UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARIA VITÓRIA DE BARROS NASCIMENTO

# UM PASSEIO PELAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

CAMPINA GRANDE
2024

MARIA VITÓRIA DE BARROS NASCIMENTO

# UM PASSEIO PELAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

**Área de concentração**: Matemática Pura

**Orientadora**: Profa. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho

**CAMPINA GRANDE**

**2024**

N244p Nascimento, Maria Vitoria de Barros.
Um passeio pelas equações diferenciais parciais [manuscrito] / Maria Vitoria de Barros Nascimento. - 2024.
80 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação : Prof. Dra. Emanuela Régia de Sousa Coelho, Departamento de Matemática - CCT".

1. História da matemática. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Equação da onda. I. Título

21. ed. CDD 515.25

Elaborada por Bruno Rafael Freitas de Lima - CRB - 15/1021 BC

MARIA VITORIA DE BARROS NASCIMENTO

UM PASSEIO PELAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática

Aprovada em: 19/11/2024.

Documento assinado eletronicamente por:

- **Emanuela Régia de Sousa Coelho** (***.622.214-**), em **02/12/2024 13:27:45** com chave **5c660ee0b0ca11efbb341a1c3150b54b**.
- **Joselma Soares dos Santos** (***.474.994-**), em **03/12/2024 08:36:33** com chave **d8cff464b16a11ef8c0f1a7cc27eb1f9**.
- **Pammella Queiroz de Souza** (***.541.264-**), em **03/12/2024 08:37:26** com chave **f86c8986b16a11efad2e2618257239a1**.

Dedico este trabalho a Deus e a Nossa Senhora. Fontes de amor, paz e sabedoria.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por tamanha graça em realizar meus sonhos. Por ter me acompanhado, guiado e iluminado durante todos esses dias. Agradeço a Nossa Senhora por interceder por cada pedido nesse percurso acadêmico e por ser exemplo de força e coragem.

Agradeço a minha família, minha mãe Maria Aparecida e meu pai, José Roberto, pelo apoio, proteção e cuidado em toda minha vida. Destaco as falas de minha mãe que me marcaram desde muito pequena "Estude, minha filha, o estudo é tudo que você pode ter na vida". Amo vocês, meus pais.

Gratidão também as minhas irmãs, Bárbara, por ser uma grande companheira e guerreira, a qual tem minha admiração. A minha irmã gêmea, Maria Verônica, por ser, de fato, meu anjo da guarda. Encontro força, paz e persistência ao tê-la comigo, a ela dedico todas as minhas conquistas durante a graduação. Eu amo vocês para todo sempre.

Agradeço ao meu noivo, Demair Simplício, por todo amor, abraço, motivação e ter tamanha certeza do meu potencial. Expresso gratidão à minha extensa família (avós, tias, tios, primas, primos) pelas palavras de carinho, apoio e amor. Especialmente, Mércia, Afonso, Lurdinha e minhas primas, Ana Clara e Mara, além dos meus padrinhos: Socorro e (in memoriam) Robson Sobral. Também, carinhosamente, dedico minha trajetória aos meus avós, Eunice e Francisco de Assis (in memoriam). Amo todos vocês.

Agradeço às minhas amigas de infância, Maria Camila, Nathália Letícia e Ana Beatriz, pelo companheirismo durante tantos anos. Meu muito obrigada, amigas. De forma especial, agradeço aos meus colegas Suzany Pereira, Geise Raiane, Danilo Rodrigues e Elielson Pedrosa por tornarem a graduação mais leve, divertida e única.

Gratidão a minha orientadora Emanuela (Manu) pela realização do meu sonho de participar de um projeto científico e por ser um exemplo de campeã, mulher autentica, professora excepcional. Além disso, sinto-me honrada em compartilhar este momento com uma banca avaliadora composta por mulheres destacadas em Matemática. Agradeço especialmente à Professora Joselma, cujas aulas de Cálculo, mesmo durante a pandemia, despertaram em mim uma paixão pela matéria. Também expresso minha admiração pela Professora Pammella, uma referência inspiradora na pesquisa de equações diferenciais.

Agradeço ainda à UEPB pelo apoio institucional e ao CNPq, cota - 2023/2024, pelo incentivo através do PIBIC/CNPq-UEPB.

Encerro com duas citações que me motivaram durante a escrita deste trabalho: "É justo que muito custe o que muito vale."(Santa Teresa D'Avila) e "Tua graça me basta. Teu amor me sustenta"(Frei Gilson).

“A beleza das equações diferenciais reside em sua capacidade de descrever o mundo.”
(Maryam Mirzakhani)

## RESUMO

Uma Equação Diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função e a expressão apresentada envolve derivadas dessa função. Quando as derivadas que aparecem na expressão são relativas a mais de uma variável, tal equação é dita uma Equação Diferencial Parcial. Este trabalho introduz às Equações Diferenciais Parciais, inicialmente, por meio de uma apresentação dos fatos históricos que levaram à construção desta área, destacando, em particular, a contribuição das ideias desenvolvidas em cada período histórico e como estas foram, posteriormente, aperfeiçoadas e estendidas. Em seguida, apresentamos o tema através da abordagem matemática de conceitos e ideias iniciais dessa teoria, culminando com o estudo da Solução Geral da chamada Equação da Onda. Logo, a pesquisa realizada caracteriza-se como uma pesquisa de natureza bibliográfica, por buscar interpretar as bases teóricas e analisar as problemáticas levantadas e os resultados obtidos nas investigações de autores que abordam a temática.

**Palavras-chave:** história da matemática; equações diferenciais parciais; equação da onda.

## ABSTRACT

A Differential Equation is an equation whose unknown is a function and the expression presented involves derivatives of that function. When the derivatives in the expression are relative to more than one variable, the equation is referred to as a Partial Differential Equation. This work introduces Partial Differential Equations, initially, through a presentation of the historical developments that led to the construction of this freld, highlighting, in particular, the contribution of ideas developed during each historical period and how these were subsequently refined and extended. Then, we present the topic through the mathematical approach of initial concepts and ideas of this theory, culminating in the study of the General Solution of the so-called Wave Equation. Therefore, the research carried out is characterized as bibliographical research, as it seeks to interpret the theoretical bases and analyze the issues raised, and the results obtained in the investigations of authors who address the topic.



**Keywords:** history of mathematics; partial differential equations; wave equation.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais são objetos de intensas atividades que envolvem tanto pesquisas científicas quanto tecnológicas, justamente por apresentarem, além de uma matemática rigorosa, uma ampla diversidade quanto às suas aplicações. Para entender melhor o poder e a relevância das equações diferenciais, é interessante ver a sua origem e como se desenvolveram ao longo do tempo, bem como reconhecer que esta área do conhecimento resulta das contribuições de uma variedade de personagens. Dessa forma, além de terem surgido para descrever fenômenos de outras ciências, cada equação carrega consigo uma história e desempenha um papel significativo no desenvolvimento da matemática.

Nessa direção, este trabalho busca fornecer uma introdução às Equações Diferenciais Parciais - EDP's sob duas perspectivas: Uma construção histórica, que justifica a introdução o surgimento e o fortalecimento dessa área como subárea da Matemática, e uma apresentação matemática de conceitos e ideias fundamentais para a introdução dos estudos nessa área.

No que diz respeito a primeira perspectiva, este trabalho tem como base uma revisão clássica da História da Matemática, abordando a construção das Equações Diferenciais Parciais, especialmente, nas obras *Introdução à História da Matemática* de Howard Eves e *História da Matemática* de Carl B. Boyer. O objetivo é descrever uma sequência de eventos cronológicos que contribuíram para a construção das ideias que precederam às Equações Diferenciais, seu desenvolvimento ao longo do tempo e, quando possível, estabelecer comparações com as abordagens modernas. Observamos, porém, que atualmente diversos pesquisadores em história da matemática tratam de reescrever a narrativa eurocêntrica tradicional, abordando fatores culturais e sociais de cada período histórico. Exemplos dessas abordagens incluem a obra de Tatiana Roque, intitulada *"História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas"*, e o livro de Jefferson Todão *"A origem africana da matemática"*.

Já na segunda perspectiva, introduzimos alguns conceitos básicos no estudo de Equações Diferenciais Parciais, como classificação das EDP's, condições de contorno, curvas características, entre outros, culminando com a aplicação dessas ideias na busca pela Solução da Equação da Onda. Essa equação, historicamente, foi uma das primeiras a ser estudada por importantes matemáticos e, até hoje, é objeto de dedicação de importantes pesquisadores nos mais diversos contextos. Para essa apresentação, seguimos essencialmente o trabalho de Iório (2016).

Cabe salientar que essa pesquisa surgiu a partir do interesse despertado nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Equações Diferenciais Ordinárias e Análise Matemática. Outrossim, o trabalho é fruto do Projeto de Iniciação Científica da Universidade Estadual da Paraíba, PIBIC - UEPB/CNPq (Cota 2023/2024), intitulado "Uma Introdução às

Equações Diferenciais Parciais".

Dito isto, este trabalho está estruturado em dois capítulos. O primeiro, denominado "Um Caminho pela História das Equações Diferenciais", apresenta uma revisão dos contribuintes para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. E a partir da consolidação do Cálculo, exploramos os importantes problemas que estabeleceram o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias que, consequentemente, serviram de base para a modelagem de problemas físicos mais complexos; o que impulsionou o surgimento das Equações Diferenciais Parciais, em especial, às Equações Clássicas.

No segundo Capítulo "Equações Diferenciais Parciais", apresentamos os conceitos introdutórios e fundamentais em Equações Diferenciais Parciais, destacando, quando possível, as principais diferenças do trato, em relação às Equações Diferenciais Ordinárias e alguns métodos de resolução para algumas Equações Clássicas, como a Equação da Onda.

# 2 UMA CAMINHADA PELA HISTÓRIA

O estudo das Equações Diferenciais iniciou-se paralelamente ao surgimento do Cálculo Diferencial ou Cálculo Infinitesimal, após a formalização e o entendimento do conceito de derivadas. Nessa direção, nosso passeio pela história parte das ideias que antecedem o Cálculo, desde a Grécia Antiga até os grandes criadores do Cálculo: Newton e Leibniz. Em seguida, fazemos uma breve apresentação de importantes problemas modelados por Equações Diferenciais Ordinárias e Equações Diferencias Parciais, sendo vários destes estudados por grandes matemáticos como Bernoulli, Euler, Lagrange e Laplace, o que contribuiu para a consolidação dessa área na Matemática.

De acordo com Eves (2011), o desenvolvimento histórico do Cálculo seguiu a ordem contrária àquela dos textos e cursos básicos atuais sobre o assunto: ou seja, primeiro surgiu o Cálculo Integral e, somente muito tempo depois, o Cálculo Diferencial. Em síntese, os problemas com a ideia de integração estavam relacionados ao cálculo de certas áreas, volumes e comprimentos. Enquanto a diferenciação, criada mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos.

A ideia de integral como cálculo de área remonta a problemas antigos, como a quadratura de círculo. Os primeiros registros sobre o cálculo datam do período de 1.800 a.C., e, desde então, grandes nomes, como Arquimedes, Kepler e Fermat, contribuíram significativamente. Foi somente no século XVII que Newton e Leibniz chegaram, de forma independente, a fórmulas para utilizar o cálculo de maneira prática.

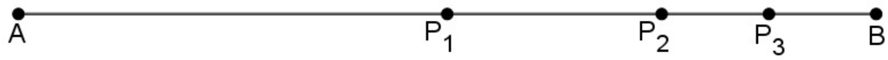
> Para a ciência, a invenção do Cálculo Diferencial foi um passo gigantesco. Pela primeira vez na história humana, a concepção de infinito, que tinha intrigado filósofos e poetas desde tempos imemoriais, tinha recebido uma definição matemática precisa, que abria inúmeras possibilidades para a análise dos fenômenos naturais (Capra, 2006, pg. 93).

## 2.1 Os matemáticos gregos: De Zenão a Arquimedes

**Zenão de Eleia (490 a.C)**, um dos discípulos de Parmênides [1], foi responsável pela criação de paradoxos para mostrar as contradições existentes em considerar grandezas divisíveis infinitamente e grandezas indivisíveis. Um dos paradoxos é conhecido como Paradoxo de Aquiles. Neste paradoxo, Zenão propõe uma corrida entre Aquiles e uma tartaruga. A corrida vai de um ponto $A$ até um ponto $B$. A tartaruga parte primeiro, indo do ponto $A$ em direção ao ponto $B$, e quando ela atinge o ponto $P_1$, que é o ponto médio entre $A$ e $B$, Aquiles começa a correr em direção a esse ponto.

[1] Parmênides foi o principal filósofo da Escola Eleata e um forte defensor do monismo e do imobilismo no mundo antigo. Suas ideias influenciaram, especialmente, Platão.

Figura 1 – Percurso da corrida




**Fonte:** Elabora pela autora (2024)

Quando Aquiles chega ao ponto $P_1$, a tartaruga já está passando pelo ponto médio entre $P_1$ e $B$, ou seja, percorreu um quarto do que faltava. Em seguida, Aquiles caminhará em direção ao ponto $P_2$. Entretanto, quando Aquiles chega ao ponto $P_2$, a tartaruga já estará passando pelo ponto médio entre $P_2$ e $B$, isto é, andou um oitavo do percurso. E assim sucessivamente, de forma que Aquiles nunca pode alcançar a tartaruga.

Esse paradoxo indica a dificuldade de se somar uma infinidade de quantidades cada vez menores e de se conceber como grandeza finita. Na matemática atual, o problema de Zenão pode ser dado pela soma da sequência

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

.

Essa sequência, em terminologia moderna é uma série geométrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots$$

cuja razão $|r| < 1$, é convergente e $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1-r}$. Assim,

$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

**Eudoxo de Cnido (408 - 355 a.C)** desenvolveu o método da exaustão para calcular áreas de figuras, aproximando-as por meio de figuras geométricas já conhecidas. Uma forma clássica de ilustrar este método é no cálculo da área de um círculo. Sendo assim, deve-se então inscrever diversos polígonos regulares no círculo, de forma a aumentar o número de lados do polígono para que a área desse polígono se aproxime da área do círculo.

Esse resultado é formalizado no Axioma de Eudoxo, pois dobramos o número de lados até que a diferença entre a área do círculo e a do polígono inscrito se tornasse menor do que uma quantidade dada.

**Axioma 1.** *Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegar-se-á, por fim, a uma grandeza menor do que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.*

Em linguagem moderna, o Axioma de Eudoxo pode ser reformulado da seguinte maneira: Dados $M$ uma grandeza qualquer e $\epsilon > 0$ uma grandeza fixada de mesma espécie, com $0 < \epsilon < M$., considere a sequência de grandezas M,$M - rM - (1-r)M, (1-r)M - r(1-r)M - 1(1-r)^2M$,..., em que $\frac{1}{2} < r \leq 1$. O Axioma de Eudoxo garante que, para $n$ grande, existe $N$ tal que,

$$(1-r)^N M < \epsilon$$

ou de forma equivalente

$$\lim_{n\to\infty} M(1-r)^n = 0$$

.

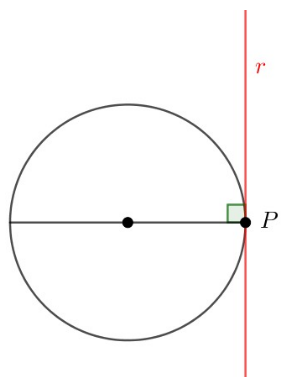
No caso do exemplo dado, as grandezas consideradas são as áreas do círculo e dos polígonos respectivamente. Além disso, observamos que essa ideia de aproximação de áreas curvas por áreas de figuras mais conhecidas, remete diretamente a construção das somas de Riemann utilizadas para definir integral na literatura atual.

**Euclides de Alexandria (300 a.C.)** foi um professor, matemático platônico e escritor grego, sendo frequentemente considerado o "Pai da Geometria". Além de ter escrito sua principal obra, *"Os Elementos"*, também trabalhou com rigor teoria dos números, proporções, perspectivas, óptica, seções cônicas, geometria esférica e astronomia.

Na obra *"Os Elementos"*, Euclides resolve o problema da tangente, que consiste em determinar a reta tangente a uma dada curva num dado ponto, no caso em que a curva é um círculo. Disse Euclides (2009, p.97):"Disso, então, é evidente que a traçada em ângulos retos com o diâmetro, a partir de uma extremidade, é tangente ao círculo".

Em outras palavras: para obter a tangente a um círculo num ponto $P$, é necessário traçar o diâmetro que passa por $P$ e, por $r$, a reta perpendicular ao diâmetro (veja a Figura 2). Cabe ressaltar que Euclides entendia a reta tangente a um círculo como sendo uma reta que apenas tocava o círculo, sem o cortar quando prolongada (Lima, 2024).

Figura 2 – A tangente a um círculo




**Fonte:** Elabora pela autora (2024)

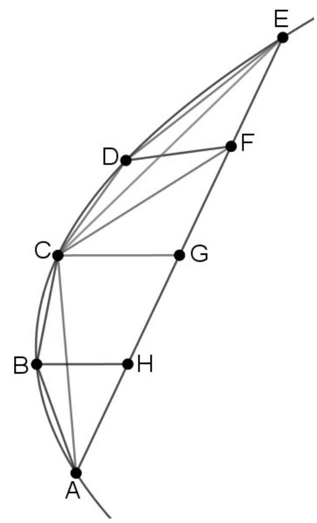
Modernamente, determinar a reta tangente significa encontrar sua equação. No caso em que a curva é o gráfico de uma função, o problema pode ser resolvido utilizando derivadas.

**Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.C)** é considerado o maior matemático da Antiguidade e seus estudos continham, de maneira implícita, conceitos estudados nos livros de Cálculo. Usava o método da exaustão de Eudoxo para o cálculo de áreas e volumes. Dessa maneira, apreciava a matemática pura e aplicada, com foco em problemas relacionados à geometria plana e espacial. Apresentamos, em particular, uma das suas contribuições mais relevantes, a questão da Quadratura da Parábola, na qual Arquimedes utilizou o seguinte resultado:

**Lema 2.1.** *Dada uma sucessão finita de áreas, A, B, C, D, ...,Z, das quais A é a maior e cada uma é um quarto de sua antecessora, então,*

$$A + B + C + D... + Y + Z + \tfrac{1}{3}Z = \tfrac{4}{3}A$$

Figura 3 – Segmento parábolico




**Fonte:** Elabora pela autora (2024)

Arquimedes aplica este resultado aos triângulos obtidos sucessivamente a partir do ΔACE e obtém

$$\Delta ACE + \frac{\Delta ACE}{4} + \frac{\Delta ACE}{4^2} + \frac{\Delta ACE}{4^3} + ... = \Delta ACE[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + ...] = \frac{4}{3}\Delta ACE$$

A partir disso, prova que

**Teorema 2.1.** *Qualquer segmento parabólico limitado por uma corda é igual a quatro terços da área de um triângulo, tendo a mesma base e mesma altura que ele.*

É importante mencionar que a noção de limite pressupõe a consideração do infinito que esteve excluído da matemática grega, inclusive nos trabalhos de Arquimedes. No entanto, segundo (Roque, 2012), os trabalhos de Zenão, Eudoxo, Arquimedes e Euclides foram, provavelmente, os principais impulsionadores da interpretação posterior das ideias de limite e de infinito no século XIX. De fato, os trabalhos constituíram a principal referência para a geometria do século XVII, a qual desempenhou um papel importante no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

Adicionalmente, é relevante mencionar que o período da Idade Média foi responsável por avanços significativos em álgebra, geometria, astronomia e trigonometria, com contribuições notáveis dos matemáticos Al-Khwarizmi, Fibonacci e Bhaskara. No entanto, foi no século XVI que as bases do Cálculo começaram a ser estabelecidas.

## 2.2 O cálculo aos olhos dos precursores de Leibnitz e Newton.

No final do século XVI e início do século XVII os primeiros passos à integração e diferenciação, da forma que conhecemos atualmente, foram dados pelos matemáticos Kepler(1571-1630), Cavalieri(1598-1647), Fermat(1601-1665), Wallis(1616-1703) e Barrow(1630-1677). Cada um destes tem uma inestimável contribuição para o desenvolvimento do Cálculo, a saber:

**Johannes Kepler** - Segundo Eves (2011), Kepler utilizou o processo de integração (pensado por Arquimedes)[2] para calcular as áreas envolvidas na segunda lei do movimento planetário e também para calcular os volumes de que se ocupou em seu tratado sobre a capacidade dos barris de vinho. Embora seu trabalho tenha sido alvo de críticas em relação ao rigor matemático, os resultados obtidos estavam corretos e simplificados. Além disso, os seus métodos continuam sendo amplamente utilizados por físicos e engenheiros na formulação de problemas até os dias atuais.

