UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII- GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CARINA URTIGA DA SILVA

MATEMÁTICA POR TRÁS DA WEB: UMA ANÁLISE DOS SISTEMAS DE BUSCA

PATOS- PB
2025

CARINA URTIGA DA SILVA

MATEMÁTICA POR TRÁS DA WEB: UMA ANÁLISE DOS SISTEMAS DE BUSCA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura e Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Ademir Benteus Pampu

PATOS- PB
2025

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586m Silva, Carina Urtiga da.
Matemática por trás da *web* [manuscrito] : uma análise dos sistemas de busca / Carina Urtiga da Silva. - 2025.
60 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2025.

"Orientação : Prof. Dr. Ademir Benteus Pampu, Coordenação do Curso de Matemática - CCEA".

1. Matemática. 2. PageRank. 3. Álgebra linear. I. Título

21. ed. CDD 510.285

Elaborada por Kaliane Eveny Martins de Oliveira - CRB - 15/986 BSC7

CARINA URTIGA DA SILVA

MATEMÁTICA POR TRÁS DA WEB: UMA ANÁLISE DOS SISTEMAS DE BUSCA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática

Aprovada em: 04/06/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Ademir Benteus Pampu** (***.824.629-**), em **10/06/2025 19:09:49** com chave **a032957c464711f0994f06adb0a3afce**.
- **Arlandson Matheus Silva Oliveira** (***.607.674-**), em **10/06/2025 19:12:40** com chave **063bc442464811f0a6471a7cc27eb1f9**.
- **Ismael Sandro da Silva** (***.241.944-**), em **11/06/2025 15:59:46** com chave **3e257e5846f611f0add92618257239a1**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.
Tipo de Documento: Folha de Aprovação do Projeto Final
Data da Emissão: 11/06/2025
Código de Autenticação: eb97d6

Dedico este trabalho à minha família, que sempre me apoiou; aos meus ex-professores de Matemática de Pombal-PB, que sempre acreditaram em mim; e a Deus, pela força de sempre me fazer persistir, mesmo quando pensei em desistir.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela força espiritual e por me conceder sabedoria e paciência para fazer este trabalho. Agradeço a mim mesma, por continuar, mesmo nos momentos em que me sentia insegura ou quando me via incapaz de compreender algo. Sou grata à minha família, especialmente à minha mãe, Maria da Guia, ao meu irmão, Cassio, e ao meu pai, Clarivaldo, que sempre me apoiaram e me incentivaram durante a graduação, ressaltando a importância da conquista do diploma. Agradeço também às minhas amigas Lara, Dayanny, Wanny, Ingrid e Karina que sempre elevaram meu astral, tornaram a graduação mais leve e foram um apoio constante nos momentos de desabafo. Ao meu namorado, Gustavo, que acredita que sou a pessoa mais inteligente do mundo e sempre demonstrou compreensão e carinho. Agradeço ao meu amigo João Pedro que mesmo antes de eu entrar na UEPB já me incentivava e apoiava. Serei sempre grata aos meus queridos ex-professores de matemática Jesse e Mailson, que sempre acreditaram em meu potencial e foram grandes apoiadores na minha trajetória. Deixo minha gratidão e admiração. Registro, também, minha gratidão aos queridos professores da UEPB que tanto contribuíram para minha formação: Sally, Keliane, Arlandson, Ginaldo, Rômulo, Sérgio, Marcos Thadeu, Fabíola, Ismael, Ademir, Geovany, Betânia, Rayza, Paulo, entre outros com quem tive contato presencialmente ou em aulas online (na época da pandemia), verdadeiros mestres que expandiram minha mente. Em especial, agradeço ao professor Dr. Ademir Benteus, que aceitou me orientar tanto no PIBIC quanto no TCC, quero dizer que aprendi muito e amadureci muito, matematicamente falando, uma verdadeira mente brilhante me inspirou profundamente, te admiro muito. Agradeço ainda à minha turma, formada por Camila de Melo, Camila Soares, Andreia, Janete, Eduardo, Fabrício, Jefferson, Valmir, Willian, Matheus, Emmanuel e Maycon, com quem compartilhei tantos desafios e conquistas ao longo da graduação. Finalmente, sou grata aos meus amigos Ivan, Jonas e Liberacy e a todos os amigos que a Universidade me proporcionou. Não há palavras suficientes para expressar toda a minha gratidão às pessoas que me ajudaram a ser quem sou hoje. Agradeço a todos que me inspiraram a seguir em frente. Como diz a canção: “Eu não sou dono do mundo, mas tenho culpa porque sou filho do dono.” (Flávio José). E como filha do dono, tentarei, a cada dia, fazer com que a matemática se torne mais universal. Obrigada!

“Uma equação não significa nada para mim a não ser que expresse um pensamento de Deus”.
- Srinivāsa Aiyangār Rāmānujan

RESUMO

O presente trabalho surge da curiosidade de entender como funciona a matemática que não se pode ver nos sistemas de busca. Inicialmente, busca-se compreender alguns fundamentos importantes da Álgebra Linear; para isso, não se exige que o leitor tenha conhecimento aprofundado para acompanhar o que será apresentado. Após essa introdução, discute-se a aplicação dos autovalores e autovetores no contexto da diagonalização de matrizes. Em seguida, apresenta-se uma demonstração do Teorema Espectral, essencial para a compreensão do *método das potências*. Na sequência, explora-se esse método, ferramenta fundamental para a análise do algoritmo *PageRank*. Posteriormente, abordam-se os sistemas de busca, com foco no estudo do *PageRank*, algoritmo que ranqueia *sites* de acordo com sua procura, revolucionando a *internet* e possibilitando a criação do buscador *Google*. Ao final, apresentam-se exemplos de aplicação na Educação Básica, com propostas didáticas que evidenciam como o estudo de matrizes pode ser contextualizado no ensino médio, aproximando os alunos de temas contemporâneos da matemática aplicada.

Palavras-chave: matemática. PageRank. Álgebra Linear.

ABSTRACT

This work arises from the curiosity to understand how the mathematics that cannot be seen in search engine systems actually works. Initially, it aims to explore some important fundamentals of Linear Algebra; for this, the reader is not expected to have advanced knowledge in order to follow the content presented. After this introduction, the application of eigenvalues and eigenvectors is discussed in the context of matrix diagonalization. Next, a demonstration of the Spectral Theorem is presented, which is essential for understanding the power method. Subsequently, this method is explored as a fundamental tool for analyzing the PageRank algorithm. Later, search engine systems are addressed, focusing on the study of PageRank, an algorithm that ranks websites according to their popularity, revolutionizing the internet and enabling the creation of the Google search engine. Finally, examples of application in basic education are presented, with didactic proposals that demonstrate how the study of matrices can be contextualized in high school, bringing students closer to contemporary topics in applied mathematics.

Keywords: mathematics. PageRank. Linear Algebra.

SUMÁRIO

Página

1 INTRODUÇÃO 9

2 FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAR 11
2.1 Autovalor e Autovetor 11
2.1.1 Diagonalização de Matrizes 16
2.2 Teorema Espectral 19
2.2.1 Produto Interno 19
2.2.2 Ortogonalidade 21
2.3 Sequência de Matrizes 26
2.4 Convergência de Sequência de Vetores Coluna 28

3 MÉTODO DAS POTÊNCIAS 32

4 SISTEMAS DE BUSCA 37
4.1 Interpretando Sistemas de Busca por Meio de Matrizes 45
4.2 Apanhado Histórico 49
4.2.1 Representação de Grafos por Matrizes de Adjacência 50

5 DO ENSINO MÉDIO AO *GOOGLE*: UMA PONTE COM MATRIZES 53

6 CONCLUSÃO 58

REFERÊNCIAS 58

1 INTRODUÇÃO

Alan Turing afirmou certa vez: “Só conseguimos enxergar uma curta distância à frente, mas vemos muita coisa a ser feita” (TURING, 1950). Essa reflexão permanece atual, sobretudo diante do papel central que ferramentas matemáticas, especialmente da Álgebra Linear, desempenham no desenvolvimento de sistemas complexos, como os mecanismos de busca. Ainda que nem sempre consigamos visualizar ou compreender plenamente esses fundamentos, sua presença é estruturante e indispensável para o avanço tecnológico.

Compreender o funcionamento desses sistemas exige o domínio de conceitos como autovalores, autovetores e métodos iterativos, que permitem identificar a dominância de um vetor ao longo de sucessivas iterações. Um dos métodos mais relevantes nesse contexto é o método das potências, que constitui a base matemática do algoritmo *PageRank*. Esse algoritmo é responsável por determinar a relevância de páginas na *web*, atribuindo-lhes pontuações com base na estrutura de interconexões representada por matrizes.

A análise espectral dessas matrizes permite compreender o comportamento das sequências geradas durante o processo e a estrutura dos vetores resultantes. Além disso, a diagonalização de matrizes possibilita a decomposição de operadores lineares, favorecendo uma compreensão mais profunda da estabilidade dos algoritmos e do comportamento das iterações.

O Teorema Espectral garante que, para matrizes simétricas reais, existe uma base ortonormal de autovetores associada a autovalores reais, o que facilita a decomposição matricial em projeções ortogonais. Mesmo quando a matriz não é diagonalizável, o estudo da convergência de sequências geradas por matrizes iteradas continua sendo uma ferramenta poderosa para a análise de algoritmos como o *PageRank*.

O método das potências, em particular, aproveita a estrutura espectral da matriz, pois a convergência da sequência de vetores gerados depende da razão entre os autovalores dominantes. Ferramentas como o produto interno e a ortogonalidade entre vetores contribuem para assegurar a estabilidade numérica e a eficiência computacional do processo.

Este trabalho, com um olhar computacional aliado ao rigor matemático necessário, tem como objetivo investigar esses fundamentos da Álgebra Linear no contexto dos sistemas de busca, especialmente o algoritmo *PageRank*, e demonstrar sua relevância tanto na prática tecnológica quanto no ensino. Como destacou a cientista Katherine Johnson ao longo de sua trajetória, a matemática sempre esteve, e continuará estando, no centro da ciência, da engenharia e da tecnologia. Assim, compreende-se que ciência, tecnologia, computação e matemática estão intrinsecamente ligadas, e sempre existirão. Entendê-las pode não ser uma tarefa simples, mas é certamente uma tarefa essencial e revolucionária. Busca-se aqui evidenciar que, embora complexos, esses temas podem ser plenamente compreendidos

por leitores da matemática ou da Computação, reforçando a importância e a beleza da matemática aplicada.

2 FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Os conceitos abordados neste capítulo foram desenvolvidos com base, principalmente, nas obras de BOLDRINI (1980) e de COELHO e LOURENÇO (2007), que apresentam uma introdução rigorosa e acessível à Álgebra Linear, neste caso, ao que nos interessa, com ênfase em autovalores, autovetores, diagonalização de matrizes e a convergência de sequência de vetores coluna.

Para entender os sistemas de busca precisamos entender alguns conceitos fundamentais da Álgebra Linear, especialmente aqueles relacionados a autovalores, autovetores e métodos iterativos para encontrar a dominância de um vetor em sucessivas iterações. Entre essas técnicas, destaca-se o método das potências, que constitui a base matemática do algoritmo *PageRank*. A análise espectral das matrizes envolvidas nesses sistemas permite entender a convergência das sequências geradas e a estrutura dos vetores resultantes, sendo essencial para modelar a relevância de páginas na *web*.

Além disso, a diagonalização de matrizes desempenha um papel importante na decomposição de operadores lineares, permitindo uma análise mais profunda sobre a estabilidade e o comportamento de sucessivas iterações.

O Teorema Espectral garante que, para matrizes simétricas reais, existe uma base ortonormal de autovetores associada a autovalores reais, o que facilita a decomposição da matriz em termos de projeções ortogonais. Mesmo quando a matriz não é diagonalizável, o estudo de sequências de matrizes e sua convergência fornece ferramentas poderosas para entender o comportamento de algoritmos iterativos.

O método das potências, em particular, se beneficia da estrutura espectral da matriz, pois a convergência da sequência de vetores coluna gerada pelas iterações depende da razão entre os autovalores dominantes. O uso do produto interno e da ortogonalidade entre vetores auxilia na compreensão da estabilidade numérica e da rapidez de convergência do método.

A aplicação do método das potências em sistemas de busca nos mostra a relevância dos conceitos de Álgebra Linear na análise de redes e na classificação de páginas na *web*.

2.1 Autovalor e Autovetor

Os conceitos de autovalores e autovetores são fundamentais em diversas áreas da matemática, incluindo álgebra linear, análise de imagens e em problemas que envolvem dados, como os usados em algoritmos de recomendação. Eles estão relacionados ao comportamento de transformações lineares e proporcionam uma maneira de entender a estrutura de uma matriz ou operador linear.

Neste capítulo, abordaremos a definição formal de autovalores e autovetores, como encontrá-los a partir de um polinômio característico e discutiremos suas propriedades.

Definição 2.1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Um operador linear $T : V \to V$ admite um **autovalor** $\lambda \in \mathbb{K}$ se existir um vetor $v \in V$, $v \neq 0$, tal que

$$\boldsymbol{T(v) = \lambda v}.$$

Nesse caso, v é chamado de **autovetor** de T associado ao autovalor λ. Denotaremos $Aut_T(\lambda)$ o subespaço V gerado por todos os autovetores associados a λ. Veja:

Definição 2.2. O subespaço $Aut_T(\lambda) = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$ *é chamado o subespaço associado ao autovalor* λ.

