelo Corolário 2.1, ela é limitada, isto é, existe uma constante M tal que $|u(x)| < M$ nesse intervalo. Isto resulta na seguinte majoração:

$$\begin{aligned}
2\left|\int_a^b u(x)\cos(kx)dx\right| \leq & \int_a^{a+h} M|\cos(kx)|dx + \int_{b-h}^{b} M|\cos(kx)|dx \\
& + \int_a^{b-h} |[u(x)-u(x+h)]\cos(kx)|dx \\
\leq & M\int_a^{a+h} dx + M\int_{b-h}^{b} dx + \int_a^{b-h} |u(x)-u(x+h)|dx \\
= & Mh + Mh + \int_a^{b-h} |u(x)-u(x+h)|dx \\
= & 2Mh + \int_a^{b-h} |u(x)-u(x+h)|dx.
\end{aligned}$$

Como u é contínua no intervalo fechado $[a,b]$, resulta em sua continuidade uniforme nesse intervalo. Consequentemente, ao fixarmos $\lambda > 0$, existe k_λ tal que para todo $k > k_\lambda$ e todo x em $[a,b]$ tem-se

$$\left|u\left(x+\frac{\pi}{k}\right) - u(x)\right| < \lambda. \tag{3.3}$$

Daí, lembrando que $h = \dfrac{\pi}{k}$, podemos concluir que

$$\left|\int_a^b u(x)\cos(kx)dx\right| \leq \frac{M\pi}{k} + \frac{b-a}{2}\lambda.$$

Ademais, para cada $\epsilon > 0$, consideremos $\lambda > 0$ tal que $\lambda < \dfrac{\epsilon}{b-a}$ e k_λ tal que para $k > k_\lambda$ seja válida a desigualdade (3.3) e $\dfrac{M\pi}{k} < \dfrac{\epsilon}{2}$. Desta forma, concluímos que, para cada $\epsilon > 0$, existe k_ϵ tal que, para todo $k > k_\epsilon$, resulta

$$\left|\int_a^b u(x)\cos(kx)dx\right| \leq \epsilon,$$

o que prova uma parte do lema no caso contínuo.

Suponhamos u contínua no intervalo aberto (a,b). Nesse caso, não poderemos utilizar a continuidade uniforme como na primeira parte da demonstração. Por outro lado, sendo u contínua por partes, ela possui os limites laterais finitos $u(a+0), u(b-0)$. Assim, a função $\tilde{u}$, que é a extensão de u ao intervalo fechado $[a,b]$, definida por

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(a+0), & \text{se } x = a \\ u(x), & \text{se } a < x < b \\ u(b-0), & \text{se } x = b, \end{cases}$$

é contínua no intervalo fechado $[a,b]$. Portanto, pela primeira parte da demonstração, vale o lema para $\tilde{u}$. Como as integrais de $\tilde{u}(x)\cos(kx)$ e $u(x)\cos(kx)$ são iguais em $[a,b]$, concluímos que o lema vale para u.

Por fim, vamos supor que u seja contínua por partes no intervalo (a,b). Sejam $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ os pontos de descontinuidade de u. A restrição u_i de u a cada um desses intervalos abertos (x_i, x_{i+1}) está nas condições da segunda etapa da demonstração do lema. Logo, o lema é válido para as u_i, isto é,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{x_i}^{x_{i+1}} u_i(x)\cos(kx)dx = 0,$$

para $i = 0,1,2,\ldots,n$, completando-se a demonstração do lema. De forma análoga é possível demonstrar que $\lim\limits_{k\to\infty}\int_a^b u(x)\operatorname{sen}(kx)dx = 0$. □

Um teorema de suma importância que iremos demonstrar é o Teorema de Riemann, que dá condições suficientes sobre uma função u para que ela seja a soma de sua série de Fourier. Contudo, antes demonstraremos um lema que permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma série de Fourier sob a forma de integral. Mais especificamente, demonstraremos que, mediante certas restriçoes sobre a função u definida no intervalo $-\pi \le x \le \pi$, a soma $S_n(x)$ dos n primeiros termos de sua série de Fourier tem a seguinte forma:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\operatorname{sen}\frac{t-x}{2}}dt,$$

que é denominada integral de Dirichlet. O núcleo, dado por

$$D_n(s) = \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)(s)}{2\operatorname{sen}\frac{s}{2}},$$

denomina-se núcleo de Dirichlet.

Lema 3.3. (Dirichlet). *Seja u uma função real e contínua por partes em $-\pi < x < \pi$. Então, a soma $S_n(x)$ dos primeiros n termos da série de Fourier de u será dada por*

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\operatorname{sen}\frac{t-x}{2}}dt,$$

para todo $-\pi \le x \le \pi$.

Demonstração. Sabemos que

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\operatorname{sen} kx),$$

em que a_k e b_k são os coeficientes de Fourier de u. Substituindo na igualdade anterior tais coeficientes, obtemos

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cos kt \cos kx dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\operatorname{sen} kt \operatorname{sen} kx dt\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\left[\cos kt \cos kx + \operatorname{sen} kt \operatorname{sen} kx\right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cos k(t-x)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)dt. \end{aligned}$$

Do Lema 3.1 e da última igualdade, concluímos que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\operatorname{sen}\frac{t-x}{2}}dt,$$

o que prova o lema. □

Teorema 3.1. (Riemann). *Seja u uma função real, periódica com período 2π e contínua por partes em $-\pi \le x \le \pi$. Então, em todo ponto x onde u possui derivadas laterais finitas, sua série de Fourier converge para*

$$\frac{1}{2}[u(x+0) + u(x-0)].$$

Demonstração. Consideremos a série de Fourier da função u,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx),$$

em que a_k e b_k são os coeficientes de Fourier. Do Lema 3.3, a soma dos n primeiros termos dessa série é dada por

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\operatorname{sen}\frac{t-x}{2}}dt.$$

Assim, ao fazer a substituição $s = t-x$ na integral de Dirichlet, levando em consideração que u é periódica com período 2π, obtemos a função S_n em uma forma mais simples:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x+s)D_n(s)ds,$$

em que $D_n(s)$ é o núcleo de Dirichlet, definido anteriormente.

Além disso, do Lema 3.1, temos

$$D_n(s) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ks.$$

Daí, ao integrarmos ambos os membros desta igualdade no intervalo $[-\pi, \pi]$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(s)ds &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(ks)\right] ds = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} ds + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{n} \cos(ks)ds \\ &= \frac{s}{2}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \operatorname{sen}(ks)\bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(s)ds = 1.$$

Notemos, ainda, que $D_n(s) = D_n(-s)$. De fato, sabendo que a função seno é uma função ímpar,

$$D_n(-s) = \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(-s)}{2 \operatorname{sen} \frac{-s}{2}} = \frac{-\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(s)}{-2 \operatorname{sen} \frac{s}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(s)}{2 \operatorname{sen} \frac{s}{2}} = D_n(s).$$

Agora, vamos decompor o intervalo de integração $[-\pi, \pi]$ em $[-\pi, 0]$ e $[0, \pi]$. Assim, temos

$$\begin{aligned}1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(s)ds &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} D_n(s)ds + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} D_n(s)ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} -D_n(-s)ds + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} D_n(s)ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} D_n(-s)ds + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} D_n(s)ds \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} D_n(s)ds.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} D_n(s)ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} D_n(s)ds = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado, também podemos escrever a função S_n sob a forma

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} u(x+s)D_n(s)ds + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} u(x+s)D_n(s)ds.$$

Isto nos diz que, para se demonstrar o Teorema de Riemann, basta provar que quando n tende ao infinito a primeira parcela da soma $S_n(x)$ converge para $\frac{1}{2}u(x-0)$ e a segunda para $\frac{1}{2}u(x+0)$ em cada ponto x onde existem as derivadas laterais de u. Com efeito, conforme vimos anteriormente,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} u(x-0)D_n(s)ds = u(x-0)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(s)ds = \frac{1}{2}u(x-0)$$

e

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} u(x+0)D_n(s)ds = u(x+0)\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(s)ds = \frac{1}{2}u(x+0).$$

Logo, é suficiente demonstrar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[u(x+s)-u(x-0)]D_n(s)ds = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[u(x+s)-u(x+0)]D_n(s)ds = 0.$$

Como as demonstrações dos dois limites são análogas, vamos provar o segundo. Em síntese, vamos demonstrar que, se u possui derivadas laterais finitas no ponto x, então

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[u(x+s)-u(x+0)]\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)s}{2\operatorname{sen}\frac{s}{2}}ds = 0.$$

Com efeito, vamos considerar a função

$$v(s) = \frac{u(x+s)-u(x+0)}{2\operatorname{sen}\frac{s}{2}},$$

com a observação de que x é um ponto onde existem as derivadas laterais de u. Ao analisar o comportamento de v no ponto zero, vemos que

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}} v(s) = \lim_{\substack{s\to 0\\ s>0}}\frac{u(x+s)-u(x+0)}{s}\cdot\frac{\frac{s}{2}}{\operatorname{sen}\frac{s}{2}},$$

que é igual a derivada à direita de u no ponto x. Concluímos, portanto, que v é contínua por partes em $(0,\pi]$. Portanto, aplicando o Lema de Riemann-Lebesgue, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} v(s)\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)sds = 0,$$

ou ainda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [u(x+s) - u(x+0)] \frac{\operatorname{sen}\left(n + \dfrac{1}{2}\right)s}{2\operatorname{sen}\dfrac{s}{2}} ds = 0,$$

como queríamos demonstrar. De forma análoga, podemos provar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} [u(x+s) - u(x-0)] D_n(s) ds = 0.$$

□

Corolário 3.1. *Se, no Teorema de Riemann, a função u for derivável em cada ponto de $(-\pi, \pi)$, então a série de Fourier de u convergirá para $u(x)$ em cada ponto x de $(-\pi, \pi)$.*

Nas aplicações, normalmente surge o problema de representar em série de Fourier uma função contínua por partes em um intervalo $(0, \pi)$ ou $(0, L)$. Para resolver tal problema, basta obtermos uma representação em série de Fourier de uma função $\tilde{u}$ periódica de período 2π na reta, cuja restrição a $(0, \pi)$ é igual a u. Esta função $\tilde{u}$ será denominada extensão periódica de u.

Veremos, a seguir, algumas peculiaridades das séries de Fourier para funções ímpares, isto é, $u(-x) = -u(x)$, e para funções pares, ou seja, $u(-x) = u(x)$, as quais possuem diferentes de zero apenas os coeficientes dos senos e cossenos, respectivamente. Com efeito, suponhamos que u seja par. Assim, teremos

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \operatorname{sen}(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} u(x) \operatorname{sen}(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \operatorname{sen}(kx) dx.$$

Fazendo $x = -t$, e sendo u uma função par, obtemos

$$\int_{-\pi}^{0} u(x) \operatorname{sen}(kx) dx = -\int_{\pi}^{0} u(-t) \operatorname{sen}(k(-t)) dt = -\int_0^{\pi} u(t) \operatorname{sen}(kt) dt.$$

Daí, substituindo-se na expressão dos b_k, obtemos

$$b_k = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \operatorname{sen}(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \operatorname{sen}(kx) dx = 0, k = 1, 2, \ldots.$$

Portanto, concluímos que, no caso das funções pares, sua série de Fourier se reduz a

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

com

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos kx dx, k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Vamos supor, agora, que u seja uma função ímpar. Desta forma, temos

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} u(x)\cos(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} u(x)\cos(kx)dx.$$

Daí, fazendo-se $x = -t$, obtemos

$$\int_{-\pi}^{0} u(x)\cos(kx)dx = -\int_{\pi}^{0} u(-t)\cos(k(-t))dt = -\int_{0}^{\pi} u(t)\cos(kt)dt.$$

Substituindo na expressão dos a_k, temos

$$a_k = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} u(x)\cos(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} u(x)\cos(kx)dx = 0, k = 1, 2, \ldots.$$

Logo, no caso das funções ímpares, sua série de Fourier se reduz a

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(kx),$$

sendo

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\operatorname{sen}(kx)dx, k = 1, 2, \ldots.$$

Neste sentido, quando u é definida em $(0,\pi)$, se quisermos obter uma representação de Fourier de u, será conveniente fazer sua extensão par ou ímpar, tendo em vista a simplificação da série de Fourier para essas funções. Por exemplo, vamos supor que u seja contínua por partes em $(0,\pi)$. Sua extensão par $\tilde{u}_P$ é definida como

$$\tilde{u}_P := \begin{cases} u(x), & \text{se } 0 < x < \pi; \\ u(-x), & \text{se } -\pi < x < 0; \\ u(0+0), & \text{se } x = 0; \\ u(\pi - 0), & \text{se } x = -\pi \text{ ou } x = \pi; \\ u(x + 2\pi), & \text{se } x < -\pi \text{ ou } x > \pi. \end{cases}$$

Analogamente, sua extensão ímpar $\tilde{u}_I$ é dada por

$$\tilde{u}_I := \begin{cases} u(x), & \text{se } 0 < x < \pi; \\ -u(-x), & \text{se } -\pi < x < 0; \\ -u(0+0), & \text{se } x = 0; \\ u(\pi - 0), & \text{se } x = \pi; \\ -u(\pi - 0), & \text{se } x = -\pi; \\ u(x + 2\pi), & \text{se } x < -\pi \text{ ou } x > \pi. \end{cases}$$

Outro problema que surge nas aplicações é que o período, em geral, é $2L$, $L > 0$, e não 2π. Todavia, se $-L < x < L$, então a função $s = \frac{\pi x}{L}$ transforma esse intervalo em $-\pi < s < \pi$. Em outras palavras, para funções periódicas de período $2L$, contínuas por partes em $-L < x < L$, o Teorema de Riemann garante que, se u possuir derivadas laterais em x, então sua série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right),$$

com

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} u(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx, k = 0, 1, 2, \ldots$$

e

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} u(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx, k = 1, 2, \ldots,$$

convergirá para

$$\frac{1}{2}[u(x + 0) + u(x - 0)].$$

É importante destacar que nas aplicações das séries de Fourier às Equações Diferenciais Parciais, é necessário derivar e integrar termo a termo uma série dessa natureza. Por isso, vamos demonstrar um teorema sobre derivação termo a termo e outro sobre convergência uniforme.

Teorema 3.2. *Seja u derivável em $-\pi \leq x \leq \pi$, com derivada u' contínua, sendo $u(\pi) = u(-\pi)$. Então, em cada ponto x do intervalo $(-\pi, \pi)$ onde u'' existe, a série de Fourier da u dada por*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx))$$

é derivável e vale a regra da derivação termo a termo.