**Bonaventura Cavalieri** - Publicou o postulado Princípios de Cavalieri, um dos mais influentes dos tempos modernos. Esse princípio demonstra que, na existência de dois sólidos quaisquer com a mesma altura, se todo plano horizontal secciona os sólidos dados obtendo áreas iguais, então seus volumes também são iguais. Ademais, em sua obra *"o Geometria indivisílibus continuorum"*,Cavalieri explorou as ideias de Kepler sobre as infinitas quantidades pequenas. Claramente, Cavalieri pensou na área como a soma infinita

[2]O método que insidia em ponderar na superfície como uma soma de linhas para encontrar a área de uma região elíptica no estudo sobre o movimento dos planetas. Semelhante para o cálculo de volumes de sólidos, ele pensava na soma de fatias planas, onde subdividia o sólido em várias fatias, chamadas infinitésimos, e a soma desses infinitésimos se aproximava do volume desejado.

de segmentos indivisíveis, provando que a área sob o gráfico da função $x^m$ no intervalo de 0 até $b$ é dada pela expressão $\frac{b^{m+1}}{m+1}$. Essa expressão, que já refletia uma forma primitiva de integral, foi uma das primeiras contribuições para o cálculo de integrais e, na linguagem moderna [3], corresponde ao cálculo de integrais de funções do tipo $x^m$ para $m = 1, 2, 3, \ldots$.

$$\int_0^b x^m dx = \frac{b^{m+1}}{m+1}$$

**Pierre de Fermat** - Divulgou um novo método para determinação de tangentes, estudo que levaria ao princípio do mínimo e máximo de funções. Esse resultado, essencialmente, representa o processo atual de derivação, o que equivale a dizer que

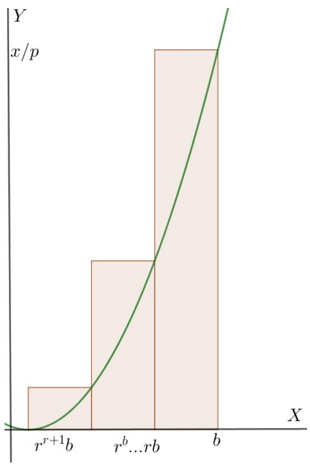
$$\lim_{E \to 0} \frac{f(a+E) - f(a)}{E}$$

é a inclinação da reta tangente a $f$ no ponto $x = a$. Ademais, inspirado nos trabalhos de Arquimendes e Cavalieri, Fermat generalizou o cálculo da área abaixo de uma curva polinomial do tipo $y = x^{\frac{p}{q}}$ tal que $0 \leq x \leq \frac{p}{q}$ com $\frac{p}{q}$ sendo um número racional positivo. Esse resultado em notação moderna é dado pela integral definida:

$$\int_0^b x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{b^{\frac{p}{q}+1}}{\frac{p}{q}+1}.$$

O raciocínio de Fermat pode ser descrito atráves de uma partição $br^n$ do intervalo $[0, b]$, onde retângulos de altura $(br^n)^{\frac{p}{q}}$ com $0 < r < 1$ são construídos sobre o intervalo $[br^{(n+1)}, br^n]$. Assim, o método de integração de Fermat utiliza uma série infinita de retângulos em uma progressão geométrica, o que resulta na determinação de área sob a curva, Figura 4.

Figura 4 – A Integração de Fermat para $y = x^{\frac{p}{q}}$ para $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$




**Fonte:** Elaborada pela autora (2024)

[3] A notação do símbolo de integral foi introduzida pelo matemático e filósofo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz no final do século XVII.

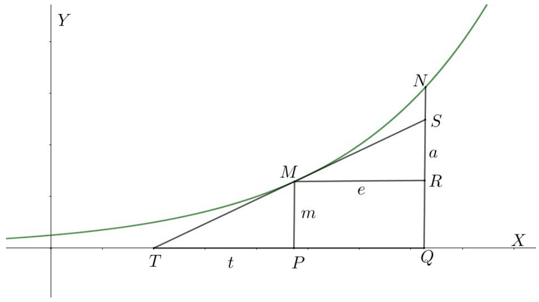
**John Wallis** - De acordo com Boyer (1949, p.169), "Wallis chegou mais próximo do conceito de limite do que qualquer outro antecessor de Newton". Sendo assim, podemos listar seus grandes feitos, sendo eles:

1. Uso sistemático das séries em análise como uma ferramenta para determinar o cálculo de quadraturas
2. Traçado das tangentes
3. Considerações das cônicas como curvas de $2^{\underline{o}}$ grau.
4. Explicação do significado dos expoentes zero, negativo e fracionários.
5. Símbolo do infinito ($\infty$) para representar infinitas linhas sob uma superfície plana.

**Isaac Barrow** - Concentrou-se nas teorias de diferenciação e desenvolveu o método das tangentes a curvas utilizando o triângulo diferencial, também conhecido como triângulo de Barrow, apresentado na Figura 5. Em seu livro *"Opticae et Geometricae"*, ele empregou uma abordagem precursora do processo moderno de diferenciação. Barrow, explorava problemas envolvendo velocidades variáveis em que a derivada da distância representava a velocidade, e a operação inversa, partindo da velocidade, levava à distância. A partir desse problema envolvendo movimento, a ideia de operação inversa à derivada desenvolveu-se naturalmente e a ideia de que a integral e a derivada eram processos inversos era familiar a Barrow. Segundo Vidal (2012, p. 23), em termos atuais, Barrow notou que *"se a derivada de uma função $f$ é uma função $g$, então, para calcular a integral da função $g$ no intervalo entre $a$ e $b$, basta calcular $f(a)$ e $f(b)$ e subtrair $f(a)$ de $f(b)$."* O raciocínio de Barrow se aproxima do atual processo de diferenciação, apresentado a seguir:

Barrow resolvia o problema, ilustrado na Figura 5, calculando o valor da razão $a/e$ em que $a$ e $e$ são catetos (paralelos aos eixos) do triângulo SRM. Da semelhança dos triângulos NTQ e SRM conclui-se que $a/e$ é o coeficiente angular da reta tangente. Para encontrar a derivada, Barrow calculava a razão da variação infinitesimal do eixo $x(a)$ pela variação infinitesimal do eixo $y(e)$, antecipando o conceito de limite.

Figura 5 – Tangente a curva por Barrow




**Fonte:** Elaborada pela autora (2024)

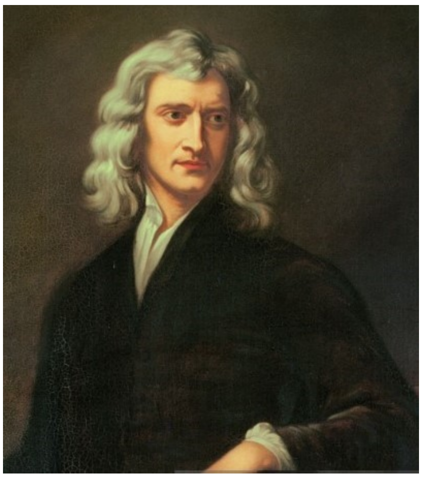
Embora Isaac Barrow nunca tenha enunciado formalmente o Teorema Fundamental do Cálculo, estava muito próximo de alcançar esse objetivo, mas foi Isaac Newton quem, utilizando a mesma direção, formulou o teorema.

## 2.3 Os inventores do Cálculo: Newton e Leibnitz

O início do século XVII marcou um período de grande desenvolvimento intelectual na Europa, marcando uma era de importantes avanços na matemática e, sobretudo, na formulação do cálculo. Nessa época, os progressos na geometria e na álgebra permitiram a criação de novas ferramentas para a solução de problemas matemáticos cada vez mais complexos. Nesse sentido, a maior conquista matemática desse período foi a invenção, de forma independente, do cálculo diferencial e integral ou cálculo infinitesimal realizado por Newton e Leibniz.

**Isaac Newton** (1643–1727) foi um astrônomo, alquimista, filósofo natural, teólogo e cientista inglês, mais conhecido como físico e matemático. Nascido em 4 de janeiro de 1642, na vila Woolsthorpe, na Inglaterra. Newton ingressou no Trinity College, em Cambridge, aos 18 anos, onde começou a direcionar o seu olhar para a Matemática. Em 1665, fez algumas descobertas significativas sobre o cálculo e leis da mecânica que circulavam apenas entre seus amigos, já que Newton não era muito receptivo as críticas e só começou a publicar seus trabalhos a partir de 1687 quando surgiu *"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica"*, o seu livro mais famoso.

Figura 6 – Isaac Newton



**Fonte:** https://www.gettyimages.com.br/fotos/isaac-newton

**Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) foi um polímata, filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão. Nascido em Leipzig em 1 de julho de 1646, na Alemanha. Leibniz, aos 20 anos, concluiu seu doutorado em Direito na Universidade de Altdorf em Nurembergde. A partir desse momento, dedicou-se à pesquisa matemática, publicado, de forma independente, os estudos fundamentais do cálculo, um pouco depois de Newton. Em 1684, a obra *"Nova métodos pro maximis et minimis"*, trabalho fundador do Cálculo Diferencial, e em 1686, *"De Geometria recondita et Analysi Indivisibilium atque infinitorum"*, que contém os rudimentos do Cálculo Integral.

Figura 7 – Gottfried Leibniz

**Fonte:** https://www.agenciadifusao.com.br/gottfried-wilhelm-leibniz/

Em particular, Newton e Leibniz perceberam que as equações que descreviam os modelos físicos tinham como base a variação e que poderiam ser modeladas por derivadas. Nesse sentido, a matemática base para resolvê-las era o cálculo desenvolvido por eles, foi então que surgiu o estudo das Equações Diferenciais. O problema geral de resolver tais equações foi formulado, pela primeira vez, em carta de Newton a Leibniz datada em 26 de outubro de 1676. Dessa forma, apresentaremos os principais feitos desses matemáticos para fundamentar o cálculo e estabelecer, consequentemente, a base para a consolidação da área de Equações Diferenciais.

> [...] o Cálculo Diferencial e Integral não finalizou nem se iniciou com Newton e Leibniz, mas cabe a eles o mérito da "invenção" do Cálculo Infinitesimal, Newton estabeleceu e unificou vários processos de cálculos e Leibniz ligou-os através de uma notação eficaz e de um novo cálculo operacional (Baron e Bos, 1985, p.5).

**Contribuições de Newton**

Ao descobrir a série binomial, seguindo os passos de Wallis, Newton percebeu que o problema de quadraturas (obter a área de forma plana e fechada) e ao traçado de tangentes em uma determinada curva são inversos um do outro. Essa série é obtida ao expressar

$(1+x)^m$ como uma série de potências, mais precisamente

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ... + \frac{m(m-1)...m(m-k+1)}{k!}x^k.$$

Com base nesta série, Newton resolveu facilmente um dos principais desafios da época: calcular as áreas sob curvas variadas. Assim, relacionou o problema das séries infinitas com o das taxas de variação.

Nesse sentido, sua obra póstuma, *"Methodus fluxionum et serierum infinitarum"* (1736), apresenta uma descrição abrangente dos movimentos de corpos sólidos por meio de equações diferenciais, conhecidas como as "equações do movimento de Newton"ou "método das fluxões" [4]. Neste trabalho, assume-se que a curva é criada a partir do movimento dos pontos e, com base nessa suposição, as coordenadas do ponto tornam-se variáveis: a variável $x$ muda para a quantidade $\dot{x}$ durante um intervalo de tempo, no qual $\dot{x}$ é chamado de fluxão de $x$. De maneira análoga, a variável $y$ muda para a quantidade $\dot{y}$ no mesmo intervalo de tempo. Como as variáveis newtoniana $x$ e $y$ estão variando a uma taxa constante, são chamados de fluentes e sua taxa de variação é chamada de fluxo. Unindo fluentes e fluência, conseguiu-se o que hoje chamamos de diferenciação, que, na época, era conhecido como problema da tangente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicado por $y$, então o fluxo desse fluente era denotado $\dot{y}$. Em notação moderna, esse fluxo equivale a $\frac{dy}{dt}$, onde $t$ representa o tempo (Eves, 2011).

Sob essa perspectiva, Newton acrescenta que a integração[5], por ele representada por $x'$, consistia em achar fluentes (funções) para um dado fluxo (derivada), considerou-se, desta maneira, a integração como a inversa da derivação. Ele enunciou que a relação das quantidades fluentes é inversa à relação de suas fluxões, o que equivale ao que chamamos hoje de Teorema Fundamental do Cálculo. Por exemplo, Newton reconheceu que a derivada da velocidade é a aceleração. Enquanto a integral da aceleração é a velocidade. Com base nesse raciocínio, Newton classificou três tipos de equações:

1. A primeira era composta por duas fluxões $\dot{x}$ e $\dot{y}$ e um fluente $x$ ou $y$.

   **Exemplo 2.1.** $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = f(x)$ e $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(y)$

   Em notação atual,

   $$x' = f(x), \; \frac{dy}{dx} = f(x) \; \text{ e } \; \frac{dy}{dx} = f(y).$$

2. A segunda classe envolve as equações com dois fluxões $\dot{x}$ e $\dot{y}$ e dois fluentes $x$ e $y$.

   **Exemplo 2.2.** $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x,y)$

---

[4]Devido à influência desta obra o quociente $\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ é conhecido como quociente de Newton.

[5]Atualmente conhecida como integração indefinida.

Em notação atual são escritas da seguinte forma,

$$x' = f(x) \ \text{ e } \ \tfrac{dy}{dx} = f(x,y).$$

3. A terceira classe é composta pelas equações que apresentam mais de dois fluxões e atualmente são conhecidas como Equações Diferenciais Parciais:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

Além disso, Newton desenvolveu um método para resolver a equação $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, no caso em que $f(x,y)$ é um polinômio em $x$ e $y$, usando séries infinitas.

Vejamos um exemplo contemporâneo de um modelo físico de Newton que emprega equações diferenciais.

**Exemplo 2.3.** A segunda lei de Newton afirma que a força aplicada $(F)$ a um objeto é igual à massa $(m)$ do objeto multiplicada pela aceleração $(a)$;

$$F = ma. \tag{2.1}$$

Trata-se de uma equação do movimento de Newton e pode ser representada como uma Equação Diferencial Ordinária[6], pois

1. A aceleração é dada pela derivada da velocidade em relação ao tempo; $\frac{dv}{dt}$.
2. A força é expressa como uma função dependendo da posição $(x)$, velocidade $(v)$ e tempo $(t)$, ou seja, $F = F(x,v,t)$.

Dessa forma, podemos reescrever a equação 2.1 da seguinte forma

$$F(x,v,t) = m\frac{dv}{dt},$$

ou hodiernamente escrita

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

uma vez que a velocidade é dada pela derivada da posição.

Essa equação serviu de base para outras Equações Diferenciais, a exemplo: Equação do movimento harmônico, Equação gravitacional, Equação do movimento circular e Equação do movimento de oscilação amortecida.

[6]Equação que envolve as derivadas de uma função desconhecida de uma variável.

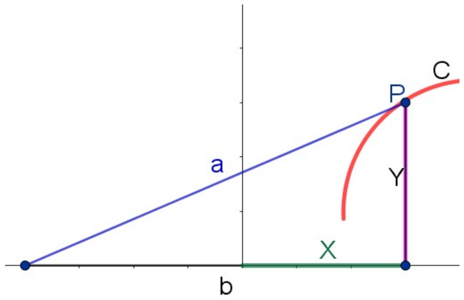
Nesse contexto, Newton desempenhou um papel crucial no desenvolvimento dos princípios básicos da mecânica, os quais serviram de base para as aplicações de Equações Diferenciais que surgiram no século XVIII. Suas teorias, conhecidas como Leis de Newton, Lei da Gravitação Universal e Método do Fluxo, forneceram os fundamentos teóricos necessários para a compreensão dos movimentos de corpos e da mecânica celeste. Dessa forma, tornou-se evidente o uso de Equações Diferenciais, uma vez que, ao descrever suas leis, Newton observou a necessidade de utilizar funções derivadas, algo que somente seria possível ser compreendido com o conhecimento do Cálculo.

### Contribuições de Leibniz

Leibniz produziu importantes trabalhos não só no Cálculo, mas também em outros campos da Matemática, como a Análise Combinatória. Ele aperfeiçoou a máquina de calcular inventada por Blaise Pascal, tornando-a capaz de realizar operações de multiplicação e divisão, desenvolveu o sistema binário de numeração amplamente usado hoje em dia em computadores modernos e estabeleceu as bases para a topologia geral, um ramo da matemática. Ademais, é conhecido como o fundador da lógica simbólica, tendo introduzido, inclusive, as notações $\frac{dy}{dx}$ e o sinal de integral $\int$. Eves (2011) afirma que "Leibniz tinha uma sensibilidade muito grande para a forma matemática e discernia com clareza as potencialidades de um simbolismo bem engendrado. Sua notação para o cálculo mostrou-se muito feliz e, inquestionavelmente, é mais conveniente e flexível do que a de Newton". Atualmente, utilizamos a notação para derivadas e integrais sugeridas por Leibniz.

No final do século XVII, o objetivo do Cálculo de Leibniz era, sob uma perspectiva geométrica, o estudo de curvas – o que fica explícito no título do primeiro livro de Cálculo Diferencial da história, publicado em 1696 por L'Hôpital *"Análise do infinitamente pequeno, para o entendimento das linhas curvas"*. Conforme aponta Lima (2024), na época, a análise matemática estava centrada no estudo de equações que relacionavam várias variáveis geométricas, como a abscissa $X$ (segmento horizontal ligada à base da ordenada ao eixo vertical), a ordenada $Y$ (segmento vertical ligado $P$ ao eixo horizontal), a tangente $a$ e a subtangente $b$ (segmento horizontal que liga a ordenada à intersecção da tangente com o eixo horizontal), ilustradas de forma moderna na figura 8. No Cálculo de Leibniz, uma curva era concebida como sendo formada por segmentos de reta ligando pontos "infinitamente próximos" e a tangente num ponto $P$ como sendo obtida pelo prolongamento do segmento "infinitamente pequeno" que contém $P$.

Figura 8 – Análise das Curvas




**Fonte:** Autoria própria (2024)

Em 1684, publicou o artigo *"Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur"*(Novo método para máximos e mínimos, bem como para tangentes, que não se detém para as quantidades fracionárias ou irracionais) no periódico científico da época *Acta Eruditorum.*[7] Nesse texto, Leibniz apresenta a ideia de "infinitamente pequeno" relacionada não só à definição de tangente, mas também ao conceito de *differences*"(diferenças em latim). Neste trabalho, hoje considerado a primeira publicação sobre Cálculo Diferencial da história, Leibniz determinou pequenos acréscimos para variáveis $x$ e $y$, chamando-os por $dx$ como um intervalo finito arbitrário e $dy$ pela proporção:

$$dy : dx = y : \text{ subtangente}^8.$$

Em outras palavras, o diferencial $dy$ de uma ordenada $y$ é o segmento de reta que satisfaz a proporção

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{b}$$

onde $dx$ é um segmento dado e $b$ é a subtangente. Percebemos que a proporção $dy/dx$ é chamada de derivada de $y$ em relação à $x$, equivalente à fluxão de Newton.