Embora a definição de autovalor e autovetor seja dada em termos de um operador linear T, para realizar análise algébrica, precisamos representar essa transformação em uma base do espaço vetorial. A matriz associada a T em uma base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ nos permite descrever a ação do operador em coordenadas. A partir disso, conseguimos relacionar a busca por autovalores e autovetores a uma equação matricial.

Seja $T : V \to V$ um operador linear e suponha que exista uma base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de V tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ tenha a forma diagonal, isto é,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

teremos então que

$$T(v_i) = \lambda_i v_i.$$

Com, $\lambda_i = a_{i,i}$ e para $i = 1, ..., n$, isto é, a imagem de qualquer vetor da base $\mathcal{B}$ por T é um múltiplo deste vetor. Logo,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \lambda [v_i]_B.$$

Um resultado importante para compreender a relação entre autovalores e autovetores é a chamada equação característica, que surge ao analisarmos a ação da transformação linear em coordenadas na base, veja:

Seja $T : V \to V$ uma transformação linear em um espaço vetorial V de dimensão finita e seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base para V. A matriz de T nessa base, denotada por $[T]_{\mathcal{B}}$, satisfaz:

$$[T]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}}.$$

Note que, a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ não é o operador, mas, como vimos anteriormente, representa

a ação do operador T em relação a uma base. Por isso que:

$$[T]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}}$$

Se v for um autovetor de T associado ao autovalor λ, então:

$$T(v) = \lambda v.$$

Escrevendo em coordenadas na base $\mathcal{B}$:

$$[T(v)]_{\mathcal{B}} = [\lambda v]_{\mathcal{B}}.$$

Pela linearidade, temos:

$$[\lambda v]_{\mathcal{B}} = \lambda[v]_{\mathcal{B}}.$$

Portanto, a equação matricial correspondente é:

$$[T]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} = \lambda[v]_{\mathcal{B}}.$$

Subtraindo $\lambda[v]_B$ de ambos os lados, obtemos:

$$[T]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} - \lambda[v]_{\mathcal{B}} = 0.$$

Colocando $[v]_{\mathcal{B}}$ em evidência, utilizamos a **matriz identidade I**, pois ela representa a transformação identidade, que preserva qualquer vetor sobre o qual atua:

$$([T]_{\mathcal{B}} - \lambda I)[v]_{\mathcal{B}} = 0.$$

Para que essa equação tenha soluções não triviais (ou seja, para que existam autovetores não nulos), a matriz $[T]_{\mathcal{B}} - \lambda I$ deve ser **não invertível**, o que significa que seu determinante deve ser zero:

$$\det([T]_{\mathcal{B}} - \lambda I) = 0.$$

Essa é a **equação característica**, cuja solução fornece os autovalores λ da matriz $A = [T]_{\mathcal{B}}$.

Observação 2.1. **Sistema homogêneo e determinante:** A equação característica representa um **sistema homogêneo** da forma $(A-\lambda I)v = 0$. Esse sistema admite **soluções não triviais** (ou seja, $v \neq 0$) se, e somente se, a matriz $(A - \lambda I)$ não for invertível.

Mas, por que λ é uma raiz? Para responder isso, precisamos entender o significado de resolver a equação característica.

A equação $(A - \lambda I)v = 0$ tem solução não trivial $v \neq 0$. Como vimos antes, para que essa equação tenha soluções **não triviais**, a matriz $A-\lambda I$ precisa ser **não invertível**.

A condição para uma matriz ser não invertível é que seu determinante seja **zero**:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

A equação $\det(A - \lambda I) = 0$ **é uma equação polinomial em** λ. Se A for uma matriz $n \times n$, então $\det(A - \lambda I)$ é um polinômio de grau n na variável λ:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Essa equação polinomial tem no máximo n raízes[1].

Definição 2.3. Seja $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ um polinômio definido sobre um corpo $\mathbb{K}$, dado por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{K}$ e $a_n \neq 0$. Dizemos que um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é uma **raiz** de p se

$$p(\lambda) = 0.$$

Como a equação característica é uma equação polinomial em λ, os valores de λ que satisfazem essa equação são suas **raízes**.

Exemplo 2.1. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Veja como encontraremos os autovalores e autovetores dessa matriz. Note que, deve-se encontrar λ e v tais que $Av = \lambda v$.

Passo 1: Encontrar os Autovalores. Para isso, multiplicamos λ pela matriz identidade I, obtendo:

$$\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Para determinar os autovalores da matriz A, devemos resolver a equação característica, como vimos anteriormente:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Se

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 2 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

então, podemos reescrever (2.1), como:

[1] São no máximo n raízes reais, mas, exatamente n raízes complexas.

$$det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

agora, calculemos o determinante:

$$(1-\lambda)(3-\lambda) - (4 \cdot 2) = 0.$$

Resolvendo:

$$(1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0,$$

$$3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 8 = 0,$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau:

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -1.$$

Os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$.

Passo 2: Encontrar os Autovetores. Para isso, resolvemos:

$$(A - \lambda I)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_1 = 5$:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 1-5 & 4 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

O sistema acima implica em $x = y$. Assim, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o autovetor associado a $\lambda_1 = 5$ é:

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar o autovetor associado a $\lambda_2 = -1$ o processo é o mesmo, veja:

$$A - (-1)I = \begin{bmatrix} 1+1 & 4 \\ 2 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

O sistema acima implica em $x = -2y$. Assim, podemos escrever, o vetor x, y:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o autovetor associado a $\lambda_2 = -1$ é:

$$v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Note que, ao multiplicarmos a matriz A por um autovetor, o resultado deve ser um múltiplo desse mesmo autovetor, esse múltiplo é dado pelo respectivo autovalor, ou seja:

$$Para\ v_1 : \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 \\ 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Para\ v_2 : \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+4 \\ -4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.1.1 Diagonalização de Matrizes

A diagonalização de matrizes em Álgebra Linear permite reescrever uma matriz quadrada como o produto de três matrizes, facilitando cálculos iterativos, que se faz útil em sistemas de busca nos quais o método de potência deve contar com a presença de uma matriz diagonalizável para agilizar a aquisição do autovetor dominante (veremos no capítulo 3 de Método das Potências).

Neste tópico, exploramos as condições para a diagonalização e a sua relação com autovalores e autovetores.

Definição 2.4. Uma matriz quadrada A de ordem $n \times n$ é chamada de **diagonal** se todos os seus elementos fora da diagonal principal forem iguais a zero. Ou seja, $A = [a_{ij}]$ é diagonal se:

$$a_{ij} = 0, \quad \text{para todo } i \neq j.$$

Com, $i, j = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Em outras palavras, a matriz tem a forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.2. A matriz

$$B = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

É uma matriz diagonal, pois todos os elementos fora da diagonal principal são zero.

Mas, como podemos diagonalizar uma matriz? Qualquer matriz quadrada pode ser diagonalizável?

Definição 2.5. Uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ou $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$) é chamada de **diagonalizável** se existe uma matriz inversível P tal que

$$P^{-1}AP = D,$$

onde D é uma matriz diagonal. Nesse caso, dizemos que A é *semelhante* a uma matriz diagonal.

Isso significa que a matriz A pode ser escrita como:

$$A = PDP^{-1}$$

Chamamos de decomposição espectral da matriz A se

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}$$

Com a matriz D contendo os autovalores λ_{ii} da matriz A dispostos na diagonal principal.

Teorema 2.1. *Seja $T : V \to V$ um operador linear onde V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita e sejam $\lambda_1, ..., \lambda_t, t \geq 1$, autovalores de T, dois a dois distintos.*

(a) Se $v_1 + ... + v_t = 0$ *com* $v_i \in Aut_T(\lambda_i), i = 1, ..., t$, *então* $v_i = 0$ *para cada* i.

(b) Para cada $i = 1, ..., t$, *seja* B_i *um conjunto linearmente independente contido em* $Aut_T(\lambda_i)$. *Então* $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_t$ *é linearmente independente.*

A demonstração pode ser encontrada em COELHO, F.U.; LOURENÇO, M.L. Um Curso de Álgebra Linear. 2. ed. São Paulo: USP, 2007. p. 139.

Esse Teorema garante que, se um operador T tem n autovetores linearmente independentes, então podemos organizar essas coordenadas dos autovetores como colunas de uma matriz P, e $P^{-1}AP$ resultará em uma matriz diagonal D, cujos elementos são os autovalores correspondentes.

Teorema 2.2. ***Uma matriz*** A ***é diagonalizável*** *se, e somente se, possui um conjunto de* n *autovetores linearmente independentes.*

A demonstração pode ser encontrada em ANTON, H.; RORRES, C. Álgebra Linear com Aplicações. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. p. 306.

Exemplo 2.3. Considere a Matriz A do exemplo 2.1, encontraremos sua forma diagonal, veja:

Passo 1: Encontrar os Autovalores Nesse caso, $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$

Passo 2: Encontrar os Autovetores Nesse caso,

$$\lambda_1 = 5 \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

e

$$\lambda_2 = -1 \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz P é a matriz formada pelos autovetores, assim:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz D, é a matriz em que a diagonal são os autovalores:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ou seja, temos a matriz original e vamos decompor na multiplicação de três matrizes (decomposição espectral), matriz P (matriz que diagonaliza), matriz D (a forma diagonal da matriz original), P^{-1} (inversa da matriz P). Assim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1}.$$

2.2 Teorema Espectral

O Teorema Espectral é um dos resultados mais importantes da Álgebra Linear e da Análise Funcional, pois estabelece condições sob as quais uma matriz ou transformação linear pode ser diagonalizada por uma base ortonormal de autovetores. Esse teorema desempenha um papel fundamental em diversas áreas, incluindo a resolução de sistemas de equações diferenciais, compressão de dados, métodos numéricos e, no nosso contexto, no Método das Potências.

2.2.1 Produto Interno

Definimos o produto escalar em $\mathbb{R}^n$ como:

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Este produto interno, denominado *produto interno euclidiano* (ou canônico). A definição formal de um produto interno em um espaço vetorial real V é a seguinte, considerando V sobre $\mathbb{R}$:

Definição 2.6. Um *produto interno* em um espaço vetorial real V é uma função que associa um número real $\langle u, v \rangle$ a cada par de vetores $u, v \in V$, satisfazendo os seguintes axiomas:

1. **Simetria**: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
2. **Aditividade**: $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$.
3. **Homogeneidade**: $\langle au, v \rangle = a\langle u, v \rangle$, para todo escalar a.
4. **Positividade**: $\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$.

Um espaço vetorial real munido de um produto interno é denominado *espaço com produto interno real*.

Norma e Distância

O produto interno pode ser utilizado para definir as noções de norma e distância em espaços com produto interno, assim como é feito no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.7. Seja V um espaço com produto interno real. Definimos:

A norma (ou comprimento) de um vetor $v \in V$ como:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

A distância entre dois vetores $u, v \in V$ como:

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Um vetor de norma 1 é chamado *vetor unitário*.

Definição 2.8. (Conjunto Ortonormal) Seja V um espaço vetorial com produto interno definido. Dizemos que um conjunto de vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\} \subseteq V$ é *ortonormal* se:

1. Ortogonalidade: Para todo $i \neq j$, tem-se

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0;$$

2. Normalização: Para todo i, tem-se

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle = 1.$$

Teorema 2.3. *Se $u, v \in V$ e k for um escalar, então:*
(a) $\|v\| \geq 0$, com igualdade se, e somente se, $v = 0$.
(b) $\|kv\| = |k|\|v\|$.
(c) $d(u, v) = d(v, u)$.
(d) $d(u, v) \geq 0$, com igualdade se, e somente se, $u = v$.

A demonstração pode ser encontrada em ANTON, H.; RORRES, C. Álgebra Linear com Aplicações. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. p. 336.

Definição 2.9. Seja V um espaço de produto interno real. Denotamos o produto interno u e v por $\langle u, v \rangle$. Uma transformação linear $A : V \to V$ é auto-adjunta se $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ para todos $a, v \in V$.

Lema 2.1. *Seja V um espaço de produto interno e seja a transformação linear $A : V \to V$ auto-adjunta. Suponha que o subespaço E de V seja invariante sob A (o que significa que $A(E) \subset E$). Então, o complemento ortogonal de E,*

$$E^{\perp} = \{u \in V | \langle u, v \rangle = 0, \forall\ v \in E\}$$

Também é invariante sob A.

A prova pode ser encontrada em ACKER, F. A Note on the Spectral Theorem in the Finite-Dimensional Real Case. The American Mathematical Monthly, Vol. 121. p. 942.

Proposição 2.1. *Suponha que V é não trivial e seja $A : V \to V$ linear. Então, existe um subespaço E de V, de dimenção 1 ou 2, tal que $A(E) \subset E$.*

A prova pode ser encontrada em ACKER, F. A Note on the Spectral Theorem in the Finite-Dimensional Real Case. The American Mathematical Monthly, Vol. 121. p. 944.