Demonstração. Como u' é contínua em $-\pi \leq x \leq \pi$, podemos concluir do Teorema de Riemann que a série de Fourier da u converge, em cada ponto x desse intervalo, para $u(x)$, ou seja,

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)),$$

para $-\pi \leq x \leq \pi$. Por outro lado, também do fato de u' ser contínua e existir u'' em cada ponto de $-\pi \leq x \leq \pi$, o mesmo Teorema de Riemann diz que a série de Fourier de u' converge para $u'(x)$ em cada ponto x de $-\pi \leq x \leq \pi$, isto é,

$$u'(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \operatorname{sen}(kx)),$$

com

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(x)\cos(kx)dx, k = 0, 1, 2, \ldots$$

e

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(x)\operatorname{sen}(kx)dx, k = 1, 2, \ldots.$$

Vamos, então, integrar por partes e utilizar a hipótese $u(\pi) = u(-\pi)$. Sendo

$$\begin{aligned}
&u = \cos(kx) \Rightarrow du = -k\operatorname{sen}(kx)dx,\\
&dv = u'(x)dx \Rightarrow \int dv = \int u'(x)dx \Rightarrow v = u(x),
\end{aligned}$$

temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} u'(x)\cos(kx)dx = (u(x)\cos(kx))|_{-\pi}^{\pi} + k\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\operatorname{sen}(kx)dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{1}{\pi}\Big(u(x)\cos(kx)\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\operatorname{sen}(kx)dx\\
&= \frac{1}{\pi}[u(\pi)\cos(k\pi) - u(-\pi)\cos(-k\pi)] + kb_k\\
&= \frac{\cos(k\pi)}{\pi}[u(\pi) - u(-\pi)] + kb_k\\
&= \frac{\cos(k\pi)}{\pi}[u(\pi) - u(\pi)] + kb_k\\
&= kb_k, k = 0, 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos

$$\beta_k = -ka_k, k = 1, 2, \ldots.$$

Substituindo α_k e β_k na série de u', temos

$$u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(kb_k \cos(kx) - ka_k \operatorname{sen}(kx)),$$

o que prova o teorema. $\square$

Antes de demonstrarmos o teorema sobre convergência uniforme absoluta, vamos provar duas desigualdades que serão úteis na demonstração do referido teorema e em outras situações significantes.

Lema 3.4. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reais. Então vale a desigualdade*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Demonstração. Consideremos $x \in \mathbb{R}$. Daí, tomemos o número real $a_i - b_i x$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i x)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 - 2a_i b_i x + b_i^2 x^2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2x \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + x^2 \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{3.4}$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i x)^2 \geq 0,$$

então a equação do segundo grau (3.4) é positiva, isto é, seu delta deve ser não positivo. Portanto,

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \leq 0,$$

o que implica

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq 4\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right),$$

ou ainda

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right),$$

que é a desigualdade de Cauchy-Schwarz. □

Lema 3.5. (Desigualdade de Bessel). *Seja u uma função real cujo quadrado é integrável em $-\pi \leq x \leq \pi$ e a_k, b_k os coeficientes de Fourier de u. Então, para todo número natural n vale a desigualdade seguinte:*

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)^2 dx,$$

denominada desigualdade de Bessel.

Demonstração. De fato, temos

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[u(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\operatorname{sen}(kx))\right]^2 dx \geq 0.$$

Das propriedades das integrais de produtos de $\cos kx$ e $\operatorname{sen} kx$, obtemos, após desenvolver o quadrado da integral anterior,

$$\begin{aligned}
0 \leq &\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg[u(x)^2 + \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\operatorname{sen}(kx))^2 - a_0u(x) \\
&- 2u(x)\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\operatorname{sen}(kx)) + a_0\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\operatorname{sen}(kx))\Bigg]dx \\
= &\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg[u(x)^2 + \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2\cos^2(kx) + b_k^2\operatorname{sen}^2(kx) + 2a_kb_k\cos(kx)\operatorname{sen}(kx)) \\
&- 2u(x)\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\operatorname{sen}(kx)) + a_0u(x)\Bigg]dx \\
= &\int_{-\pi}^{\pi} u(x)^2dx + \frac{\pi}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}(a_k^2\cos^2(kx) + b_k^2\operatorname{sen}^2(kx))dx \\
&- a_0\int_{-\pi}^{\pi}u(x)dx - 2\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}[u(x)a_k\cos(kx) + u(x)b_k\operatorname{sen}(kx)]dx \\
= &\int_{-\pi}^{\pi} u(x)^2dx - \frac{\pi}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2\pi + b_k^2\pi),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)^2dx,$$

que é a desigualdade de Bessel. □

Teorema 3.3. *Seja u contínua, periódica com período 2π, derivável com derivada u' contínua por partes em $[-\pi,\pi]$. Se $u(-\pi) = u(\pi)$, então a série de Fourier da u converge uniforme e absolutamente em $[-\pi,\pi]$.*

Demonstração. Podemos formar as séries de Fourier de u e u', que serão dadas por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx))$$

e

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \operatorname{sen}(kx)).$$

Como u' é contínua por partes e $u(-\pi) = u(\pi)$, obtemos, ao integramos por partes como na demonstração do Teorema 3.2, as seguintes igualdades

$$\alpha_k = kb_k, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots$$

e

$$\beta_k = -ka_k, \;\; k = 1, 2, \ldots.$$

Por outro lado, da desigualdade de Bessel, obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u(x)|^2 dx < \infty.$$

Daí, sendo

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)^{1/2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\beta_k^2}{k^2} + \frac{\alpha_k^2}{k^2}\right)^{1/2} = \sum_{k=1}^{n}\left[k^{-2}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right]^{1/2},$$

resulta, da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)^{1/2} = \sum_{k=1}^{n}\left[k^{-2}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right]^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} k^{-2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right)^{1/2}.$$

Portanto, da desigualdade de Bessel para os α_k e β_k, e sendo a série $\sum_{k=1}^{n} k^{-2}$ convergente, por ser uma p-série com $p = 2 > 1$, concluímos que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)^{1/2}$$

é convergente. Finalmente, usando mais uma vez a desigualdade de Cauchy, temos

$$|a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)|^2 \leq (a_k^2 + b_k^2),$$

ou seja, os termos da série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx))$$

são, em valor absoluto, dominados por uma série convergente de números positivos. Isso garante a convergência uniforme e absoluta da série dominada, provando o teorema. $\square$

4 EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARA PEQUENAS OSCILAÇÕES DE UMA CORDA

Neste capítulo, trabalharemos com a equação da onda, que é dada pela expressão

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Nosso estudo terá como principal referência o livro de Medeiros e Andrade [10], que forma uma base sólida e detalhada sobre os métodos e teorias aplicados à análise desta equação. Utilizaremos os conceitos fundamentais para desenvolver uma compreensão aprofundada das soluções, comportamento da onda e propriedades de estabilidade.

4.1 Equação Diferencial para Pequenas Oscilações de uma Corda

O objetivo desta seção será deduzir uma equação que represente o comportamento das pequenas oscilações de uma corda. Antes de prosseguirmos, é importante definir que consideraremos a corda como um fio fino e flexível. Imaginemos agora que, em estado de equilíbrio, essa corda coincida com o eixo x de um sistema de coordenadas cartesianas, cuja origem está no ponto $(0,0)$ do plano $\mathbb{R}^2$. A partir dessa configuração, serão investigadas as pequenas oscilações transversais da corda neste sistema. Em síntese, iremos estudar as oscilações da corda que são realizadas no plano, em que cada elemento da corda se desloca perpendicularmente ao eixo x.

Neste sentido, vamos representar por $u(x,t)$ o deslocamento de cada ponto x da corda no instante t, a partir da sua posição de equilíbrio. Ademais, é importante destacar as seguintes hipóteses, que serão necessárias para considerações posteriores:

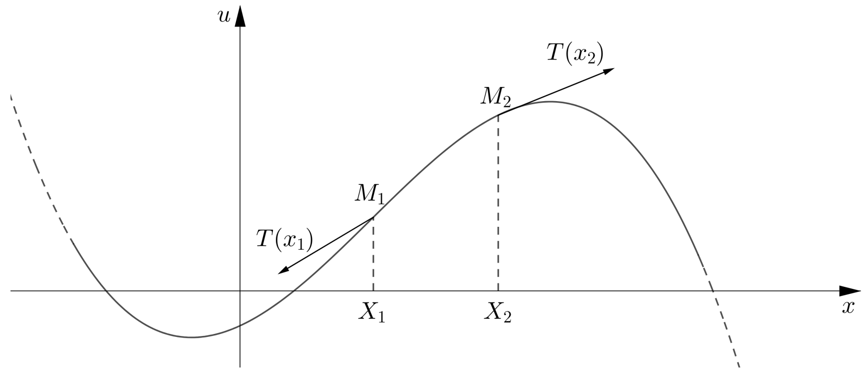
a) Todas as forças de atrito, internas ou externas, não serão consideradas.

b) A intensidade das forças gravitacionais é pequena quando comparada às tensões da corda.

c) As amplitudes $u(x,t)$ das oscilações e suas derivadas são pequenas, de modo que seus quadrados e produtos não são considerados nos cálculos quando comparados com a unidade.

A partir disto, imaginemos que num instante t fixo o perfil da corda seja o representado na Figura 1, em que o segmento $\overline{x_1 x_2}$ se deformou no arco $\widehat{M_1 M_2}$.

Figura 1 – Sistema com corda.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por outro lado, da definição 2.8, sabemos que o comprimento de um arco é dado por

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx.$$

Dessa forma, devido à hipótese c), temos $s \approx x_2 - x_1$, ou seja, em pequenas oscilações não há variação no comprimento do segmento $\overline{x_1 x_2}$. Para avançarmos, será necessário enunciar a definição que segue, que pode ser encontrada em [11].

Definição 4.1. (Lei de Hooke). Nas deformações elásticas, a força restauradora é proporcional ao deslocamento da posição de equilíbrio linear, ou seja,

$$F = -kx,$$

em que F é a força aplicada, k é a constante de elasticidade, que depende do material e da forma do objeto, e x é a deformação sofrida pelo material, podendo ser alongamento ou compressão.

Logo, voltando ao sistema com corda, pela Definição 4.1, pode-se concluir que a intensidade da tensão T, em cada ponto, não varia com o tempo, devido às pequenas oscilações. Com efeito, como o comprimento do segmento $\overline{x_1 x_2}$ não varia, a distensão da corda também não varia e, assim, a tensão T, em cada ponto, também permanece a mesma. Logo, sendo T_0 a tensão a que está submetido o segmento $\overline{x_1 x_2}$ na posição de equilíbrio, a variação da tensão durante o movimento não é levada em conta em presença da tensão T_0. Conclui-se, assim, que a tensão T não depende do tempo t.

Além disso, mostraremos, ainda, que a tensão T não depende de x, isto é, pode-se considerá-la igual à tensão T_0. Para isto, notemos que as forças que atuam sobre o arco de curva $\widehat{M_1 M_2}$ são as seguintes:

a) Tensões $T(x_1)$ e $T(x_2)$ nos pontos M_1 e M_2, respectivamente, tangenciais à corda.

b) Forças externas, caso existam.

c) Forças de inércia.

Como estamos estudando o movimento na direção perpendicular ao eixo x, as forças externas e de inércia também têm direção perpendicular a esse eixo. Dessa forma, não há movimento do arco $\widehat{M_1M_2}$ no eixo x, ou seja, também não há velocidade. Conclui-se, então, que o arco não possui aceleração no eixo x e, portanto, a resultante das forças na direção x é nula. Dessa forma, sendo α o ângulo agudo que a tensão T faz com o eixo x, no instante t, temos

$$T(x_2)\cos\alpha(x_2) - T(x_1)\cos\alpha(x_1) = 0.$$

Da Relação Fundamental da Trigonometria, obtemos

$$\operatorname{sen}^2\alpha(x) + \cos^2\alpha(x) = 1.$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por $\cos^2\alpha(x)$, obtemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha(x)}{\cos^2\alpha(x)} + \frac{\cos^2\alpha(x)}{\cos^2\alpha(x)} = \frac{1}{\cos^2\alpha(x)},$$

ou seja,

$$\tan^2\alpha(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha(x)},$$

donde segue

$$\cos^2\alpha(x) = \frac{1}{\tan^2\alpha(x) + 1}.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados da igualdade e considerando a hipótese de serem pequenas oscilações, temos

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\tan^2\alpha(x) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1}} \approx 1.$$

Portanto,

$$\cos\alpha(x) \approx 1,$$

o que resulta em $T(x_1) \approx T(x_2)$, para quaisquer x_1 e x_2 da corda. Assim, como a tensão T também não depende de x, a identificaremos como T_0 para todo x e t.

Para prosseguirmos, é importante mencionar o Princípio de D'Alembert, o qual, em síntese, afirma que "num sistema material em movimento, as forças nele aplicadas e as forças de inércia se equilibram". Iremos deduzir a equação diferencial de pequenas oscilações de uma corda a partir da aplicação deste princípio e, para isto, vamos explicitar as forças que atuam sobre a corda. Devido às condições impostas, vimos que as forças responsáveis pelo movimento são as componentes das tensões na direção dos deslocamentos de u, as forças externas e as forças de inércia. Assim, encontremos essas forças a seguir:

a) Resultante das tensões na direção u - como a tensão T não depende de x e é identificada por T_0, podemos calcular a resultante das tensões na direção u por:

$$F_1 = T_0 \operatorname{sen}\alpha(x_2) - T_0 \operatorname{sen}\alpha(x_1) = T_0[\operatorname{sen}\alpha(x_2) - \operatorname{sen}\alpha(x_1)]. \tag{4.1}$$

Ademais, sabemos que, dividindo a Relação Fundamental da Trigonometria por $\operatorname{sen}^2\alpha(x)$, temos

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha(x)}{\operatorname{sen}^2\alpha(x)} + \frac{\cos^2\alpha(x)}{\operatorname{sen}^2\alpha(x)} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha(x)},$$

donde segue

$$1 + \frac{1}{\tan^2\alpha(x)} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha(x)}$$

e, portanto,

$$\operatorname{sen}^2\alpha(x) = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\tan^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\dfrac{\tan^2\alpha(x) + 1}{\tan^2\alpha(x)}}.$$

Desta forma, organizando o lado direito da última igualdade e extraindo a raiz quadrada, obtemos

$$\operatorname{sen}\alpha(x) = \frac{\tan\alpha(x)}{\sqrt{\tan^2\alpha(x) + 1}},$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}\alpha(x) = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Daí, substituindo a expressão encontrada acima em 4.1 e utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, chegamos à seguinte expressão:

$$F_1 = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right] = T_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx.$$

Dessa forma, a componente das tensões na direção u é dada por

$$F_1 = T_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx.$$

b) Forças externas - representemos por $p(x,t)$ a distribuição de forças externas por unidade de comprimento atuando sobre a corda, na direção u. Dessa forma, as forças externas F_2 que atuam sobre o arco $\widehat{M_1 M_2}$ são dadas por

$$F_2 = \int_{x_1}^{x_2} p(x,t)dx.$$

c) Forças de inércia - seja $\rho(x)$ a densidade linear da corda. Logo, a massa do segmento Δx da corda é dada por $\rho(x)\Delta x$. Por sua vez, a força de inércia sobre esse segmento será

$$-\rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Portanto, a força de inércia F_3 sobre o arco $\widehat{M_1 M_2}$ será dada por

$$F_3 = -\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx.$$

Finalmente, diante de todas as forças aplicadas no sistema, podemos utilizar o princípio de D'Alembert, obtendo

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x,t)\right] dx = 0,$$

para quaisquer x_1, x_2 e $t \geq 0$. Supondo o integrando uma função contínua e utilizando a Proposição 2.1, segue-se que

$$T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x,t) = 0.$$

Esta última é a equação diferencial de pequenas oscilações de uma corda flexível, sob a ação de uma força externa $p(x,t)$. No caso em que $p(x,t)$ é constante, isto é, a corda é uniforme, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t), \tag{4.2}$$

com

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \quad \text{e} \quad F(x,t) = \frac{p(x,t)}{\rho}.$$

Quando não há forças externas atuando sobre a corda, a equação se reduz a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4.3}$$

Vale pontuar que a constante a possui dimensão de velocidade. Isto porque a dimensão de T_0 é Nm, em que N é a unidade de medida da força, dada em Newtons, e m a unidade de medida do espaço, dada em metros. Por sua vez, a grandeza ρ possui como dimensão kgs^2, em que kg é a unidade de medida da massa, dada em quilos, e s é unidade de medida do tempo, dada em segundos.