Contudo, Leibniz não esclareceu claramente a conexão entre essas "diferenças"e as quantidades "infinitamente pequenas". Segundo (Bradley et al., 2015), esta clareza foi dada pelo matemático L'Hôpital que definiu o diferencial de uma variável como sendo a "porção infinitamente pequena pela qual uma quantidade variável continuamente aumenta ou diminui" e forneceu uma interpretação geométrica: o diferencial $dy$ é a diferença entre a ordenada $y$ e uma ordenada tomada infinitamente próxima enquanto $dx$ é a diferença entre as respectivas abscissas. O ponto crucial é que, em razão das ordenadas serem tomadas infinitamente próximas, a hipotenusa do triângulo de lados $dx$ e $dy$ está sobre a

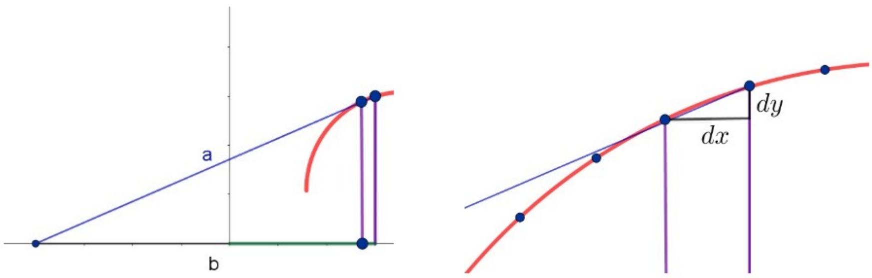
[7]Revista científica mensal alemã publicada entre 1682 e 1782, fundada em Leipzig por Otto Mencke.
[8]notação usada na época.

tangente $a$ de modo que (por semelhança de triângulos) vale a relação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{b}.$$

A Figura 9 ilustra essa ideia, uma vez que, como $dx$ é "infinitamente pequeno", a hipotenusa do triângulo de catetos $dx$ e $dy$ coincide com a tangente em $a$. Consequentemente, o triângulo de lados $dx$ e $dy$ é semelhante ao triângulo de lados $b$ e $y$.

Figura 9 – Interpretação geométrica dos diferenciais $dx$ e $dy$




**Fonte:** Autoria própria (2024)

Nesse viés, Leibniz forneceu muitas das regras de diferenciação que os alunos aprendem logo no início de um curso de cálculo como fórmulas de derivação para produtos, quocientes e potencias:

1. $d(xy) = xdy + ydx$
2. $d(\frac{x}{y}) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$
3. $d(x)^n = nx^{(n-1)}dx$

Na visão de Leibniz, para encontrar a derivada de $xy$ bastava aplicar o produto $(x + dx)(y + dy)$ menos a quantidade de $xy$, ou seja,

$$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = xy + xdy + ydx + dxdy - xy$$

Como $dxdy$ é infinitamente pequeno, pode ser desprezada, tornando a diferencial de $xy$:

$$d(xy) = xdy + ydx$$

Nesse sentido, ele estabeleceu a condição ($dy = 0$) como critério fundamental para o estudo de extremos da função, como pontos de máximo e mínimos e a condição ($d\,dy = 0$) para pontos de inflexão, além de realizar aplicações em vários problemas geométricos (Struik, 1986, p. 271). Um outro exemplo marcante de suas contribuições é a formulação da regra da cadeia para calcular as derivadas de funções compostas;se $y = g(x)$ e $x = h(a)$ temos $y = i(a)$, com $i(a) = g(h(a))$ e, portanto, a derivada seria expressa por:

$$\frac{dy}{da} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{da}.$$

A fórmula da derivada enésima do produto de duas funções, é conhecida em geral por regra de Leibniz (Eves, 2011).

Embora os tópicos abordados no artigo sejam fundamentais no Cálculo atual, sua compreensão foi um desafio na época de sua publicação. No entanto, em 1696, o livro de L'Hôpital ajudou a popularizar o método de Leibniz. Apenas os irmãos Bernoulli, os quais serão tratados adiante, apesar das dificuldades, conseguiram compreender seus princípios (González-Velasco, 2011, p. 361).

Em relação ao cálculo integral, Leibniz introduziu o símbolo de integral, um S alongado, derivado da palavra latina "summa"(soma) com o objetivo de indicar uma soma de indivisíveis. Em seu artigo publicado no *Acta Eruditorum* em 1686, Leibniz demonstrou que as quadraturas são casos especiais do método inverso das tangentes. Nesse trabalho, ele empregou o termo "calculus summatorius"para enfatizar a relação inversa entre diferenciação e integração, destacando que essas operações estão intimamente ligadas por meio de um triângulo infinitesimal.

### 2.3.1 O nascimento das equações diferenciais por Leibniz

De acordo com Ince (1927), a expressão "equação diferencial" (no original em latim, *aequatio differentialis*) foi utilizada pela primeira vez por Leibniz em 1676 para designar uma equação que relaciona duas variáveis $x$ e $y$ com seus diferenciais $dx$ e $dy$. Leibniz escreveu a relação

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2$$

que contém não só a solução de uma equação diferencial, mas também o primeiro escrito do sinal de integral $\int$. Ao estabelecer esta última igualdade, Leibniz resolveu, talvez inconscientemente, a seguinte equação diferencial:

Determinar uma função $y = y(x)$ que seja solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x.$$

Há um registro de uso com a acepção em *"Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, singulare pro illis calculi genus"*, artigo publicado por Leibniz em 1684 que apresentou publicamente o conceito de "diferencial". Nesse texto, Leibniz apresenta a expressão *aequatio differentialis* (equação diferencial) duas vezes: uma na página 469 e outra na página 472. Na primeira ocorrência, lê-se: daqui pode-se escrever com qualquer equação proposta sua equação diferencial (Dourado, 2022, p. 49).

Em seguida, Leibniz explica como proceder: substitui-se cada termo da equação pela sua "quantidade diferencial", calculado conforme o conjunto de regras previamente apresentados (Dourado, 2022, p. 49). Esse procedimento pode ser visto como uma versão tradicional do que conhecemos por "derivar os dois lados da equação". Na segunda ocorrência da expressão: temos $\omega$ igual $h\sqrt{l}+r\sqrt{m}$, cuja equação diferencial desta equação (supondo que $d\omega = 0$, no caso de mínimo) é

$$0 = a + hdl : 2\sqrt{l} + rdm : 2\sqrt{m},$$

segundo as regras de nosso cálculo dadas (Dourado, 2022, p. 51).

Segundo Lima (2024), interpretar os diferenciais com uma perspectiva moderna, o resultado

$$\omega(x) = h\sqrt{l(x)} + r\sqrt{m(x)},$$

pode ser obtido derivando ambos os lados com respeito a $x$, igualando a zero e multiplicando os dois lados por $dx$. Contudo, Leibniz não dispunha do conceito de derivada (Bos, 1974, p. 8) de modo que sua ideia de diferencial, apesar da semelhança de notação e nomenclatura, difere da moderna; os diferenciais que Leibniz tinha em mente eram as quantidades "infinitamente pequenas".

Dando sequência às investigações, Leibniz teve papel decisivo no desenvolvimento da teoria e métodos de resolução das Equações Diferencias. Em 1691,ele generalizou o método de separação de variáveis ao provar que a equação diferencial

$$y\frac{dx}{dy} = X(x)Y(y)$$

conhecida por equação a variáveis separáveis, pode ser resolvida por um processo de integração de funções. Leibniz desenvolveu também o método de redução de equações homogêneas em equações separáveis e, em 1694, o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem do tipo

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

### 2.3.2 Newton versus Leibniz

Como mencionado anteriormente, Newton e Leibniz sabiam, de forma independente, que existia uma relação entre os coeficientes angulares de retas tangentes e as áreas sob as curvas. Esta conexão é expressa no Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), o qual mostra que a integração e diferenciação são operações inversas e podem ser resolvidas juntas. Isto significa que, se uma função contínua é primeiramente integrada e depois diferenciada, volta-se à função original. O Teorema minimiza o cálculo de integrais, que, apesar de ser eficiente, era feito por meio de limites de somas exaustivas, sendo um processo não muito prático. Assim, torna-se a ferramenta mais poderosa que os matemáticos já tiveram para entender o universo.

No início do século XVIII, os seguidores de Newton acusavam Leibniz de plágio. Contudo, é possível notar que os trabalhos de Newton foram anteriores aos de Leibniz, embora as divulgações não. Leibniz publicou entre 1684 e 1686, enquanto Newton teve sua primeira publicação apenas em 1687, um ano depois. Leibniz expressou seu desejo de absolvição da acusação de plágio e reconhecimento do seu trabalho, o que aconteceu posteriormente. No início do século XIX, quando os manuscritos originais de Leibniz foram encontrados, após uma análise aprofundada por vários estudiosos da época, foi resolvido este constrangimento, uma vez que chegaram à conclusão de que Newton e Leibniz criaram o Teorema Fundamental do Cálculo de forma independente, dividindo a honra de criar o Cálculo Infinitesimal. Hoje, o Teorema Fundamental do Cálculo é formulado como segue e a prova pode ser encontrada em qualquer livro de Cálculo ou Análise, mas recomendamos o livro Cálculo de George B. Thomas e Análise Real de Elon Lages Lima.

**Teorema 2.2.** *Considere $f$ uma função contínua de valores reais, definida em um intervalo fechado $[a,b]$, então a função*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

*é derivável em todo ponto $x \in [a,b]$, a qual é dada por $F'(x) = f(x)$, ou seja*

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x). \tag{2.2}$$

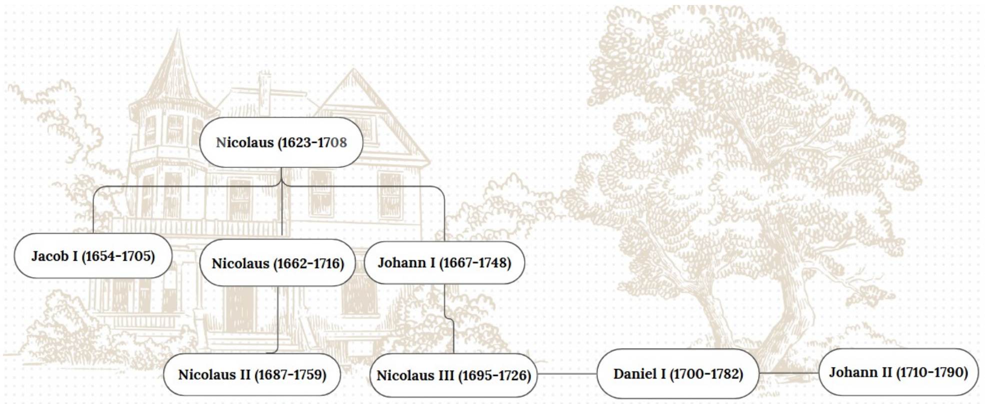
A equação (2.2) é considerada uma das mais importantes da Matemática, pois evidencia que toda função contínua possui uma primitiva e que integrais e derivadas são processos inversos um do outro. Outrossim, a equação mostra que existe uma função contínua $f$ que é derivada de outra função $F$, ou seja, $\int_a^x f(t) = F(x)$. Como $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ é uma equação que apresenta a derivada de uma função desconhecida, então é chamada de Equação Diferencial.

Posteriormente, outras personalidades matemáticas dedicaram-se sobre essa nova ferramenta, tendo como exemplo os irmãos Bernoulli, L'Hopital, Cauchy, Weierstrass, Riemann e Lebesgue.

## 2.4 A família Bernoulli

Os Bernoulli são oriundos da Bélgica e se estabeleceram na cidade suíça de Basileia, pois tiveram que abandonar o país devido à religião protestante. A família é composta por quatro irmãos e seis irmãs, sendo que dois deles se tornaram conhecidos na matemática, Jakob e Johann. Por mais de um século, essa família contribuiu para o avanço da Ciência, com Daniel, filho de Johann, seu primo Nicolau I, seus irmãos Nicolaus II e Johann II, e os filhos de Johann II: Johann III e Jacob II. A árvore genealógica dos Bernoulli's mostra os membros que se dedicaram aos estudos de temas em Matemática e Física.

Figura 10 – A árvore genealógica dos Bernoulli's




**Fonte:** Elabora pela autora (2024)

Os dois irmãos Jakob Bernoulli e Johann Bernoulli tiveram imensa contribuição nos ramos das Equações Diferencias baseados no estudo de Leibniz, o qual manteve contato com os matemáticos via cartas, eles deslumbraram o grande potencial que o cálculo continha, explorando suas propriedades em inúmeras aplicações nos campos da Mecânica e Astronomia. As explorações e descobertas feitas por esses dois irmãos serviram para cientistas como Abraham De Moivre, Brook Taylor, Colin Maclaurin, Leonhard Euler, Alexis Claude Clairaut, Jean-le-Rond d'Alembert, Johann Heinrich Lambert, Joseph Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace, Adrien-Marie Legendre, Gaspard Monge e Lazare Carnot.

### 2.4.1 Problema inverso das tangentes

O problema inverso das tangentes, que busca determinar a curva que origina tangentes com propriedades específicas, é o precursor do conceito de Equação Diferencial. Hoje em dia, sabemos que a solução desse problema requer a aplicação da função logarítmica. Neste contexto, abordaremos os primeiros problemas estudados por Leibniz, por Jakob Bernoulli e em seguida por Johann Bernoulli.

De acordo com Baron e Bos (1974), supõe-se que o problema da Tratória (ou Tractriz), proposto por Claude Perrault a Leibniz em 1670, consiste em encontrar qual a curva formada quando um objeto qualquer é arrastado por uma corda em linha reta. Em termos matemáticos, o problema resume-se a definir uma curva na qual, em todos os seus pontos, a reta tangente a estes encontra o eixo a uma mesma distância (veja a Figura 11). Com o auxílio do cálculo contemporâneo, podemos demonstrar como a solução do problema da Tratória se alinha com a equação originalmente derivada por Leibniz. Para isso, seguiremos a abordagem apresentada por Albuquerque e Ribeiro (2015) e Vieira e Siqueira (2024), que fornecem uma análise detalhada da solução utilizando métodos matemáticos modernos.

Considere a função $f(x)$ da tractriz, definida para todo $x \in \mathbb{R}$. No ponto qualquer $P(x,y)$ da curva, a reta tangente $\overleftrightarrow{AP}$ é dada onde $A = (x_a, 0)$ é o ponto de intersecção com o eixo $x$. A distância entre $A$ e $P$ é igual a constante $a$. O ponto $P_0 = (0, a)$ também está localizado na curva. Logo, podemos descobrir a reta que passa por $A$ e $P$ utilizando a equação da reta tangente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

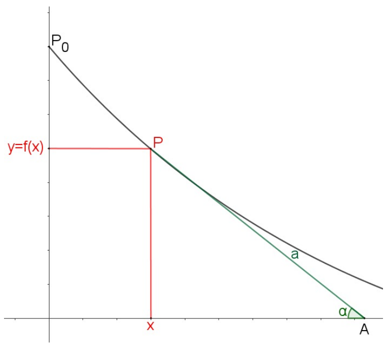
em que $y_0 = 0$,$x_0 = x_a$ e $m$ é o coeficiente angular. Assim, a equação da reta tangente pode ser escrita como

$$y = m \cdot (x - x_a)$$

O coeficiente $m$ é relacionada a derivada da funçã, ou seja, $m' = f(x)$, desse modo,

$$y = f'(x)(x - x_a). \tag{2.3}$$

Figura 11 – Representação da Tractriz




**Fonte:** Elabora pela autora (2024)

No triângulo retângulo formado por $APx$ podemos utilizar o Teorema de Pitágoras. Então:

$$(x - x_a)^2 + y^2 = a^2 \Leftrightarrow (x - x_a)^2 = a^2 - y^2 \Leftrightarrow x - x_a = \pm\sqrt{a^2 - y^2}$$

e, da equação (2.3),

$$y = f'(x) \cdot (\pm\sqrt{a^2 - y^2}).$$

Então, a partir desta equação notamos que a equação da curva procurada é dada pelo seguinte Problema de Valor Inicial (PVI)[9]:

$$\begin{cases} f'(x) = \pm \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \\ f(0) = a \end{cases}$$

Aplicando a técnica de separação de variáveis para resolver a EDO apresentada no PVI:

$$f'(x) = \pm \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \Leftrightarrow dx = \pm \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy.$$

Esta equação é a mesma obtida por Leibniz, segundo Bos (1988).

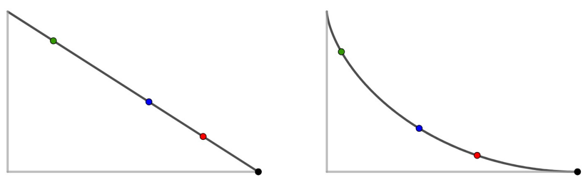
Ainda segundo Baron e Bos (1974) vários autores trabalharam com essa curva, como Newton, Huygens[10] e Jakob Bernoulli, dentre outros.

### Jakob Bernoulli

**Jakob Bernoulli** (1654-1705) também conhecido como Jacques, ou ainda Jacob I, foi obrigado a estudar filosofia e teologia, graduando-se na Universidade de Basileia, com um mestrado em Filosofia, em 1671, e licenciatura em Teologia, em 1676. Mesmo contra a vontade de seus pais, tornou-se professor de matemática. Em suas contribuições mais significativas, destacamos o uso das Equações Diferenciais baseadas no conceito de gravidade, desenvolvido por Newton para descrever o movimento planetário.

Jakob interessou-se pelo estudo de curvas, incluindo, as hipociclóides, as epiciclóides, a ciclóide e a catenária. No ano de 1690, Jakob publicou no *Acta Eruditorum* a solução do problema da isócrona com o Cálculo de Leibniz (Tent, 2009, p.97). O problema, (Figura 12) consiste em determinar uma curva ao longo da qual um corpo com peso cai verticalmente a velocidade uniforme.[11].

Figura 12 – Em uma rampa com a forma de uma curva isócrona e a força da gravidade, bolinhas que partem de posições distintas chegam ao mesmo ponto final.



**Fonte:** Lima (2024, p. 47)

[9]O problema de se encontrar a solução de uma equação diferencial que satisfaça as condições iniciais é chamado de problema de valor inicial ou Problema de Cauchy.

[10]Christiaan Huygens (1629-1695) foi um matemático, físico e astrônomo holandês. Ele trabalhou com o cálculo de probabilidades, óptica, mecânica, dinâmica e acústica.

[11]Ilustração da curva isócrona (ou tautócrona) no endereço https://www.geogebra.org/m/p7efrp8b.

A solução de Bernoulli, baseada em um argumento sofisticado, estabelece a condição de isocronia como uma igualdade entre duas diferenciais

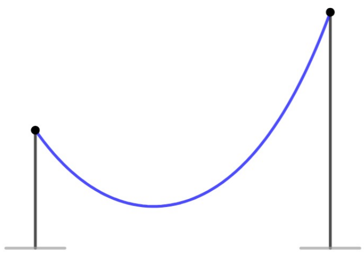
$$dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}$$

concluindo que as respectivas integrais devem ser iguais. Esse trabalho foi o pioneiro a utilizar o termo “integral” em seu sentido atual e deu origem a uma nova abordagem para estudar outras curvas definidas por propriedades mecânicas, como a espiral logarítmica ou a lemniscata: escrever Equações Diferenciais que traduzem tais propriedades e resolvê-las. Para uma análise mais detalhada desta solução, recomendamos Volpe (2020).

Outro desafio publicado por Jakob para os matemáticos da época diz respeito ao problema da catenária (Figura 13). Mais precisamente, o objetivo é determinar a curva gerada por um cabo flexível e inextensível fixado pelas extremidades e sujeito apenas à força de seu próprio peso. Seu formato muda a depender da altura dos postes e da distância entre eles.[12]. Desse modo, surgiram três soluções (dos matemáticos Huygens, Leibniz e Johann Bernoulli), sendo que os dois últimos chegaram à solução adequada de forma independente, mediante uma descrição geométrica da curva que equivale à equação

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}).$$

Figura 13 – A catenária



**Fonte:** Lima (2024, p. 47)

### Johann Bernoulli

**Johann Bernoulli** (1667-1748), também conhecido como Jean I ou John I, foi um dos muitos matemáticos proeminentes na família Bernoulli. Em 1690, defendeu a tese de doutorado em medicina, porém foi na matemática aplicada que desenvolveu diversos estudos, nomeadamente no cálculo das variações. No ano seguinte, Bernoulli visitou Paris, onde conheceu o matemático L’Hospital[13], que solicitou sua colaboração no desenvolvi-

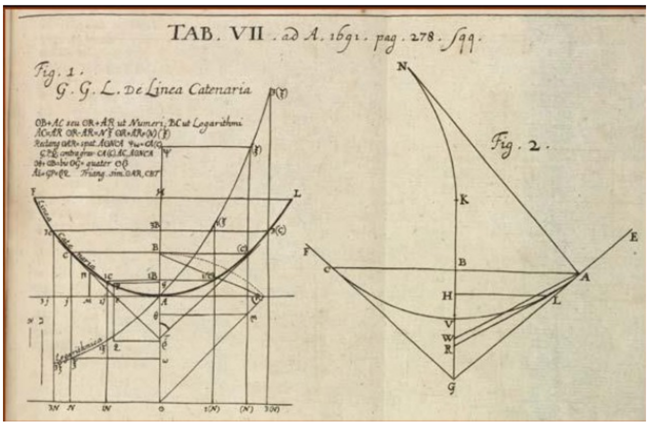
[12]Ilustração da catenária no endereço: https://www.geogebra.org/m/udqxbhs5.
[13]Marquês de L’Hôpital foi um matemático francês, cujo nome está associado à regra para cálculo de limites envolvendo formas indeterminadas.

mento do cálculo de Leibniz. Após o falecimento do seu irmão Jakob Bernoulli, assumiu a função de professor de matemática na Universidade de Basileia.