Observação 2.2. Seja V um espaço vetorial não trivial, ou seja, $V \neq \{0\}$. Pela Proposição 2.1, dada uma transformação linear $A : V \to V$, existe um subespaço $E \subset V$ tal que $\dim(E) = 1$ ou 2 e que é *invariante* sob A, isto é,

$$A(E) \subset E.$$

Agora, suponha que V seja um espaço com produto interno e que a transformação linear A seja auto-adjunta. Podemos então aplicar o Lema 2.1, que afirma que, se E é um subespaço invariante por A, então seu complemento ortogonal $E^{\perp}$ também é invariante, ou seja,

$$A(E^{\perp}) \subset E^{\perp}.$$

Portanto, a partir da Proposição 2.1 e do Lema 2.1, concluímos que:

$$\text{Se } A(E) \subset E, \text{ então } A(E^{\perp}) \subset E^{\perp}.$$

Usaremos Proposição 2.1 e o Lema 2.1 dessa forma na demonstração do **Teorema Espectral 2.1**.

2.2.2 Ortogonalidade

A ortogonalidade é amplamente aplicada em diversas áreas da matemática e computação, incluindo métodos numéricos, otimização e decomposição de matrizes. No contexto do Método das Potências, a ortogonalidade dos autovetores desempenha um importante papel na convergência do algoritmo.

No contexto de espaços com produto interno, a noção de ortogonalidade generaliza a ideia de perpendicularidade presente na geometria euclidiana. A ortogonalidade de vetores desempenha um papel em diversos resultados importantes da Álgebra Linear, como o Teorema Espectral.

Definição 2.10. (Ortogonalidade). Dois vetores u, v em um espaço com produto interno são ditos ortogonais se:

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

A ortogonalidade é um conceito fundamental, pois permite a construção de bases ortonormais e simplifica a análise de transformações lineares em espaços com produto interno.

Lema 2.2. *(Teorema do Valor Intermediário). Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se $f(a) \neq f(b)$ e k é um número real tal que*

$$f(a) \leq k \leq f(b) \quad ou \quad f(a) \geq k \geq f(b),$$

então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

A demonstração pode ser encontrada em LIMA, E.L. Análise Real: Funções de Uma Variável, volume 1. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. p. 78.

Tendo como base essas informações sobre produto interno e ortogonalidade, veremos o **Teorema Espectral** e sua prova.

Teorema 2.1 (Teorema Espectral)**.** *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de um produto interno e seja $A : V \to V$ uma transformação linear auto-adjunta. Então, existe um conjunto de autovetores ortonormais de A que formam uma base ortonormal de V.*

Prova: A prova do Teorema Espectral dar-se-á por meio do princípio da indução matemática, inspirando-se na abordagem apresentada por Acker (2014) em seu artigo *A Note on the Spectral Theorem in the Finite-Dimensional Real Case* ACKER, F. (2014). Veja:

Base de Indução: Dimensões 1 e 2. Se V tem dimensão 1, ok. Pois, qualquer vetor não nulo, unitário v é um autovetor de A[2], e V tem uma base ortonormal composta por esse único vetor.

Se V tem dimensão 2, utilizamos um argumento geométrico. Definimos uma função contínua que, pelo Teorema do Valor Intermediário 2.2, garante a existência de autovetor ortogonais: para vetores e_1 e e_2 que formam uma base ortonormal, considera-se a transformação dos vetores ao longo de uma rotação no plano, definida como

$$c(\theta) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2.$$

Define-se a função $\alpha: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$

$$\alpha(\theta) = \langle Ac(\theta), c(\theta)^{\perp} \rangle, \quad \text{onde} \quad c(\theta)^{\perp} = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2.$$

Dado que:

$$c(0) = e_1, \qquad c\left(\frac{\pi}{2}\right) = e_2,$$
$$c^{\perp}(1) = e_2, \qquad c^{\perp}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e_1,$$

[2]Como $\dim(V) = 1$, todo vetor $w = Av \in V$ deve ser múltiplo de v, pois V é gerado por v. Assim, existe um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$, ou seja, v é autovetor de A.

Então:

$$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle Ae_2, -e_1\rangle = \langle e_2, A(-e_1)\rangle = \langle e_2, -Ae_1\rangle = -\langle Ae_1, e_2\rangle.$$

Como A é auto-adjunta, temos que:

$$\langle Ae_2, -e_1\rangle = \langle e_2, A(-e_1)\rangle$$

Por fim, para o parâmetro θ_0 (que será definido abaixo), temos:

$$\theta_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Pela continuidade de $\alpha(\theta)$[3] e a aplicação do Teorema do Valor Intermediário, existe um θ_0 tal que $\alpha(\theta_0) = 0$.

Isso garante que $Ac(\theta_0)$ e $c(\theta_0)^\perp$ são ortogonais, e portanto, $c(\theta_0)$ e $c(\theta_0)^\perp$ são autovetores ortogonais. Veja:

A$(c(\theta_0))$ e $c^\perp(\theta_0)$ são ortonormais, o que implica que $A(c(\theta_0))$ pertence ao complemento ortogonal de $\{c^\perp(\theta_0)\}$. Como $\dim V = 2$, temos que

$$\dim\left(\{c^\perp(\theta_0)\}^\perp\right) = 1.$$

Se esse subespaço tem dimensão 1, então seu complemento ortogonal também tem dimensão 1. Logo, $c(\theta_0) \in \{c^\perp(\theta_0)\}^\perp$.

Como esse subespaço tem dimensão 1 e pegamos um vetor não nulo que pertence a ele, esse vetor já serve como base do subespaço. Ou seja, o complemento ortogonal é exatamente o subespaço gerado por esse vetor, $c(\theta_0)$. Assim, concluímos que

$$A(c(\theta_0)) \in [c(\theta_0)]^4 \Rightarrow A(c(\theta_0)) = \lambda \cdot c(\theta_0) \tag{2.2}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Portanto, $c(\theta_0)$ é autovetor de A, associado a um autovalor λ.

Além disso, será mostrado que os vetores $c(\theta)$ e $c(\theta)^\perp$ são unitários, ou seja, têm norma

[3] A função $\alpha(\theta) = \langle Ac(\theta), c(\theta)^\perp\rangle$ é contínua porque é composta por funções contínuas: $c(\theta)$, $c(\theta)^\perp$ e o produto interno. Como o intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ é conexo e α assume sinais opostos nos extremos (como mostrado anteriormente), o Teorema do Valor Intermediário garante a existência de θ_0 tal que $\alpha(\theta_0) = 0$.

[4] A notação $A(c(\theta_0)) \in [c(\theta_0)]$ indica que o vetor $A(c(\theta_0))$ pertence ao subespaço gerado por $c(\theta_0)$, ou seja, ao span de $c(\theta_0)$.

igual a 1. De fato:

$$\begin{aligned}\|c(\theta)\|^2 &= \langle c(\theta), c(\theta)\rangle \\ &= \langle \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2, \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2\rangle \\ &= \cos^2(\theta)\langle e_1, e_1\rangle + \sin^2(\theta)\langle e_2, e_2\rangle + 2\cos(\theta)\sin(\theta)\langle e_1, e_2\rangle \\ &= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Portanto, $\|c(\theta)\| = 1$. Um argumento análogo mostra que $\|c(\theta)^\perp\| = 1$. Em particular, isso mostra que $\{c(\theta_0), c(\theta_0)^\perp\}$ é uma **base ortonormal** composta por autovetores de A, completando o caso base para $\dim V = 2$.

Passo Indutivo: Assuma que o resultado é válido para todo V, com $dim(V) = k$, $k < n$, vamos provar que vale para V com $dim(V) = n$.

Hipótese de Indução: Assume-se que o teorema vale para qualquer espaço de dimensão $k < n$. Como vimos na Observação 2.2, pela Proposição 2.1 temos que para a transforção linear auto-adjunta A no espaço V de dimensão n, existe um subespaço E de dimensão 1 ou 2 que é invariante sob A. Pelo Lema 2.1, sabemos que $E^\perp$ é invariante sob A, ou seja, $A(E) \subset E$[5]. O subespaço $E^\perp$ dimensão menor que V (especificamente, $dim(E^\perp) = dim(V) - dim(E)$)[6], $V = E \oplus E^\perp$. Pela hipótese de indução, aplicamos o Teorema Espectral a $E^\perp$, garantindo que $E^\perp$ também possui uma base ortonormal composta por autovetores de A. Como E é invariante sob A pela Proposição 2.1 existe um subespaço $E \subset V$, de dimensão 1 ou 2, tal que $A(E) \subseteq E$. Como A é auto-adjunto, podemos decompor $V = E \oplus E^\perp$. Aplicamos então a hipótese de indução a $E^\perp$, que também é invariante sob A.

Assim, como E e $E^\perp$ possuem bases ortonormais compostas por autovetores, ao combinar essas bases, obtém-se uma base ortonormal de autovetores para todo o espaço V.■

Esse procedimento pode ser visto como um análogo do Teorema 2.1, reforçando como a combinação de subespaços invariantes gera uma base ortonormal de autovetores para o espaço inteiro.

O **Teorema Espectral** estabelece uma propriedade fundamental de transformações lineares auto-adjuntas, ou seja, aquelas que satisfazem

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle, \quad \text{para todos } u, v \in V.$$

Seja $A : V \to V$ uma transformação linear auto-adjunta em um espaço vetorial real V de

[5]Como A é auto-adjunto e E é invariante por A, seu complemento ortogonal $E^\perp$ também é invariante, ou seja, $A(E^\perp) \subset E^\perp$.

[6]Para mais detalhes, consulte o livro de Flávio Coelho e Mary Lourenço, *Um Curso de Álgebra Linear*, seção "Subespaço Ortogonal", p. 191.

dimensão finita, munido de um produto interno. Então:

- Os autovetores de A associados a autovalores distintos são ortogonais.
- Existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de A.

Ou seja, podemos diagonalizar A em uma base ortonormal de autovetores, o que significa que A pode ser escrita na forma diagonal quando representada nessa base.

Garantia de diagonalização: Se A é auto-adjunta, existe uma **base ortonormal** de autovetores. Assim, qualquer vetor $x \in V$ pode ser escrito como uma combinação linear dos autovetores de A.

Proposição 2.2. *(Ortogonalidade dos autovetores) Se v_1 e v_2 são autovetores associados a autovalores diferentes ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), então $v_1 \perp v_2$, ou seja, eles são ortogonais.*

Demonstração. Sejam v_1 e v_2 autovetores de A, associados a λ_1 e λ_2, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Como A é auto-adjunto, temos:

$$\langle Av_1, v_2 \rangle = \langle v_1, Av_2 \rangle.$$

Mas, como $Av_1 = \lambda_1 v_1$ e $Av_2 = \lambda_2 v_2$, temos:

$$\langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle.$$

$$\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Subtraindo os dois lados:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2 \rangle = 0.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, conclui-se que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Portanto, $v_1 \perp v_2$. □

Exemplo 2.4. Considere a matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ela é simétrica, logo é auto-adjunta. Podemos calcular seus autovalores resolvendo:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Isso resulta nos autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$. Calculando os autovetores correspondentes, obtemos:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

Note que v_1 e v_2 são ortonormais, confirmando o Teorema Espectral. Assim, podemos escrever qualquer vetor do plano como combinação de v_1 e v_2. Além disso, a matriz A na base de autovetores, que é representada pela matriz diagonal cujos elementos são os seus autovalores, fica:

$$D = \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

Ou seja, A foi diagonalizada.

No **Método das Potências**, usamos repetidas multiplicações de um vetor x_k por A. Pelo **Teorema Espectral**, sabemos que x_0 pode ser escrito como uma combinação de autovetores ortonormais. Como o maior autovalor domina a iteração, a normalização garante que o vetor converge para o autovetor associado ao maior autovalor[7].

2.3 Sequência de Matrizes

Uma sequência de matrizes é uma coleção ordenada de matrizes indexadas por um número natural. Estudamos, nessa seção, a convergência dessas sequências quando suas entradas individuais tendem a valores fixos.

Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de matrizes de mesma ordem $r \times s$. A notação $\{A_n\}$ será usada ao longo deste texto para representar tal sequência.

Definição 2.11. Considere uma sequência de matrizes de ordem $r \times s$, denotada por $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde cada matriz é definida por:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \dots & a_{1s}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}^{(n)} & a_{r2}^{(n)} & \dots & a_{rs}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Dizemos que a sequência $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para uma matriz $A = [a_{ij}]$ de mesma ordem se os elementos das matrizes A_n tendem aos elementos correspondentes da matriz A, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} a_{ij}^{(n)} = a_{ij}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Neste caso, usamos a notação:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \quad \text{ou} \quad A_n \to A.$$

[7] As noções de sequência e convergência serão formalizadas mais adiante.

Exemplo 2.5. Seja a sequência $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$A_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 1+\frac{5}{n^2} \\ 3 & \frac{3n+1}{2n} \end{bmatrix}.$$

Então, os primeiros termos são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{4} \\ 3 & \frac{7}{4} \end{bmatrix}, \quad \dots$$

E o limite da sequência é:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Sequências de Vetores-Coluna é um caso particular importante da convergência de matrizes que ocorre quando estas são vetores-coluna. Considere uma sequência de vetores-coluna X_n da forma:

$$X_n = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ \vdots \\ x_r^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Em particular, considerando uma sequência de matrizes colunas, dizemos que a sequência $\{X_n\}$ converge para um vetor-coluna X se, e somente se, cada componente $x_i^{(n)}$ converge para x_i, ou seja:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, r.$$

Isso representa uma sequência de vetores X_n que converge para X.

A notação $X_n \to X$ significa que, para todo $\epsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$:

$$\|X_n - X\| < \epsilon.$$

Ou seja, os vetores X_n se aproximam arbitrariamente de X conforme n cresce.