Uma equação como a (4.2), que envolve uma função incógnita u, suas derivadas parciais e um termo F que depende apenas das coordenadas é denominada de Equação Diferencial Parcial (EDP). Mais especificamente, a equação em questão está incluída em um tipo amplo de EDPs denominado equação de ondas.

Outro conceito importante é o de operador de Laplace, o qual também está presente nas Equações Diferenciais Parciais. Consideremos uma função $u(x,t)$. O símbolo de derivação

$$\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

que opera em funções u, é denominado de operador de Laplace unidimensional. De modo análogo, pode-se definir o operador de Laplace bidimensional, tridimensional e, ainda, de dimensão maior que três. Desse modo, uma equação de ondas de dimensão um é, por definição, uma equação diferencial parcial da forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + F,$$

sendo a uma constante, Δ o operador de Laplace unidimensional e F uma função que depende de (x,t). De modo análogo, pode-se definir uma equação de ondas bidimensional, tridimensional e de dimensão maior que três. Por fim, o termo F é denominado termo independente. Se $F = 0$, então a equação se diz homogênea.

Definição 4.2. Denomina-se solução da equação de ondas em um aberto Ω do $\mathbb{R}$ a uma função $u(x,t)$ definida em Ω com valores reais tal que satisfaz a equação pontualmente em $\Omega \times \mathbb{R}^+$.

Analogamente, pode-se definir a solução de equações de ondas de dimensão dois, três ou maior que três.

Estudaremos, em seguida, as equações (4.2) e (4.3) utilizando, para isto, o método de D'Alembert e, depois, o método de Fourier.

4.2 Método de D'Alembert

Quando obtemos uma Equação Diferencial Parcial descrevendo determinado fenômeno, surge o problema de saber se existe solução para esta equação e se ela é única. Ademais, outra questão levantada, sobretudo nas aplicações, é denominada de dependência contínua dos dados, que consiste em investigar a variação das soluções quando os dados sofrem pequenas modificações. Imaginemos, por exemplo, que no caso da corda as condições iniciais sejam a posição da corda $u_0(x)$[1], no instante inicial $t = 0$, e sua velocidade $u_1(x)$[2], também no instante inicial $t = 0$. Assim, investigar a dependência contínua dos dados seria entender se observadas duas posições iniciais u_0 e v_0 e duas velocidades iniciais u_1 e v_1, sendo u_0 próxima de v_0 e u_1 próxima de v_1, resulta que a solução u obtida de u_0 e u_1 e a solução v decorrente de v_0 e v_1 são próximas.

4.2.1 Problema de Cauchy

Iremos analisar a equação homogênea (4.3) sob o aspecto de existência, unicidade e dependência contínua dos dados. Para isto, é proposto o problema de Cauchy, ou Problema de Valores Iniciais. Tal problema consiste em, conhecidas as funções u_0 e u_1, para $-\infty < x < \infty$, encontrar $u(x,t)$, com $-\infty < x < \infty$ e $t \geq 0$, satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\infty < x < \infty \text{ e } t \geq 0; & (4.4) \\ u(x,0) = u_0(x); & (4.5) \\ u_t(x,0) = u_1(x). & (4.6) \end{cases}$$

Assim, dizemos que o problema de Cauchy para (4.4), (4.5) e (4.6) é bem proposto, ou corretamente proposto, quando as seguintes condições são satisfeitas:

a) Existe solução.

b) Há unicidade de soluções.

c) Há dependência contínua das condições iniciais u_0 e u_1.

Diante disto, para mostrar que o problema de Cauchy é bem proposto, usaremos o método de D'Alembert, que se baseia em uma mudança de variáveis para simplificar a forma da equação e, assim, encontrar sua solução $u(x,t)$. Dessa forma, consideremos a função linear

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,t) &\longmapsto (\xi,\eta) \end{aligned}$$

definida por

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta t \\ \eta = \gamma x + \delta t, \end{cases}$$

com $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, para garantir que a transformação seja invertível. Assim, queremos encontrar como as derivadas parciais de u em relação a x e t se expressam em termos das

[1] $u_0(x) = u(x,0)$
[2] $u_1(x) = u'(x,0)$

derivadas parciais de u em relação a ξ e η. Para isto, vamos utilizar a Regra da Cadeia para funções de duas variáveis. Assim, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{4.7}$$

Por outro lado, usando as definições de ξ e η, é possível calcular $\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial \eta}{\partial x}$. De fato,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial(\alpha x + \beta t)}{\partial x} = \alpha \tag{4.8}$$

e

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial(\gamma x + \delta t)}{\partial x} = \gamma. \tag{4.9}$$

Substituindo (4.8) e (4.9) em (4.7), obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha\frac{\partial u}{\partial \xi} + \gamma\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Derivando a expressão acima com respeito a x, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\alpha\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \tag{4.10}$$

De modo análogo, temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}. \tag{4.11}$$

Daí, mais uma vez usando as definições de ξ e η, temos

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial(\alpha x + \beta t)}{\partial t} = \beta \tag{4.12}$$

e

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial(\gamma x + \delta t)}{\partial t} = \delta. \tag{4.13}$$

Substituindo (4.12) e (4.13) em (4.11), obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta\frac{\partial u}{\partial \xi} + \delta\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

e, por conseguinte,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\beta\delta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \tag{4.14}$$

De (4.10) e (4.14), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\beta\delta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - a^2\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2\alpha\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - a^2\gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ &= (\beta^2 - a^2\alpha^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2(\beta\delta - a^2\alpha\gamma) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (\delta^2 - a^2\gamma^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.\end{aligned}$$

Vamos supor que $\beta^2 - a^2\alpha^2 = 0$ e $\delta^2 - a^2\gamma^2 = 0$. Desse modo, a equação em ξ e η acima pode ser escrita na forma simplificada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2(\beta\delta - a^2\alpha\gamma) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}, \tag{4.15}$$

desde que $\beta\delta - a^2\alpha\gamma \neq 0$. Assim, ao tomarmos $\beta = a\alpha$ e $\delta = -a\gamma$, obtemos

$$\beta\delta - a^2\alpha\gamma = -a^2\alpha\gamma - a^2\alpha\gamma = -2a^2\alpha\gamma \neq 0,$$

pois, por hipótese, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, isto é,

$$0 \neq \alpha\delta - \beta\gamma = -a\alpha\gamma - a\alpha\gamma = -2a\alpha\gamma.$$

Daí, como $a \neq 0$, concluímos que $\alpha\gamma \neq 0$. Neste sentido, uma boa mudança de coordenadas é

$$\begin{cases} \xi = \alpha(x + at) \\ \eta = \gamma(x - at), \end{cases}$$

com α e γ números reais quaisquer e não nulos. Se fizermos $\alpha = \gamma = 1$ na equação (4.15), iremos obter

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2(\beta\delta - a^2\alpha\gamma) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Substituindo $\beta = a\alpha$ e $\delta = -a\gamma$, a equação torna-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2(-a^2\alpha\gamma - a^2\alpha\gamma) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Finalmente, sabendo que $\alpha = \gamma = 1$ e $\alpha\gamma \neq 0$, devemos obter

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4a^2\alpha\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = -4a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Portanto, concluímos que a equação (4.3), nas coordenadas ξ e η, se escreve sob a forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0.$$

Portanto, $\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = \theta(\xi)$. Dessa forma, podemos escrever $u(\xi, \eta)$ como

$$u(\xi, \eta) = \int_0^{\xi} \theta(s)ds + g(\eta),$$

ou ainda

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

com

$$f(\xi) = \int_0^{\xi} \theta(s)ds,$$

sendo f e g funções de classe C^2 arbitrárias. A partir disso, podemos escrever a solução de D'Alembert como

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at). \tag{4.16}$$

O desafio agora será determinar as funções f e g. Para isto, vamos utilizar as condições iniciais, supondo que, em $-\infty < x < \infty$, u_0 e u_1 sejam de classes C^2 e C^1, respectivamente. Logo, obtemos

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) + g(x) = u_0(x) \\ u_t(x,0) = af'(x) - ag'(x) = u_1(x), \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = u_0(x) \\ f(x) - g(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x u_1(s)ds + c. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos

$$f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x u_1(s)ds + \frac{c}{2}$$

e

$$g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x u_1(s)ds - \frac{c}{2}.$$

Portanto, para $x + at$ e $x - at$, temos

$$\begin{aligned} f(x+at) &= \frac{1}{2}u_0(x+at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} u_1(s)ds + \frac{c}{2}; \\ g(x-at) &= \frac{1}{2}u_0(x-at) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{0} u_1(s)ds - \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Desta forma, vamos substituir tais funções na equação (4.16). Daí, obtemos

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+at) + u_0(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(s)ds, \tag{4.17}$$

que é conhecida como Fórmula de D'Alembert, com u_0 de classe C^2 e u_1 de classe C^1.

Assim, é possível mostrar que a solução existe ao exibir uma solução. Por outro lado, é imediato notar que a solução é única, pois ao considerar outra solução $v(x,t)$, obtida com as mesmas condições iniciais u_0 e u_1, conclui-se que $v(x,t)$ é igual ao segundo membro da equação (4.17), ou seja, $v = u$. Resta mostrar, portanto, que a solução depende continuamente dos dados iniciais que estão próximos. Sejam u_0, u_1 e v_0, v_1 dois pares de dados iniciais, aos quais correspondem as soluções $u(x,t)$ e $v(x,t)$. A partir da fórmula de D'Alembert, obtemos

$$\begin{aligned} |u(x,t) - v(x,t)| \leq & \frac{1}{2}|u_0(x+at) - v_0(x+at)| + \frac{1}{2}|u_0(x-at) - v_0(x-at)| \\ & + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} |u_1(s) - v_1(s)|ds. \end{aligned}$$

Como u_0, u_1 e v_0, v_1 são pares de dados iniciais, temos

$$\begin{cases} |u_0(x+at) - v_0(x+at)| < \delta; \\ |u_0(x-at) - v_0(x-at)| < \delta; \\ |u_1(s) - v_1(s)| < \delta, \end{cases}$$

ou seja

$$|u(x,t) - v(x,t)| < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2a}2at\delta = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + t\delta = \delta(1+t).$$

Assim, para garantir que $|u(x,t) - v(x,t)| < \epsilon$, precisamos que $\delta(1+t) < \epsilon$. Como $0 \leq t \leq T$, temos

$$|u(x,t) - v(x,t)| < \delta(1+T).$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, consideremos $\delta = \dfrac{\epsilon}{1+T}$, e, portanto,

$$|u(x,t) - v(x,t)| < \frac{\epsilon}{(1+T)}(1+T) = \epsilon,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $0 \le t \le T$, desde que

$$|u_i(x,t) - v_i(x,t)| < \delta, i = 0, 1,$$

o que mostra que a dependência dos dados iniciais é contínua.

Exemplo 4.1. Calcular no ponto $(2,10)$ o valor da solução do problema $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u_0(x) = x^2$; $u_1(x) = 2$, supondo-se $a = 1$.

Solução. Em primeiro lugar, vamos obter $u(x,t)$. Para isto, vamos substituir os valores de $u_0(x)$, $u_1(x)$ e a na equação (4.17), isto é,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[(x+t)^2 + (x-t)^2] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 2ds.$$

Desenvolvendo o produto notável e resolvendo a integral, iremos obter

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[2x^2 + 2t^2] + \frac{1}{2}2s\Big|_{x-t}^{x+t} = x^2 + t^2 + 2t.$$

Logo, $u(x,t) = x^2 + t^2 + 2t$. Para calcular o valor da solução no ponto $(2,10)$, basta fazer $u(2,10) = 2^2 + 10^2 + 2 \cdot 10 = 4 + 100 + 20 = 124$.

4.2.2 Interpretação da Solução de D'Alembert

Imaginemos uma fotografia da onda no instante $t = 0$. Tal fotografia será o gráfico da função $u_0(x) = u(x,0)$. A função $u_0(x)$, por sua vez, será chamada de perfil da onda. Consideremos, ainda, o caso particular em que $u_t(x,0) = u_1(x) = 0$, isto é, a velocidade inicial é nula. Neste caso, a equação (4.17) se reduz a

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+at) + u_0(x-at)].$$

É possível notar que o gráfico de $u_0(x-at)$ é obtido a partir do gráfico de $u_0(x)$, fazendo-se uma translação de at no sentido positivo do eixo x. De forma análoga, o gráfico de $u(x+at)$ é obtido do de $u_0(x)$ ao transladar at no sentido negativo do eixo x. Logo, a solução $u_0(x-at)$ é uma onda com perfil $u_0(x)$ que se propaga no sentido positivo do eixo x e com velocidade igual a a. Essa onda é chamada de onda progressiva ou onda do futuro. Analogamente, $u_0(x+at)$ é um sinal que se propaga com a mesma velocidade, mas no sentido oposto, recebendo o nome de onda regressiva ou onda do passado. Por sua vez, a solução $u(x,t)$ será a junção dos dois movimento. Vimos, anteriormente, que a onda-solução deve ser representada por uma função de classe C^2. Todavia, para facilitar a exemplificação, vamos tomar a seguir uma função apenas contínua.