**A catenária**

No ano de 1691, Johann Bernoulli, Leibniz e Huygens[14] dedicaram-se a resolver o desafio proposto por Jakob Bernoulli. Enquanto a solução de Huygens tomava por base alguns axiomas e teoremas da Geometria, Leibniz e Johann utilizaram o cálculo, que na época era uma criação recente, para encontrar a equação "da corrente-curva", como aponta a Figura 14. Comparando os três métodos de solução, conclui-se que o estudo da catenária estimulou o primeiro sucesso com o novo cálculo diferencial e consequentemente formulou métodos de resolução de Equações Diferenciais.

Figura 14 – Solução de Leibniz e Johann Bernoulli




**Fonte:** Mata (2003, p. 3)

Segundo Faria (2011), a demonstração de Johann Bernoulli era mais fácil que a de Leibniz. A solução proposta por Johann Bernoulli consiste em deduzir, a partir de argumentos da mecânica clássica dos corpos em equilíbrio, uma equação diferencial que descreve a curva catenária. Essa abordagem culminou na obteção da seguinte Equação Diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}, \tag{2.4}$$

em que $s$ é o comprimento do arco e $a$ uma constante.

O comprimento de arco é dado pela expressão,[15]

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dy,$$

[14]Christiaan Huygens(1629-1695) foi um matemático, físico e astrônomo holandês.

[15]Para mais detalhes dessa construção indicamos Faria (2011).

então a Equação Diferencial não pode ser resolvida diretamente, visto que as variáveis $x$ e $y$ aparecem implicitamente em $s$. Dessa maneira, podemos escrever função (2.4) em termos de $x$ e $y$,

$$s = \frac{adx}{dy} \tag{2.5}$$

Assim, estudamos uma parcela infinitesimal da curva, considerando $s$ e $ds$, de modo que

$$ds = \frac{ad^2xdy - adxd^2y}{dy^2} \tag{2.6}$$

Então, Bernoulli pressupõe que todas as diferenciais de $y$ são iguais, ou seja, $dy$ constante ou a derivada de $dy = 0$. Esta suposição equivale a considerar $x$ e $s$ como funções de $y$ com variações permitidas em $dx$ e $ds$. Então, podemos reescrever (2.6) como

$$ds = \frac{ad^2xdy}{dy^2} \tag{2.7}$$

Dividindo ambos os lados da igualdade (2.7) por $dy$

$$\frac{ds}{dy} = \frac{ad^2x}{dy^2} \tag{2.8}$$

Em seguida, multiplicamos ambos os membros da igualdade (2.8) por $\frac{dy}{ds}$, obtendo

$$1 = \frac{ad^2x}{dyds} = \frac{ax''}{s'}$$

como $s' = \sqrt{1 + (x')^2}$ tem-se que

$$1 = \frac{ax''}{\sqrt{1 + (x'')^2}}. \tag{2.9}$$

Multiplicamos ambos os lados da igualdade (2.9) por $x' = dx$, obtemos

$$\begin{aligned} x' &= \frac{ax'x''}{\sqrt{1 + (x')^2}} \\ \sqrt{1 + (x')^2}dx &= ax''dx \\ \Longrightarrow dx &= \frac{ax''dx}{\sqrt{1 + (x')^2}} \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados da última igualdade, temos

$$\int dx = \int \frac{ax''dx}{\sqrt{1 + (x')^2}} \Longrightarrow x = a\int \frac{x''dx}{\sqrt{1 + (x')^2}} \tag{2.10}$$

Calculamos a integral indefinida, (2.10) pelo método da subtituição.

Escolhendo $x' = u$, temos

$$\frac{du}{dx} = x'' \Longrightarrow du = x''dx \tag{2.11}$$

Substituindo $u$ e $du$ na integral 2.10 dada, temos

$$x = a\int \frac{udu}{\sqrt{1+u^2}} \tag{2.12}$$

Novamente, aplicamos o método da substituição. Escolhendo $v = 1 + u^2$, temos

$$\frac{dv}{du} = 2u \Longrightarrow dv = 2udu \Longrightarrow udu = \frac{dv}{2} \tag{2.13}$$

Reescrevendo e resolvendo (2.12) em função de $v$

$$x = a\int \frac{dv}{2\sqrt{v}} \Longrightarrow x = av^{\frac{1}{2}} + c \tag{2.14}$$

De (2.11) e (2.13), reescrevemos em função de $x$

$$x = a\sqrt{1+(x')^2} + c, \tag{2.15}$$

que é solução de 2.10.

Em seguida, Bernoulli omite a constante de integração $c$, pois a origem do eixo $x$ está situada no ponto mais baixo da curva.

Nesse sentido, para eliminar a raiz de 2.15, elevamos ambos os lados da igualdade ao quadrado

$$\begin{aligned}
x^2 &= a^2(1+(x')^2) \\
\Longrightarrow x^2 &= (a^2 + a^2(x')^2) \\
\Longrightarrow x^2 - a^2 &= a^2(x')^2 \\
\Longrightarrow \sqrt{x^2-a^2} &= a(x') \\
\Longrightarrow \frac{ax'}{\sqrt{x^2-a^2}} &= 1
\end{aligned}$$

como $x' = \frac{dx}{dy}$, então

$$\begin{aligned}
\frac{a\frac{dx}{dy}}{\sqrt{x^2-a^2}} &= 1 \\
\Longrightarrow a\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= dy
\end{aligned}$$

como consequência da omissa da constante $c$, temos que $x > a$. Dessa forma, Bernoulli substitui $x$ por $x + a$

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{(x+a)^2 - a}}$$

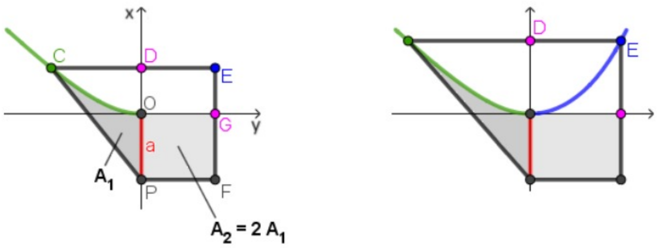
$$\Longrightarrow dy = \frac{adx}{\sqrt{(x^2 + 2ax + a^2) - a}}$$

Bernoulli, então, chega à seguinte solução para esta equação:

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{x^2 + 2ax}}. \tag{2.16}$$

Notamos que, inicialmente, tentava-se utilizar a equação diferencial para deduzir uma construção da curva por meio do processo de “quadratura”, ou seja, construção de retângulos com áreas iguais a de regiões limitadas por curvas. Por exemplo: a equação da catenária de Johann Bernoulli foi obtida por uma construção baseada na quadratura da hipérbole, detalhado na Figura 15.

Figura 15 – Construção da catenária.




**Fonte:** Lima (2024, p. 50)

O objetivo de Johann era construir uma curva satisfazendo a equação (2.16) com $a > 0$. A explicação original pode ser vista em (Bernoulli, 2004). A fim de facilitar a compreensão, apresentamos a ideia da construção utilizando notações modernas feita por Lima (2024): Seja $O$ a origem com o eixo horizontal $y$ e eixo vertical $x$. Tracemos a hipérbole

$$(x+a)^2 - y^2 = a^2$$

com foco na origem, o segmento $OP$ de comprimento $a$ sobre a parte negativa do eixo vertical e tome um ponto $D = (0, x)$ sobre a parte positiva do mesmo eixo. Tracemos o segmento $DC$ horizontal que intersecta a hiperbóle em $C = (-\sqrt{x^2 + 2ax}, x)$. A partir disso, marcamos o ponto $G = (y, 0)$ de modo que a área do retângulo $GOFP$ seja duas vezes a área da região $OCP$. Variando $D$, o ponto $E = (y, x)$ descreve uma curva. Para cada ponto $(y, x)$ dessa curva, tem-se, por construção,

$$ya = 2[\text{área}(PDC) - \ \text{área}(ODC)] = (x+a)\sqrt{x^2 + 2ax} - 2\int_0^x \sqrt{t^2 + 2at}\, dt.$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{a}\left[\sqrt{x^2+2ax}+\frac{(x+a)^2}{\sqrt{x^2+2ax}}-2\sqrt{x^2+2ax}\right]\\ &= \frac{1}{a}\left[\frac{x^2+2ax+x^2+2ax+a^2-2(x^2+2ax)}{\sqrt{x^2+2ax}}\right]\\ &= \frac{a}{\sqrt{x^2+2ax}}.\end{aligned}$$

Logo, a curva construída satisfaz a equação diferencial desejada.

Já para resolver a integral da catenária (2.16) (em notação moderna)

$$y=\int\frac{adx}{\sqrt{(x^2+2ax)}}, \tag{2.17}$$

inicialmente multiplicamos e dividimos a função integrando por $a+x+\sqrt{x^2+2ax}$, obtendo

$$y=a\int\frac{a+x+\sqrt{x^2+2ax}}{(a+x+\sqrt{x^2+2ax})\cdot(\sqrt{x^2+2ax})}dx.$$

Para resolver a integral (2.17) utilizamos o método da substituição. Escolhendo

$$u=a+x+\sqrt{x^2+2ax}$$

temos,

$$\frac{du}{dx}=1+\frac{x+a}{\sqrt{x^2+2ax}}\Longrightarrow dx=\frac{\sqrt{x^2+2ax}}{a+x+\sqrt{x^2+2ax}}du=\frac{du}{u}\sqrt{x^2+2ax}.$$

Portanto substituindo na integral dada

$$\begin{aligned}y &= a\int\frac{u}{u+\sqrt{x^2+2ax}}\frac{du\sqrt{x^2+2ax}}{u}\\ &= a\int\frac{1}{u}du\\ &= a\ln|u|\\ &= a\ln\Big(|a+x+\sqrt{x^2+2ax}|\Big)+c\end{aligned}$$

Como a equação da catenária passa pela origem, (veja a Figura 15), conclui-se que $c=a\ln a$

Dessa forma, podemos reescrever a equação da catenária

$$y+a\ln a=a\ln|a+x+\sqrt{(x^2+2ax)}|$$

dividindo os dois lados da igualdade por $a$:

$$\frac{y + a\ln a}{a} = \frac{a\ln|a + x + \sqrt{(x^2 + 2ax)}|}{a},$$

ou seja,

$$\frac{y}{a} = \ln|a + x + \sqrt{(x^2 + 2ax)}| - \ln a$$

Usando propriedade de logaritmo e aplicando exponencial, temos

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \frac{y}{a} &= \ln\frac{a + x + \sqrt{x^2 + 2ax}}{a} \\
\Longrightarrow e^{\frac{y}{a}} &= e^{\ln\frac{a + x + \sqrt{(x^2 + 2ax)}}{a}} \\
\Longrightarrow e^{\frac{y}{a}} &= \frac{a + x + \sqrt{(x^2 + 2ax)}}{a} \\
\Longrightarrow ae^{\frac{y}{a}} - a - x &= \sqrt{(x^2 + 2ax)}
\end{aligned}$$

Para eliminar a raiz, elevamos ambos os lados da última igualdade ao quadrado

$$(ae^{\frac{y}{a}} - a - x)^2 = (\sqrt{x^2 + 2ax})^2$$

Ao igualar a zero, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= (ae^{\frac{y}{a}} - a - x)^2 - (\sqrt{x^2 + 2ax})^2 \\
\Longrightarrow 0 &= (ae^{\frac{y}{a}} - a - x)\cdot(ae^{\frac{y}{a}} - a - x) - (x^2 + 2ax) \\
\Longrightarrow 0 &= (a^2e^{\frac{2y}{a}} - 2a^2e^{\frac{y}{a}} - 2axe^{\frac{y}{a}} + 2ax + x^2) - (x^2 + 2ax) \\
\Longrightarrow 0 &= a^2e^{\frac{y}{a}} - 2a^2e^{\frac{y}{a}} - 2axe^{\frac{y}{a}} + a^2.
\end{aligned}$$

Simplificando a última expressão da igualdade por $a$, temos

$$ae^{\frac{2y}{a}} - 2ae^{\frac{y}{a}} - 2xe^{\frac{y}{a}} + a$$

Em seguida, dividindo a expressão acima por $e^{\frac{y}{a}}$, concluímos

$$\begin{aligned}
a(e^{\frac{y}{a}} - 2a - 2x + \tfrac{a}{e^{\frac{y}{a}}}) &= 0 \\
\Longrightarrow a(e^{\frac{y}{a}} + e^{\frac{-y}{a}}) &= 2(a + x) \\
\Longrightarrow \tfrac{a}{2}(e^{\frac{y}{a}} + e^{\frac{-y}{a}}) - a &= x
\end{aligned}$$

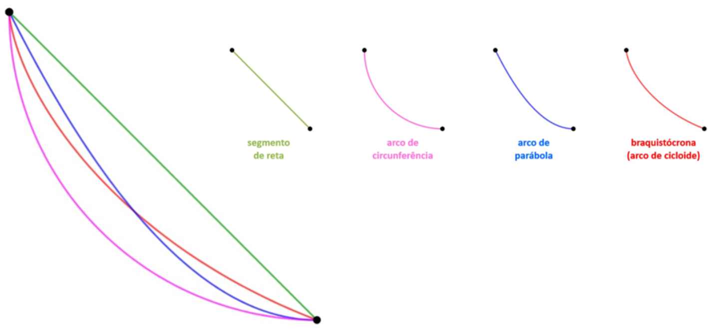
Utilizando as funções logarítmicas e exponenciais estudadas por Euler, a resolução da equação integral da catenária em função de $x$ e $y$ é dada por:

$$x = \frac{1}{2}a(e^{\frac{y}{a}} + e^{\frac{-y}{a}}) - a.$$

### Braquistócrona

Em 1696, Johann Bernoulli publicou no jornal cientifico *Acta Eruditorum* um desafio com o título “Um novo problema que convido os matemáticos a resolver”. Tal problema é conhecido como o problema da Braquistócrona, termo derivado de duas palavras gregas, *brachistos* que significa menor, e *chronos*, que significa tempo. Nessa lógica, o problema consiste em encontrar a curva que minimiza o tempo de queda de um corpo entre dois pontos num plano vertical, quando liberado de um ponto inicial e sujeito apenas à força da gravidade. A situação é apresentada a seguir[16].

Figura 16 – O problema da Braquistrócrona




**Fonte:** Lima (2024, p. 50)

Em maio de 1697, o problema da Braquistócrona alcançou um momento de grande relevância com a publicação de várias soluções baseadas no cálculo diferencial e de natureza geométrica, conforme registrado em (Herrera, 1994). Entre os autores estavam os irmãos Johann e Jacob Bernoulli, que haviam desenvolvido uma intensa rivalidade em torno do desafio. Além deles, também contribuíram Leibniz, L’Hôpital (com ajuda de Johann Bernoulli, seu tutor) e um colaborador anônimo, posteriormente identificado como Isaac Newton. “O Leão se reconhece pelas marcas de suas garras!”é um comentário atribuído a Johann Bernoulli referindo-se a Newton.

A solução apresentada por Johann Bernoulli é baseada no Princípio de Fermat[17], a qual envolve à mecânica do movimento do corpo que se desloca sob ação exclusiva da gravidade, no sentido do enunciado do problema da braquistócrona. Nesse contexto, a sua ideia principal consiste em dividir o plano de movimento em faixas horizontais de densidades variadas e com os conceitos sobre fenômeno da refração, relacionar a trajetória do raio de luz ao movimento de queda livre de um corpo. Em seguida, determinou a curvatura do raio em um meio de raridade variável, obtendo uma equação diferencial. Com base

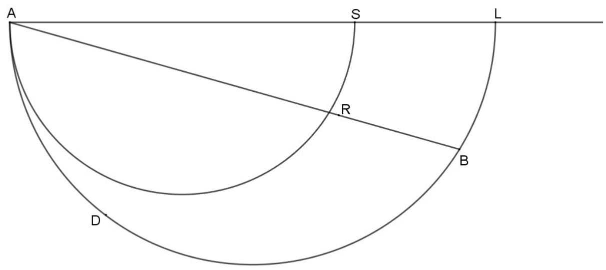
[16]Ilustração da braquistócrona no endereço https://www.geogebra.org/m/tkm3gmx5.

[17]Nas palavras do próprio Bernoulli: ”Um raio de luz, indo de um meio mais rarefeito a um mais denso, deve refratar para a normal, de modo que o raio, supostamente avançando do ponto iluminador para o iluminado, siga o caminho de menor tempo”.

nos estudos de Galilei sobre queda dos corpos, Bernoulli demonstrou que a solução do problema era uma cicloide. Por fim, Bernoulli apresentou um método geométrico para obter a cicloide específica que atendia às condições iniciais do problema:

Desenhe a reta $AB$ passando pelos pontos $A$ e $B$ (Figura 17). A partir de $A$, trace uma cicloide qualquer que intersecte a reta $AB$ no ponto $R$. A razão entre $AR$ e $AB$ determinará o diâmetro do círculo gerador da cicloide $ARS$. Utilize esse diâmetro para gerar uma nova cicloide $ABL$, que passará pelo ponto $B$.

Figura 17 – A construção original de Bernoulli para a cicloide por $AB$




**Fonte:** Elaborada pela autora (2024)

Portanto, os problemas clássicos da tractriz, isócrona, catenária e braquistócrona levam às seguintes equações diferenciais:

$$dx = \pm\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}dy, \quad dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}, \quad dy = \frac{a}{\sqrt{x^2 + 2ax}}, \quad dy = dx\frac{x}{x - a},$$

que foram obtidas por Leinbniz para a tractriz, Jakob Bernoulli para a isócrona e por Johann Bernoulli para a catenária e braquistócrona, respectivamente. Notamos que as igualdades vistas são "equações diferenciais" no sentido de "equações envolvendo diferenciais". No contexto matemático da época, "determinar a curva" (o que pode ser interpretado como sendo uma versão do moderno "resolver a equação") significava apresentar uma construção geométrica para ela (Gray, 2021, p. 5). O trabalho de Johann Bernoulli sobre a braquistócrona exemplifica essa abordagem, uma vez que a curva procurada era uma cicloide, que era uma curva de construção conhecida. Assim, o problema foi considerado resolvido. Contudo, a diferença é que, nos outros casos, a curva que gera a equação não é conhecida. Foi o desenvolvimento do estudo desse tipo de equação que culminou no conceito atual.

## 2.5 O Século XVIII

Até aqui, a criação do Cálculo Diferencial e Integral havia impulsionado a investigação das Equações Diferenciais, guiada por aplicações à mecânica das partículas. Nessas aplicações, as leis físicas de Newton e a lei da gravitação universal permitiram obter

Equações Diferenciais Ordinárias (EDOS) que modelam fenômenos físicos. O sucesso do Cálculo Diferencial no tratamento de problemas inspira físicos e matemáticos do século XVIII a buscar modelos para a Mecânica do Contínuo[18] e outros ramos da Física. Essa busca levou ao desenvolvimento de Equações Diferenciais Parciais (EDPs), que expressam os fenômenos físicos de forma mais complexa e mais realista, dentre os quais, um dos mais famosos é a chamada Equação da Onda. Apresentamos um recorte desse percurso.

### Daniel Bernoulli

**Daniel Bernoulli (1700-1782)** nascido em Groningen, Países Baixos, foi incentivado pelo pai, Johann Bernoulli, a estudar medicina, mas acabou seguindo sua paixão pela matemática e física. Foi professor de matemática em São Petersburgo e, posteriormente, de medicina na Universidade de Basiléia. Daniel fez numerosas contribuições em Física-Matemática, destacando-se especialmente o estudo das Equações Diferenciais Parciais e suas aplicações.

### Daniel e as Equações Diferenciais

O seu maior mérito na área do cálculo foi o fato de ter aceito e utilizado as teorias de Newton em conjunto com o cálculo de Leibniz, o que impulsionou avanços na Hidrodinâmica, Termodinâmica, Mecânica, Teoria cinética dos gases entre outras. Essa contribuição rendeu-lhe reconhecimento, especialmente com a associação do seu nome à famosa equação de Bernoulli. Além disso, foi o primeiro a encontrar funções que seriam conhecidas um século mais tarde como funções de Bessel[19].