A **convergência de uma sequência de vetores-coluna** pode ser expressa em termos da norma. Utilizando a **norma Euclidiana** (ou norma ℓ_2), temos:

$$\|X_n\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{r}(x_i^{(n)})^2}.$$

Essa norma mede o "tamanho"do vetor X_n. Quando analisamos a diferença entre os vetores X_n e X, temos:

$$X_n - X = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} - x_1 \\ x_2^{(n)} - x_2 \\ \vdots \\ x_r^{(n)} - x_r \end{bmatrix},$$

e, portanto, a norma da diferença é dada por:

$$\|X_n - X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{r}(x_i^{(n)} - x_i)^2}.$$

Para que $X_n \to X$, essa norma deve tender a zero:

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\| = 0.$$

Como a soma dos quadrados de vários termos é sempre maior ou igual ao quadrado de qualquer um deles isoladamente, temos:

$$\|X_n - X\| \geq |x_i^{(n)} - x_i|, \quad \text{para todo } i.$$

Logo, se $\|X_n - X\| < \epsilon$, então necessariamente $|x_i^{(n)} - x_i| < \epsilon$ para cada componente. Isso confirma que a convergência de X_n implica a convergência de cada coordenada individualmente.

Além disso, aplicando a desigualdade:

$$x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y},$$

vemos que:

$$(x_i^{(n)} - x_i)^2 \leq \sum_{j=1}^{r}(x_j^{(n)} - x_j)^2 \Rightarrow |x_i^{(n)} - x_i| \leq \|X_n - X\|.$$

Portanto, a norma Euclidiana nos dá uma forma quantitativa e prática de verificar a convergência da sequência $\{X_n\}$ para X.

2.4 Convergência de Sequência de Vetores Coluna

Em muitos problemas da Álgebra Linear, especialmente na resolução numérica de autovalores e autovetores, é comum trabalhar com sequências de vetores que evoluem ao longo de sucessivas iterações. Um caso particular de interesse é aquele em que uma matriz

A é aplicada repetidamente a um vetor inicial x_0, gerando uma sequência $\{x_k\}$ que pode convergir para um vetor associado ao denominado autovalor dominante de A.

Nesta seção, utilizamos as propriedades mais importantes do produto escalar em $\mathbb{R}^n$ como axiomas que, quando satisfeitos pelos vetores em um espaço vetorial V, permitem a extensão das noções de comprimento, distância, ângulo e perpendicularidade para espaços vetoriais arbitrários.

Definição 2.12. Se os autovalores distintos de uma matriz A forem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$, então λ_1 é denominado o autovalor dominante de A. Qualquer autovetor associado a λ_1 é chamado de autovetor dominante.

Teorema 2.4. *Seja A uma matriz simétrica $n \times n$ com um autovalor dominante λ positivo. Se x_0 for um vetor unitário de $\mathbb{R}^n$ que não é ortogonal ao autoespaço associado a λ, então a sequência de potências normalizada*

$$x_0, \quad x_1 = \frac{Ax_0}{\|Ax_0\|}, \quad x_2 = \frac{Ax_1}{\|Ax_1\|}, \quad x_3 = \frac{Ax_2}{\|Ax_2\|}, \quad \ldots, \quad x_k = \frac{Ax_{k-1}}{\|Ax_{k-1}\|}, \quad \ldots \tag{2.3}$$

converge a um autovetor dominante unitário, e a sequência

$$\langle Ax_1, x_1\rangle, \quad \langle Ax_2, x_2\rangle, \quad \langle Ax_3, x_3\rangle, \ldots \quad \langle Ax_k, x_k\rangle, \quad \ldots \tag{2.4}$$

converge ao autovalor dominante λ.

A demonstração pode ser encontrada em: ANTON, H.; RORROES, C. Álgebra Linear com Aplicações. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. p. 488.

Convergência da Sequência $\{x_k\}$

Dada uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e um vetor inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a aplicação iterativa de A gera uma sequência de vetores $\{x_k\}$, onde:

$$x_k = Ax_{k-1} = A^k x_0.$$

Através da decomposição espectral, podemos escrever x_0 como uma combinação linear dos autovetores de A:

$$x_0 = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n,$$

onde v_i é o autovetor associado ao autovalor λ_i e c_i são escalares. Aplicando a matriz A sucessivamente, temos:

$$Ax_0 = A(c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n).$$

Usando a linearidade da multiplicação matricial:

$$Ax_0 = c_1Av_1 + c_2Av_2 + \cdots + c_nAv_n.$$

Como v_i é autovetor de A, temos $Av_i = \lambda_i v_i$, para $i = 1, \ldots, n$, logo:

$$Ax_0 = c_1\lambda_1 v_1 + c_2\lambda_2 v_2 + \cdots + c_n\lambda_n v_n.$$

Aplicando A novamente:

$$A^2x_0 = A(Ax_0) = A(c_1\lambda_1 v_1 + c_2\lambda_2 v_2 + \cdots + c_n\lambda_n v_n).$$

Novamente, pela linearidade:

$$A^2x_0 = c_1A(\lambda_1 v_1) + c_2A(\lambda_2 v_2) + \cdots + c_nA(\lambda_n v_n).$$

Usando $Av_i = \lambda_i v_i$:

$$A^2x_0 = c_1\lambda_1^2 v_1 + c_2\lambda_2^2 v_2 + \cdots + c_n\lambda_n^2 v_n.$$

De maneira geral, aplicando A sucessivas vezes:

$$A^kx_0 = c_1\lambda_1^k v_1 + c_2\lambda_2^k v_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k v_n.$$

Como $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$, os termos associados aos autovalores menores decaem exponencialmente em relação ao termo dominante $\lambda_1^k v_1$, pois:

$$\left|\frac{\lambda_j^k}{\lambda_1^k}\right| = \left(\frac{|\lambda_j|}{|\lambda_1|}\right)^k \to 0 \quad \text{à medida que } k \to \infty, \text{ para todo } j \geq 2.$$

Assim, temos $A^kx_0 \approx c_1\lambda_1^k v_1$, e a sequência $\{x_k\}$ converge (em direção) ao autovetor dominante v_1:

$$x_k \approx c_1\lambda_1^k v_1.$$

Normalização da Sequência

Para garantir que a sequência $\{X_k\}$ não diverge para o infinito no Método das Potências, normalizamos o vetor a cada iteração:

$$\hat{X}_k = \frac{X_k}{\|X_k\|}.$$

Isso assegura que a sequência converge para o autovetor associado ao autovalor dominante. A seguir, entenda o processo.

Seja X_k definido por:

$$X_k = C_1\lambda_1^k v_1 + C_2\lambda_2^k v_2,\ ^{8}$$

onde λ_1 e λ_2 são autovalores com $|\lambda_2| < |\lambda_1|$.

Pelo Teorema Espectral 2.1, sabemos que, se A for uma matriz simétrica, seus autovetores formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Isso garante que qualquer vetor inicial x_0 pode ser escrito como uma combinação linear dos autovetores de A.

A norma ao quadrado de X_k é dada por:

$$\|X_k\|^2 = X_k \cdot X_k = \langle C_1\lambda_1^k v_1 + C_2\lambda_2^k v_2, C_1\lambda_1^k v_1 + C_2\lambda_2^k v_2\rangle.$$

Expandindo o produto interno, como $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_2, v_1\rangle = 0$:

$$\|X_k\|^2 = C_1^2|\lambda_1|^{2k} + C_2^2|\lambda_2|^{2k}.$$

Evidenciando $|\lambda_1|^{2k}$:

$$\|X_k\|^2 = |\lambda_1|^{2k}\left(C_1^2 + C_2^2\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^{2k}\right).$$

Como $|\lambda_2| < |\lambda_1|$, então $\left(\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}\right)^{2k} \to 0$ quando $k \to \infty$, resultando em:

$$\|X_k\|^2 \approx |\lambda_1|^{2k} C_1^2.$$

Portanto, a normalização:

$$\hat{X}_k = \frac{X_k}{\|X_k\|}$$

elimina o crescimento exponencial de $|\lambda_1|^k$, garantindo que $\hat{X}_k$ converge para a direção de v_1, o autovetor dominante.[9]

Como os autovetores de A formam uma base ortonormal pelo Teorema Espectral 2.1, sabemos que v_1 é único a menos de um fator de escala. Portanto, a normalização assegura que a sequência converge para um vetor proporcional a v_1, eliminando o crescimento exponencial causado por $|\lambda_1|^k$.

[8] Para simplificar a análise, consideramos apenas dois autovalores e seus autovetores associados.

[9] Observe que, se $|\lambda_1| > 1$, a sequência $\|X_k\| \approx |\lambda_1|^k$ cresce exponencialmente. A normalização em cada iteração é essencial para evitar divergência em norma e garantir a convergência da direção de X_k para o autovetor dominante.

3 MÉTODO DAS POTÊNCIAS

O Método das Potências é importante para entender como o algoritmo *PageRank* funciona, pois permite encontrar o autovetor associado ao autovalor dominante da matriz que representa a estrutura da *web*. Esse autovetor indica a importância de cada página, e o método, ao aplicar sucessivas multiplicações da matriz por um vetor inicial, garante a convergência para essa solução, mesmo em redes muito grandes.

Os autovalores de uma matriz quadrada podem ser encontrados, por definição, pela resolução da equação característica. Contudo, esse procedimento apresenta tantas dificuldades computacionais que quase nunca é utilizado nas aplicações.

Nesta seção, discutimos um algoritmo que pode ser usado para aproximar o autovalor de maior valor absoluto e um autovetor associado. Esse autovalor especial e seu autovetor associado são importantes porque surgem naturalmente em muitos processos iterativos.

O Teorema 2.4 apresenta um método para estimar o autovalor dominante e um autovetor normalizado correspondente de uma matriz simétrica A, desde que o autovalor dominante seja positivo. Tal método, conhecido como **Método das Potências com Mudança de Escala Euclidiana**, pode ser descrito da seguinte forma:

Passo 1: Escolha um vetor não nulo qualquer e normalize, se necessário, para obter um vetor unitário x_0.

Passo 2: Calcule Ax_0 e normalize para obter a primeira aproximação x_1 de um autovetor dominante unitário. Calcule $\lambda^{(1)} = (Ax_1)\cdot x_1$ para obter a primeira aproximação do autovalor dominante.

Passo 3: Calcule Ax_1 e normalize para obter a segunda aproximação x_2 de um autovetor dominante unitário. Calcule $\lambda^{(2)} = (Ax_2)\cdot x_2$ para obter a segunda aproximação do autovalor dominante.

Passo 4: Continuar o processo iterativo.

Se o vetor inicial x_0 for ortogonal ao autoespaço associado ao autovalor dominante, as condições do Teorema 2.4 não serão satisfeitas, e o **Método das Potências poderá falhar**. No entanto, na prática, os pequenos erros de arredondamento dos computadores costumam modificar x_0 o suficiente para eliminar qualquer ortogonalidade existente, permitindo que o método funcione corretamente. Esse é um caso curioso em que os erros numéricos acabam favorecendo a obtenção do resultado desejado!

Exemplo 3.1. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

E um vetor inicial:

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicamremos o **método das potências** para encontrar o autovalor dominante e o autovetor associado.

Primeiro, vamos calcular o valor dos autovalores e autovetores para comprar ao final. Utilizando a técnica vista no Capítulo 2.

Os autovalores λ são as raízes da equação característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Subtraindo λI da matriz A:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

Calculamos o determinante:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda) - (1 \cdot 1) = 0$$

$$6 - 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0.$$

Resolvemos a equação quadrática:

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-20}}{2}$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Aproximando numericamente:

$$\lambda_1 \approx 3.618, \quad \lambda_2 \approx 1.382.$$

Cálculo dos Autovetores

Para cada autovalor λ, resolvemos o sistema:

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Para $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$:

$$\begin{bmatrix} 2 - \frac{5+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 3 - \frac{5+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema, encontramos o autovetor correspondente.

Para $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, resolvemos o mesmo sistema e encontramos o segundo autovetor.

Os autovetores normalizados são aproximadamente:

$$v_1 \approx \begin{bmatrix} -0.5257 \\ -0.8507 \end{bmatrix}, \quad v_2 \approx \begin{bmatrix} -0.8507 \\ 0.5257 \end{bmatrix}.$$

Podemos concluir que os autovalores da matriz são:

$$\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \approx 3.618, \quad \lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \approx 1.382.$$

Os autovetores correspondentes são:

$$v_1 \approx \begin{bmatrix} -0.5257 \\ -0.8507 \end{bmatrix}, \quad v_2 \approx \begin{bmatrix} -0.8507 \\ 0.5257 \end{bmatrix}.$$

Assim, o autovalor dominate é o λ_1 e o autovetor dominante é o v_1

Agora, seguindo o passo a passo do **método das potências**:

Primeiro, iremos **normalizar** o autovetor associado ao autovalor dominante:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -0.5257 \\ -0.8507 \end{bmatrix},$$

devemos dividir o vetor pela sua *norma Euclidiana*, dada por:

$$\|v_1\| \approx \sqrt{(0.52573111)^2 + (0.85065081)^2}$$

Calculando a norma:

$$\|v_1\| \approx \sqrt{0.276393 + 0.723607} \approx \sqrt{1.000000} \approx 1.000000$$

A norma do vetor v_1 é, aproximadamente 1, indica que o vetor pode ser considerado normalizado. E esse é o autovetor dominante que iremos encontrar com o método das potências.