Tomemos, então, uma onda cujo perfil inicial é representado por

$$u(x) = \begin{cases} x + c, & \text{se } -c \leq x \leq 0 \\ -x + c, & \text{se } 0 \leq x \leq c \\ 0, & \text{se } x < -c \text{ ou } x > c, \end{cases}$$

com c constante. Então,

$$u(x + at) = \begin{cases} x + at + c, & \text{se } -c - at \leq x \leq -at \\ -x - at + c, & \text{se } -at \leq x \leq c - at \\ 0, & \text{se } x < -c - at \text{ ou } x > c - at \end{cases}$$

e

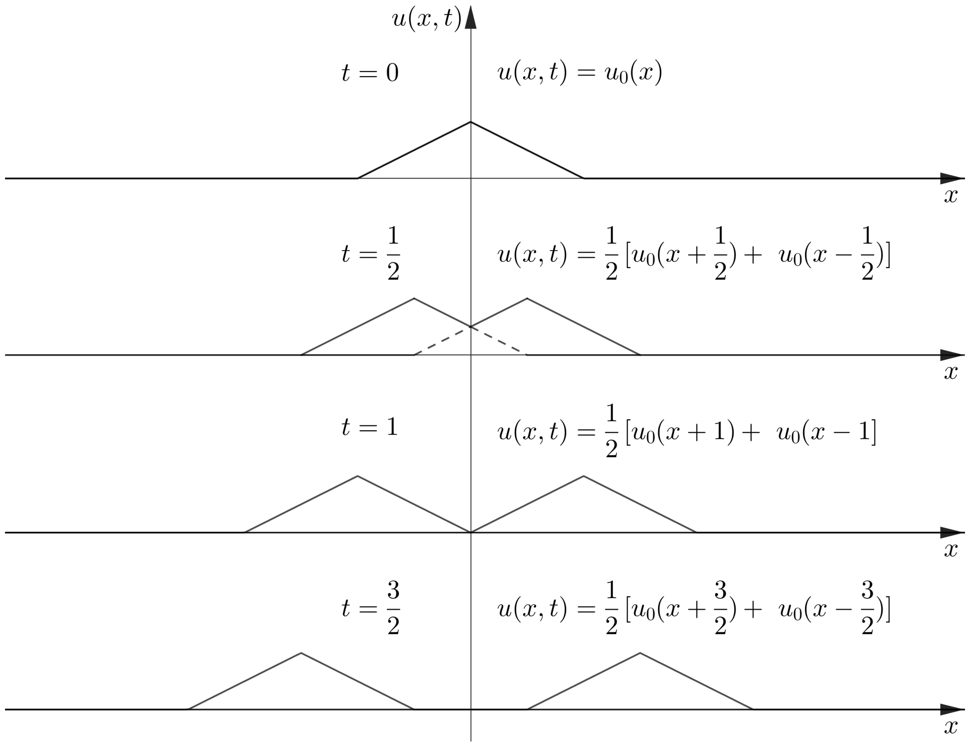
$$u(x - at) = \begin{cases} x - at + c, & \text{se } -c + at \leq x \leq at \\ -x + at + c, & \text{se } at \leq x \leq c + at \\ 0, & \text{se } x < -c + at \text{ ou } x > c + at. \end{cases}$$

Considerando, agora, $t = t_n = \frac{nc}{2a}$, $n = 0, 1, 2, 3, ...$, obtemos, para $n = 0$,

$$u_0(x) = \begin{cases} x + c, & \text{se } -c \leq x \leq 0 \\ -x + c, & \text{se } 0 \leq x \leq c \\ 0, & \text{se } x < -c \text{ ou } x > c. \end{cases}$$

Em seguida, façamos o gráfico de $u(x,t_n)$ para $n = 0, 1, 2, 3, ...$, obtendo uma visão clara de que $u_0(x - at)$ é progressiva e $u_0(x + at)$ é regressiva. Para $n = 0$, notemos que $u(x,t) = u_0(x)$. A Figura 2 dá uma ideia da propagação do sinal $u_0(x)$ quando $c = a = 1$.

Figura 2 – Interpretação da solução de D'Alembert.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O objetivo da Figura 2 é dar uma visão geométrica do movimento das ondas progressivas e regressivas. Ao deduzirmos a Fórmula de D'Alembert, vimos que seria necessário que a função $u_0(x)$ tivesse duas derivadas contínuas, o que não se verifica para a $u_0(x)$ escolhida na composição da Figura 2. Apesar disso, a Figura 2 é bastante sugestiva e ilustrativa para a compreensão do significado das ondas progressivas e regressivas.

4.2.3 Domínios de Dependência e Influência

A equação (4.17) mostra que, no ponto (ξ, t_0), a solução só depende dos dados iniciais u_0 e u_1, no intervalo $\xi - at_0 \leq x \leq \xi + at_0$, ou seja, a solução $u(x,t)$ no ponto (ξ, t_0) depende:

a) dos valores de u_0 nas extremidades do intervalo $[\xi - at_0, \xi + at_0]$.

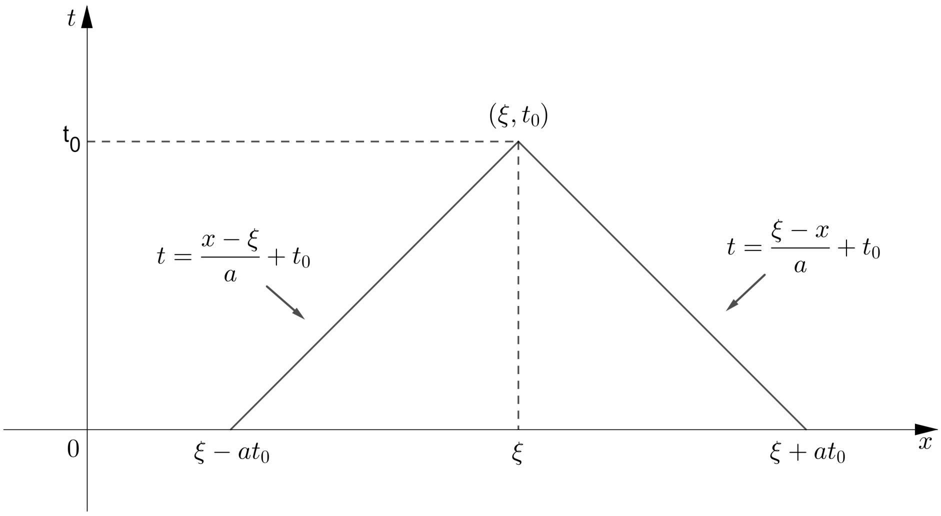
b) dos valores de u_1 no intervalo $[\xi - at_0, \xi + at_0]$.

Assim, qualquer mudança no deslocamento inicial u_0 e na velocidade u_1 fora do intervalo $[\xi - at_0, \xi + at_0]$ não altera a solução no ponto (ξ, t_0). Ou seja, o valor da solução $u(x,t)$ no ponto (ξ, t_0) só depende dos valores de u_0 e u_1 nesse intervalo. Por isto, o intervalo

$$D(u; \xi, t_0) = \{x : \xi - at_0 \leq x \leq \xi + at_0\}$$

é chamado domínio de dependência do ponto (ξ, t_0), conforme a Figura 3.

Figura 3 – Domínio de dependência do ponto (ξ, t_0).

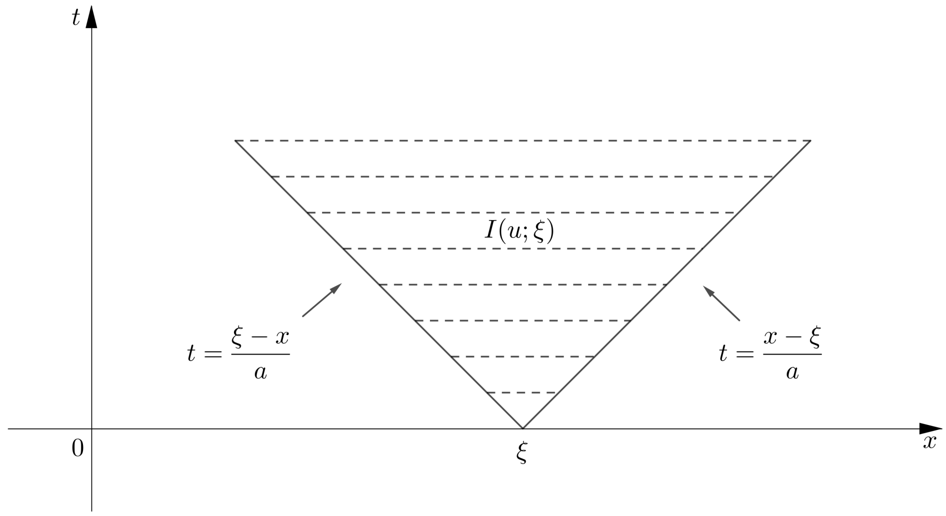


Fonte: Elaborado pelo autor.

Vamos supor, agora, que ξ seja um ponto fixo no eixo x e que queremos saber quais pontos (x, t) do plano $x0t$ em que a solução u se modifica quando alteramos os valores de u_0 e u_1 em ξ. Em outras palavras, estamos interessados em saber quais são os pontos (x, t) do plano $x0t$ tais que ξ pertence ao seu domínio de dependência. O conjunto de pontos (x, t) que satisfaz a essa condição é chamado de domínio de influência de $(\xi, 0)$. A partir da Figura 3, é possível perceber que ele é formado pelos pontos do ângulo no semiplano $t \geq 0$, com vértice em $(\xi, 0)$ e lados $t = \frac{\xi - x}{a}$ e $t = \frac{x-\xi}{a}$, como na Figura 4. Logo, o domínio de influência de $(\xi, 0)$ é dado por

$$I(u;\xi) = \{(s,t) : \xi - at \leq s \leq \xi + at, 0 \leq t < \infty\}.$$

Figura 4 – Domínio de influência do ponto $(\xi, 0)$.

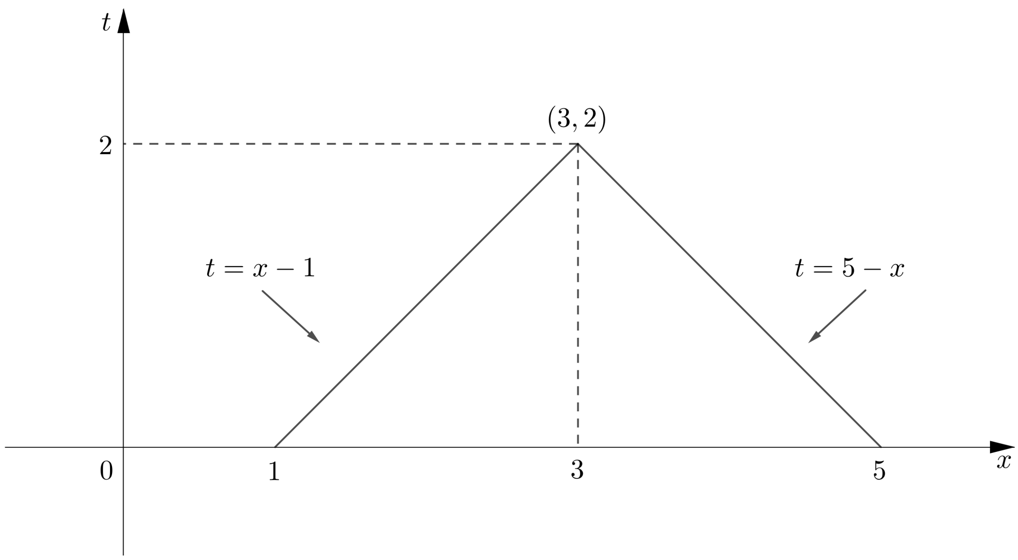


Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, as retas $x + at = \xi + at_0$ e $x - at = \xi - at_0$ chamam-se características da equação (4.3) e os triângulos limitados por elas e o eixo x chamam-se triângulos característicos.

Exemplo 4.2. Voltemos ao exemplo 4.1 e consideremos o domínio de dependência do ponto $(3, 2)$. Nesta caso, teremos o intervalo $1 \leq x \leq 5$ e as retas características que passam por esse ponto são $t = x - 1$ e $t = 5 - x$.

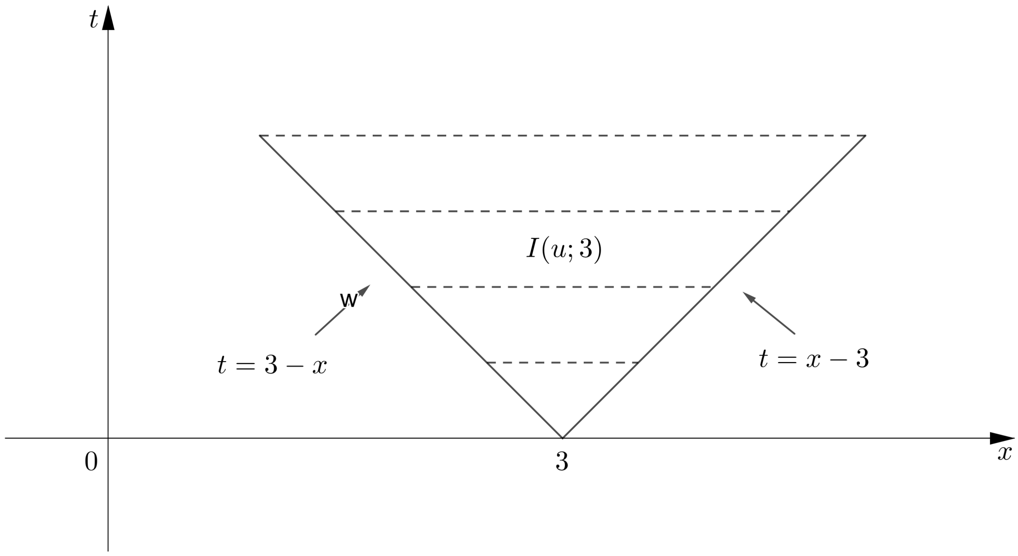
Figura 5 – Domínio de dependência do ponto $(3, 2)$ de $u(x, t) = x^2 + t^2 + 2t$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao passo que o domínio de influência é o ângulo fechado com vértice em $(3, 0)$, limitado pelas retas $t = x - 3$ e $t = 3 - x$, pois $a = 1$. Ou seja, ao se perturbar u_0 ou u_1 em $(3, 0)$, essa perturbação será observada no ângulo mencionado acima.

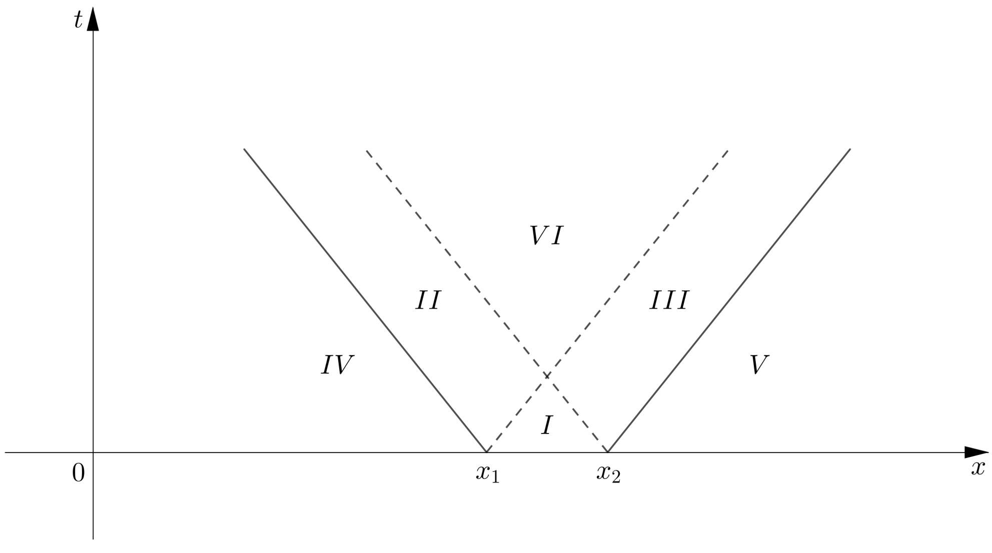
Figura 6 – Domínio de influência do ponto $(3, 0)$ de $u(x,t) = x^2 + t^2 + 2t$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

É possível também definir o domínio de influência de um intervalo $[x_1, x_2]$, que será dado pela reunião dos domínios de influência de cada ponto do intervalo $[x_1, x_2]$, conforme a Figura 7.