### Equação de Bernoulli

Esta equação descreve o comportamento de um fluido que se move ao longo de um conduto e é definida como:

**Definição 2.1.** (Equação de Bernoulli). Uma Equação Diferencial de Primeira Ordem na forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{2.18}$$

em que $x$ é a variável independente, $n$ é um número inteiro e $P, Q$ são funções contínuas em um intervalo $(a, b)$, é chamada de Equação de Bernoulli.

Na Equação de Bernoulli, considerando $n = 0$, temos uma equação linear e quando $n = 1$ a equação linear torna-se separável. No entanto, para $n \neq 0$ e $n \neq 1$ temos equações

[18]É um ramo da física que propõe um modelo unificado para sólidos deformáveis, sólidos rígidos e fluidos

[19]São funções que modelam a trajetória de uma partícula que, sob a ação de seu peso, passa de um ponto inicial a um ponto final, num intervalo mínimo de tempo.

diferencias não lineares. Dessa maneira, é necessário formalizar um método de resolução da equação diferencial de Bernoulli de ordem $n$, a qual é dada pelo Teorema

**Teorema 2.3.** *(Resolução da Equação de Bernoulli). A Equação de Bernoulli (2.18) com $n > 1$ pode ser transformada numa equação diferencial linear através da mudança de variável*

$$z(x) = y^{1-n} = \frac{1}{y^{n-1}}$$

*que resulta numa equação diferencial linear em $z$ (Machado,2012).*

Apesar da equação de Bernoulli ser associada a Daniel Bernoulli, três matemáticos também desempenharam um papel crucial na resolução da Equação de Bernoulli. Em 1696, Jakob Bernoulli a propôs pela primeira vez, e posteriormente, Leibniz e Johann Bernoulli contribuíram com ideias importantes para sua resolução. Leibniz encontrou a solução utilizando uma mudança de variável (semelhante à que vimos anteriormente), enquanto Johann Bernoulli baseou-se no método da variação dos parâmetros. Ambas as técnicas são consideradas métodos atuais e fundamentais na resolução da equação de Bernoulli.

Em colaboração com Leonhard Euler, Daniel também realizou estudos sobre as vibrações transversais de uma barra flexível uniforme, conhecida atualmente como modelo de viga Euler-Bernoulli[20].

$$c^2 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{f(x,t)}{\rho A}$$

com

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

sendo $w(x,t)$ a deflexão da viga, $f(x,t)$ a carga externa, $E$ o módulo de elasticidade longitudinal, $I$ o momento da inércia da seção transversal,$\rho$ a densidade do material, $A$ a área da seção transversal, $x$ a variável espacial e $t$ a variável temporal (Ramos et al., 2018).

É interessante frisar que Daniel Bernoulli foi um dos matemáticos que se desbruçou na resolução da Equação de Onda (que será discutido na Seção 2.5.1).

### Leonhard Euler

**Leonhard Euler (1707 - 1783)** nascido em Basiléia, Suíça, foi aluno de Johann Bernoulli na universidade e colega próximo de Daniel Bernoulli. Euler é reconhecido o

[20]Teoria linear da elasticidade para calcular deflexões de vigas, constituída por uma equação diferencial parcial linear de quarta ordem, desenvolvida por Euler e Daniel (1750), a partir das descobertas de Jakob Bernoulli.

maior matemático do século XVIII visto que suas obras completas somam mais de 70 volumes e 530 trabalhos publicados em vida, cobrindo matemática, física, astronomia, medicina e muito mais.

Em relação ao Cálculo, Euler considerou como "sendo sobre expressões formais no qual substituindo o conceito de curva pelo de função". A perspectiva de Euler, que entendia não apenas o Cálculo mas a matemática em geral como sendo "uma ciência de expressões formais", "reestruturou amplamente a teoria matemática". Um registro dessa mudança de perspectiva é a obra Fundamentos do Cálculo Integral, que busca apresentar como obter a relação entre $x$ e $y$ a partir de uma dada relação entre $dx$ e $dy$, isso significa que, em palavras modernas, busca apresentar métodos de resolução de diversos tipos de equações diferenciais. No contexto da abordagem de Euler, a solução da equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{y}$$

é dada pela expressão $\ln(x - y) = C\frac{x}{x-y}$ (Euler, 2010).

É perceptível que não há apelo geométrico, nem na formulação do problema, nem na apresentação da solução. No entanto, a abordagem de Euler é bastante distinta da moderna: o entendimento dos diferenciais. Euler trabalhava com a ideia de grandeza infinitamente pequena, apresentada por Leibniz.

**Euler e as Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais**

No âmbito das Equações Diferenciais, Euler teve papel decisivo no desenvolvimento da teoria nos aspectos de soluções e classificações, após o contato com os trabalhos de Newton sobre mecânica do movimento. Ele identificou as condições para que uma Equação Diferencial de Primeira Ordem seja dita exata e desenvolveu a teoria dos fatores integrantes. Em 1743, encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes: $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ e estendeu o resultado para equações não homogêneas, utilizando séries de potências. Os avanços de Euler sustentaram a expectativa de que métodos mais gerais para resolver classes mais amplas de equações diferenciais poderiam a ser encontradas.

> Euler foi, sem dúvida, o maior responsável pelos métodos de resolução usados hoje nos cursos introdutórios sobre Equações Diferenciais, e até muitos problemas específicos que aparecem em livros texto de hoje remontam aos grandes tratados que Euler escreveu sobre o Cálculo (Boyer e Merzbach, 2012, pg. 308).

Segundo Eves (2011), Euler foi o primeiro a notar que, conhecida uma solução particular $v = f(x)$ da equação

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

(Equação de Riccati)[21], a substituição de $y = v + \frac{1}{z}$ a transforma em uma Equação Diferencial Linear em $z$ .

Além disso, a Equação Diferencial

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_n y^{(0)} = f(x)$$

em que os expoentes entre parênteses indicam a ordem da derivada, é conhecida hodiernamente como *Equação Diferencial de Euler.*

A grande influência de Euler na teoria das Equações Diferenciais resultou no desenvolvimento do Método de Euler, na Fórmula de Euler e nas soluções numéricas, que hoje são ferramentas indispensáveis na análise matemática e na física teórica. Desse modo, nas primeiras décadas do século XVIII, as principais técnicas básicas para solução de Equações Diferenciais já estavam disponíveis. O objetivo maior continuava sendo encontrar métodos mais gerais para resolver "todas" as Equações Diferenciais, mas essa tarefa estava passando pela geração seguinte, liderada por Euler.

Particularmente, por volta de 1768-1769, Euler fez contribuições importantes em Equações Diferenciais, estudando a Equação do Calor, a propagação de ondas em cordas vibrantes (Equação da Onda) e a teoria da elasticidade. Além disso, introduziu a base para o conceito de função potencial em EDPs e desenvolveu métodos como a separação de variáveis e a transformada de Laplace. Outro campo de estudos de Euler foi no tratamento sistemático do cálculo de variações.[22]

### Joseph Louis Lagrange

**Joseph Louis Lagrange (1736-1813)** nasceu em Turim, na Itália, onde seguiu uma carreira acadêmica, tornando-se professor de Matemática em sua cidade natal. Em 1766, assumiu a cadeira de Matemática na prestigiosa Academia de Berlim, substituindo o lendário matemático Leonhard Euler. Dentre os matemáticos de sua época, Lagrange era um dos mais preocupados com os detalhes e rigor.

No ano de 1797, propôs a obra *"Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du Calcul Différential"* (Teoria das funções analíticas contendo os princípios do Cálculo Diferencial), que se baseia em manipulações algébricas apoiadas em expansões de séries conhecidas e representações de funções $f(x)$ por séries de Taylor $f(x+h)$. Essa ideia revolucionária deu origem ao conceito de funções derivadas, que Lagrange representou como

[21] Cujo nome é uma homenagem ao Conde Jacopo Francesco Riccati (1676-1754). Trata-se de uma Equação Diferencial Ordinária não linear, de Primeira Ordem.

[22] O Cálculo das Variações tem como objetivo desenvolver técnicas matemáticas para encontrar e descrever objetos matemáticos que otimizam uma situação.

$f'(x), f''(x), ..., f^{(n)}(x)$, definindo formalmente as derivadas de uma função. Desse modo, a partir dos estudos em cálculo, ele desenvolveu as primeiras ideias sobre a Teoria das Funções de Variável Real, estabelecendo bases fundamentais para a análise matemática.

### Lagrange e as Equações Diferenciais Parciais

Outro escrito publicado foi *Mécanique analytique* (Mecânica Analítica), o qual estuda as equações gerais de movimento para sistemas dinâmicos[23], nomeadas mais tarde por Equações de Lagrange. Nesta obra, Lagrange mostrou que a solução geral de uma Equação Diferencial Linear Homogênea de ordem $n$ é uma combinação linear de $n$ soluções independentes. Este trabalho impulsionou a criação do método para solução de equações diferenciais chamado método da variação de parâmetros[24]. De acordo com Eves (2011):

> Seu trabalho em Equações Diferenciais (por exemplo, o método de variação de parâmetros), particularmente em Equações Diferenciais Parciais, é extraordinário, e suas contribuições ao cálculo de variações impulsionaram muito o desenvolvimento desse campo (Eves, 2011, p. 484).

Inspirado pela amizade e obra de Leonhard Euler, Lagrange mergulhou no cálculo das variações. Aos 18 anos, ele brilhou na resolução do problema da tautócrona (isócrona), superando soluções geométricas com sua abordagem analítica. Em 12 de agosto de 1755, compartilhou a sua descoberta com Euler por carta, marcando o início do método variacional. Em seguida, os dois matemáticos analisaram a solução dos Bernoulli para o problema da Braquistócrona, o que serviu como base para o estudo sobre máximos e mínimos em espaços de funções, culminando na famosa equação de Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial L}{\partial q}(t, q(t), q'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'}(t, q(t), q'(t)) = 0$$

onde $L$ é a lagranginana do sistema, $q$ é coordenada, $q'$ é a derivada de $q$ em relação ao tempo $t$ (Vilhena, 2021).

É crucial destacar que Lagrange desenvolveu o método dos multiplicadores para resolver problemas de otimização com restrições, o qual também se aplica para a resolução de EDPs.

### Jean le Rond d'Alembert

**D'Alembert(1717-1783)** matemático, físico e filósofo francês, nasceu na cidade de Paris. Em 1738, concluiu o curso de direito e, no mesmo ano, iniciou os estudos de

[23]São sistemas que descrevem a evolução de um estado ao longo do tempo e são comumente usadas para modelar e fazer previsões de sistemas físicos, biológicos e financeiros.

[24]Usada para encontrar uma solução particular de uma equação diferencial não homogênea com coeficientes constantes.

medicina, tendo renunciado, uma vez que percebeu a verdadeira paixão pela matemática.

A importância de D'Alembert vai além do reconhecimento que recebeu. Ele fez contribuições significativas para a Algébra, incluindo o Teorema de D'Alembert, o qual afirma que toda equação polinomial de grau $n$ tem exatamente $n$ soluções no conjunto dos números complexos. Além disso, seu critério de convergência de séries infinitas é fundamental no Cálculo.

**D'Alembert e as Equações Diferenciais Parciais**

D'Alembert contribuiu para a teoria dessa área, pois observou que uma equação diferencial de coeficientes constantes de ordem $n$ é equivalente a um sistema de primeira ordem. A redução de ordem de uma Equação Diferencial Linear a partir de uma solução conhecida foi aplicada pela primeira vez, também, por D'Alembert.

Em 1747, ele apresentou à Academia de Ciências da Prússia um artigo pioneiro sobre as Equações Diferenciais Parciais, cujo título da publicação é *Traité de dynamique* (Tratado da dinâmica). Nesta obra, D'Alembert formulou a equação da corda vibrante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

> D'Alembert seguiu o procedimento padrão, tratando a corda de violino em vibração como uma coleção de massas pontuais, mas em vez de resolver as equações e procurar um padrão quando o número de massas tendia ao infinito, ele estudou o que acontecia às equações em si. Ele deduziu uma equação que descrevia o formato das variações na corda ao longo do tempo (Stewart, 2013, p.171).

Pouco antes, Euler tinha classificado o significado dessas derivadas parciais e estabelecido a igualdade: $\partial^2 xy = \partial^2 yx$. Essa descoberta criou uma nova área da matemática, a teoria das Equações Diferenciais Parciais.

### 2.5.1 A Equação da Onda

A **Equação da Onda** ou o problema de vibração de cordas foi estudado primeiramente por D'Alembert, seguido de Euler, Daniel Bernoulli e Lagrange. O problema se reduz a encontrar uma solução para a equação, escrita hodiernamente da forma:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

com $c > 0$. Trata-se de uma Equação Diferencial Parcial de Segunda Ordem, Linear e Hiperbólica (conceitos estudados no próximo capítulo).

Euler e D'Alembert chegaram à conclusão de que as soluções para a Equação da Onda deveriam ser a sobreposição da propagação de duas funções ($f$ e $g$) em sentidos contrários, mas com a mesma velocidade ($c$). Eles chegaram à seguinte ideia de que a solução deveria ser da forma:

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct),$$

sendo $F$ e $G$ funções reais.

As soluções de D'Alembert e Euler coincidiam, mas suas definições de função matemática eram distintas. D' Alembert tomava apenas funções contínuas e Euler funções geométricas. Como afirma Figueiredo (2018), naquela época havia duas classes: as funções contínuas, que eram aquelas expressas por uma equação entre $x$ e $y$, e as funções geométricas, que eram aquelas traçadas à mão livre.

> Reconhecia-se que, se uma função contínua fosse dada por uma fórmula em um pequeno intervalo, então a função estaria determinada nos demais pontos fora desse intervalo. (Veja o conflito da época: uma função com esta propriedade é de uma categoria muito restrita de funções, chamadas analíticas). Admitia-se também que a classe das funções contínuas era menor que a das funções geométricas, porque uma linha quebrada não era uma função contínua, no sentido da época, e sim várias funções (Figueiredo, 2018, p.41).

Enquanto Bernoulli, através dos trabalhos propostos por Euler sobre oscilações, chegou a uma expressão que representava a solução por séries trigonométricas:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)\cos(nct),$$

quando a corda de comprimento $\pi$ vibra por um deslocamento de sua posição de repouso.

Ainda segundo Figueiredo (2018, p.41), Bernoulli sustentava que sua solução era absolutamente geral e que deveria conter aquelas dadas por D'Alembert e Euler. Este contestava que isso era impossível, pois se a função fosse representada por uma série de senos implicaria ser periódica e ímpar; a ideia de que uma expressão analítica representasse a função apenas em um intervalo não era aceita na época.

Mais tarde, Lagrange afirmou que a solução da equação da onda para uma corda de comprimento 1, posição inicial dada por $f(x)$ e velocidade inicial $g(x)$ seria

$$u(x,t) = 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi y)\cos(n\pi ct) f(y)dy + 2\int_0^1 \frac{1}{n}\sin(n\pi y)\sin(n\pi x)\sin(n\pi ct)dy.$$

Todavia, Lagrange não percebeu que, fazendo $t = 0$ em sua expressão e permutando a integral com o somatório, obtém-se o desenvolvimento da função $f$ em uma série de senos, cujos coeficientes são precisamente o que hoje chamamos coeficientes de Fourier.

### Pierre Simon Laplace

**Pierre Simon Laplace (1749-1827)** nascido na França, numa cidade chamada Beaumont-en-Auge. Frequentou uma escola religiosa para estudar Teologia. Nesse período, percebeu-se que não tinha aptidão para tal campo de estudo, mas sim para a matemática. Aos 19 anos mudou-se para Paris, onde foi orientado por Jean D'Alembert.

Entre 1798 e 1825, Laplace escreveu a obra *"Traité de mécanique céleste"*, publicada em cinco volumes. Nesta obra, reuniu o trabalho de seus antecessores matemáticos e físicos, dentre eles Isaac Newton e, usando o Cálculo Diferencial e Integral, apresentou um estudo da dinâmica do universo. Praticamente todos os estudos desenvolvidos por ele estão vinculados a problemas físicos, não à toa que ganhou o apelido de "Newton da França".

No ano de 1812, publicou a obra *"Théorie analytique des probabilités"*, na qual estabeleceu resultados, os quais prevalecem até os dias atuais em Probabilidade e Estatística. Nesta obra, apresentou uma função,a qual calculava a probabilidade de uma função possuir valores em um determinado intervalo, a chamada Função Erro. Uma dessas funções (existem várias delas) é definida por:

$$erf(t) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Estudar essa função do ponto de vista do Cálculo Diferencial não é tarefa simples, pois integrar uma função desse tipo é impossível pelas técnicas elementares de integração de funções. Para superar isso, Laplace desenvolveu a Transformada de Laplace, uma técnica inovadora para resolver Equações Diferenciais, permitindo análise de erro e solução de problemas complexos.

### Laplace e as Equações Diferenciais Parciais

A Transformada de Laplace consiste no método que converte Equações Diferenciais complexas em equações algébricas. Para isso, deve-se tomar uma Equação Diferencial difícil de se resolver, transformá-la, por meio de uma integral imprópria e uma mudança de variável, em uma equação algébrica e, após resolver a equação algébrica, reverter o processo com uma aplicação chamada transformada inversa de Laplace. Essa inversão produzirá a solução do problema inicial. Tal método é uma ferramenta grandiosa na solução de Equações Diferenciais não só na Matemática, mas também em outros campos da ciência, como, por exemplo, a Engenharia Elétrica.

É importante destacar que a Transformada de Laplace serve para encontrar não só soluções de Equações Diferenciais Ordinárias lineares com coeficientes constantes, mas também para Equações Diferenciais Parciais com problemas de valores de contorno ou iniciais. Com isso, podemos transformar uma Equação Diferencial Parcial em uma Equação Diferencial Ordinária.

Outro fator relevante de Laplace na Matemática foi a descoberta de um operador que, atualmente, é denominado de Operador Laplaciano, representado por $\Delta$ (Algumas literaturas trazem a simbologia $\nabla$ para o operador laplaciano).

Um caso particular do estudo do Laplaciano de uma função é resolver a equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \Delta f = 0. \tag{2.19}$$

Embora a equação (2.19) tenha aparecido pela primeira vez em um artigo de Euler, em 1752, sobre dinâmica, ela ficou conhecida como a **Equação de Laplace** a partir de 1782, quando Pierre-Simon Laplace encontrou soluções para a equação enquanto investigava a atração gravitacional entre corpos no espaço.

A equação de Laplace aparece em muitos problemas da Física Matemática, como: no estudo de campos eletrostáticos, a função potencial elétrico em meio dielétrico sem cargas elétricas, a energia potencial de uma particular sobre o qual agem apenas forças gravitacionais, a temperatura estado estacionário[25] todos os problemas satisfazem a equação de Laplace por isso também é chamada de equação do potencial.

## 2.6 Matemáticos do século XIX

O século XIX foi marcado pelo rigor matemático, tendo em vista a formalização de conceitos matemáticos do Cálculo Diferencial e Integral. Esse avanço proporcionou a investigação de questões relacionadas a teoria e a unicidade dos problemas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e fundamentação teórica das Equações Diferenciais Parciais (EDPs).

### Joseph Fourier

**Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)** nasceu em Auxerre, França. Após perder seus pais aos 10 anos, foi encaminhado pelo bispo local para estudar na École Militaire de Auxerre, onde desenvolveu suas habilidades matemáticas sob orientação de destacados professores, incluindo Joseph-Louis Lagrange e Pierre-Simon Laplace.

[25] Todos os problemas mencionados não dependem do tempo

**Fourier e as Equações Diferenciais Parciais**

Como discutido anteriormente na seção 2.5.1 ficou a cargo de Fourier explicar os coeficientes. Tal explicação aconteceu quando Fourier analisava o problema de condução de calor[26] na era da revolução industrial, cuja questão de dissipação de calor era algo de grande relevância neste contexto. A **Equação do Calor** é uma Equação Diferencial Parcial modelada por esse problema e é descrita atualmente como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Partindo do problema de propagação de calor que foi desenvolvida a série de Fourier. Nas obras *"Memoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides"'* (Memória sobre a propagação de calor em corpos sólidos) e *"Théorie Analitique de la Chaleur"* (Teoria Analítica do Calor), Fourrier explicita os coeficientes e escreve as séries de senos e cossenos de várias funções. Ele afirmou que qualquer função podia ser expressa pela série que leva seu nome. Apesar de não ser verdade, Fourier tem o mérito de ter explicitado claramente a forma da série que deveria representar a função.