Agora, usaremos o método das potências começando com o vetor unitário x_0.

$$Ax_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular x_1, pelo teorema 2.4, temos:

$$x_1 = \frac{Ax_0}{\|Ax_0\|}$$

Para realizar esse cálculo, vamos normalizar:

$$Ax_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\|Ax_0\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Para garantir que ele tenha comprimento 1, de fato, devemos dividir cada componente do vetor pela sua norma 25, assim:

$$x_1 = \frac{Ax_0}{\|Ax_0\|} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{25} \\ \frac{4}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,12 \\ 0,16 \end{bmatrix}$$

x_1 é a primeira aproximação para o **autovetor dominante**.

λ^1 é a primeira aproximação para o **autovalor dominante**, segue:

$$\lambda^1 = Ax_1.x_1 = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,12 \\ 0,16 \end{bmatrix} = 0,144.$$

Faremos esse mesmo processo até nos aproximarmos do autovalor dominante e de seu autovetor associado:

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0,12 \\ 0,16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix}$$

$$Ax_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Valores aproximados dos **autovetores**

$$x_2 = \frac{Ax_1}{\|Ax_1\|} = \frac{1}{0,2}\begin{bmatrix}0,4\\0,6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{0,4}{0,2}\\\frac{0,6}{0,2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{Ax_2}{\|Ax_2\|} \approx \frac{1}{13,03840}\begin{bmatrix}7\\11\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{7}{13,03840}\\\frac{11}{13,03840}\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0,53687\\0,84366\end{bmatrix}$$

Valores aproximados dos **autovalores**

$$\lambda^2 = Ax_2.x_2 = \begin{bmatrix}7\\11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = 47, \qquad \lambda^3 = Ax_3.x_3 \approx \begin{bmatrix}1,9174\\3,06785\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,53687\\0,84366\end{bmatrix} \approx 3,61762$$

Note que, λ^3 está bem próximo de λ_1, autovalor dominante, e que x_3 está próximo de v_1, autovetor associado ao autovalor dominante. Se continuarmos os cálculos, iremos nos aproximar cada vez mais.

No Método das Potências, normalmente o vetor dominante (associado ao maior autovalor em módulo) converge para uma direção específica, e o sinal depende das condições iniciais escolhidas. Como o método envolve sucessivas multiplicações pela matriz, o vetor pode oscilar entre positivo e negativo a cada iteração, dependendo do autovalor dominante.

O autovetor pode ser positivo ou negativo, pois, por definição, se v é um autovetor associado a um autovalor λ, então qualquer múltiplo escalar não nulo de v, como $-v$, também é um autovetor correspondente.

Os cálculos podem continuar até se as entradas começarem a se repetir. Em geral, n iteradas não precisam produzir n casas decimais de precisão.

4 SISTEMAS DE BUSCA

O *PageRank* ainda está presente como um dos muitos sinais usados pelo *Google* para ranquear páginas, mas não é mais o principal fator como era nos primórdios do buscador. Com o tempo, o algoritmo evoluiu bastante e passou a considerar centenas de fatores, como: qualidade e relevância do conteúdo, tempo de carregamento da página, responsividade em dispositivos móveis, sinais de experiência do usuário, contexto e intenção da busca e muitos outros... O próprio *Google* já afirmou que o *PageRank* (pelo menos a versão original) não é mais tão determinante, e o valor público de *PageRank* (aquele que aparecia na barra do navegador) foi descontinuado em 2016 [1].

O *PageRank* ainda existe "nos bastidores", mas é apenas uma peça pequena de um quebra-cabeça muito mais complexo. Neste capítulo, vamos entender como esse algoritmo funciona.

O algoritmo calcula uma pontuação para cada *site*, levando em conta a quantidade e a relevância dos *links* recebidos de outras páginas. Esse método inclui a criação de uma **matriz de adjacência**, que representa as conexões entre os *sites*, na qual:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o } \textit{site } i \text{ contém um } \textit{link} \text{ para o } \textit{site } j \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Inicialmente, o *Google* utiliza um serviço de busca textual padrão para localizar um conjunto preliminar S_0 de páginas que contenham as **palavras-chave** da consulta. No entanto, esse conjunto pode incluir páginas irrelevantes ou deixar de fora páginas importantes. Para mitigar esse problema, o conjunto S_0 é expandido para um conjunto maior S, que inclui **todas as páginas referenciadas** por aquelas pertencentes a S_0.

A premissa é que, ao adicionar essas referências, o conjunto S será mais representativo e conterá os *sites* mais relevantes relacionados à busca. Esse processo pode ser repetido algumas vezes, refinando progressivamente os resultados até alcançar maior precisão na identificação das páginas mais significativas.

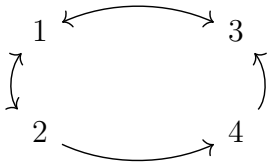
O **algoritmo PageRank** usa o **autovetor dominante** da matriz associada para determinar a importância relativa de cada *site*, refinando os resultados ao longo de várias iterações. Esse processo melhora a precisão das buscas, ajudando a identificar os *sites* mais relevantes para uma determinada consulta.

Exemplo 4.1. Veja, a seguir, um exemplo da mariz A, que é uma matriz de adjacência típica para um conjunto de busca S de quatro *sites*.

[1] Essa informação pode ser encontrada no livro de Anton & Rorres. *Álgebra Linear com Aplicações* (10ª ed.) 2012.

Figura 1 – Fonte: a autora.

Abaixo, mostramos o *grafo*[2] construído a partir da matriz de adjacência apresentada acima.



Assim, o *site* 1 faz referência aos *sites* 2 e 3, o *site* 2 faz referência aos *sites* 1 e 4, e assim por diante.

Um *site* pode exercer diferentes funções dentro de um sistema de busca. Ele pode atuar como um **centro**, quando realiza diversas referências a outras páginas, ou como uma **autoridade**, quando é frequentemente citado por outros *sites*. Em muitos casos, uma mesma página pode reunir características de ambos os papéis, sendo ao mesmo tempo uma fonte de *links* e um destino recorrente de referências.

Se A for uma matriz de adjacência de n *sites*, então as somas das entradas de colunas medirão o aspecto **autoridade** dos *sites*, e as somas das entradas de linhas medirão o aspecto **centro** dos *sites*.

Por exemplo, as somas das entradas de colunas da matriz no exemplo 4.1 são 2, 1, 2 e 1, o que significa que o *site* 1 é referido por dois outros *sites*, o *site* 2 é referido por um outro *site*, e assim por diante.

De maneira análoga, as somas das entradas de linhas da matriz no exemplo 4.1 são 2, 2, 1 e 1, de modo que o *site* 1 faz referência a dois outros *sites*, o *site* 2 tambpem faz referência a dois outros *sites*, e assim por diante.

Assim, se A for uma matriz de adjacência (pelo exemplo 4.1, é), dizemos que o vetor h_0 das somas das entradas de linhas de A é o **vetor centro inicial** de A, e o vetor a_0 das somas das entradas de colunas de A é o **vetor autoridade inicial** de A.

Podemos pensar em a_0 como o vetor das somas das entradas de linhas de $A^\intercal$[3] porque

[2]Um grafo direcionado (ou dígrafo) é uma estrutura formada por vértices conectados por arestas com direção (setas), que indicam um sentido de ligação entre os vértices. Ele é usado para representar relações assimétricas, como fluxo de tráfego, hierarquias ou *links* na *internet*.

[3]Recorde: **Matriz Transposta** de uma matriz A é obtida trocando suas linhas por colunas, sendo denotada por $A^\intercal$.

a linha i de $A^\top$ corresponde exatamente à coluna i de A. Portanto, somar as linhas de $A^\top$ é o mesmo que somar as colunas de A.

Exemplo 4.2. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As somas das colunas de A são:

- Coluna 1: $1 + 0 + 1 = 2$
- Coluna 2: $0 + 1 + 0 = 1$
- Coluna 3: $1 + 0 + 0 = 1$

Logo,

$$a_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$$

Agora considere a transposta de A:

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As somas das linhas de $A^\top$ são:

- Linha 1: $1 + 0 + 1 = 2$
- Linha 2: $0 + 1 + 0 = 1$
- Linha 3: $1 + 0 + 0 = 1$

Ou seja, as somas das linhas de $A^\top$ também resultam em

$$a_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$$

Isso acaba sendo mais conveniente para os cálculos. As entradas do vetor centro são denominadas os **pesos de centro** e as do vetor autoridade os **pesos de autoridade**.

Voltando ao exemplo 4.1, podemos escrever os vetor centro inicial e vetor autoridade inicial da seguinte maneira:

As somas das entradas de linhas de A fornecem o vetor centro inicial:

$$\mathbf{h}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{Site 1} \\ \textit{Site 2} \\ \textit{Site 3} \\ \textit{Site 4} \end{matrix}$$

Figura 2 – Fonte: a autora.

e as somas das entradas de linhas de $A^\intercal$ (que são as somas das entradas de colunas de A) fornecem o vetor centro inicial:

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textit{Site 1} \\ \textit{Site 2} \\ \textit{Site 3} \\ \textit{Site 4} \end{matrix}$$

Figura 3 – Fonte: a autora.

A contagem de referências nesse exemplo sugere que os *sites* 1 e 2 são os principais centros e que os *sites* 1 e 3 são as maiores autoridades.

Entretanto, a quantidade de referências por si só não é suficiente para explicar toda a dinâmica. Por exemplo, faz sentido imaginar que, se o *site* 1 for amplamente reconhecido como uma autoridade, então os *sites* que o citam deveriam receber uma relevância maior. Da mesma forma, se o *site* 2 for considerado um centro de referência, os *sites* por ele indicados também deveriam ganhar importância. Dessa forma, é fundamental considerar a relação mútua entre centros e autoridades no processo de busca. Assim,

$$\text{serviço de busca} \rightarrow \text{calculou } a_0 \xrightarrow{\text{usa a informação}} \text{novo vetor } h_1 \text{ e novo } a_1$$

Para h_1 e a_1 usamos as fórmulas:

$$\mathbf{h}_1 = \frac{A\mathbf{a}_0}{\|A\mathbf{a}_0\|} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_1 = \frac{A^\intercal \mathbf{h}_1}{\|A^\intercal \mathbf{h}_1\|}$$

Os numeradores nessas fórmulas fazem as ponderações e as normalizações servem para controlar o tamanho das entradas. Para entender como os numeradores efetuam as ponderações, tome o produto $A\mathbf{a}_0$ como uma combinação linear dos vetores coluna de A, com coeficientes dados por $\mathbf{a}_0$.

Utilizando o exemplo 4.1 e seu vetor a_0, obtemos:

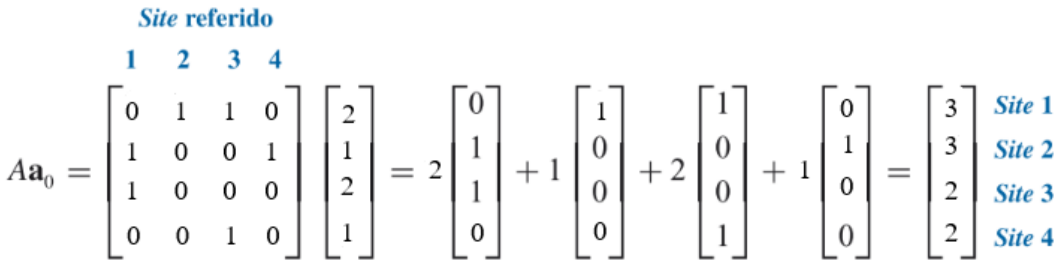


Figura 4 – Fonte: a autora.

Note que, as referências, a cada *site* referido, são ponderadas pelos valores de autoridade em a_0.

Para controlar o tamanho das entradas o serviço de busca normaliza Aa_0 para produzir o **vetor de centro atualizado**. Assim,

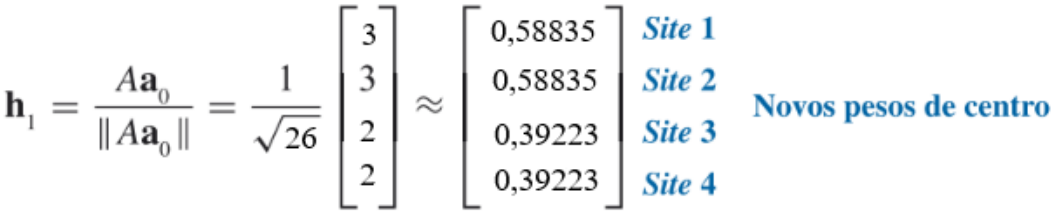


Figura 5 – Fonte: a autora.

Com h_1 pode-se encontrar/atualizar o **vetor autoridade**.

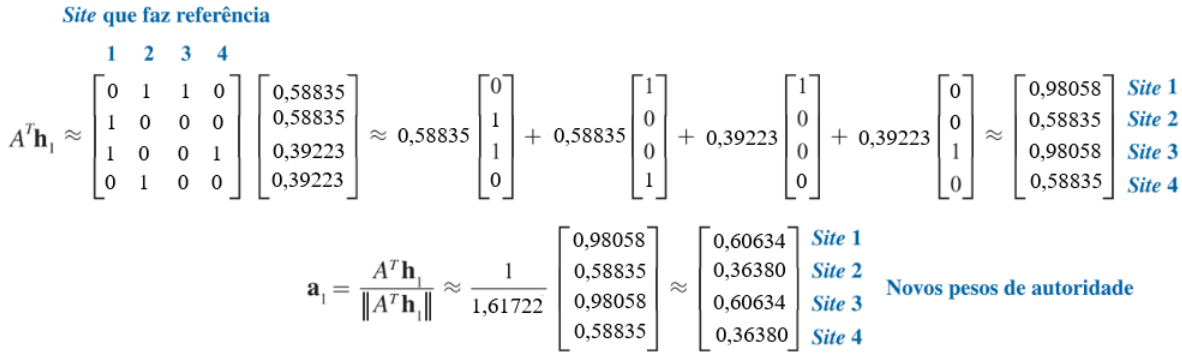


Figura 6 – Fonte: a autora.