Figura 7 – Domínio de influência do intervalo $[x_1, x_2]$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Se considerarmos o ponto (ξ, τ) do plano $x0t$, da Fórmula de D'Alembert, iremos obter

$$
\begin{aligned}
u(\xi, \tau) &= \frac{1}{2}[u_0(\xi + a\tau) + u_0(\xi - a\tau)] + \frac{1}{2a}\int_{\xi - a\tau}^{\xi + a\tau} u_1(s)ds \\
&= \frac{1}{2}u_0(\xi - a\tau) - \frac{1}{2a}\int_0^{\xi - a\tau} u_1(s)ds + \frac{1}{2}u_0(\xi + a\tau) + \frac{1}{2a}\int_0^{\xi + a\tau} u_1(s)ds,
\end{aligned}
$$

ou ainda

$$u(\xi,\tau) = \psi(\xi + a\tau) + \phi(\xi - a\tau),$$

sendo

$$\psi(\xi + a\tau) = \frac{1}{2}u_0(\xi + a\tau) + \frac{1}{2a}\int_0^{\xi + a\tau} u_1(s)ds$$

e

$$\phi(\xi - a\tau) = \frac{1}{2}u_0(\xi - a\tau) - \frac{1}{2a}\int_0^{\xi - a\tau} u_1(s)ds.$$

Logo, $\phi(x - at)$ é constante ao longo da característica $x - at = \xi - a\tau$, isto é, a onda do futuro possui deslocamento constante sobre essa característica. De modo análogo, a onda do passado possui deslocamento constante sobre a característica $x + at = \xi + a\tau$, pois sobre ela $\psi(x + at)$ é constante. Na Figura 7, as características por x_1 e x_2 dividiram o semiplano $t \geq 0$ em 6 regiões. Na região I, tem-se a composição de $\phi(\xi - a\tau)$ progressiva e de $\psi(\xi + a\tau)$ regressiva. Em síntese, os pontos de I são atingidos por ondas do futuro e do passado que tiveram início em pontos do intervalo $[x_1, x_2]$. Na região II, os pontos são perturbados apenas por ondas regressivas, ao passo que na região III somente por ondas progressivas. Por sua vez, os pontos de IV e V são tais que seus domínios de dependência não interceptam o intervalo $[x_1, x_2]$, ou seja, os pontos dessas regiões não são afetados pela perturbação inicial. Por fim, na região VI, consideremos o ponto (ξ, τ). Assim, temos

$$u(\xi,\tau) = \frac{1}{2}[u_0(\xi + a\tau) + u_0(\xi - a\tau)] + \frac{1}{2a}\int_{\xi - a\tau}^{\xi + a\tau} u_1(s)ds.$$

Nestas condições, porém, $u_0(x) = 0$. Portanto, no ponto (ξ, τ) da região VI resta apenas

$$u(\xi,\tau) = \frac{1}{2a}\int_{x_1}^{x_2} u_1(s)ds,$$

e podemos afirmar que nesses pontos o sinal já passou, deixando apenas o efeito ou o indício de sua passagem, que é o deslocamento constante

$$\frac{1}{2a}\int_{x_1}^{x_2} u_1(s)ds.$$

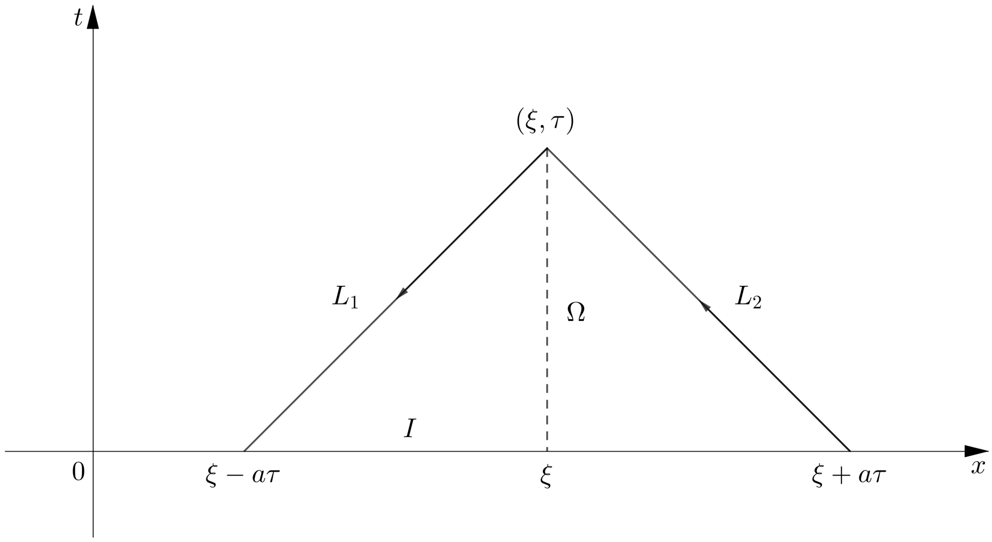
4.2.4 Equação não Homogênea

Anteriormente, resolvemos o problema de Cauchy para a equação (4.3), que é homogênea. Agora, iremos resolver o problema de Cauchy para a equação não homogênea (4.2). Neste sentido, conhecidas $u_0(x)$ de classe C^2, $u_1(x)$ de classe C^1, ambas em $-\infty < x < \infty$, e $F(x,t)$ contínua em $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$, vamos demonstrar a existência de uma função $u(x,t)$ em $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$, que satisfaça às seguintes condições:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t), -\infty < x < \infty \text{ e } t \geq 0; & (4.18) \\ u(x,0) = u_0(x); & (4.19) \\ u_t(x,0) = u_1(x). & (4.20) \end{cases}$$

Assim, seja (ξ, τ) um ponto qualquer do plano $x0t$, no qual se deseja calcular a solução das equações (4.18), (4.19) e (4.20). Por outro lado, seja Ω o triângulo característico determinado por este ponto, conforme pode ser observado geometricamente na Figura 8.

Figura 8 – Triângulo característico do ponto (ξ, τ).



Fonte: Elaborado pelo autor.

A fronteira Γ de Ω considera-se orientada no sentido das flechas da Figura 8, cuja escolha é conveniente devido à orientação do eixo x. Ao integrar ambos os membros da equação (4.18) sobre Ω, obtemos

$$\int_\Omega (a^2 u_{xx}(x,t) - u_{tt}(x,t))dxdt = -\int_\Omega F(x,t)dxdt \tag{4.21}$$

Agora, façamos inicialmente a mudança de variável $Q = a^2 u_x$ e $P = u_t$ e apliquemos o

Teorema de Green na igualdade acima, ou seja,

$$\int_\Omega (a^2 u_{xx} - u_{tt}) dx dt = \int_\Omega (Q_x - P_t) dx dt = \int_\Gamma P dx + Q dt = \int_\Gamma u_t dx + a^2 u_x dt. \tag{4.22}$$

Resta, então, calcular a integral sobre a fronteira Γ, que é composta pelos segmentos orientados I, L_1 e L_2. Para isto, podemos obter uma parametrização para cada um desses segmentos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &L_1 : x - at = \xi - a\tau, \text{ com } \xi - a\tau \le x \le \xi; \\ &L_2 : x + at = \xi + a\tau, \text{ com } \xi \le x \le \xi + a\tau; \\ &I : t = 0, \text{ com } \xi - a\tau \le x \le \xi + a\tau. \end{aligned}$$

A partir disso, temos

$$\begin{aligned} &\text{Sobre } I : t = 0 \Rightarrow dt = 0, \\ &\text{Sobre } L_1 : x = \xi - a\tau + at \Rightarrow \frac{dx}{dt} = a \Rightarrow dx = adt, \\ &\text{Sobre } L_2 : x = \xi + a\tau - at \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -a \Rightarrow dx = -adt. \end{aligned}$$

Integrando, então, sobre cada um dos segmentos orientados, temos

$$\begin{aligned} &\int_I u_t dx + a^2 u_x dt = \int_{\xi - a\tau}^{\xi + a\tau} u_t(x,0) dx, \\ &\int_{L_1} u_t dx + a^2 u_x dt = \int_{L_1} u_t a dt + a^2 u_x \frac{dx}{a} = a \int_{L_1} du = a[u(\xi - a\tau, 0) - u(\xi, \tau)], \\ &\int_{L_2} u_t dx + a^2 u_x dt = \int_{L_2} u_t(-adt) + a^2 u_x \frac{dx}{-a} = -a \int_{L_2} du = -a[u(\xi, \tau) - u(\xi + a\tau, 0)]. \end{aligned}$$

Daí, conclui-se que

$$\int_\Gamma u_t dx + a^2 u_x dt = \int_{\xi - a\tau}^{\xi + a\tau} u_t(x,0) dx + a[u(\xi + a\tau, 0) + u(\xi - a\tau, 0)] - 2au(\xi, \tau),$$

ou ainda

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{2a} \int_{\xi - a\tau}^{\xi + a\tau} u_t(x,0) dx + \frac{1}{2a} a[u(\xi + a\tau, 0) + u(\xi - a\tau, 0)] - \frac{1}{2a} \int_\Gamma u_t dx + a^2 u_x dt.$$

Das equações (4.21) e (4.22), sabemos que

$$\int_\Gamma u_t dx + a^2 u_x dt = \int_\Omega (a^2 u_{xx} - u_{tt}) dx dt = -\int_\Omega F(x,t) dx dt.$$

Portanto, realizando as substituições adequadas, obtemos

$$u(\xi,\tau)=\frac{1}{2}[u_0(\xi+a\tau)+u_0(\xi-a\tau)]+\frac{1}{2a}\int_{\xi-a\tau}^{\xi+a\tau}u_1(x)dx+\frac{1}{2a}\int_{\Omega}F(\lambda,\mu)d\lambda d\mu. \tag{4.23}$$

A primeira parte da equação (4.23) é a solução de D'Alembert do problema homogêneo. A segunda parte,

$$v(x,t)=\int_{\Omega}F(\lambda,\mu)d\lambda d\mu,$$

também é solução do problema

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=F(x,t),-\infty<x<\infty,t\geq 0; & (4.24)\\ v(x,0)=v_t(x,0)=0,-\infty<x<\infty, & (4.25)\end{cases}$$

conforme não é difícil de ser demonstrado. Portanto, a soma das duas soluções $u+v$ será a solução das equações (4.18), (4.19) e (4.20). De modo análogo ao homogêneo, é possível demonstrar que o problema de Cauchy é bem proposto.

Exemplo 4.3. Calcular no ponto (x,t) a solução do problema

$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=1;\\ u_0(x)=x^2;\\ u_1(x)=1.\end{cases}$$

Solução. Vamos considerar o ponto (ξ,τ) do plano $x0t$, observando que $u_0(\xi)=\xi^2$, $u_1(\xi)=1$, $a=1$ e $F(\xi,\tau)=1$. Vamos, então, substituir tais valores na equação (4.23), isto é,

$$\begin{aligned}u(\xi,\tau)&=\frac{1}{2}[(\xi+\tau)^2+(\xi-\tau)^2]+\frac{1}{2}\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau}dx+\frac{1}{2}\int_0^{\tau}\int_{t+\xi-\tau}^{-t+\xi+\tau}dxdt\\&=\frac{1}{2}[\xi^2+2\xi\tau+\tau^2+\xi^2-2\xi\tau+\tau^2]+\frac{1}{2}(\xi+\tau-\xi+\tau)+\frac{1}{2}\int_0^{\tau}-2t+2\tau dt\\&=\frac{1}{2}(2\xi^2+2\tau^2)+\frac{1}{2}2\tau+\frac{1}{2}(-\tau^2+2\tau^2)\\&=\xi^2+\tau^2+\tau-\frac{\tau^2}{2}+\tau^2=\xi^2+\frac{3\tau^2}{2}+\tau.\end{aligned}$$

Logo, $u(x,t)=x^2+\dfrac{3t^2}{2}+t$.

4.3 Método de Fourier

Anteriormente, fizemos o estudo do problema de Cauchy utilizando o método de D'Alembert. Vale destacar, contudo, que também podemos explorar o problema de Cauchy por meio de outro método: o método de Fourier. Assim, vamos estudar nesta seção o método de separação de variáveis para os problemas mistos propostos para as equações de pequenas oscilações de uma corda.

4.3.1 Pequenas Oscilações de uma Corda

Vamos considerar uma corda de comprimento L situada sobre o eixo x, com origem no ponto de abscissa zero e extremidade L. Vamos procurar encontrar a elongação $u(x,t)$ ao oscilar a corda, assumindo que as extremidades estão fixas e conhecendo a posição inicial $u_0(x)$ da corda e a sua velocidade inicial no instante $t = 0$. Matematicamente, conforme já foi visto no estudo do método de D'Alembert, esse problema requer a resolução de um problema misto para a equação da corda vibrante, o que será feito novamente, desta vez utilizando o método de separação de variáveis. Neste sentido, o problema consiste em encontrar uma função real $u(x,t)$, definida para $0 < x < L$ e $t > 0$, que satisfaça

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < L, t > 0; & (4.26) \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), 0 \leq x \leq L; & (4.27) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \text{ para todo } t > 0, & (4.28) \end{cases}$$

sendo u_0 e u_1 funções conhecidas. Vamos resolver o problema procurando a solução sob a forma de variáveis separáveis, isto é,

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

em que X é uma função que depende só de x e T é uma função que depende apenas de t. Então, substituindo na equação (4.26), obtemos

$$XT'' = a^2X''T \Rightarrow XT'' - a^2X''T = 0.$$

Daí, nos pontos onde X e T não se anulam, temos

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \tag{4.29}$$

em que λ é uma constante, uma vez que temos uma igualdade de funções que dependem de variáveis distintas.

De (4.28), temos a condição de Dirichlet nos extremos da corda. Daí, para todo $t > 0$,

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$$

e

$$u(L,t) = X(L)T(t) = 0.$$

Da condição sobre a velocidade inicial dada em (4.27), tem-se

$$u_t(x,0) = X(x)T'(0) = u_1(x), \text{ para todo } x.$$

A partir dessas observações, concluímos que

$$X(0) = X(L) = 0, \tag{4.30}$$

pois, caso contrário, $T(t) = 0$ para todo $t > 0$, o que não nos interessa.

Portanto, a equação (4.29) e a condição (4.30) nos permitem formular os dois seguintes problemas que serão fundamentais para encontrar X e T:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, X(0) = X(L) = 0; & (4.31) \\ T'' + \lambda a^2 T = 0. & (4.32) \end{cases}$$

Vamos, então, resolver esses dois problemas para, assim, resolver o problema misto (4.26), (4.27) e (4.28).

A análise do primeiro problema será realizada em etapas, uma vez que a equação contém um parâmetro real λ, o qual pode assumir valores negativos, positivos ou nulos.