Para tal ideia, Fourier fez uma afirmação que mudaria a maneira de se tratar uma função, seu estudo afirmava que toda função definida num intervalo finito $(-\pi, \pi)$ por um gráfico descrito arbitrariamente pode ser decomposta numa soma de funções seno e cosseno, da forma abaixo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

em que $a_0$, $a_n$ e $b_n$ são números reais e conhecidos como os coeficientes da série de Fourier.

De acordo com Eves (2011), as séries de Fourier motivaram os métodos modernos de física-matemática que envolvem a integração de Equações Diferenciais Parciais sujeitas a condições de contorno. Nesse viés, a obra foi importante para métodos de resolução das EDP's de segunda ordem lineares e culminou na consolidação da área que, atualmente, conhecemos como Análise de Fourier.

**Augustin-Louis Cauchy**

**Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)** matemático, engenheiro e físico francês foi o primeiro analista da primeira metade do século XIX. Cauchy defendeu a forma rigorosa nos seus trabalhos, apresentando muitas definições e regras mais próximas das atuais. Sendo assim, desbravou em várias investigações da Análise real.

Particularmente, nos livros *"Cours d'analyse de l'École Polytechnique"* (Curso de análise na École Polytechnique) e *"Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal"* (Resumo

[26]Problemas físicos como: saber como o calor se propaga em uma massa sólida ou quando o calor é desigualmente distribuído em diferentes pontos da massa sólida.

das aulas sobre o Cálculo Infinitesimal) Cauchy apresentou uma fundamentação completa do Cálculo, definindo muitos conceitos intuitivos que antes eram usados sem justificativa. Sob essa perspectiva, ele dispensou as ideias de infinitésimos como um número fixo pequeno (utilizada por várias décadas pelos matemáticos), definindo como variável: "uma quantidade variável torna-se infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce indefinidamente de modo a convergir para o limite zero." (Boyer, 2012, p. 336).

Dessa maneira, muitos conceitos foram reformuladas, por exemplo:

A derivada $y' = f'(x)$ de $y = f(x)$ foi definida como o limite (caso existisse) da razão $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, quando $i$ tende a 0. Enquanto os diferenciais $dy$ e $dx$ foram definidos em termos de limites de tal modo que satisfaziam a relação usual $dy = f'(x)dx$. Sobre o conceito de função, considerava que quantidades variáveis podem ser relacionadas de modo que, dados valores para uma delas (chamada variável independente), podemos obter os valores das outras.

### Cauchy e as Equações Diferenciais

Com o surgimento das variáveis complexas, surgiram diversos teoremas garantindo existência e unicidade de soluções para Equações Diferenciais de Primeira Ordem. Isso permitiu um estudo mais aprofundado de funções, soluções de Equações Diferenciais Ordinárias, que passaram a aparecer em diversas situações.

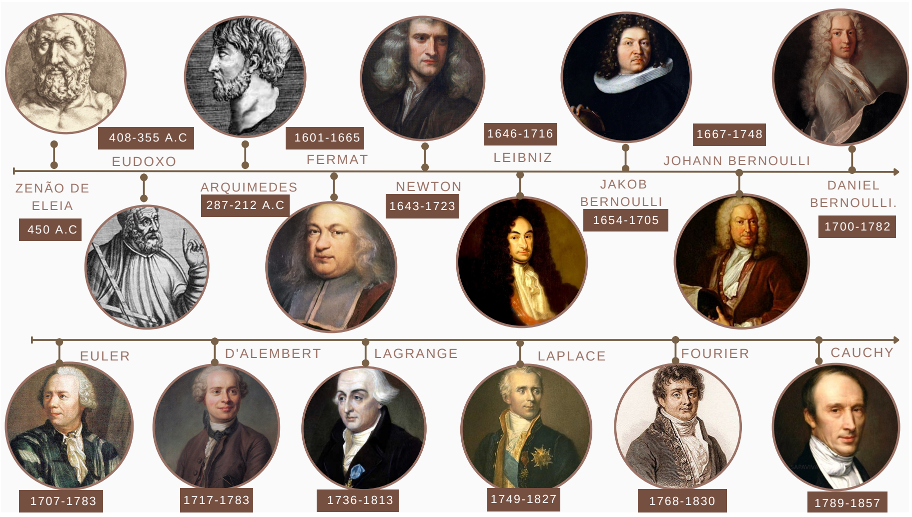
Nessa perspectiva, Cauchy estudou Equações Diferenciais na teoria de funções complexas. Sendo assim, contribuiu para as famosas Equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Estudada também pelo matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), o qual na tese de doutorado apresenta um par de equações diferenciais que garantem que uma função complexa possa ser diferenciável num certo ponto. Cauchy, incentivado por Laplace e Lagrange, também desenvolveu outro método para soluções de Equações Diferenciais Parciais, conhecida modernamente como a equação característica.

Portanto, nota-se que a construção das Equações Diferenciais é resultado de um processo histórico colaborativo, fruto do esforço de diversos matemáticos ao longo dos tempos.

Figura 18 – Destaques Históricos




**Fonte:** Autoria Própria (2024)

No próximo Capítulo, faremos uma breve introdução ao Estudo das Equações Diferenciais Parciais, produto da contribuição desses importantes matemáticos, mas antes, devemos registrar a importância de diversos outros como Gauss (1777-1855), Dirichlet (1805-1859), Lipschitz (1832-1903), Weierstrass (1815-1897), Poisson (1781-1840), Maxwell (1831-1879), Sofia Kovalevskaya (1850-1891)[27], Picard (1856-1941), Peano (1858-1932), Hilbert (1862-1943), os quais desempenharam papéis fundamentais no desenvolvimento das Equações Diferenciais Parciais (EDPs).

Atualmente, o ramo das Equações Diferenciais Parciais é uma área de extrema importância não apenas na Matemática, mas em diversas áreas através de suas aplicações, sendo estudada por matemáticos no mundo inteiro.

[27]Mulher matemática que provou o teorema Cauchy-Kovalevskaia para EDPs.

# 3 UMA BREVE INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Após nosso passeio histórico pelo surgimento e consolidação das Equações Diferenciais, neste capítulo, apresentamos conceitos introdutórios e fundamentais em Equações Diferenciais Parciais e, em especial, um método de resolução para a Equação da Onda. Para este Capítulo, seguimos o que foi feito em Iório (2016).

## 3.1 Conceitos Iniciais

Uma Equação Algébrica é uma equação em que a incógnita (o valor procurado) é um número, enquanto, numa Equação Diferencial - ED, a incógnita é uma função e, em lugar de potências numéricas, a expressão envolve as derivadas da função procurada (chamada de Solução da Equação Diferencial quando satisfaz a relação dada). No caso das Equações Diferenciais, as incógnitas são funções chamadas de variáveis dependentes e chamamos de variáveis independentes os elementos pertencentes ao conjunto domínio destas funções.

Existem duas classes importantes de Equações Diferenciais: as Equações Diferenciais Ordinárias e as Equações Diferenciais Parciais.

**Definição 3.1.** Equação diferencial ordinária (EDO) é aquela que envolve somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relaçaõ a apenas uma variável independente.

**Exemplo 3.1.** São exemplos de equações diferenciais ordinárias: as equações da tractriz da isócrona, da catenária e da braquistócrona, dada respectivamente por:

$$dx = \pm\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}dy, \qquad dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}, \qquad dy = \frac{a}{\sqrt{x^2 + 2ax}}, \qquad dy = dx\frac{x}{x-a}$$

**Definição 3.2.** Uma equação a derivadas parciais ou equação diferencial parcial (EDP) é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes $x, y, z, t...$ e derivadas parciais de uma função (variável dependente) $u = u(x, y, z, t...)$. Precisamente, uma EDP em $n$ variáveis independentes $(x_1, ..., x_n)$ é uma equação da forma

$$F\left(x_1, .., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, .., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, .., \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k \partial x_n}\right) = 0 \tag{3.1}$$

onde $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega, \Omega$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n, F$ é uma função dada e $u = u(x)$ é uma função que queremos determinar.

### Classificação de EDP's

**Definição 3.3.** A ordem de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior ordem que ocorre na equação.

Por exemplo, a ordem da equação (3.1) é $k$ se $F$, como função de alguma das derivadas de ordem $k$, é não constante.

**Definição 3.4.** Uma EDP, da forma (3.1), é dita linear se é de primeiro grau em $u$ e em todas as suas derivadas parciais. Caso contrário, a EDP é dita não linear.

Vamos restringir nosso estudo a Equações de primeira e segunda ordem. Assim, nas condições da definição acima, a forma mais geral de uma EDP Linear de primeira ou segunda ordem é do tipo

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_iD_ju + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)D_ju + c(x)u + d(x) = 0 \tag{3.2}$$

em que, para as equações de primeira ordem, $a_{ij} \equiv 0$ quaisquer que sejam $i, j \in \{1, ...n\}$ e existe $j$, $1 \leq j \leq n$, tal que $b_j \neq 0$.

No caso de duas variáveis independentes, a equação 3.2 pode ser reescrita, como

$$\begin{aligned} A(x,y)u_{xx} &+ 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} \\ &+ D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u + G(x,y) = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

**Definição 3.5.** Uma EDP linear é homogênea se o termo que não contém a variável dependente é identicamente nulo.

Por exemplo, a equação (3.3) é homomogênea se, e somente se, a função $G(x,y) \equiv 0$.

A parte da equação que contém as derivadas de maior ordem é chamada parte principal da EDP, no caso da equação (3.3), a parte principal é dada por

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy}.$$

**Exemplo 3.2.** A equação da onda é uma EDP que descreve a propagação da onda em diversos meios, sua forma mais simples pode ser expressa como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.4}$$

Ela é uma equação linear, homogênea e de segunda ordem. A variável $t > 0$ representa o tempo, $x \in \mathbb{R}$ é a variável espacial e $c > 0$ é uma constante que representa a velocidade de propagação da onda. A equação da onda em dimensões maiores é dada por

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \tag{3.5}$$

onde $u = u(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ e $\Delta$ é o lapalaciano em $\mathbb{R}^n$.

**Exemplo 3.3.** A equação de calor é uma EDP que descreve a transmissão do calor ao longo do tempo em um meio.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta u \tag{3.6}$$

Trata-se de uma equação de segunda ordem, linear e homogênea com $u = u(x,t), x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n, t > 0$ e $\Delta$ é o laplaciano em $\mathbb{R}^n$ nas variáveis espaciais $x_1, ...x_n$..

**Definição 3.6.** Chamamos de solução clássica da equação (3.3) uma função $u \in C^2(\Omega)$ que satisfaz (3.3), se $a_{ij} \neq 0$, para algum $i, j$ ou $u \in C^1(\Omega)$, quando a equação for de primeira ordem.

### Princípio de Superposição

No caso de uma EDP como ena equação (3.2), podemos associar um operador linear $L$, num espaço de funções convenientes, de forma que

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u + c(x) u$$

e, assim, a expressão em (3.2) é reescrita da forma

$$Lu = f,$$

com $f = -d$.

Como estamos interessados em soluções clássicas, então o operador linear $L$ deve ser definido no espaço $C^2(\Omega)$, para o caso de segunda ordem, e $C^1(\Omega)$, para o caso de primeira ordem de funções suficientemente suaves para garantir a existência das derivadas envolvidas.

Agora, se $L$ é um operador diferencial parcial linear de ordem $k$, ($k = 1$ ou 2, no nosso caso), cujos coeficientes estão definidos em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, e há um conjunto de funções $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ de classe $C^k$ em $\Omega$ satisfazendo a EDP linear homogênea $Lu = 0$, além de uma sequência de escalares $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty}$ tal que a série

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \, u_m(x)$$

é convergente e $k$ vezes diferenciável termo a termo em $\Omega$. Então, sob essas condições, a função $u$ satisfaz $Lu = 0$.

*Observação* 3.1. A terminologia operador (ou transformação) é usada para enfatizar que $L$ está definida entre espaços de funções, ou seja $L$ leva uma função $u$ em outra função $Lu$. O operador $L$ é um exemplo do que se chama de operador diferencial parcial, fundamental na formulação das EDPs e na busca de soluções.

**Condições de Contorno e Iniciais**

As equações diferenciais possuem, em geral, uma infinidade de soluções. Por isso, no caso em que um problema físico se reduz a uma equação diferencial, é fundamental agregar à equação certas condições complementares para termos a caracterização unívoca do processo.

Além disso, das diferenças entre EDO's e EDP's destaca-se a necessidade de informações para a prova da Unicidade de Solução. De acordo com Iório (2016) no caso das EDP's, como o espaço das variáveis independentes é multimensional, em geral definidas em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, mesmo no caso linear, a solução geral, quando existe, envolve funções arbitrárias nesse espaço, de modo que existe um grau de generalidade muito maior com relação à forma da solução.

**Definição 3.7** (Condições de Contorno)**.** Quando impomos condições sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo (ou fronteira) $\partial\Omega$ da região $\Omega$ temos um Problema de Valores de Contorno.

As EDPs apresentam mais de uma variável dependente (por exemplo, $x$ e $t$). Logo, é natural fixar uma das variáveis, por exemplo $(t = 0)$ e impor o valor da solução e de suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função das outras variáveis, por exemplo

$$(u(x,0) = f(x) \text{ e } u_t(x,0) = g(x),$$

em que $f$ e $g$ são funções dadas. Essas restrições são chamdas de condições iniciais, pois especificam o estado inicial da solução. Quando as condições iniciais incluem a solução e suas derivadas ao longo da curva, o problema correspondente é conhecido também como **Problema de Cauchy.**

**Exemplo 3.4.** O Problema da Equação da Onda em um intervalo finito, dado por

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{em} \quad (0,l) \times (0,+\infty), \\ u(0,t) = 0 = u(l,t), t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), x \in [0,l], \\ u(x,0) = g(x), x \in [0,l] \end{cases}$$

é considerado como problema misto, pois temos condições iniciais

$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), x \in [0,l]$$

e condições de contorno

$$u(0,t) = 0 = u(l,t), t \geq 0$$

Ademais, como a equação da onda é de segunda ordem em relação à variável temporal $t$, para existir solução é preciso que $f$ satisfaça a condição de compatibilidade [1].

$$f(0) = 0 = f(l).$$

*Observação* 3.2. Um problema para o qual valem existência, unicidade e dependência contínua nos dados iniciais e/ou de contorno é chamado um problema bem posto. Caso contrário, o problema é dito mal posto.

## 3.2 Sobre Equações de Primeira Ordem

Após apresentar alguns conceitos iniciais necessários, nosso intuito agora é estudar a solução de alguns tipos de EDP's. Essa Seção é dedicada às EDP lineares de primeira ordem.

**Exemplo 3.5.** (Solução Clássica para o Problema de Cauchy com duas variáveis independentes.)

Considere o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_y = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \\ u(x, p(x)) = f(x), x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

em que $p, f \in C^1(\mathbb{R})$ são funções dadas.

A condição $u(x, p(x)) = f(x)$ significa que a função $u$ é conhecida ao longo da curva $y = p(x)$.

Nesse caso, a EDP é resolvida por integração direta. Como a derivada de $u$ em relação a $y$ é identicamente nula, então $u$ é constante como função de $y$ e, portanto, depende apenas da variável $x$. Assim, a solução geral é dada por

$$u(x, y) = g(x), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.7}$$

com $g \in C^1(\mathbb{R})$ arbitrária.

Como (3.7) é válida para qualquer par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, fazendo $y = p(x)$ obtemos

$$g(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, o problema tem solução clássica dada por

$$u(x, y) = f(x), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ademais, a solução é única. De fato, suponha que existem duas soluções distintas apli-

[1] Essa condição garante que as condições impostas estejam coerentes entre si e com a equação diferencial. Sem essa condição não podemos garantir a existência de soluções suaves.

cando o mesmo procedimento, concluímos que ambas as funções são iguais, garantindo a unicidade.

**Exemplo 3.6.** (Problema sem unicidade) Vamos considerar, como antes, um Problema de Cauchy, cuja curva inicial dada é uma reta vertical, ou seja,

$$\begin{cases} u_y = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2, \\ u(x_0, y) = f(y), y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

com $x_0 \in \mathbb{R}$. Seguindo os passos do exemplo anterior, concluímos que o problema não tem solução quando $f$ não é constante e tem uma infinidade de soluções quando $f$ é constante. Dessa maneira, trata-se de um problema mal posto.

Considerando EDPs de primeira ordem, ou seja, equações da forma

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y), \tag{3.8}$$

com $a, b, c$ definidas num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Chamamos de curvas características, as curvas para os quais a EDP é uma derivada total, ou seja, ao integrar ao longo de tais curvas, resolvemos a Equação.

Como estamos considerando equações que apresentam derivadas parciais em duas variáveis, empregamos a técnica de parametrização para minimizar esse estudo. Nesse caso, usamos a parametrização para escrever a equação em função de uma única variável percorrendo um certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Essa abordagem consiste em associar cada ponto do intervalo $I$ a curva $\mathbb{R}^2$ da equação.

No caso de $\eta$ ser uma curva plana, parametrizada por $(\alpha(t), \beta(t)), t \in I$, ela será uma curva característica plana para (3.8), se

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s)] = c(\alpha(s), \beta(s)).$$

No caso do problema de Cauchy para a equação $u_y = 0$ em $\mathbb{R}^2$, observamos que ele tem uma única solução para qualquer condição inicial $f \in C^1(\mathbb{R})$ se a curva inicial for tal que, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ a reta $x = x_0$ intersecta a curva apenas em um ponto. Assim, existe uma relação entre a curva plana inicial $\gamma$ e a região $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Para garantir a existência e a unicidade da solução é necessário que a região $\Omega$ seja coberta por curvas características planas que intersectam a curva $\gamma$ em exatamente um ponto.

Se $\gamma$ é uma curva plana inicial, parametrizada por $(\sigma(t), \rho(t)), t \in I$, onde $I$ é um intervalo aberto, podemos considerar o problema da forma

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y), \\ u((\sigma(t), \rho(t)) = f(t), t \in I. \end{cases} \tag{3.9}$$

que, sob as hipóteses:

i. a curva inicial $y$ é suave, ou seja, as funções $\sigma$ e $\rho$ são continuamente diferenciáveis em $I$ e o $\sigma'(t)^2 + \rho'(t)^2 \neq 0$ qualquer que seja $t \in I$;

ii. $f \in C^1(I)$;

iii. $a, b, c \in C^1(\Omega)$ e as funções $a$ e $b$ não se anulam simultaneamente em $\Omega$, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ é um aberto contendo $\gamma$.

Podemos resolver o problema acima, encontrando as curvas características planas da equação (3.8), ou seja, as curvas ao longo das quais a EDP pode ser escrita como uma derivada total em relação à uma variável $s$, portanto, se $\eta$ é uma curva característica plana da equação, parametrixada por $(\alpha(s), \beta(s))$, então a derivada de $u$ ao longo de $\eta$ é dada por

$$\frac{d}{ds}[u(\alpha(s), \beta(s))] = \alpha'(s)u_x(\alpha(s), \beta(s)) + \beta'(s)u_y(\alpha(s), \beta(s))).$$

e, sabendo que $u$ deve satisfazer a equação ao longo de $\eta$, então

$$a(\alpha(s), \beta(s))u_x(\alpha(s), \beta(s)) + b((\alpha(s), \beta(s)))u_y(\alpha(s), \beta(s)) = c(\alpha(s), \beta(s))$$

Assim, as curvas características planas da equação (3.8) são curvas que admitem parametrização $(\alpha(s), \beta(s))$ que satisfaz

$$\begin{cases} \alpha'(s) = a((\alpha(s), \beta(s)) \\ \beta'(s) = b((\alpha(s), \beta(s)) \end{cases} \tag{3.10}$$

O sistema de EDOs (3.10) tem uma infinidade de soluções. Desse modo, é necessário agregar um par de condições iniciais para obter a unicidade da solução. Para isso, como $a, b \in C^1(\Omega)$, dado $(x_0, y_0) \in \Omega$, obtemos a única solução de 3.10, $(\alpha(s), \beta(s))$, para $s$ numa vizinhança de $s_0$ tal que

$$\alpha(s_0) = x_0, \quad \beta(s_0) = y_0. \tag{3.11}$$

A existência e unicidade de solução do problema 3.9 depende de como as curvas características intersectam a curva inicial $y$.