Uma vez obtidos um vetor centro h_1 e um vetor autoridade a_1 atualizados, o serviço de busca repete o processo e calcula uma sucessão de vetores centro e autoridade gerando, assim, as sequências inter-relacionadas

$$\mathbf{h}_1 = \frac{A\mathbf{a}_0}{\|A\mathbf{a}_0\|}, \qquad \mathbf{h}_2 = \frac{A\mathbf{a}_1}{\|A\mathbf{a}_1\|}, \qquad \mathbf{h}_3 = \frac{A\mathbf{a}_2}{\|A\mathbf{a}_2\|}, \qquad \ldots \mathbf{h}_k = \frac{A\mathbf{a}_{k-1}}{\|A\mathbf{a}_{k-1}\|} \tag{5}$$

$$\mathbf{a}_0, \quad \mathbf{a}_1 = \frac{A^\top\mathbf{h}_1}{\|A^\top\mathbf{h}_1\|}, \qquad \mathbf{a}_2 = \frac{A^\top\mathbf{h}_2}{\|A^\top\mathbf{h}_2\|}, \qquad \mathbf{a}_3 = \frac{A^\top\mathbf{h}_3}{\|A^\top\mathbf{h}_3\|}, \qquad \ldots \mathbf{a}_k = \frac{A^\top\mathbf{h}_k}{\|A^\top\mathbf{h}_k\|} \tag{6}$$

Contudo, cada uma dessas sequências é uma sequência de potências disfarçada. Por exemplo, substituindo a expressão de $\mathbf{h}_k$ na expressão de $\mathbf{a}_k$, obtemos

$$\mathbf{a}_k = \frac{A^\top\mathbf{h}_k}{\|A^\top\mathbf{h}_k\|} = \frac{A^\top\left(\frac{A\mathbf{a}_{k-1}}{\|A\mathbf{a}_{k-1}\|}\right)}{\left\|A^\top\left(\frac{A\mathbf{a}_{k-1}}{\|A\mathbf{a}_{k-1}\|}\right)\right\|} = \frac{(A^\top A)\mathbf{a}_{k-1}}{\|(A^\top A)\mathbf{a}_{k-1}\|}$$

o que significa que podemos reescrever (6) como

$$\mathbf{a}_0, \quad \mathbf{a}_1 = \frac{(A^\top A)\mathbf{a}_0}{\|(A^\top A)\mathbf{a}_0\|}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{(A^\top A)\mathbf{a}_1}{\|(A^\top A)\mathbf{a}_1\|}, \quad \ldots, \quad \mathbf{a}_k = \frac{(A^\top A)\mathbf{a}_{k-1}}{\|(A^\top A)\mathbf{a}_{k-1}\|} \tag{7}$$

Analogamente, podemos reescrever (5) como

$$\mathbf{h}_1 = \frac{A\mathbf{a}_0}{\|A\mathbf{a}_0\|}, \quad \mathbf{h}_2 = \frac{(AA^\top)\mathbf{h}_1}{\|(AA^\top)\mathbf{h}_1\|}, \quad \ldots, \quad \mathbf{h}_k = \frac{(AA^\top)\mathbf{h}_{k-1}}{\|(AA^\top)\mathbf{h}_{k-1}\|} \tag{8}$$

O Teorema 2.4 garante que (7) e (8) convergem para os autovetores dominantes de $A^\top A$ e $AA^\top$, respectivamente. **As entradas desses autovetores são os pesos de autoridade e de centro** que o *Google* utiliza para ordenar os *sites* de busca em ordem de importância como autoridades e centros.

Observação 4.1. Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

mostraremos que as matrizes $A^\top A$ e $AA^\top$ possuem autovalores reais, positivos e com um autovalor dominante.

Calculando $A^\top A$:

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}.$$

Calculando $AA^\top$:

$$AA^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}.$$

Determinando os autovalores de $A^\top A$ (e, por consequência, de $AA^\top$):

$$\det(A^\top A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 10-\lambda & 14 \\ 14 & 20-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$(10-\lambda)(20-\lambda) - 14^2 = \lambda^2 - 30\lambda + 4 = 0.$$

$$\lambda = \frac{30 \pm \sqrt{884}}{2} \approx 29{,}87 \quad \text{e} \quad 0{,}13.$$

Portanto, $A^\top A$ e $AA^\top$ possuem autovalores positivos e o maior deles domina em módulo. Além disso, como ambas são matrizes simétricas reais, seus autovalores são garantidamente reais e não negativos.

Esses **pesos** são utilizados pelo algoritmo para ordenar os *sites* de acordo com sua importância. **Os *sites* com maior peso de autoridade são considerados fontes confiáveis de informação**, enquanto **os *sites* com maior peso de centro são aqueles que apontam para boas autoridades**. Assim, com o Teorema 2.4 a convergência do processo e justifica matematicamente a ordenação feita pelo sistema de busca.

Exemplo 4.3. Suponha que um serviço de busca produza 5 *sites* da *Internet* em seu conjunto de busca e que a matriz de adjacência para esses *sites* seja a seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usemos a Fórmula (7) para ordenar esses *sites* em ordem decrescente de autoridade.

Tomemos a_0 como o vetor normalizado das somas das entradas de colunas de A e então calculemos as iteradas em (7) até que os vetores autoridade pareçam estabilizados, assim,

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}54772 \\ 0 \\ 0{,}73030 \\ 0{,}182574 \\ 0{,}36515 \end{bmatrix}$$

$$(A^\top A)\mathbf{a}_0 \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0{,}54772 \\ 0 \\ 0{,}73030 \\ 0{,}182574 \\ 0{,}36515 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3{,}651484 \\ 0 \\ 4{,}381784 \\ 1{,}825744 \\ 2{,}921194 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = \frac{(A^\top A)\mathbf{a}_0}{\|(A^\top A)\mathbf{a}_0\|} \approx \frac{1}{6{,}65957}\begin{bmatrix}3{,}651484\\0\\4{,}381784\\1{,}825744\\2{,}921194\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0{,}548301\\0\\0{,}65797\\0{,}27415\\0{,}43865\end{bmatrix}$$

Basta continuar calculando dessa maneira.

$$(A^\top A)\mathbf{a}_1 \approx \begin{bmatrix}3&0&2&1&1\\0&0&0&0&0\\3&0&3&1&1\\1&0&1&1&1\\1&0&2&1&2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0{,}548301\\0\\0{,}65797\\0{,}27415\\0{,}43865\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}3{,}67364\\0\\4{,}33161\\1{,}91907\\3{,}01569\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{(A^\top A)\mathbf{a}_1}{\|(A^\top A)\mathbf{a}_1\|} \approx \frac{1}{6{,}70729}\begin{bmatrix}3{,}67364\\0\\4{,}33161\\1{,}91907\\3{,}01569\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0{,}54771\\0\\0{,}64581\\0{,}28612\\0{,}44961\end{bmatrix}$$

Com o $\mathbf{a}_2$, calculemos o $\mathbf{a}_3$

$$(A^\top A)\mathbf{a}_2 \approx \begin{bmatrix}3&0&2&1&1\\0&0&0&0&0\\3&0&3&1&1\\1&0&1&1&1\\1&0&2&1&2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0{,}54771\\0\\0{,}64581\\0{,}28612\\0{,}44961\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}3{,}67048\\0\\4{,}31629\\1{,}92925\\3{,}02467\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{(A^\top A)\mathbf{a}_2}{\|(A^\top A)\mathbf{a}_2\|} \approx \frac{1}{6{,}70537}\begin{bmatrix}3{,}67048\\0\\4{,}31629\\1{,}92925\\3{,}02467\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0{,}54739\\0\\0{,}64371\\0{,}28772\\0{,}45108\end{bmatrix}$$

Com o $\mathbf{a}_3$, calculemos o $\mathbf{a}_4$

$$(A^\top A)\mathbf{a}_3 \approx \begin{bmatrix}3&0&2&1&1\\0&0&0&0&0\\3&0&3&1&1\\1&0&1&1&1\\1&0&2&1&2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0{,}54739\\0\\0{,}64371\\0{,}28772\\0{,}45108\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}3{,}66839\\0\\4{,}3121\\1{,}9299\\3{,}02469\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_4 = \frac{(A^\top A)\mathbf{a}_3}{\|(A^\top A)\mathbf{a}_3\|} \approx \frac{1}{6{,}70487} \begin{bmatrix} 3{,}66839 \\ 0 \\ 4{,}3121 \\ 1{,}9299 \\ 3{,}02469 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}54712 \\ 0 \\ 0{,}64313 \\ 0{,}28784 \\ 0{,}45112 \end{bmatrix}$$

Com o $\mathbf{a}_4$, calculemos o $\mathbf{a}_5$

$$(A^\top A)\mathbf{a}_4 \approx \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}54712 \\ 0 \\ 0{,}64313 \\ 0{,}28784 \\ 0{,}45112 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3{,}66658 \\ 0 \\ 4{,}30971 \\ 1{,}92921 \\ 3{,}02346 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_5 = \frac{(A^\top A)\mathbf{a}_4}{\|(A^\top A)\mathbf{a}_4\|} \approx \frac{1}{6{,}70438} \begin{bmatrix} 3{,}66658 \\ 0 \\ 4{,}30971 \\ 1{,}92921 \\ 3{,}02346 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}54689 \\ 0 \\ 0{,}64282 \\ 0{,}28775 \\ 0{,}45097 \end{bmatrix}$$

As pequenas variações entre $\mathbf{a}_4$ e $\mathbf{a}_5$ sugerem que as iteradas estabilizaram perto de um **autovetor dominante** de A^TA. A partir das entradas de $\mathbf{a}_5$, concluímos que os *sites* **2 e 4** provavelmente são **irrelevantes** para a busca e que os demais *sites* deveriam ser acessados em **ordem de importância decrescente** como: *site* 3,*site* 1 e, por fim, *site* 5.

$$a_5 \cong \begin{bmatrix} 0{,}54689 \\ 0 \\ 0{,}64282 \\ 0{,}28775 \\ 0{,}45097 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textbf{Site 1} \\ \textbf{Site 2} \\ \textbf{Site 3} \\ \textbf{Site 4} \\ \textbf{Site 5} \end{matrix}$$

Figura 7 – Fonte: a autora.

4.1 Interpretando Sistemas de Busca por Meio de Matrizes

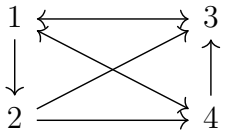
Nesta seção, apresentamos uma abordagem alternativa para interpretar sistemas de busca, utilizando uma representação por meio de grafos. Consideraremos uma rede composta por apenas quatro páginas interconectadas, onde as setas entre os nós indicam a existência de *links*, ou seja, uma seta da página A para a página B representa um *link* de A para B. Essa rede é chamada de admissível, pois todas as páginas estão conectadas a pelo menos uma outra.

Apesar de o *Google* atualmente levar em conta fatores como localização geográfica, histórico de navegação e preferências individuais do usuário, a base do seu algoritmo de ordenação permanece centrada na ideia de que páginas mais importantes devem aparecer primeiro nos resultados. Com isso em mente, utilizaremos o grafo proposto como ponto de partida para explorar como o conceito de importância pode ser representado e calculado nesse tipo de rede.

Esta seção foi inspirada no artigo "A Matemática Escondida no Google", de Almeida e Celeman (2010) ALMEIDA, M. F. L. B. P. (2010).

Segundo o algoritmo desenvolvido pelo *Google*, a importância de uma página na *web* está diretamente relacionada à importância das páginas que possuem *links* apontando para ela.

Sabemos que o *Google* trabalha com uma quantidade gigantesca de páginas, o que torna o cálculo dessas importâncias bastante complexo. Por isso, para fins didáticos, vamos considerar um exemplo simplificado, representado pelo grafo abaixo.



Nesse exemplo, temos uma rede composta por apenas quatro páginas. As setas indicam a existência de *links*: quando há uma seta de uma página para outra, significa que a primeira possui um *link* direcionado para a segunda. Essa rede é chamada de **admissível**, pois todas as páginas têm, no mínimo, um *link* para outra página.

Atualmente, o *Google* também considera outros critérios para classificar os resultados de uma busca, como a localização do usuário, seu histórico de navegação e preferências pessoais. No entanto, a base do processo de ordenação continua sendo o mesmo princípio: páginas com mais importância (segundo o algoritmo) aparecem antes nos resultados.