Primeiro caso - Vamos supor $\lambda < 0$. Fazendo $\lambda = -k^2$, a equação (4.31) pode ser escrita como

$$X'' - k^2 X = 0,$$

que é uma Equação Diferencial Ordinária homogênea de segunda ordem. Neste sentido, podemos associar a ela uma equação característica e obter suas raízes, isto é,

$$r^2 - k^2 = 0.$$

Como $r = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$, temos $r = \pm k$ Daí, as raízes do polinômio característico são $r = \pm k$, ou seja, $\Delta > 0$. Daí, a solução geral será da forma

$$X(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx},$$

com c_1 e c_2 constantes a serem determinadas pelas condições de contorno estabelecidas para a equação (4.31). Dessa forma, da condição em que $X(0) = 0$, é possível obter

$$X(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = -c_2.$$

Além disso,

$$X(L) = c_1 e^{kL} + c_2 e^{-kL} = 0$$

e, considerando que $c_1 = -c_2$, a equação anterior se reduz a

$$X(L) = c_1(e^{kL} - e^{-kL}) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0,$$

ou seja, se $\lambda < 0$, o problema (4.31) admite apenas solução trivial, o que não nos interessa.

Segundo caso - Vamos supor $\lambda = 0$. Neste caso, a equação se reduz a $X'' = 0$ e sua solução será da forma $X(x) = ax + b$. Pelas condições de fronteira, temos $X(0) = b = 0$ e $X(L) = aL = 0$, isto é, $a = 0$. Portanto, $X(x) = 0$ para todo x, o que indica que para $\lambda = 0$ o problema da equação (4.31) admite apenas a solução trivial, o que também não nos interessa.

Terceiro caso - Finalmente, vamos supor $\lambda > 0$. Daí, a equação tem a seguinte forma

$$X'' + \lambda X = 0.$$

Logo, podemos encontrar as raízes de seu polinômio característico, ou seja,

$$r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\lambda},$$

o que implica em $r = \pm i\sqrt{\lambda}$. A solução geral, por sua vez, será

$$X(x) = e^{\alpha x}(c_1 \operatorname{sen}(\beta x) + c_2 \cos(\beta x)),$$

em que α é a parte real de r e β a parte imaginária de r. Como $r = \pm i\sqrt{\lambda}$, temos $\alpha = 0$ e $\beta = \sqrt{\lambda}$. Logo, a solução do problema para $\lambda > 0$ se reduz a $X(x) = c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos\big(\sqrt{\lambda}x\big)$. Além disso, das condições de contorno da equação (4.31), obtemos

$$\begin{aligned} X(0) &= c_1 \operatorname{sen} 0 + c_2 \cos 0 = 0 \Rightarrow c_2 = 0; \\ X(L) &= c_1 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0, \end{aligned}$$

pois não queremos, mais uma vez, a solução nula obtida com $c_1 = 0$. Ou seja,

$$\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}L = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, o problema (4.31) possui solução não nula apenas para uma coleção enumerável de valores de λ, dados por

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, k = 1, 2, \ldots.$$

Além disso, a cada λ_k corresponde uma solução $X_k(x)$, definida por

$$X_k(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right), k = 1, 2, \ldots.$$

Este problema (4.31), dependendo do parâmetro λ_k e das condições de contorno $X(0) = X(L) = 0$ é denominado um problema de Sturm-Liouville. Os valores de λ aos quais correspondem soluções não nulas são denominados autovalores e as soluções não nulas $X(x)$ são denominadas autofunções. Neste caso, os autovalores são os $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ e as autofunções são as $X_k(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Portanto, ao utilizarmos o método de separação de variáveis, conseguimos transformar o problema misto (4.26), (4.27) e (4.28) em um problema de Sturm-Liouville, que acabamos de resolver.

Fazendo o estudo do problema (4.32), temos

$$T'' + \lambda_k a^2 T = 0,$$

em que $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$, $k = 1, 2, \ldots$. Daí,

$$T'' + \frac{k^2\pi^2a^2}{L^2}T = 0,$$

isto é, a equação característica associada a este problema é

$$r^2 + \frac{k^2\pi^2a^2}{L^2} = 0,$$

cujas raízes são do tipo complexas conjugadas, mais precisamente

$$r = \pm\frac{k\pi a}{L}i = \pm a\sqrt{\lambda_k}i.$$

A solução geral será, então,

$$T(t) = e^{\alpha t}(c_3 \operatorname{sen}(\beta t) + c_4 \cos(\beta t)),$$

em que α e β são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de r, o que nos permite escrever a solução na forma

$$T(t) = c_3 \operatorname{sen}\left(a\sqrt{\lambda_k}t\right) + c_4 \cos\left(a\sqrt{\lambda_k}t\right).$$

Portanto, fazendo $c_3 = b_k$ e $c_4 = a_k$, a solução $T(t)$ se torna

$$T_k(t) = b_k \operatorname{sen}\left(a\sqrt{\lambda_k}t\right) + a_k \cos\left(a\sqrt{\lambda_k}t\right),$$

sendo a_k e b_k constantes. Dessa forma, é possível concluir, da construção do problema em variáveis separáveis, que as funções

$$u_k(x,t) = \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi at}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi at}{L}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right), k = 1, 2, \ldots$$

devem satisfazer o problema misto (4.26), (4.27) e (4.28). Devido ao caráter linear da equação diferencial (4.26) e das condições iniciais e de contorno, podemos concluir que toda soma da forma

$$S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\left(\frac{k\pi at}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi at}{L}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

também será solução de (4.26), (4.27) e (4.28).

A partir daqui, a questão principal será mostrar que, mediante certas condições sobre os dados iniciais u_0 e u_1, a sucessão $(S_n(x,t))$, com $n \in \mathbb{N}$ converge pontualmente para uma função $u(x,t)$ em $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$, que é a solução de (4.26), (4.27) e (4.28), comprovando que este problema misto é bem proposto. Todavia, antes de iniciarmos a demonstração desses fatos, vamos realizar algumas investigações com o objetivo de encontrar o caminho a seguir na demonstração do resultado que se deseja. Com efeito, seja

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} S_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\left(\frac{k\pi at}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi at}{L}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Vamos supor que este limite existe e, além disso, ele é solução de (4.26), (4.27) e (4.28). Neste sentido, para ser solução de (4.26), basta que a série que define $u(x,t)$ seja duas vezes derivável, porque cada um de seus termos é solução de (4.27) e (4.28). Para satisfazer (4.27), devemos ter

$$u(x,0) = u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

e

$$u_t(x,0) = u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(\frac{k\pi a}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Como consequência, as condições iniciais serão satisfeitas se u_0 e u_1 forem tais que suas extensões ímpares ao intervalo $(-L, L)$ sejam representadas por meio das séries anteriores cujos coeficientes são dados por

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx; \tag{4.33}$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^L u_1(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx. \tag{4.34}$$

A partir das considerações anteriores, vamos mostrar que, ao impormos condições adequadas aos dados iniciais, a função $u(x,t)$ definida por

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{k\pi a t}{L}\right) + b_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi a t}{L}\right)\right)\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \tag{4.35}$$

sendo a_k e b_k os coeficientes das séries

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right), 0 \le x \le L;$$
$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(\frac{k\pi a}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right), 0 \le x \le L,$$

é solução do problema (4.26), (4.27) e (4.28).

Primeiramente, vamos analisar a convergência da série (4.35). As hipóteses sobre os dados iniciais são u_0 duas vezes continuamente derivável em $[0, L]$ e u_1 uma vez continuamente derivável em $[0, L]$. Vamos iniciar com u_0 e considerar sua extensão periódica ímpar $\tilde{u}_0$ à reta $\mathbb{R}$, isto é,

$$\begin{cases} \tilde{u}_0(x) = u_0(x), \text{ se } 0 \le x \le L; \\ \tilde{u}_0(-x) = -u_0(x), \text{ se } -L \le x \le 0; \\ \tilde{u}_0(x+2L) = \tilde{u}_0(x), \text{ se } |x| \ge L. \end{cases}$$

Agora, examinemos essa extensão a fim de verificar se ela herdou a regularidade C^2 da u_0. Assim, se $0 < x < L$, temos

$$\tilde{u}_0'(x) = u_0'(x) \text{ e } \tilde{u}_0''(x) = u_0''(x),$$

o que mostra que $\tilde{u}_0$ é duas vezes continuamente derivável em $(0, L)$. Por outro lado, para $-L < x < 0$, temos

$$\tilde{u}_0'(-x) = -u_0'(x) \text{ e } \tilde{u}_0''(-x) = -u_0''(x),$$

o que mostra que $\tilde{u}_0$ também é duas vezes continuamente derivável em $(-L, 0)$. Resta examinarmos o comportamento da $\tilde{u}_0$ nos extremos do intervalo, exigindo que ela possua a mesma ordem de derivabilidade que possui em seu interior. Assim, vamos examinar no ponto zero, repetindo a análise para $-kL$ e kL, $k = 1, 2, \ldots$. Como a corda está fixa nos extremos, resulta que $u_0(0) = u_0(L) = 0$. Assim, temos

$$\lim_{x\to 0^+} \tilde{u}_0'(x) = \lim_{x\to 0^+} u_0'(x) \text{ e } \lim_{x\to 0^+} \tilde{u}_0''(x) = \lim_{x\to 0^+} u_0''(x);$$
$$\lim_{x\to 0^+} \tilde{u}_0'(-x) = -\lim_{x\to 0^+} u_0'(x) \text{ e } \lim_{x\to 0^+} \tilde{u}_0''(-x) = -\lim_{x\to 0^+} u_0''(x).$$

Concluímos, então, que $\tilde{u}_0'(x)$ e $\tilde{u}_0''(x)$ são contínuas no zero, desde que se suponha que u_0, u_0', u_0'' são contínuas em $0 \le x \le L$, sendo $u_0'(0) = u_0''(0) = 0$. O mesmo raciocínio pode ser empregado nos extremos $-L$ e L, devendo ser $u_0'(L) = u_0''(L) = 0$, também por hipótese. Com essas hipóteses sobre u_0, obtemos uma extensão periódica ímpar $\tilde{u}_0 \in C^2(\mathbb{R})$, com período $2L$. Portanto, $\tilde{u}_0$ está nas condições do Corolário 3.1 do Teorema de Riemann e, mais particularmente, do Teorema 3.3. Portanto, a série de Fourier de $\tilde{u}_0$ converge para $\tilde{u}_0$ em $[-L, L]$ de forma uniforme e, em particular, u_0 possui uma representação em série de Fourier dada por

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right), 0 \le x \le L, \tag{4.36}$$

em que

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \tag{4.37}$$

sendo a convergência absoluta e uniforme. Daí, concluímos que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi a t}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right),$$

com os coeficientes dados por (4.37), também converge uniforme e absolutamente em $0 \le x \le L$, $t > 0$, cuja soma será representada por $U(x,t)$. Daí, vamos verificar que

$$U(x,t) = a_k \cos\left(\frac{k\pi a t}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \tag{4.38}$$

é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < L, t > 0; & (4.39) \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = 0, 0 \le x \le L; & (4.40) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \text{ para todo } t > 0, & (4.41) \end{cases}$$

quando supomos $u_0 \in C^2([0, L])$, com u_0, u_0', u_0'' nulas em 0 e L.

De fato, vamos utilizar a fórmula elementar da demonstração do Lema 3.1, $2 \operatorname{sen} p \cos q =$

$\operatorname{sen}(p+q) - \operatorname{sen}(q-p)$, obtendo

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{k\pi}{L}at\right) &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}(x+at)\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}(at-x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}(x-at)\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}(x+at)\right).
\end{aligned}$$

Daí, dada a convergência uniforme e absoluta da série (4.36), podemos escrever a $U(x,t)$ como sendo

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}(x-at)\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}(x+at)\right).$$

Por outro lado, sabemos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, a extensão $\tilde{u}_0$ de u_0 tem a representação

$$\tilde{u}_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

com os a_k dados por (4.37). Dessa forma, concluímos que

$$U(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{u}_0(x-at) + \tilde{u}_0(x+at)],$$

que mostraremos ser solução de (4.39), (4.40) e (4.41).

De fato, temos

$$U(0,t) = \frac{1}{2}[\tilde{u}_0(-at) + \tilde{u}_0(at)] = \frac{1}{2}[-\tilde{u}_0(at) + \tilde{u}_0(at)] = 0$$

e

$$\begin{aligned}
U(L,t) = \frac{1}{2}[\tilde{u}_0(L-at) + \tilde{u}_0(L+at)] &= \frac{1}{2}[\tilde{u}_0(-L-at) + \tilde{u}_0(L+at)] \\
&= \frac{1}{2}[-\tilde{u}_0(L+at) + \tilde{u}_0(L+at)] = 0,
\end{aligned}$$

o que mostra que as condições de contorno são satisfeitas. Além disso, também obtemos

$$U(x,0) = \frac{1}{2}[\tilde{u}_0(x) + \tilde{u}_0(x)] = \tilde{u}_0(x) = u_0(x), 0 \le x \le L.$$

Em relação à segunda condição inicial, temos

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2}[-\tilde{u}_0'(x-at) + \tilde{u}_0'(x+at)],$$

isto é,

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \frac{1}{2}[-\tilde{u}_0'(x) + \tilde{u}_0'(x)] = 0, 0 \le x \le L.$$

Resta, então, verificar que $U(x,t)$ é solução da equação diferencial da corda. É necessário, portanto, que $U(x,t)$ possua duas derivadas contínuas em relação a x e a t. Mas isso é consequência das hipóteses feitas sobre u_0 para se obter a expressão $\tilde{u}_0$ com as propriedades exigidas para $U(x,t)$. Portanto, resta apenas fazer as derivações para constatar que a equação (4.39) é satisfeita por $U(x,t)$ em $0 < x < L$. De fato,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{2}a^2[\tilde{u}_0''(x-at) + \tilde{u}_0''(x+at)]$$

e

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{2}[\tilde{u}_0''(x-at) + \tilde{u}_0''(x+at)],$$

o que completa a demonstração de que $U(x,t)$ é solução do problema (4.39), (4.40) e (4.41).

Agora, iremos analisar a solução do problema misto supondo que $u_0 = 0$ e a velocidade inicial u_1 não nula. Para isto, vamos imaginar u_1 contínua com derivada u_1' contínua em $[0,L]$. Assim, vamos considerar a extensão ímpar à reta $\mathbb{R}$, dada por $\tilde{u}_1$, periódica com período $2L$. Para que essa função esteja nas condições do Teorema 3.3, basta apenas a condição $\tilde{u}_1(-L) = \tilde{u}_1(L) = 0$ e que $\tilde{u}_1$ seja bem definida também no zero. Para chegar a estes resultados, basta supor $u_1(0) = u_1(L) = 0$. Resulta, então, que $\tilde{u}_1$ está nas condições do Teorema 3.3. Portanto, temos

$$\tilde{u}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \tag{4.42}$$

sendo

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L u_1(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx. \tag{4.43}$$

Isto resulta que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Lb_k}{k\pi a} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi at}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

converge uniformemente em $[0,L]$, $t > 0$, e define uma função $V(x,t)$, isto é,

$$V(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Lb_k}{k\pi a} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi at}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right). \tag{4.44}$$

Portanto, precisamos mostrar que $V(x,t)$ é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < L, t > 0; & (4.45) \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = u_1(x), 0 \leq x \leq L; & (4.46) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \text{ para todo } t > 0. & (4.47) \end{cases}$$

Com efeito, temos

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\left(\frac{k\pi a t}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}(x-at)\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}(x+at)\right),$$

pois ambas as série convergem absolutamente. Daí, da equação (4.42), obtemos

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2}[\tilde{u}_1(x-at) + \tilde{u}_1(x+at)],$$

o que implica

$$V(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \tilde{u}_1(x-as)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \tilde{u}_1(x+as)ds,$$

o que resulta

$$V(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(s)ds.$$

Ademais, quando $t = 0$, $V(x,0) = 0$ e

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \text{ para } 0 < x < L.$$

Por outro lado, para verificarmos as condições de contorno, temos

$$V(0,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \tilde{u}_1(-as)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \tilde{u}_1(as)ds = -\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{u}_1(as)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \tilde{u}_1(as)ds = 0,$$

uma vez que $\tilde{u}_1$ é ímpar. Em relação à outra extremidade, temos

$$\begin{aligned} V(L,t) &= \frac{1}{2}\int_0^t \tilde{u}_1(L-as)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \tilde{u}_1(L+as)ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \tilde{u}_1(-L-as)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \tilde{u}_1(L+as)ds \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{u}_1(L+as)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \tilde{u}_1(L+as)ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, vamos mostrar que $V(x,t)$ é solução da equação da corda em $0 < x < L$.