A seguir, apresentaremos as condições suficientes para que o problema 3.9 tenha solução única numa vizinhança da curva inicial $y$, a qual é coberta por características planas.

**Teorema 3.1.** *(Unicidade de Solução para Problemas de Cauchy com curvas suaves) Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $\gamma$ uma curva suave em $\Omega$ parametrizada* *por* $\gamma(t) = (\sigma(t), \rho(t)), t \in I, f \in C^1(I)$ *e* $a, b, c \in C^1(\Omega)$. *Suponha que* $a(x,y)^2 + b(x,y)^2 \neq 0, \forall (x,y) \in \Omega$ *e que*

$$\begin{vmatrix} a(\sigma(t), \rho(t)) & b(\sigma(t), \rho(t)) \\ \sigma'(t) & \rho'(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall t \in I.$$

*Então o problema*

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y),$$

$$u((\sigma(t), \rho(t)) + f(t), t \in I.$$

*tem única solução de classe* $C^1$ *em uma vizinhança da curva* $\gamma$ *em* $\Omega$, *dada por*

$$u(x_0, y_0) = f(t_0) + \int_0^{s_0} c(x(s,t_0), y(s,t_0))ds. \tag{3.12}$$

Do teorema apresentado anteriomente, a solução no ponto $(x_0, y_0) = (x(s,t_0), y(s,t_0))$ é obtida integrando-se a EDP ao longo da característica que passa por $(x_0, y_0)$, de $s = 0$ até $s = s_0$.

*Observação* 3.3. A teoria de EDPs lineares de primeira ordem com duas variáveis independentes é semelhante à teoria de EDOs. Nesse sentido, essa semelhança nos permitirá achar a solução geral de tais equações.

Considere o seguinte operador diferencial linear de primeira ordem

$$Lu = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u$$

e a equação

$$Lu = d(x,y) \tag{3.13}$$

em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, com $a, b, c, d \in C(\Omega)$.

Para resolver a equação (3.13), deve-se fazer uma mudança de variável $s = s(x,y), t = t(x,y)$ que a transforme em uma nova formulação onde apareça somente a derivada em relação a uma das variáveis (usamos $s$), o que nos permitirá resolver a equação como se fosse uma EDO, fixando a outra variável (escolhemos $t$).

**Exemplo 3.7.** (Encontrar a solução geral da equação)

$$xu_x + u = x^2 \tag{3.14}$$

no semiplano $x > 0$. Notamos que essa equação está na forma desejada, isto é, não aparece a derivada em relação a $y$ ($b \equiv 0$). Dessa forma, para cada $y$ fixo, a equação é uma EDO e pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial x}(xu) = x^2.$$

Integrando a equação anterior em relação a $x$, obtemos

$$xu = \frac{x^3}{3} + f(y).$$

Desse modo, a solução geral de (3.14) é dada por

$$u(x,y) = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x} f(y)$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R})$ é arbitrária.

*Observação* 3.4. Como analisado anteriormente, matemáticos como Euler, D'Alembert, Lagrange e Fourier utilizaram estes métodos clássicos para reduzir Equações Diferenciais Parciais a sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias, facilitando sua resolução.

### 3.2.1 Método das Características

**Definição 3.8.** (Curva Característica Espacial)

Uma curva característica para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y), \\ u((\sigma(t), \rho(t)) = f(t), \quad t \in I. \end{cases} \tag{3.15}$$

é uma curva suave $s \mapsto (\alpha(s), \beta(s), \xi(s)) \in \mathbb{R}^3$, a qual tem tangente no ponto $(\alpha(s), \beta(s), \xi(s))$ paralela ao vetor $(a(\alpha(s), \beta(s)), b(\alpha(s), \beta(s)), c(\alpha(s), \beta(s)))$; onde $\alpha, \beta$ e $\xi$ satisfazem

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= (a(\alpha(s), \beta(s)), \\ \beta'(s) &= (b(\alpha(s), \beta(s)), \\ \xi'(s) &= (c(\alpha(s), \beta(s)). \end{aligned} \tag{3.16}$$

**Proposição 3.1.** *No caso em que a curva inicial $\gamma$ não é tangente às curvas características planas, a superfície é gerada pela curva $\Gamma : t \in I \mapsto (\sigma(t), \rho(t), f(t))$ e pelas curvas características em $\mathbb{R}^3$ que intersectam $\Gamma$.*

***Prova:*** Dado uma característica de (3.15) que intersecta $\Gamma$ no ponto $(\sigma(t_0), \rho(t_0), f(t_0))$, podemos encontrar uma parametrização $s \mapsto (\alpha(s), \beta(s), \xi(s))$ dessa curva satisfazendo (3.16) com

$$(\alpha(0), \beta(0), \xi(0)) = (\sigma(t_0), \rho(t_0), f(t_0)), \tag{3.17}$$

logo, a característica plana que passa pelo ponto $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$ é

$$(x(s,t_0), y(s,t_0)) = (\alpha(s), \beta(s)),$$

obtida pela integração da EDP ao longo da característica que passa por $(x_0, y_0)$ de $s = 0$ até $s = s_0$. Portanto, usando a equação (3.12), obtemos

$$\begin{aligned}
u(\alpha(s), \beta(s)) &= f(t_0) + \int_0^s c(\alpha(\nu), \beta(\nu))d\nu \\
&= f(t_0) + \int_0^s \xi'(\nu)d\nu \\
&= f(t_0) + \xi(s) - \xi(0) \\
&= \xi(s).
\end{aligned}$$

o que prova que essa característica está na superfície. Por outro lado, a solução é parametrizada por $(s,t) \mapsto (x(s,t), y(s,t), v(s,t))$. Assim, para cada $t_0$ fixo, definimos

$$\begin{aligned}
\alpha(s) &= x(s,t_0), \\
\beta(s) &= y(s,t_0), \\
\xi(s) &= v(s,t_0).
\end{aligned}$$

Logo, através das respectivas equações em (3.16) é possível obter

$$\begin{aligned}
x_s(s,t) &= a(x(s,t), y(s,t)), \\
y_s(s,t) &= b(x(s,t), y(s,t)),
\end{aligned}$$

e com as condições (3.11),

$$\begin{aligned}
x(0,t) &= \sigma(t), \\
y(0,t) &= \rho(t);
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
v_s(s,t) &= c(x(s,t), y(s,t)), \\
v(0,t) &= f(t), t \in I.
\end{aligned}$$

Isto significa que $\alpha, \beta$ e $\xi$ satisfazem (3.16) e (3.17).

Logo, para cada $t_0$ fixo,a curva $s \mapsto (x(s,t_0), y(s,t_0), v(s,t_0))$ é uma característica que intersecta $\Gamma$ em $s = 0$, como queriamos mostrar. □

**Exemplo 3.8.** No caso em que $\gamma$ é uma característica plana e $\Gamma$ for uma característica, o problema terá uma infinidade de soluções e, se $\Gamma$ não for uma característica, o problema não terá solução.

*Observação* 3.5. (Propagação de Singularidades) No Problema de Cauchy (3.15) se $f$ ou $f'$ tiver uma descontinuidade em $t_0$, então $u$ (ou algumas de suas derivadas) terá descontinuidade ao longo das características que passa por $(\sigma(t_0), \rho(t_0))$. Logo, as singuralidades são propagadas ao longo das características planas.

## 3.3 Equações Semilineares de Segunda Ordem

**Definição 3.9.** Dentre as equações não lineares, aquelas cuja parte principal é linear são chamadas semilineares. A forma geral de uma EDP semilinear de segunda ordem com duas variáveis independentes é

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{x,y} + c(x,y)u_{yy} = f(x,y,u,u_x,u_y) \tag{3.18}$$

cuja parte principal é o operador

$$Lu \equiv a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{x,y} + c(x,y)u_{yy}. \tag{3.19}$$

Supondo que $a = a(x,y), b = b(x,y)$ e $c = c(x,y) \in C(\Omega)$ e não se anulam simultaneamente, definimos o discrimante da equação (3.18) como sendo a função $\delta : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$\delta(x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) = b^2 - ac.$$

*Observação* 3.6. A classificação das curvas definidas por equações do segundo grau em $x$ e $y$ é simplificada mediante uma transformação que leva as variáveis $x$ e $y$ em novas variáveis $\xi$ e $\eta$, de modo que obtemos a equação na forma canônica de uma parábola, hipérbole ou elipse.

**Definição 3.10.** O operador diferencial $L$ dado por (3.19) e a EDP (3.18) são ditos

i) parabólicos no ponto $(x,y) \in \Omega$, se $\delta(x,y) = 0$;

ii) hiperbólicos no ponto $(x,y) \in \Omega$, se $\delta(x,y) > 0$;

iii) elípticos no ponto $(x,y) \in \Omega$, se $\delta(x,y) < 0$.

O operador $L$ e a EDP (3.18) são parabólicos, hiperbólicos, elípticos em $\Omega$ se forem parabólicos, hiperbólicos, elípticos em todos os pontos de $\Omega$

**Exemplo 3.9.** Analisaremos as seguintes equações

1. (Equação de Laplace)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Identificando os coeficientes da EDP, temos $a(x,y) = 1, b(x,y) = 0$ e $c(x,y) = 1$. Substituindo os coeficientes na expressão $b^2 - ac$, obtemos $0^2 - 1 \cdot 1 = -1 < 0$. Logo, a equação é elíptica.

2. (Equação do Calor)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Identificando os coeficientes da EDP, temos $a(t,x) = -\alpha^2, b(t,x) = 0$ e $c(t,x) = 0$. Neste caso, $b^2 - ac = 0$. Logo, trata-se de uma equação parabólica.

3. (Equação da Onda)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Identificando os coeficientes da EDP, temos $a(t,x) = 1, b(t,x) = 0$ e $c(t,x) = -c^2$. Neste caso, $b^2 - ac = 0 - 1 \cdot (-c^2) = c^2$. Logo, trata-se de uma equação hiperbólica, pois $c^2 > 0$.

Baseada na definição anterior, conclui-se que, no caso de uma equação hiperbólica, temos duas famílias de soluções, apenas uma em caso das parabólicas e nenhuma curva característica real nas elípticas.

*Observação* 3.7. Caso a EDP (3.18) for de algum dos tipos elencados acima em um aberto em $\mathbb{R}^2$, podemos achar uma mudança de variável particularmente mais simples, a chamada forma canônica ou normal, para estudar a equação.

A forma normal de uma equação elíptica é

$$\upsilon_{\xi\xi} + \upsilon_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, \upsilon, \upsilon_\xi, \upsilon_\eta),$$

a de uma equação parabólica é

$$\upsilon_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, \upsilon, \upsilon_\xi, \upsilon_\eta)$$

e a equação hiperbólica tem duas formas canônicas:

$$\upsilon_{\xi\eta} = g(\xi, \eta, \upsilon, \upsilon_\xi, \upsilon_\eta)$$

ou para dimensões maiores

$$\upsilon_{\xi\xi} - \upsilon_{\eta\eta} = g(\xi, \eta, \upsilon, \upsilon_\xi, \upsilon_\eta)$$

## 3.4 Um Pequeno Destaque à Equação da Onda

Como já destacado, as Equações Diferenciais Parciais possuem grande relevância por descreverem fenômenos naturais, químicos, físicos e biológicos. Nesse sentido, diversos tipos de EDP's são estudadas cotidianamente desde o Século XVIII, dentre elas, destaca-se a Equação da Onda tanto por ter sido uma das primeiras EDP's a serem estudadas, historicamente, como vimos no Capítulo Anterior deste trabalho, quanto pela sua relevância na modelagem dos mais diversos fenômenos. A Equação da Onda é fundamental para a descrição da propagação de ondas e tema de interesse de muitos matemáticos. Para a dedução da Equação da Onda recomendamos Figueiredo (2018) ou Boyce e Diprima (2020).

Existem três tipos fundamentais de ondas: mecânicas (ondas do mar, sísmicas e sonoras), eletromagnéticas (raio X, microondas, raios UV) e materiais (partículas quânticas). Quanto à direção de propagação, as ondas são classificadas em três categorias: unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. As ondas unidimensionais propagam-se linearmente, como em cordas e molas. As bidimensionais propagam-se por superfícies, exemplificadas pelas ondas em lagos. Já as tridimensionais propagam-se em todas as direções, como a luz.

Nesta Seção, ilustramos os conceitos e resultados apresentados até aqui, neste Capítulo, através do estudo da Equação da Onda.

## 3.5 A Equação da Onda: Solução Geral

Como aplicação dos conceitos estudados até aqui, apresentamos a solução da Equação da Onda.

Para isto, vamos encontrar as curvas características associadas à equação

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{3.20}$$

onde $c > 0$ é constante.

Como a equação da onda é do tipo é hiperbólica no plano inteiro, temos duas famílias de curvas características. Sendo assim, vamos reescrever

Reescrevendo a equação (3.20) na forma

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

temos $a(t,x) = 1, b(t,x) = 0$ e $c(t,x) = -c^2$, logo a última equação pode ser expressa da forma

$$\mu^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \mu = \pm c.$$

Obtemos então

$$\frac{dx}{dt} = \pm c \Rightarrow x = \pm ct + k$$

onde k é constante arbitrária. Portanto, as características são as famílias de retas

$$x + ct = k_1 \;\; x - ct = k_2,$$

com $k_1$ e $k_2$ constantes.

Por meio das curvas características acharemos a solução geral da equação de onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}. \tag{3.21}$$

Já sabemos que as curvas características dessa equação são as retas $x \pm ct = constante$. Assim, fazendo a mudança de variável

$$\xi = x + ct$$

$$\eta = x - ct$$

$\upsilon(\xi, \eta) = u(x, y)$ satisfaz a EDP

$$\upsilon_{\xi\eta} = 0. \tag{3.22}$$

Notamos que a EDP (3.22) pode ser resolvida pela integração direta primeiro em $\eta$ e depois $\xi$ para obter

$$\upsilon_{\xi\eta} = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

Voltando às variáveis $x$ e $t$, temos que

$$u(x, y) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct) \tag{3.23}$$

com $\varphi$ e $\psi$ funções arbitrárias e $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$. Dessa maneira, a solução geral da equação da onda vai ser dada por (3.23). Para soluções particulares, teremos o valor de $\varphi$ e $\psi$, determinados pelas condições iniciais e de contorno.

**Exemplo 3.10.** Considerando o Problema Clássico da Corda infinita, temos um problema envolvendo uma equação da onda em um intervalo infinito, dado por

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{em} \quad (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = f(x), x \in [0, l], \\ u(x, 0) = g(x), x \in [0, l] \end{cases}$$

com $f$ e $g$ são funções dadas. Observamos que a curva inicial é curva $t = 0$(que não é uma curva característica) e fisicamente o problema descreve uma corda elástica de comprimento infinito, vibrando em um plano vertical. A função $u(x,t)$ representa o deslocamento vertical da corda no ponto $x$ no instante $t$ e as funções $f$ e $g$ descrevem, respectivamente, a posição e a velocidade iniciais da corda. A constante $c^2$ é a razão entre a tensão e a densidade, de modo que $c$ representa a velocidade de propagação da onda ao longo da corda.

Conforme fizemos anteriomente, devemos ter

$$\begin{gathered}\varphi(x) + \psi(x) = f(x),\\ c\varphi'(x) - c\psi'(x) = g(x)\end{gathered}$$

logo,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x)$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2c}g(x)$$

Integrando as expressões acima, em $[0,x]$, obtemos

$$\varphi(x) = \varphi(0) - \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds$$

e

$$\psi(x) = \psi(0) - \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds.$$

Da condição $\varphi(0) + \psi(0) = f(0)$ e da equação (3.23), obtemos

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

que é solução do problema dado.

# 4 CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentamos um panorama dos fatos que contribuíram para o nascimento e o desenvolvimento acerca das Equações Diferenciais. Inicialmente, a partir de conceitos do cálculo, destacando a integral, originada de problemas de área, a exemplo do método da exaustão. Por outro lado, a derivada surgiu de problemas envolvendo infinitesimais e o problema da tangente em certas curvas. Diante disso, os matemáticos Newton e Leibniz fundamentaram o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Sendo ambos físicos, perceberam que as equações que descreviam os modelos físicos tinham como base a variação e que poderiam ser modeladas por derivadas. Foi então que surgiu o estudo das Equações Diferenciais.

Em decorrência disso, muitos problemas do século XVII foram modelados por equações diferenciais, em um primeiro momento, as ordinárias associadas a problemas inversos de tangentes, com soluções mediante uma descrição geométrica de curvas que, atualmente, equivalem às equações diferenciais. Sequencialmente, os matemáticos do século XVIII exploraram fenômenos físicos de forma mais complexa e mais realista, passando a estudar as Equações Diferenciais Parciais Clássicas, dentre as quais destacamos a chamada Equação da Onda. Ao longo do trabalho, destacamos os personagens importantes que ilustram a consolidação das equações diferenciais. Por fim, estudamos conceitos básicos da área de Equações Diferenciais Parciais, compreendendo as principais diferenças do trato, em relação às EDOs, bem como: classificação de EDPs, linearidade, superposição, condições de contorno, condições iniciais, e alguns métodos de resolução para algumas Equações Clássicas, particularmente a solução geral da Equação da Onda.

Assim, essa pesquisa oferece uma visão ampla das ideias que antecederam o campo das Equações Diferenciais e consequentemente as ideias que consolidaram esta importante área, proporcionando uma base teórica sólida para a continuidade dos estudos em Equações Diferenciais Parciais.

## REFERÊNCIAS


ALBUQUERQUE, Y; RIBEIRO, S. **Tráctriz e Catenária:Modelos e métodos matemáticos**.Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.

BARON, M; BOS,H. **Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do Cálculo**. Tradução: José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. 3ª ed. Mendes Brasília: Editora da UnB, 1985.

BERNOULLI, J. **Lectures on The Integral Calculus.** Tradução: William, A. Ferguson, Jr. 21st Century Science & Technology, Spring 2004. Disponível em: https://21scitech.com/translations/Bernoulli.pdf. Acesso em: 10 set. 24.

BOS, H. J. M. **Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus.** Archive for History of Exact Sciences, v. 14, p. 1-90, 1974.

BOS, H. J. M. **Tractional Motion and the Legitimation of Transcendental Curves**. Centaurus, v. 31, p. 9-62, 1988.

BOYCE, W. E; DIPRIMA, R.C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Tradução: Valéria M. Iório. 9ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

BOYER, C. B. **The history of the calculus and its conceptual development**. New York: Dover, 1949.

BOYER, C. B; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. Tradução: Helena Castro. 3ª ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 2012.

BRADLEY, R. E; PETRILLI, S. J; SANDIFER, C. E. **L'Hôpital's Analyse des infiniments petits: an annotated translation with source material by Johann Bernoulli**. Birkhäuser, 2015.

CAPRA, F. **A teia da vida: uma nova compreenção científica dos sistemas vivos**. Tradução: Newton R. Eichemberg. São Paulo: Editora Cultrix, 2006.

DOURADO, T. A. S. **Cálculo Diferencial de Gottfried Wilhelm Leibniz**. Revista Brasileira de História da Matemática, v. 22, n. 44, p. 45-60, 2022. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/377. Acesso em: 6 jun. 24.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EULER, L. **Institutionum calculi integralis.** Vol.1 Translated: Ian Brucem, 2010. Disponível em: http://www.17centurymaths.com/contents /euler/intcalvol1/part2ch1 .pdf.Acesso em: 15 jul. 24.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

FARIA, S. R. D. **A catenária**. 34 F. Monografia ( Programa de Pós Graduação em Matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

FIGUEIREDO, D. G. de. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 5ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

GRAY, J. **Change and Variations. A History of Differential Equations to 1900**. Switzerland: Springer Nature, 2021.

GOTTFRIED, L. W. **Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tan gentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, singulare pro illis calculi genus.** Acta Eruditorum (Oct. 1684), p. 467-473, 1684.

GONZÁLEZ-VELASCO, E. A. **Journey through mathematics: creative episodes in its history**. New York: Springer, 2011.

HERRERA, M. I.**Galileo, Bernoulli, Leibniz and Newton around the brachistochrone problem.** Revista Mexicana de Física,p. 459–475, 1994.