Retomando o grafo acima, seja x_i o índice de impotância do sie 1, com $x_i \geq 0$ para qualquer página i. **A importância de cada página** depende das páginas que apontam para ela. E a **contribuição de cada página** que aponta para i é dividida igualmente entre todas as páginas que ela faz referência. Assim:

Página 1(x_1): A página 1 recebe importância das páginas 3 (que aponta apenas para a página 1) e 4 (que aponta para as páginas 1 e 3). Assim, como x_3 (página 3), aponta para 1 página, sua contribuição é de x_3 e como x_4 (página 4) aponta para 2 páginas, sua contribuição é de $\frac{x_4}{2}$. Podemos reescrever x_1 como:

$$x_1 = x_3 + \frac{x_4}{2}$$

Vamos seguir o mesmo raciocínio para as demais páginas, veja:

Página 2(x_2): A página 2 recebe importância apenas da página 1. Assim, como x_1

(página 1) aponta para 3 outras páginas, podemos reescrever x_2 como:

$$x_2 = \frac{x_1}{3}$$

Página 3(x_3): A página 3 recebe importância das páginas 1, 2 e 4. Assim, como x_1 (página 1), aponta para 3 páginas, x_2 (página 2), aponta para 2 páginas e x_4 (página 4), também aponta para 2 páginas. Podemos reescrever x_3 como:

$$x_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{2}$$

E, por fim:

Página 4(x_4): A página 4 recebe importância das páginas 1 e 2. Assim, como x_2 (página 2), aponta para 2 páginas e x_1 (página 1), aponta para 3 páginas. Podemos reescrever x_4 como:

$$x_4 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2}$$

Dessa forma, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + \dfrac{x_4}{2} \\ x_2 = \dfrac{x_1}{3} \\ x_3 = \dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_2}{2} + \dfrac{x_4}{2} \\ x_4 = \dfrac{x_1}{3} + \dfrac{x_2}{2} \end{cases}$$

Esse sistema pode ser resolvido pelo método do escalonamento. A solução será

$$\{s(12, 4, 9, 6), s \in \mathbb{R}\}.$$

Para qualquer s positivo, observamos que $x_1 > x_3 > x_4 > x_2$. Assim o *site 1* tem importância maior que os outros *sites* e o *site 2* é o que tem a menor importância, segundo a ordenação do *Google*.

O sistema linear acima, pode ser escrito utilizando matrizes, conduzindo a um problema de autovalores e autovetores, isto é, $Av = v$, com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

A matriz $A = (a_{ij})$, chamada *Matriz de Links*, é definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se não houver } \textit{link} \text{ da página } j \text{ para a página } i; \\ \frac{1}{n_j}, & \text{se houver } \textit{link} \text{ da página } j \text{ para a página } i, \end{cases}$$

onde n_j é o número de *links* que saem do *site* j.

Isso garante que a importância de cada *site* seja distribuida proporcionalmente.

Cada entrada da matriz A indica a fração da importância transferida de uma página para outra, por exemplo, $a_{41} = \frac{1}{3}$ significa que o *site* 1 distribui $\frac{1}{3}$ de sua importância para o *site* 4.

Note que, o sistema possui infinitas soluções. Não se pode assegurar que apenas $x_1 = 12$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$ e $x_4 = 6$ são as soluções. O que importa, porém, é a ordenação das importâncias, e não seu valor absoluto. Pode-se verificar que, para valores positivos de s, a ordenação das importâncias sempre será a mesma. Então, para calcular cada importância, podemos impor a condição adicional:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1,$$

Neste exemplo teremos

$$x_1 = \frac{12}{31}, \quad x_2 = \frac{4}{31}, \quad x_3 = \frac{9}{31}, \quad x_4 = \frac{6}{31}.$$

A **Matriz dos Links** é um conceito usado principalmente no contexto de redes de páginas da *web*, como no algoritmo *PageRank* do *Google*. Ela representa como as páginas estão interligadas através de hiperligações (*links*). Cada elemento da matriz mostra a **probabilidade** de ir de uma página para outra, baseada nos *links* existentes. Ela é usada para modelar o comportamento de um "navegador aleatório"clicando em *links* de uma página para outra. Diferente da Matriz de Adjacência 4.1, os valores das entradas são números reais $\mathbb{R}$ (entre 0 e 1).

Quando uma rede é fortemente conectada, isto é, quando podemos passar de um *site* arbitrário para outro qualquer apenas clicando nos *links*, o conjunto de soluções do sistema tem dimensão 1, como no exemplo acima (a prova pode ser encontrada em BRYAN, K.; LEISE, T. (2010). Portanto, obtemos uma solução única impondo a restrição adicional de que a soma das importâncias seja igual a 1. Entretanto, quando uma *web* admissível não é fortemente conectada, as soluções do sistema $Av = v$ não são todas proporcionais entre si e, consequentemente, encontramos problemas na ordenação das importâncias.

Existe um "truque" que pode ser aplicado para qualquer *Web* admissível, bastante útil para o caso em que a *Web* não é fortemente conectada.

É possível fazer uma pequena modificação na matriz de *links* A, substituindo-a por

uma matriz M definida por $M = (1-m)A + mS$, com $0 < m < 1$ e $S_{ij} = 1/n$, para todo i e j, sendo S uma matriz $n \times n$. O valor utilizado pelo *Google* é $m = 0{,}15$. Na verdade, quanto menor o valor de m, mais peso se dá à matriz A e menos peso se dá à matriz S.

Se relacionássemos S a um grafo direcionado, esse representaria uma *Web* onde todos os *sites* teriam *links* para todos os outros, inclusive para si mesmos; assim, S seria uma matriz "neutra" que estaria fazendo uma média ponderada com a matriz A. O ponto é que o conjunto de soluções de $Mv = v$ tem dimensão 1 e, assim, é possível ranquear os *sites*. Devido à "neutralidade" de S, a mudança não afetaria a ordenação intuitiva da importância dos *sites*.

É possível apresentar no ensino médio exemplos de *Webs* fortemente conectadas, nas quais, como vimos, a ordenação pode ser feita a partir da resolução de sistemas lineares homogêneos. A atualidade do tema e as questões que ele propicia estimulam o desenvolvimento do espírito investigativo do estudante. Após a familiarização com os conteúdos envolvidos, alguns *softwares*, como *Symbolab* ou *Wolfram alpha*, podem ser apresentados aos alunos para facilitar os cálculos mais trabalhosos. Na próxima seção, teremos alguns exemplos comentados. Fazendo uma ponte entre fazer os sistemas de busca e o *PageRank* no contexto didático.

4.2 Apanhado Histórico

Antes do popular *Google*, lançado em 1998, já existiam mecanismos de busca que ajudaram a organizar a *Internet* nos anos 1990. Entre eles, destacam-se o AltaVista, criado em 1994, e o Cadê?, lançado no Brasil em 1995. Hoje o Cadê? é conhecido como **Yahoo!** Ambos alcançaram grande sucesso no período, sendo que o AltaVista, por exemplo, competia diretamente com o Cadê? e se destacou pelo uso de tecnologias inovadoras para a época, algumas das quais serviriam posteriormente de inspiração para o futuro *Google*.

Os mecanismos de busca funcionam como gigantescos guias telefônicos da *Internet*, organizando informações para facilitar a localização de *sites* e dados específicos pelos usuários. Inicialmente, esses serviços analisavam apenas palavras-chave presentes nos títulos e conteúdos das páginas. Com o avanço tecnológico, surgiram algoritmos mais sofisticados que passaram a considerar também a estrutura de *links* entre *sites*, utilizando princípios matemáticos como o **Método das Potências** 3 para determinar a importância das páginas.

O *Google*, hoje o motor de busca mais utilizado no mundo, começou a ser desenvolvido em 1996 por Larry Page e Sergey Brin, enquanto ambos eram estudantes de pós-graduação na Universidade de Stanford, nos Estados Unidos. Inicialmente, eles criaram o *BackRub*, um buscador que utilizava uma tecnologia inovadora chamada *PageRank*, como vimos anteriormente, esse sistema mede a relevância de páginas na *web* considerando tanto o número de *links* recebidos quanto a importância dos *sites* de origem, resultando em um

mecanismo de classificação mais eficiente.

O nome *Google* é uma variação do termo inglês *googol*, que representa o número 10^{100} (ou seja, o número 1 seguido de 100 zeros). Esse termo foi criado em 1938 pelo matemático norte-americano Edward Kasner (1875-1955), que, segundo relatos, pediu a seu sobrinho de oito anos que inventasse um nome para um número muito grande, e a criança sugeriu "googol". Posteriormente, Kasner também definiu o *googolplex* como sendo 10^{googol}, ou seja, 1 seguido de googol zeros.

O algoritmo *PageRank*, não apenas contava a quantidade de *links* recebidos por uma página, mas também avaliava o peso e a relevância de cada *link*, considerando a importância dos *sites* de origem. Para isso, o sistema atribuía uma pontuação a cada página, armazenada em uma grande matriz, e utilizava um valor especial derivado dessa matriz, o chamado **autovalor dominante**, para ordenar os resultados das buscas. Essa solução matemática, ficou famosa e foi avaliada na época em cerca de 25 bilhões de dólares, ela foi fundamental para transformar o *Google* em referência mundial em busca *online*.

A forma como conhecemos o *Google* atualmente começou a se consolidar em 1997, quando Page e Brin registraram o domínio *google.com*, ainda vinculado à Universidade de Stanford. Em 1998, com apoio financeiro de amigos e familiares, eles fundaram oficialmente a empresa *Google Inc.* O que começou como uma pequena *startup* de garagem avaliada em 750 mil dólares, em poucos anos tornou-se uma das companhias mais valiosas do mundo, valendo bilhões de dólares.

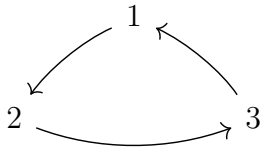
4.2.1 Representação de Grafos por Matrizes de Adjacência

Nesta seção, vamos interpretar algumas Matrizes de Adjacência utilizando grafos, para compreendermos melhor o seu funcionamento.

Exemplo 4.4. Grafo com 3 vértices (ciclo simples)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Grafo associado:

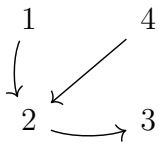


Assim, o *site* 1 faz referência ao *site* 2, o *site* 2 faz referência ao *site* 3 e o *site* 3 faz referência ao *site* 1.

Exemplo 4.5. Grafo com 4 vértices (com um vértice isolado)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Grafo associado:



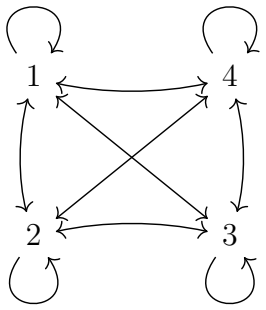
Assim, o *site* 1 faz referência ao *site* 2, o *site* 2 faz referência ao *site* 3 o *site* 3 não faz referência a nenhum outro *site* e o *site* 4 faz referência ao *site* 2.

Essa estrutura tem caminhos quebrados, ou seja, a rede não é fortemente conectada.

Exemplo 4.6. Grafo com 4 vértices (totalmente conectado)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Grafo associado:

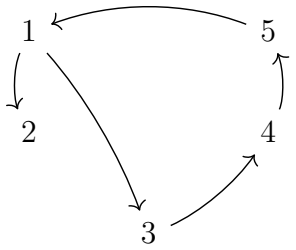


Cada vértice tem um *link* para todos os outros vértices, inclusive para si mesmo. Ou seja, *site* 1 faz referência aos *sites* 2, 3, 4 e a ele mesmo, o mesmo vale para os outros *sites*.

Exemplo 4.7. Grafo com 5 vértices (rede não fortemente conectada)

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Grafo associado:

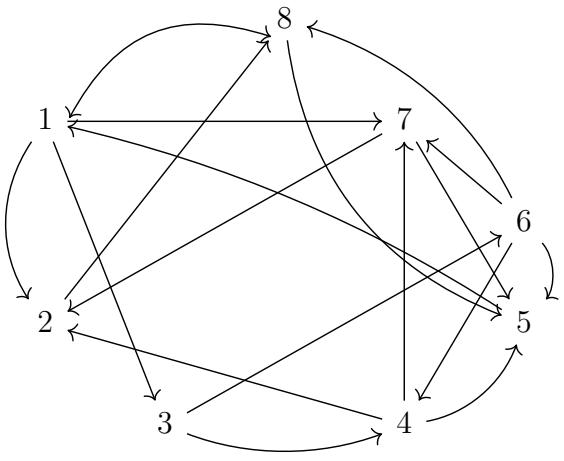


Assim, o *site* 1 faz referência aos *sites* 2 e 3, o *site* 2 não faz referência a nenhum outro *site* o *site* 3 faz referência ao *site* 4 o *site* 4 faz referência ao *site* 5 e o *site* 5 faz referência ao *site* 1.

Exemplo 4.8. Matriz de Adjacência com 8 *sites*

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Grafo associado:



As somas das entradas das colunas da matriz de adjacência apresentada são: 2, 3, 1, 2, 3, 1, 4, 3. Isso significa que o *site* 1 é referenciado por dois outros *sites*, o *site* 2 é referenciado por 3, o *site* 3 por apenas um, e assim por diante. Notadamente, o *site* 7 apresenta o maior número de referências recebidas, com quatro *links* apontando para ele, o que indica um alto grau de autoridade.

5 DO ENSINO MÉDIO AO *GOOGLE*: UMA PONTE COM MATRIZES

A *Internet* consolidou-se como uma poderosa ferramenta de busca por informações. Ao digitarmos uma palavra-chave em um motor de busca, como o *Google* recebemos instantaneamente uma enorme quantidade de resultados. Nesta seção, veremos como abordar esses conceitos, na educação básica.