Como $\tilde{u}_1$ possui uma derivada contínua em $\mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\left(\frac{k\pi at}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2}[\tilde{u}_1(x-at) + \tilde{u}_1(x+at)],\\
\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \frac{a}{2}[-\tilde{u}_1'(x-at) + \tilde{u}_1'(x+at)]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi at}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2a}[-\tilde{u}_1(x-at) + \tilde{u}_1(x+at)],\\
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{1}{2a}[-\tilde{u}_1'(x-at) + \tilde{u}_1'(x+at)],
\end{aligned}$$

o que mostra que $V(x,t)$ é solução.

Portanto, a função $\tilde{u}(x,t) = U(x,t) + V(x,t)$ para $0 < x < L$, $t > 0$, é solução do problema misto (4.26), (4.27) e (4.28). Escrevendo $\tilde{u}$ explicitamente, obtemos

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{u}_0(x+at) + \tilde{u}_0(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde{u}_1(s)ds,$$

que é a Fórmula de D'Alembert.

Para demonstrarmos que o problema misto (4.26), (4.27) e (4.28) é bem proposto, vamos provar a unicidade de soluções e a dependência contínua dos dados iniciais. Em relação à unicidade, vamos considerar o funcional energia

$$E(t) = \int_0^L (u_t^2 + a^2 u_x^2)dx,$$

que é a energia total do movimento, e também é dado por $E(t) = E_C(t) + E_P(t)$, com

$$\begin{aligned}
E_C(t) &= \int_0^L u_t^2 dx \text{ (Energia Cinética da corda)},\\
E_P(t) &= \int_0^L a^2 u_x^2 dx \text{ (Energia Potencial Elástica da corda)}.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar, então, que E é constante. Para isto, é suficiente mostrar que sua derivada é nula, pois o domínio de E é o intervalo $[0,\infty)$.

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \int_0^L (2u_t u_{tt} + 2a^2 u_x u_{xt})dx = \int_0^L (2u_t a^2 u_{xx} + 2a^2 u_x u_{xt})dx\\
&= 2a^2 \int_0^L (u_t u_{xx} + u_x u_{xt})dx = 2a^2 \int_0^L (u_t u_x)_x dx\\
&= 2a^2 [u_t(x,t) u_x(x,t)]|_{x=0}^{x=L} = 0,
\end{aligned}$$

devido às condições de contorno $u_t(0,t) = u_t(L,t) = 0$. Daí, como a função E possui derivada nula, concluímos que E é constante. Vamos mostrar a unicidade de solução do problema (4.26), (4.27) e (4.28) a partir deste fato. Com efeito, suponhamos que existem duas soluções u e v. Portanto, a função $w = u - v$ seria solução do problema misto

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, 0 < x < L, t > 0; & (4.48) \\ w(x,0) = w_t(x,0) = 0 \leq x \leq L; & (4.49) \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, \text{ para todo } t > 0. & (4.50) \end{cases}$$

Daí, se E é a energia total correspondente ao movimento modelado por (4.48), (4.49) e (4.50), então $E(t) = c\ \forall\ t$. Assim, temos $E(0) = 0$, pois as condições iniciais são nulas. Daí, como $E(t) = c\ \forall\ t$ e $E(0) = 0$, então $E(t) = 0$, para todo $t \geq 0$, ou seja,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = 0, \text{ para } 0 < x < L, t > 0,$$

ou ainda $w_t(x,t) = 0$ e $w_x(x,t) = 0$. Daí, resulta que

$$w(x,t) = w(0,t) + \int_0^x w_x(s,t)ds = 0,$$

para todo x, t, isto é, $w = 0$, implicando $u = v$.

Por fim, para concluirmos, resta apenas mostrar que as soluções dependem continuamente dos dados iniciais. Por essa dependência contínua entende-se que, se (u_0, u_1, u) forem posição inicial, velocidade inicial e solução do problema misto correspondente, respectivamente, e (v_0, v_1, v) outro terno de funções nas mesmas condições, então se $|u_1(x) - v_1(x)| < \epsilon$ e $|u_0(x) - v_0(x)| < \epsilon$, para todo $0 \leq x \leq L$, então $|u(x,t) - v(x,t)| \leq \epsilon\sqrt{(1+a)}L$, para todo $0 \leq x \leq L$ e $t \geq 0$. Antes, contudo, vamos provar uma generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz para o caso de funções contínuas.

Lema 4.1. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Sejam u e v funções contínuas em $0 \leq x \leq L$. Então,*

$$\left(\int_0^L uv dx\right)^2 \leq \left(\int_0^L u^2 dx\right)\left(\int_0^L v^2 dx\right).$$

Demonstração. Sendo u e v contínuas, o produto uv e os quadrados u^2 e v^2 também são contínuas em $0 \leq x \leq L$, ou seja, também são integráveis nesse intervalo. Daí, vamos considerar a decomposição do intervalo $[0, L]$ da seguinte forma:

$$0, \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \ldots, \frac{(n-1)L}{n}, L.$$

Além disso, seja $x_v = \dfrac{vL}{n}$ um ponto genérico dessa decomposição e ξ_v um ponto de (x_{v-1}, x_v), $v = 1, 2, \ldots, n$. Da definição de integral segundo Riemann para uma função contínua, obtemos

$$\int_0^L u(x)v(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{v=1}^{n} u(\xi_v)v(\xi_v)h_v,$$

em que $h_v = x_v - x_{v-1} = \dfrac{L}{n}$, para $v = 1, 2, \ldots, n$. Da desigualdade discreta de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\left[\sum_{v=1}^{n}\left(u(\xi_v)\sqrt{h_v}\right)\left(v(\xi_v)\sqrt{h_v}\right)\right]^2 \le \left(\sum_{v=1}^{n} u(\xi_v)^2 h_v\right)\left(\sum_{v=1}^{n} v(\xi_v)^2 h_v\right),$$

o que resulta, portanto,

$$\int_0^L u(x)v(x)dx \le \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{v=1}^{n} u(\xi_v)^2 h_v\right)^{1/2}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{v=1}^{n} v(\xi_v)^2 h_v\right)^{1/2}.$$

Voltando a atenção, mais uma vez, para a definição de integral de Riemann, concluímos que o segundo membro da última desigualdade são as raízes quadradas das integrais de u^2 e v^2, o que implica a desigualdade de Cauchy no caso contínua, provando o Lema (4.1). □

De posse da desigualdade de Cauchy-Schwarz, provaremos a dependência contínua para o problema misto. Com efeito, sejam u_0, u_1, v_0, v_1 dados iniciais a que correspondem as soluções u e v, sendo

$$|u_1(x) - v_1(x)| < \epsilon \text{ e } |u_0(x) - v_0(x)| < \epsilon \text{ para } 0 \le x \le L.$$

Daí, temos $w = u - v$ como solução do mesmo problema misto, com dados iniciais $w_0 = u_0 - v_0$ e $w_1 = u_1 - v_1$. Logo,

$$w(x,t) = w(0,t) + \int_0^x w_\xi(\xi,t)d\xi$$

para todo $0 \le x \le L$ e $t \ge 0$. Devido à condição de contorno resulta que $w(0,t) = u(0,t) - v(0,t) = 0$ para todo $t \ge 0$. Portanto,

$$|w(x,t)| \le \int_0^L |w_\xi(\xi,t)|d\xi.$$

Daí, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$|w(x,t)| \le \sqrt{L}\left(\int_0^L |w_\xi(x,t)|^2\right)^{1/2}.$$

Portanto, se representarmos por $E(t)$ a energia total do sistema em que w é solução, obtemos, a partir da última integral,

$$|w(x,t)| \leq \sqrt{L}(E(t))^{1/2} = \sqrt{L}(E(0))^{1/2},$$

ou seja, retornando a u e v,

$$|u(x,t) - v(x,t)| \leq \sqrt{L}\left[\int_0^L (|u_1(x) - v_1(x)|^2 + a^2|u_0(x) - v_0(x)|^2)dx\right]^{1/2}.$$

Assim, da condição imposta aos dados iniciais, concluímos que

$$|u(x,t) - v(x,t)| \leq \epsilon\sqrt{(1+a^2)L}$$

para todo $0 \leq x \leq L$ e $t \geq 0$, o que mostra que u e v também são próximas.

5 SIMULAÇÕES EM SOFTWARES COMPUTACIONAIS

Durante o desenvolvimento da pesquisa, alguns softwares computacionais foram fundamentais para a compreensão de diversos tópicos. A utilização desses programas possibilitou a realização de simulações numéricas que facilitaram a visualização didática de vários conceitos, tornando temas complexos em conteúdos mais claros e acessíveis. Neste sentido, utilizamos os softwares GeoGebra e Python, que podem ser acessados em [3] e [13], para produzir figuras e vídeos relacionados às Equações da Onda.

5.1 Simulações em GeoGebra

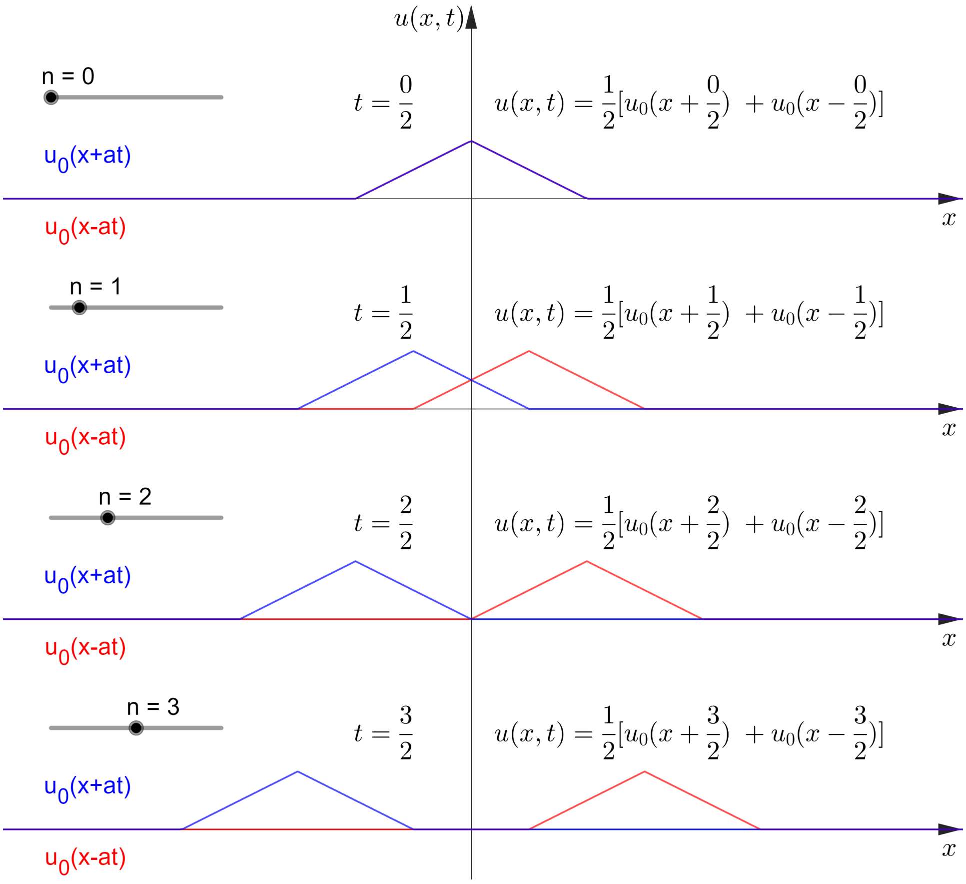
O GeoGebra é um software dinâmico de matemática para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculos em uma única plataforma. Em síntese, é uma plataforma online com mais de um milhão de recursos gratuitos para a manipulação de conteúdos matemáticos. O GeoGebra é um software gratuito e intuitivo, estando à disposição de qualquer pesquisador.

Por outro lado, é necessário citar o projeto O GeoGebra, que foi de suma importância para esta pesquisa. O referido projeto é um site para divulgação do GeoGebra que disponibiliza materiais e recursos para capacitar usuários em seus aspectos técnicos e para fomentar reflexões sobre seu uso em situações de ensino e aprendizagem. O projeto oferta periodicamente o "Curso de GeoGebra", o qual visa disponibilizar conhecimento gratuito acerca do softwate, e é destinado sobretudo para graduandos e graduados em matemática. Assim, realizamos este curso, em sua 22ª edição, para adquirir e aprofundar os conhecimentos necessários para a construção das figuras presentes nesse texto. O projeto, juntamente com materiais e cursos, pode ser encontrado em [12].

O GeoGebra foi utilizado em diversos momentos da nossa pesquisa. Em primeiro lugar, vale destacar que todas as figuras do Capítulo 4 foram produzidas por meio desse software. Além disso, neste capítulo, apresentaremos mais duas figuras produzidas no GeoGebra. A escolha desse programa se deu em virtude da sua interface intuitiva, que permite a construção de diversas figuras com os mais variados elementos.

Na subseção 4.2, abordamos a interpretação geométrica da solução de D'Alembert. Neste contexto, a Figura 2 nos deu uma ideia bastante intuitiva do comportamento das ondas progressivas e regressivas. No entanto, a Figura 9 abaixo também representa, com cores, a interpretação da solução de D'Alembert, para $a = 1$ e $c = 1$. A diferença entre as Figuras 2 e 9 está, sobretudo, no destaque de cores da Figura 9, o que facilita ainda mais a visualização do caráter progressivo de $u_0(x - at)$, destacada na cor vermelha, e do caráter regressivo de $u_0(x + at)$, destacada na cor azul.

Figura 9 – Interpretação da solução de D'Alembert.