INCE, E. L. **Ordinary Differential Equations.** Dover Publications, 528F, Longmans, Green and Company Limited, 1927.

IÓRIO, V. **EDP: Um curso de Graduação**. Coleção Matemática Universitária: Instituto de Matemática Pura e Aplicada. 4ª ed. Rio de Janeiro, 2016.

LIMA, E. **Curso de Análise** Volume 1. 15ª ed. Coleção Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

LIMA, P. R. D. O Nascimento das Equações Diferenciais. **Revista Matemática Universitária**, vol. 1, 41-54, 2024.

MATA, S. Z. **La catenaria en arquitectura. El cálculo de estructuras en la obra de Gaudí.** Ingeniería civil, 2003.

MEDEIROS, E. F. **Uma introdução ao estudo dasEquações Diferenciais Parciaisusando o modelo de Euler-Bernoulli para avibração transversal de uma barra flexível**. 2016. 57 F . TCC (graduação em Matemática - Licenciatura) - Instituto de Matemática, Estatística e Física -Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2016

MACHADO, K. D. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 1ª ed. Ponta Grossa: Toda Palavra, 2012.

PAULA, E. D. P. **Uma introdução às Equações Diferenciais Parciais: As Séries de Fourier e a Equação de Ondas**. 2019. 60 F. TCC (Graduação em Matemática - Licenciatura) - Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rei, 2019.

ROQUE, T. **em História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1ª ed. Rio de Janeiro. Editora: Zahar, 2012.

Ramos, A. S. de M.; AMARAL, L.A do et al. Análise dinâmica do modelo de viga de Euler-Bernoulli via método das diferenças finitas. **Revista Ifes Ciência**, v. 4, n. 3, p. 19, 2018.

SILVA, I. L. N. **Equações Diferenciais: aspectos históricos, teoria e aplicações em física**. 2016. 38 F. Monografia (Graduação em Matemática - Licenciatura) - Centro de Ciências Humanas e Exatas - Universidade Estadual da Paraíba, Monteiro, 2016.

SILVA, R. D. S. M. **Uma introdução sobre EDOs e suas contribuições no ensino de tópicos de Ciências Exatas no Ensino Médio**. 2018. 86 F. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto de Ciência e Tecnologia - Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos, 2018.

STEWART, I. **Dezessete equações que mudaram o mundo**.Tradução: Ian Stewart. Editora: Zahar, 2013.

STRUIK, D. J.**A Source Book in Mathematics**, 1200-1800. New Jersey: Princeton University Press, 1986.

TENT, M. B. W.**Leonhard Euler and the Bernoullis: mathematicians from Basel.** Natick, MA: A K Peters, Ltd., 2009.

TODÃO, J. **A origem africana da matemática**. 1ª ed. São Paulo: Ananse, 2024.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. Volumes 1. 11ª ed. São Paulo: Addison Wesley, 2003.

VARELA, M. I. **Aplicações das Equações Diferenciais e Integrais no estudo do Trabalho e Energia da Física**. 2022. 37 F. TCC (Graduação Plena em Matemática) - Campus Universitário de Castanhal - Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2022.

VIDAL, A. **Matemáticos e seus queridinhos**. Cálculo. São Paulo: Segmento, 2012, ed. 14, 2012.

VIANA, M; ESPINAR, J. **Equações Diferenciais: Uma abordagem de Sistemas Dinâmicos** - IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada). Disponível em: https://edo.impa.br/Livro. Acesso em: 4 maio. 24

VILHENA, M. L. M. **Uma Breve Introdução as Equações Diferenciais: Alguns Tipos de Equações Diferenciais Ordinárias**. 2014. 70 F. TCC (Graduação Plena em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Naturais - Universidade Federal do Pará, Bélem, 2014.

VIEIRA, G. F; SIQUEIRA, M. C. de. Uma história sobre atracção.**Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 24, 2024.

VOLPE, E. A. **Braquistócrona e Tautócrona: Problemas Clássicos Envolvendo a Cicloide.** 2020. 60F. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Santo André, 2020.

# APÊNDICE A - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No decorrer, especialmente do primeiro Capítulo, citamos algumas nomenclaturas atuais do Cálculo Diferencial e Integral para comparar com a forma em que esses conceitos começaram a ser estudadas. Nesse Apêndice, formalizamos tais nonemclaturas, a fim de deixar a leitura do texto o mais autossufiente possível.

Para esse Apêndice, nos baseamos em (Lima, 2019) e (Thomas, 2003).

## .1 Cálculo Diferencial e Integral

### .1.1 Limite

**Definição .1.** Seja $f$ uma função definida em um intervalo aberto contendo $a$, exceto possivelmente no próprio $a$. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando $x$ se aproxima de $a$ é o número real $L$, e escrevemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \tag{1}$$

se para cada número $\varepsilon > 0$ existir um número correspondente $\delta > 0$, tal que, para todos os valores de $x \in Dom(f)$,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

### .1.2 Derivada

O estudo da derivada está intimamente relacionado à noção de taxa de variação de uma função. Em aulas de Cálculo, isso se manifesta em dois problemas fundamentais:

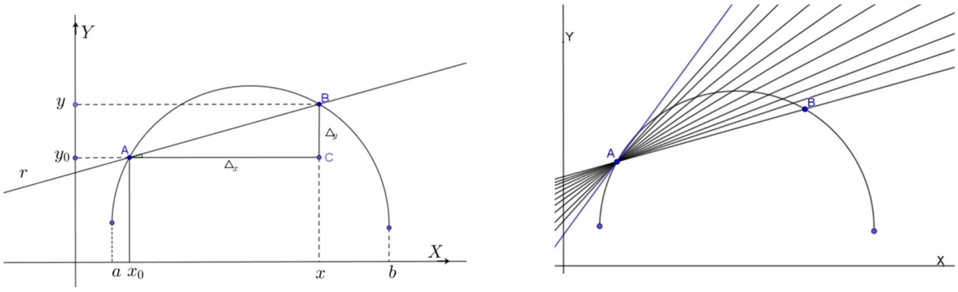
1. Encontrar a reta tangente a uma curva: consiste em encontrar a inclinação da reta que toca a curva em um ponto específico.

2. Encontrar a velocidade de um objeto: envolve determinar a taxa de mudança de posição do objeto em relação ao tempo.

#### Reta tangente

Seja $y = f(x)$ uma curva definida no intervalo $(a, b)$. Sejam $A(x_0, y_0)$ e $B(x, y)$ dois pontos distintos da curva $y = f(x)$. Considere $r$ a reta secante que passa pelos pontos $A$ e $B$, conforme a figura:

Figura 19 – Visualização geométrica da derivada




**Fonte:** Elabora pela autora (2024)

Assim, a inclinação ou coeficiente angular da reta secante $r$ é:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Quando $x$ se aproxima de $x_0$, as retas secantes tendem a tangente no ponto $A$, como ilustrado na Figura 19. Dessa forma, o coeficiente angular da reta secante tende ao coeficiente angular da reta tangente. Com isso, temos a seguinte definição.

**Definição .2. Coeficiente Angular** Dada uma curva $y=f(x)$ e um ponto $A(x_0,y_0)$ sobre ela. A inclinição da reta tangente à curva no ponto $A$ é dada por:

$$m_{x_0}=\lim_{B\to A}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{2}$$

quando o limite existe.

Fazendo $x=x_0+\Delta x$ podemos reeescrever o limite dado na igualdade na forma:

$$m_{x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{3}$$

**Definição .3. Equação da Reta Tangente** Se a função $f$ é contínua em $x_0$, então a reta tangente à curva $y=f(x)$ no ponto $A(x_0,f(x_0))$ é

$$y-f(x_0)=m(x-x_0), \tag{4}$$

Desde que o limite $m=m_{x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ exista.

**Definição .4. (Derivada de uma função)** A derivada de uma função $f$ no ponto $x_0$, denotada por $f'(x_0)$ é dada pelo limite:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{5}$$

caso o limite exista.

Assim, pelo que foi visto anteriormente, a derivada da função $f$ no ponto $x_0$ representa a inclinação da curva neste ponto. O limite $f'(x_0)$ em 5 é denominado derivada de $f$ no ponto $x_0$. Outras notações podem ser utilizadas, como

$$D_x f(x), y', f'(x), D_x y(x), \frac{dy}{dx}.$$

A seguir, listamos algumas regras de derivação, cujas demonstrações podem ser encontradas nas referências sugeridas.

1. Derivada de uma constante: $\frac{d}{dx}(k) = 0$;
2. Derivada do expoente: $\frac{d}{dx}(x^q) = qx^{q-1}$;
3. Derivada da soma e subtração: $\frac{d}{dx}[w(x) \pm z(x)] = \frac{dw}{dx} \pm \frac{dz}{dx}$;
4. Derivada da exponencial: $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$;
5. Derivada do produto: $\frac{d}{dx}[w(x) \cdot z(x)] = w(x)\frac{dz}{dx} + z(x)\frac{dw}{dx}$;
6. Derivada do quociente:$\frac{d}{dx}\left[\frac{w(x)}{z(x)}\right] = \frac{\frac{dw}{dx}z(x) - w(x)\frac{dz}{dx}}{z^2}$;

**Proposição .1.** ***(Regra da Cadeia)*** *Se $y = g(u)$ e $u = f(x)$ e as derivadas $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$ existem, então a função composta $y = g[f(x)]$ tem derivada que é dada por:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

*ou*

$$y'(x) = g'(u) \cdot f'(x).$$

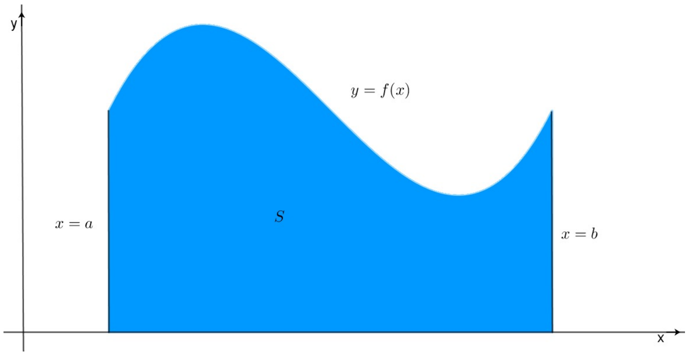
### .1.3 Integral

O conceito de integral tem sua base na resolução de problemas de áreas e volumes, inicialmente através do método da exaustão e do cálculo de áreas sob curvas.

### Ideia do Cálculo de Área

Consideremos o problema de determinar a área da região $S$ que está sob a curva $y = f(x)$ (delimitada pelo gráfico de uma função contínua não negativa $f$), a qual é limitada pelas retas verticais $x = a$, $x = b$ e pelo eixo $x$. Conforme figura abaixo

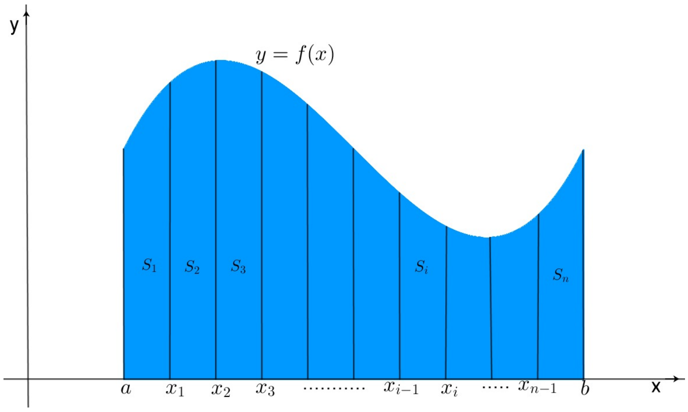
Figura 20 – $S = \{(x, y)|a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$




**Fonte:** Elaborada pela autora (2024)

Uma ideia é aproximarmos a região $S$, utilizando retângulos e, em seguida, tomarmos o limite das áreas desses retângulos à medida que aumentamos o número de retângulos [1]. Assim, fazendo uma partição do intervalo $[a, b]$ dividindo o intervalo $[a, b]$ em $n$ subintervalos, ou seja, em faixas de igual largura $[x_{i-1}, x_i]$ com $i = 1, 2, ...n$.

Figura 21 – Interpretação geométrica

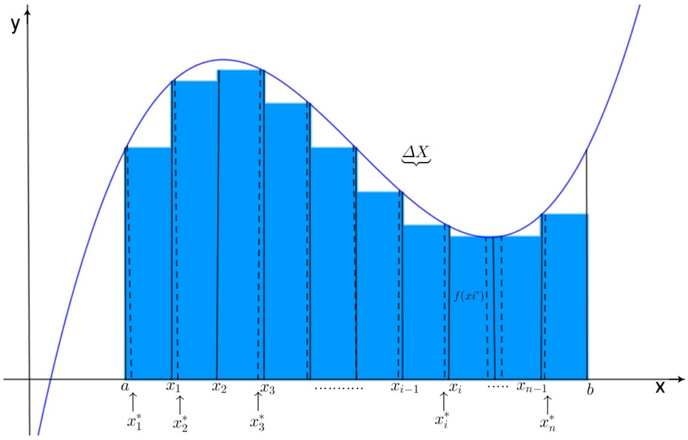



**Fonte:** Elaborada pela autora (2024)

Notamos que ao escolher qualquer ponto $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ , obtemos um retângulo de base $\Delta x_i$ que representa o comprimento do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e respectiva altura $f(x_i)$ ou $f(x_i^*)$, depedendo do ponto escolhido. O valor da área de cada retângulo é $\Delta x_i \cdot f(x_i^*)$. Fazendo isto em todos os subintervalos obtemos área aproximada da região $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$. Conforme a figura abaixo.

[1]semelhante à definição de reta tangente em que a aproximação é feita por retas secantes e então tomamos o limite dessas aproximações.

Figura 22 – Interpretação geométrica




**Fonte:** Elaborada pela autora (2024)

A área aproximada de $S$ é obtida pela soma das áreas desses retângulos, que é

$$\tilde{S} = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \ldots + f(x_n^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_n \cdot f(x_n^*). \tag{6}$$

*Observação* .1. Esta soma em 6 é chamada de soma de Riemann da função $f(x)$.

**Definição .5.** Seja $f$ uma função contínua, não negativa em $[a,b]$. A área sob a curva $y = f(x)$ de $a$ até $b$ é definida por

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot f(c_i), \tag{7}$$

em que para cada $i = 1, 2..., n, c_i$ é um ponto arbitrário do intervalo $[x_i - 1, x_i]$.

**Definição .6. Integral Definida** Seja $f$ uma função contínua definida no intervalo $[a,b]$ com $a < b$, e seja $P$ uma partição qualquer de $[a,b]$. Então a integral definida de $f$ de $a$ até $b$ é denotada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \cdot f(c_i). \tag{8}$$

Se o limite existe, dizemos que $f$ é integrável em $[a,b]$.

Propriedades da integral definida, cujas demonstrações podem ser encontradas nas refêrencias: (Lima, 2019) e (Thomas, 2003).

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $a < c < b$.

4. Se $f(x) \geq 0$ para todo $x$ em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
5. Se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x$ em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
6. Se $a > b$, então $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)$
7. Se $a = b$, então $\int_a^b f(x)dx = 0$

**Técnicas de Solução de Integrais**

Abaixo, é descrito o método empregado em algumas seções deste trabalho.

**Definição .7. Primitiva** Uma função $F$ é chamada uma primitiva da função $f$ em um intervalo $I$, se para todo $x \in I$, temos $F'(x) = f(x)$.

**Definição .8. Integral Indefinida** Se $F$ é uma primitiva da função $f$, a expressão $F(x) + C$ é chamada de integral indefinida da função $f(x)$, denotada por

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

em que $C$ sendo uma constante real.

**Método da Substituição:** Sejam $f$ e $F$ duas funções tais que $F' = f$. Suponha que $g$ é outra função derivável com $Im(g) \subset D(F)$. Podemos considerar a função composta $F \circ g$. Pela regra da cadeia, temos

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Logo, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$ E, por definição

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c. \tag{9}$$

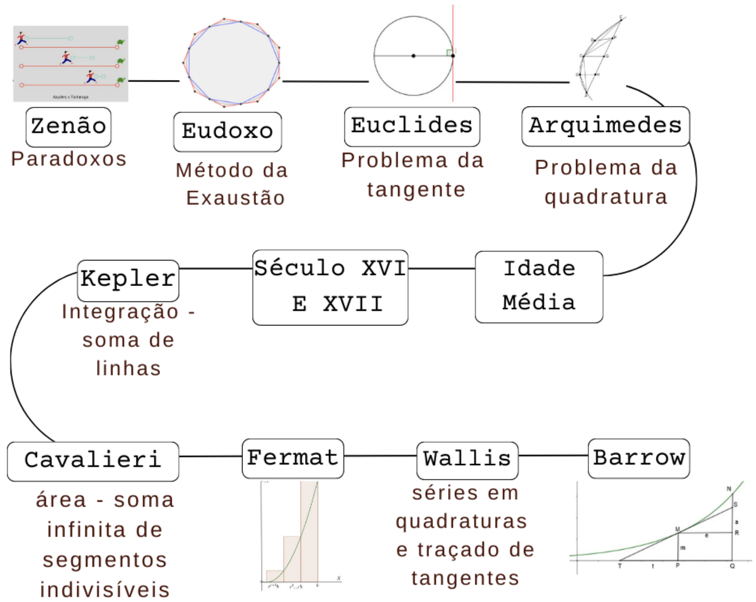
Fazendo $u = g(x), du = g'(x)dx$ e substituindo em 9:

$$\int f(u)du = F(u) + c.$$

# APÊNDICE B - MAPEAMENTO HISTÓRICO

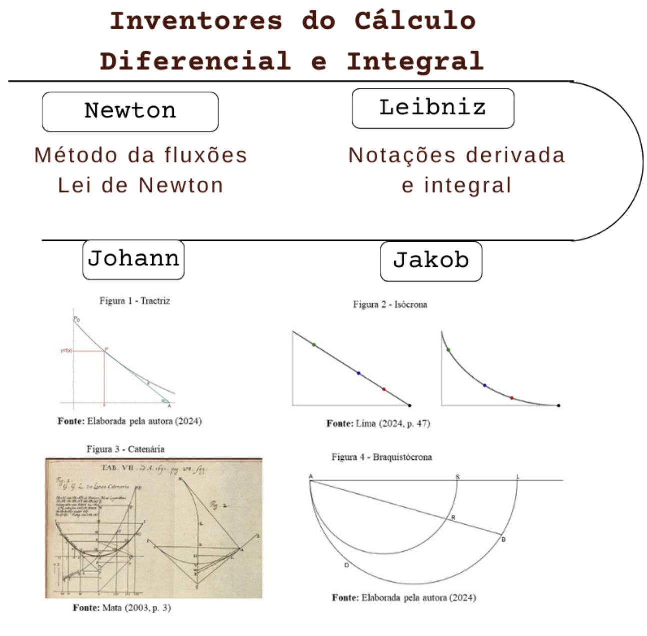
No presente Apêndice, apresentamos uma linha cronológica das ideias precursoras às Equações Diferenciais e seu desenvolvimento ao longo do tempo, visando facilitar a compreensão e visualização do avanço matemático.

Figura 23 – Os matemáticos gregos até os precursores



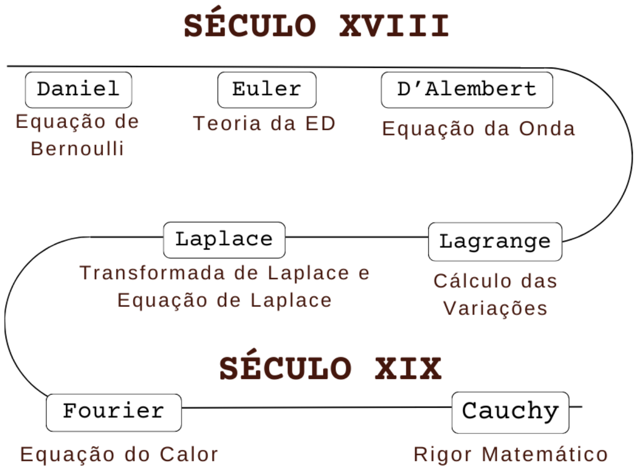

**Fonte:** Elaborada pela autora (2024)

Figura 24 – Os inventores do cálculo até a família Bernoulli




**Fonte:** Elaborada pela autora (2024)

Figura 25 – Os matemáticos do século XVIII até os matematicos do século XIX




**Fonte:** Elaborada pela autora (2024)