Embora a busca pareça simples para o usuário, a ordem em que os resultados são apresentados segue critérios matemáticos sofisticados. O algoritmo *PageRank*, desenvolvido pelo *Google*, utiliza ideias como multiplicação de matrizes, autovalores e autovetores para classificar os sites de acordo com sua relevância.

Diante disso, a pergunta recorrente entre estudantes — "Professor, para que servem as matrizes?" — encontra aqui uma resposta concreta. Este é apenas um exemplo das diversas aplicações da Matemática.

O ensino de matrizes no ensino médio, embora limitado a operações fundamentais como adição, multiplicação, matriz identidade e inversa, já fornece uma base conceitual rica o suficiente para abordar aplicações do mundo real. Uma dessas aplicações é o algoritmo *PageRank*, criado pelos fundadores do *Google*, que utiliza conceitos de multiplicação de matrizes e sucessivas iterações para atribuir relevância a páginas na internet.

Neste capítulo, exploramos como é possível, com os conhecimentos adquiridos na escola, compreender de forma introdutória o funcionamento de um sistema de busca. A proposta é mostrar que temas aparentemente distantes da realidade dos estudantes podem se tornar acessíveis e significativos quando bem contextualizados. Ao longo do texto, são apresentados exemplos e situações construídas com base em conteúdos curriculares do ensino médio, com o objetivo de demonstrar essa aproximação entre teoria e aplicação.

Exemplo 5.1. Encontre os vetores centro e autoridade iniciais da matriz de adjacência A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução: O vetor de centro inicial h_0 é a soma das entradas de linhas de A. O vetor de

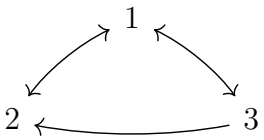
autoridade inicial a_0 é a soma das entradas de colunas de A.

$$h_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5.2. Desenhe o grafo da matiz abaixo:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução:



Exemplo 5.3. [1] Use o *método das potências* para ordenar os *sites* em ordem decrescente de importância, a partir da matriz apresentada no exemplo 5.2. Suponha que um serviço de busca retorna 3 *sites* como resultado, e que a matriz de adjacência entre eles é dada no exemplo citado. Para facilitar os cálculos, utilize os *softwares Symbolab* e *Wolfram Alpha* e considere $\sqrt{5} \approx 2{,}236$. Siga as instruções:

1. Comece com um vetor a_0 qualquer (por exemplo, com todas as entradas iguais a 1) e normalize esse vetor: divida cada valor pela soma total, de modo que a soma das entradas seja igual a 1.

2. Multiplique a matriz transposta pela matriz original. Depois, multiplique esse novo resultado pelo vetor a_0 normalizado. O vetor resultante será chamado de a_1.

3. Calcule a norma (comprimento) do vetor a_1 e divida cada entrada por essa norma, obtendo assim um novo vetor com comprimento 1. Repita esse processo para encontrar o vetor a_2.

Solução: Primeiro, vamos normalizar o a_0

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}894 \\ 0{,}894 \\ 0{,}447 \end{bmatrix}$$

[1] Notações como a_0, neste exemplo, são utilizadas para dar continuidade ao raciocínio desenvolvido ao longo do trabalho. No ensino básico, é recomendável empregar notações que sejam compreensíveis para os alunos, além de fornecer uma explicação clara sobre vetores.

$$(B^\top B)\mathbf{a}_0 \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0{,}894 \\ 0{,}894 \\ 0{,}447 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2,682 \\ 3,129 \\ 1,341 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = \frac{(B^\top B)\mathbf{a}_0}{\|(B^\top B)\mathbf{a}_0\|} \approx \frac{1}{4,334} \begin{bmatrix} 0{,}894 \\ 0{,}894 \\ 0{,}447 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,206 \\ 0,206 \\ 0,103 \end{bmatrix}$$

Basta encontrar o a_2:

$$(B^\top B)\mathbf{a}_1 \approx \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0,206 \\ 0,206 \\ 0,103 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,618 \\ 0,721 \\ 0,309 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{(B^\top B)\mathbf{a}_1}{\|(B^\top B)\mathbf{a}1\|} \approx \frac{1}{0,998} \begin{bmatrix} 0,206 \\ 0,206 \\ 0,103 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,206 \\ 0,206 \\ 0,103 \end{bmatrix}$$

Aqui o aluno pode perceber que os valores de a_1 e a_2 são praticamente os mesmos, indicando o encerramento das aproximações. E com isso, ele perceberá que o *site* 3 provavelmente é irrelevante para a busca e que os demais *sites* devem ser acessados em ordem de importância decrescente, como os valores são iguais temos: ordem de acesso: 1 ou 2, 3.

Exemplo 5.4. (Inspirado no artigo "A Matemática Escondida no Google", de Almeida e Celeman (2010) ALMEIDA, M. F. L. B. P. (2010)). Observe a matriz abaixo de *links* e faça os itens que seguem:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) A rede tem quantos *sites*? Essa rede é admissível? Por quê? A rede é fortemente conectada?
Sugestão: gere o *grafo* associado à *Web* representada pela matriz, a fim de visualizar o problema.

b) Existe *link* do *site 4* para o *site 1*? E do *site 1* para o *site 4*?

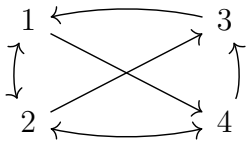
c) Estabeleça o *ranking* das páginas. Qual delas é a mais importante? E a menos importante?

Soluções:

a) Primeiro vamos gerar o grafo, note que, cada elemento a_{ij} representa a probabilidade de ir do site j para o site i.

- **Coluna 1 (site 1):**
  - $a_{2,1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ site $1 \rightarrow 2$
  - $a_{4,1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ site $1 \rightarrow 4$
- **Coluna 2 (site 2):**
  - $a_{1,2} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ site $2 \rightarrow 1$
  - $a_{3,2} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ site $2 \rightarrow 3$
  - $a_{4,2} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ site $2 \rightarrow 4$
- **Coluna 3 (site 3):**
  - $a_{1,3} = 1 \Rightarrow$ site $3 \rightarrow 1$
- **Coluna 4 (site 4):**
  - $a_{2,4} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ site $4 \rightarrow 2$
  - $a_{3,4} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ site $4 \rightarrow 3$

  assim, o grafo será:



A matriz A é de ordem 4x4, logo, a rede possui *4 sites*.

Admissível: Uma rede é admissível se for possível atingir todos os nós (*sites*) a partir de qualquer outro. Como existe pelo menos um caminho entre todos os *sites*, a rede é admissível.

Fortemente conectada: Uma rede é fortemente conectada se, de qualquer *site*, é possível chegar diretamente ou indiretamente a qualquer outro *site*. Com base na matriz, isso acontece, então a rede é fortemente conectada.

Veja que bastava observar o grafo para responder. A questão é, montar o grafo.

b) Observando o grafo, vemos que existe *link* que sai do *site* 1 e vai para o *site* 4, mas não existe *link* que sai do *site* 4 e vai para o *site* 1.

c) Cada elemento a_{ij} representa a probabilidade de transição do site j para o site i. Ou seja, **coluna** $j \rightarrow$ **linha** i.

***Site 1* (mais importante)**

- Recebe *links* de:

  - *Site* 2, com peso $\frac{1}{3}$
  - *Site* 3, com peso 1
- Observações:
  - *Site* 3 **só aponta** para o *site* 1, ou seja, transfere 100% da sua importância para ele.
  - *Site* 2 também contribui para o *site* 1.

  assim, *site* 1 recebe *links* fortes de *sites* relevantes. É o mais importante.

Site 2

- Recebe *links* de:
  - *Site* 1, com peso $\frac{1}{2}$
  - *Site* 4, com peso $\frac{1}{2}$
- Observações:
  - *Site* 1 é o mais importante.
  - *Site* 4 também é bem conectado.

  O *site* 2 recebe importância de *sites* fortes.

Site 4

- Recebe *links* de:
  - *Site* 1, com peso $\frac{1}{2}$
  - *Site* 2, com peso $\frac{1}{3}$

  logo, recebe de *sites* bons, mas com menor intensidade que o *site* 2.

***Site 3* (menos importante)**

- Recebe *links* de:
  - *Site* 2, com peso $\frac{1}{3}$
  - *Site* 4, com peso $\frac{1}{2}$
- Observações:
  - Não recebe nenhum *link* do *site* 1.
  - *Sites* que o apontam não são os mais relevantes.

  O *site* 3 é o menos importante no contexto da rede.

Assim, *Ranking* Final (do mais para o menos importante) é

$$\boxed{1 > 2 > 4 > 3}$$

6 CONCLUSÃO

Como dizia a matemática iraniana Maryam Mirzakhani, “a beleza da matemática só se revela aos seguidores mais pacientes”. De fato, este trabalho exige paciência e dedicação para que se possa compreender e apreciar a profundidade e a beleza dos conceitos envolvidos.

O principal objetivo deste estudo foi analisar sistemas de busca, em especial o algoritmo *PageRank*, por meio de ferramentas da Álgebra Linear, e, ao final, explorar como esses conhecimentos podem ser aplicados no contexto da educação básica. Frequentemente, estudantes, tanto do ensino médio quanto da graduação, questionam a utilidade desses conteúdos matemáticos. Este trabalho, portanto, buscou demonstrar a relevância na prática, a aplicabilidade e a sofisticação das matrizes na resolução de problemas na área computacional.

O algoritmo *PageRank* vai além de simplesmente contar quantos *links* uma página recebe: ele atribui pesos a esses *links* com base na importância dos *sites* de origem, refletindo um modelo de raciocínio matemático. A pontuação de cada página pode ser representada por meio de uma matriz de adjacência normalizada, sendo os valores associados determinados pelo autovalor dominante e seu autovetor correspondente. Essa abordagem fundamentada em Álgebra Linear foi avaliada, à época, em cerca de 25 bilhões de dólares e se tornou peça-chave para o sucesso do *Google* como ferramenta de busca global.

As análises realizadas ao longo do trabalho mostraram que o Método das Potências é uma ferramenta essencial para compreender o funcionamento do algoritmo *PageRank*. Assim, conteúdos como autovalores e autovetores, muitas vezes vistos de forma abstrata, ganham mais sentido, revelando-se úteis e aplicáveis na solução de problemas reais e complexos.

Dessa forma, este trabalho contribui para a valorização e divulgação da aplicabilidade da Matemática, demonstrando como ela pode ser não apenas útil, mas também bela, relevante e integrada à tecnologia, que muitas vezes não é notada. Embora, à primeira vista, seus conceitos possam parecer complexos, este estudo mostra que eles são plenamente acessíveis e compreensíveis, seja por leitores oriundos da Matemática, seja da Computação, desde que haja interesse e disposição para explorá-los com atenção e curiosidade.

REFERÊNCIAS

ACKER, F. **A Note on the Spectral Theorem in the Finite-Dimensional Real Case**. The American Mathematical Monthly, v. 121, n. 10, p. 942–945, dez. 2014. Publicado por Mathematical Association of America. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.121.10.942. Acessado em: 17/04/2025.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Tradução técnica: Claus Ivo Doering. Porto Alegre: Bookman, 2012. Dados eletrônicos. ISBN 978-85-407-0170-0.

ALMEIDA, M. F. L. B. P.; CELEMAN, S. **A Matemática Escondida no Google**. Revista do Professor de Matemática, n. 80, 2010. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/80/10.html. Acessado em: 20/04/2025.

BRYAN, K.; LEISE, T. **THE** $25,000,000,000^*$ **EIGENVECTOR: THE LINEAR ALGEBRA BEHIND GOOGLE**. Rose-Hulman Institute of Technology, 2010. Disponível em: https://www.rose-hulman.edu/~bryan. Acessado em: 28 abr. 2025.

BOLDRINI, J. L. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper Row, 1980.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: USP, 2007.

JOHNSON, Katherine. **Oral History Archive: Katherine Johnson**. National Visionary Leadership Project, 2005. Disponível em: https://blog.lib.uiowa.edu/science/2020/02/28/katherine-johnsons-legacy-oral-histories/. Acesso em: 29 abr. 2025.

LER E EMPREENDER. **A história do Google**. YouTube, 2 ago. 2021. Vídeo (6 min 25 s). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=f3hMn4OKZpU&t=58s. Acessado em: 28/04/2025.

LIMA, E.L. **Análise Real volume 1. Funções de Uma Variável**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

MENTALIDADES MATEMÁTICAS. **Maryam Mirzakhani: 5 Lições Inspiradoras da Matemática**. 14 dez. 2020. Atualizado em: 20 fev. 2024. Disponível em: https://mentalidadesmatematicas.org.br/maryam-mirzakhani/. Acessado em: 29/04/2025.

TURING, Alan M. **Computing Machinery and Intelligence. Mind**, v. 59, n. 236, p. 433–460, 1950. Disponível em: https://academic.oup.com/mind/article-abstract/LIX/236/433/986238?redirectedFrom=fulltext&login=false Acessado em: 29/04/2025.

TECHTUDO. **AltaVista, Cadê e Aonde: relembre sites de busca que fizeram sucesso antes do Google**. Techtudo, 28 mar. 2023. Disponível em: https://www.techtudo.com.br/listas/2023/03/altavista-cade-e-aonde-relembre-sites-de-busca-que-fizeram-sucesso-antes-do-google-edsoftwares.ghtml. Acessado em: 28/04/2025.