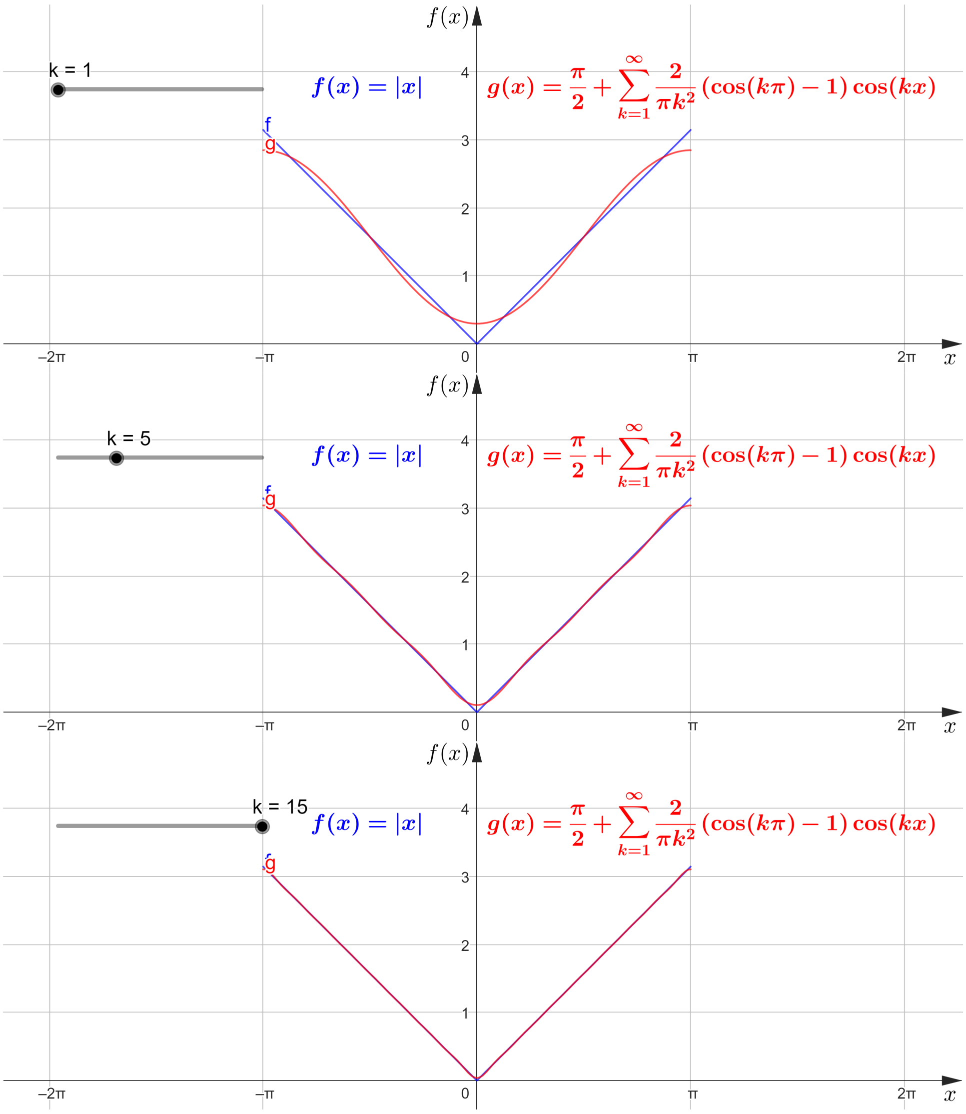


Fonte: Elaborado pelo autor.

Além da figura acima, também foi produzido um vídeo, que torna a interpretação da solução de D'Alembert ainda mais didática. Esse vídeo pode ser acessado por meio do seguinte link: `https://youtu.be/VsFpHJzSgXs`. Além disso, o gráfico em questão pode ser visualizado e manipulado no website do software GeoGebra, mediante o seguinte link: `https://www.geogebra.org/classic/ctza4e4h`.

A segunda figura produzida advém do Exemplo 3.1, em que obtivemos a série de Fourier da função $u(x) = |x|$. É importante destacar que a série de Fourier de uma função converge para a própria função à medida que aumentamos o valor de k, ou seja, o número de parcelas do somatório. Vale pontuar, contudo, que nem toda função possui uma série de Fourier associada a ela. Entretanto, nas funções em que isso ocorre, é possível visualizar geometricamente essa convergência. Neste sentido, a Figura 10 mostra o quanto a série de Fourier da função $|x|$, no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, se aproxima da própria função.

Figura 10 – Série de Fourier de $f(x) = |x|$ em $-\pi \leq x \leq \pi$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim como foi feito com a Figura 9, também foi produzido um vídeo que torna a Figura 10 ainda mais didática. Ele pode ser acessado em `https://youtu.be/C9DN9zkeHio`. Ademais, a figura também pode ser visualizada e manipulada por meio do GeoGebra, por meio do seguinte link: `https://www.geogebra.org/classic/g4vmemem`.

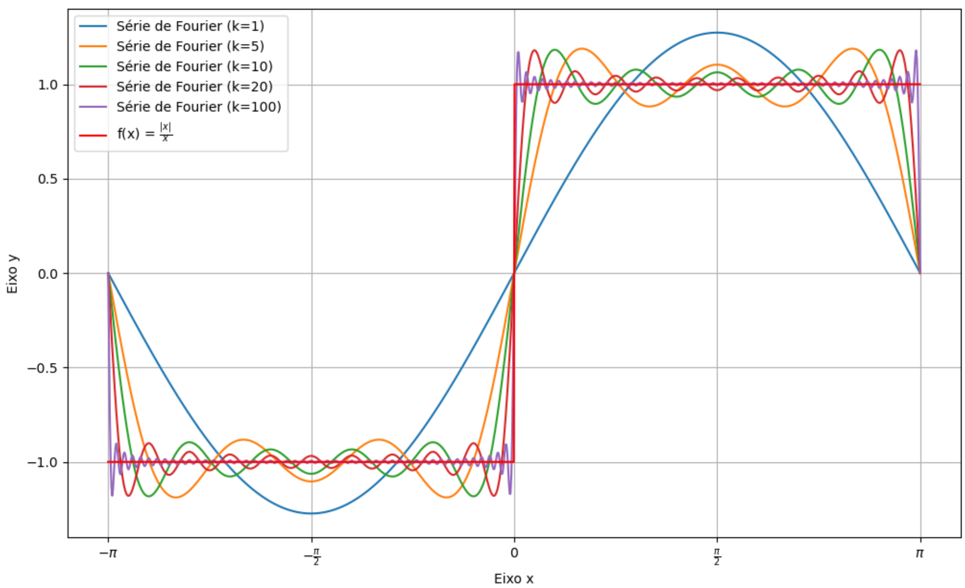
5.2 Simulações em Python

O desenvolvimento da computação revolucionou a forma de fazer pesquisa. Bibliotecas que antes só eram acessadas presencialmente, hoje estão facilmente sob o domínio dos pesquisadores por meio de plataformas e websites. Ferramentas cada vez mais poderosas também permitem a produção de materiais de forma bem mais ágil que no século passado. Um desses instrumentos é o Python, que é uma linguagem de programação bastante utilizada para tratamento de dados, produção de gráficos e desenvolvimento de aplicativos, por exemplo. Nesta pesquisa, foi utilizado o Python com o mesmo intuito do GeoGebra: produzir figuras e vídeos que facilitassem a compreensão dos conteúdos, além de fornecer uma visualização didática de alguns conceitos. Assim, também realizamos um curso de Python, que está disponível no canal "Matemática Para Gente Grande", e que pode ser acessado em [9]. O curso ajudou no aprendizado da linguagem de programação para fins de produção de materiais relacionados à matemática, como gráficos e séries.

Vale destacar aqui uma desvantagem do GeoGebra em relação ao Python. Para produzir os gráficos das séries de Fourier no GeoGebra, foi necessário encontrar a série manualmente, utilizando os métodos estudados. O Python, por sua vez, possui pacotes e comandos que facilitam essa produção. Apesar disso, durante a pesquisa, foram gerados gráficos cujas séries de Fourier foram encontradas tanto de forma manual quanto de forma automática. Neste último caso, foi necessário utilizar a biblioteca de matemática "sympy"e o comando "sp.fourier_series". Assim, vamos apresentar abaixo duas figuras produzidas com a linguagem de programação Python. Estas figuras estão relacionadas com os resultados obtidos no trabalho e serviram para a compreensão de conceitos importantes, uma vez que foi possível visualizar o que até então vinha sendo estudado de forma abstrata.

A primeira figura advém do Exemplo 3.3. Trata-se da função $u(x) = \dfrac{|x|}{x}$, que é conhecida como função sinal de x. A Figura 11 é o gráfico dessa função juntamente com a série de Fourier associada a ela no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

Figura 11 – Série de Fourier de $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ em $-\pi \leq x \leq \pi$.

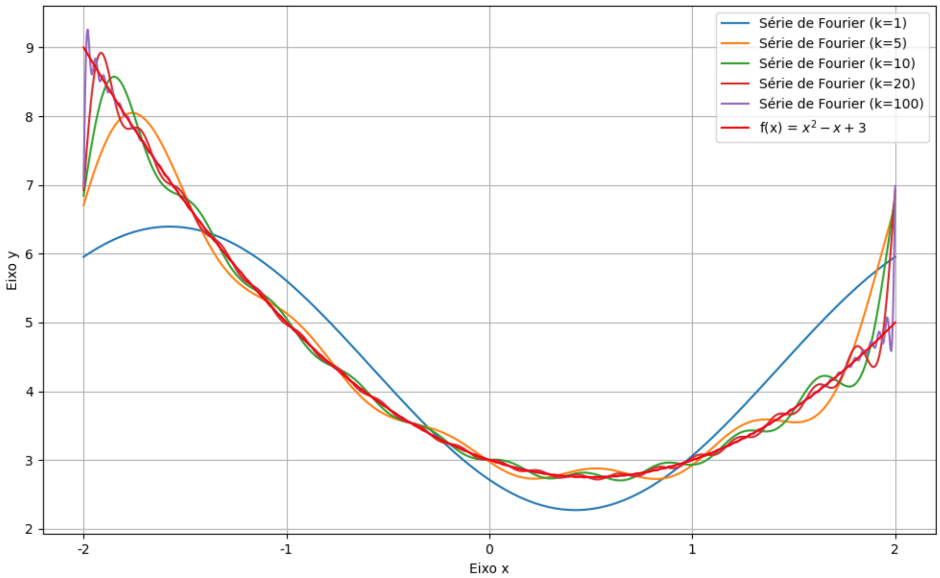


Fonte: Elaborado pelo autor.

Ademais, foi produzido um vídeo com os dados da Figura 11, utilizando a linguagem de programação Python, que torna mais didática a visualização de que a série de Fourier de uma função converge para a própria função. O vídeo pode ser acessado em `https://youtu.be/Na-eXTvpH7Y`.

A segunda figura se trata do gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - x + 3$ e da sua série de Fourier associada. Essa foi uma das primeiras figuras produzidas, quando o objetivo principal era visualizar a convergência da série de Fourier de uma função para a própria função.

Figura 12 – Série de Fourier de $f(x) = x^2 - x + 3$ em $-2 \leq x \leq 2$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, também foi produzido um vídeo da função anterior e sua série de Fourier. O vídeo pode ser visualizado em `https://youtu.be/b23XfcYu5_k`.

6 CONCLUSÃO

Durante o desenvolvimento deste trabalho, foi possível estudar e explorar uma série de definições e teoremas que fundamentaram toda a nossa pesquisa. Em um primeiro momento, ao expor o problema das pequenas oscilações de uma corda, conseguimos chegar à dedução da equação da onda, que foi um dos temas principais desse trabalho. Por outro lado, quando obtemos uma equação que descreve algum fenômeno físico, é necessário descobrir se essa equação faz sentido ou não. Em outras palavras, é necessário estudar se tal equação possui solução, se ela é única e se há dependência contínua de dados iniciais. Neste sentido, nas seções seguintes fizemos o estudo da equação da corda vibrante utilizando, para isto, dois métodos. O primeiro foi o método de D'Alembert, que consiste em uma mudança de variáveis para encontrar uma função que satisfaça ao chamado Problema de Cauchy. O outro método, por sua vez, consiste na separação de variáveis e é denominado método de Fourier. No estudo de ambos os métodos foi possível enunciar diversos resultados importantes que nos ajudaram na fundamentação da pesquisa. Além disso, foi possível aprender a manipular softwares computacionais, a exemplo do GeoGebra e Python, para a construção de figuras e vídeos que possibilitaram uma visualização didática dos conteúdos trabalhados. Ademais, esse trabalho pode servir de base para futuros estudantes de iniciação científica que desejam realizar um estudo introdutório das Equações Diferenciais Parciais, uma vez que buscamos escrever um texto claro, conciso e didático, sobretudo com a utilização de recursos computacionais que permitiram uma melhor visualização dos resultados obtidos. Pesquisas futuras podem aprofundar o estudo da equação da onda em dimensões superiores, a exemplo do estudo das pequenas oscilações de uma membrana. Além disso, esperamos ainda que este trabalho sirva de base para o estudo de outros temas relacionados às Equações Diferenciais Parciais, como as equações com retardo[1]. Esses temas podem ser estudados de forma mais aprofundada em um nível de pós-graduação. Em suma, o presente trabalho contribuiu significativamente para o entendimento de princípios básicos relacionados à equação da onda, incluindo a sua dedução. Por fim, a realização desse Trabalho de Conclusão de Curso foi uma experiência enriquecedora, que permitiu o aprendizado e aprofundamento em diversos temas da matemática aplicada, além do desenvolvimento de habilidades computacionais e de pesquisa científica.

[1]Equações com retardo são Equações Diferenciais que dependem do retardo de funções desconhecidas.

REFERÊNCIAS

[1] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C.; MEADE, Douglas B. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** 11ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

[2] CLARK, Marcondes Rodrigues; LIMA, Osmundo Alves de. **Cálculo de Funções de uma Variável Real.** Teresina: EDUFPI, 2012.

[3] Geogebra, 2024. Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acesso em: 17/10/2024.

[4] KLINE, Morris. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.** v. 1. New York: Oxford University Press, 1972.

[5] LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica.** v. 2. 3ª ed. (Trad. Cyro de Carvalho Patarra). São Paulo: HARBRA, 1994.

[6] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise.** v. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[7] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise.** v. 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

[8] MACIEL, Aldo Bezerra; LIMA, Osmundo Alves de. **Introdução à Análise Real.** Campina Grande: EDUEPB, 2005.

[9] MATEMÁTICA PARA GENTE GRANDE. Matemática Com Python. YouTube, 20 de novembro de 2022. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=m_9hrCM6EzA&list=PL8aWdrmfXHiLeEamnK0PfGjWkosG267bt. Acesso em: 17/10/2024.

[10] MEDEIROS, Luiz Adauto; ANDRADE, Nirzi G de. **Iniciação às Equações Diferenciais Parciais.** Rio de Janeiro: LTC, 1978.

[11] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica.** v. 1. 4ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

[12] O Geogebra, 2024. Disponível em: https://ogeogebra.com.br/. Acesso em: 17/10/2024.

[13] Python, 2024. Disponível em: https://www.python.org/. Acesso em: 17/10/2024.

[14] THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. **Cálculo.** v. 1. 12ª ed. (Trad. Kleber Pedroso e Regina Simille de Macedo). São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.