UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATHEUS NOBREGA DE MEDEIROS

LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA E A METODOLOGIA DE EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ANÁLISE CRÍTICA

PATOS
2025

MATHEUS NOBREGA DE MEDEIROS

LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA E A METODOLOGIA DE EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ANÁLISE CRÍTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Professor licenciado em matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Fabíola da Cruz Martins

PATOS

2025

M488l Medeiros, Matheus Nobrega de.

Livros didáticos de matemática e a metodologia de exploração-proposição- resolução de problemas [manuscrito] : uma análise crítica / Matheus Nobrega de Medeiros. - 2025.

68 f.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2025.

"Orientação : Prof. Dra. Fabíola da Cruz Martins, Coordenação do Curso de Matemática - CCEA".

1. Educação matemática. 2. Coerência didática. 3. Problemas matemáticos. I. Título

21. ed. CDD 510.71

Elaborada por Kaliane Eveny Martins de Oliveira - CRB - 15/986 BSC7

MATHEUS NOBREGA DE MEDEIROS

LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA E A METODOLOGIA DE EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO- RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ANÁLISE CRÍTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em: 04/06/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Jair Dias de Abreu** (***.540.544-**), em **11/06/2025 11:30:34** com chave **a2e0b20246d011f0b5d306adb0a3afce**.
- **Matheus Marques de Araújo** (***.259.704-**), em **10/06/2025 22:56:43** com chave **52a10ecc466711f0a3821a7cc27eb1f9**.
- **Fabíola da Cruz Martins** (***.958.494-**), em **10/06/2025 22:44:38** com chave **a2d85eb0466511f08d8106adb0a3afce**.

A minha família, amigos e todos que contribuíram no meu caminhar rumo à graduação, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Como graduandos, nunca realmente sabemos o que esperar de um curso de ensino superior. Então isso não poderia ser diferente com um curso de licenciatura em matemática.

Durante o período de quatro anos e meio, houveram muitas variáveis entre o sufoco das provas e a alegria dos pondo extras: amizades foram feitas, com professores e colegas, disciplinas que passaram deixando saudades, e outras nem tanto, por fim a mudança da mente de um simples aluno de escola pública, para um futuro professor de ensino superior (quem sabe).

Dito isso agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado principalmente saúde mental e física para trilhar com sucesso todo o caminho que me trouxe até esse momento. Em seguida agradeço minha família: Adeilda minha mãe, João meu pai, Sofia minha irmã, por suportar meus momentos de ausência me incentivar a seguir em frente.

Aos meus amigos, vulgo a melhor turma, Fabrício Almeida, Maycon Leite, Willian Gustavo, Emmanuel Falcão, Carina Urtiga, Camila Soares, Eduardo Rickson, Valmir Gilvan, Jefferson Braz, dentre outros, agradeço pelos momentos compartilhados que deixaram saudades. Aos professores, Paulo Romero, Geovany Fernandes, Kelyane Abreu, Sally, José Ginaldo, Arlandson Mateus, Sérgio Cavalcante, Érico, Maria Aparecida, Ismael Sandro, Rômulo Tonyathy, Marcos Thadeu, Geovany Fernandes, Maria Raiza, que foram cruciais para a minha formação docente.

Em especial agradeço à professora Fabíola da Cruz Martins, minha orientadora, e principal motivo da minha escolha de tema para esse trabalho. Mesmo ainda nova no campus, depositou sua fé e me escolheu como aluno pesquisador para um projeto de pesquisa, que mudou a minha perspectiva sobre a matemática e me deu forças para fazer esse trabalho com paixão que jamais pensei que teria para educação matemática.

Ademais, agradeço ao professor Wilson Soares, depositou fé em mim quando eu mais precisava, e na fala dele eu termino, “Não jogue fora a benção que Deus te oferta”, “Você vencerá os obstáculos pois, Deus é contigo” (Wilson Soares, 2019).

“Epígrafe - “O pensamento é o pai do ato” (Afonso de Albuquerque)

RESUMO

Mesmo com o avanço no ramo educacional, o livro didático ainda ocupa papel central no ensino de Matemática na Educação Básica, de modo que sua estrutura e os tipos de atividades que propõe influenciam diretamente a qualidade da formação matemática dos estudantes. Este trabalho tem como objetivo investigar de que forma os problemas dos livros didáticos se aproximam da Exploração-Proposição e Resolução de Problemas. O levantamento de dados consistiu na análise de quatro coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovadas pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD). Os resultados evidenciaram que, embora todas as coleções façam referência à Resolução de Problemas, os enunciados apresentados concentram-se, em grande parte, em questões extraídas de vestibulares ou concursos, pouco dialogando com o contexto sociocultural dos estudantes. Observou-se, ainda, uma escassez de situações que promovam a Exploração ou a Proposição de Problemas. Apesar disso, no entanto, algumas coleções apresentaram esforços pontuais no sentido de diversificar os tipos de problemas e propor atividades mais investigativas do que outras, resultando numa aproximação pontual à metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Conclui-se que, embora haja avanços pontuais, os livros didáticos analisados ainda necessitam de maior aprofundamento na proposição de situações que estimulem a investigação matemática e a construção e aprofundamento do conhecimento matemático. Tais lacunas reforçam a necessidade de repensar a elaboração de materiais didáticos que valorizem o contexto do aluno e que utilizem problemas que sejam de fato ricos a nível educacional, ou seja, a Exploração-Proposição e Resolução de Problemas, usada como base o desenvolvimento desses materiais didáticos.

Palavras-Chave: Educação Matemática; Coerência Didática; Problemas.

ABSTRACT

Even with advances in the educational field, textbooks still play a central role in teaching Mathematics in Basic Education, so that their structure and the types of activities they propose directly influence the quality of students' mathematical education. This study aims to investigate how problems in textbooks approach Exploration-Proposition and Problem Solving. The data collection consisted of analyzing four collections of High School Mathematics textbooks approved by the National Program for Books and Teaching Materials (PNLD). The results showed that, although all collections refer to Problem Solving, the statements presented focus largely on questions taken from entrance exams or public exams, with little dialogue with the sociocultural context of the students. A shortage of situations that promote Exploration or Problem Proposition was also observed. Despite this, however, some collections have made specific efforts to diversify the types of problems and propose more investigative activities than others, resulting in a specific approach to the Exploration-Proposition-Problem-Solving methodology. It is concluded that, although there are specific advances, the textbooks analyzed still need to go deeper into proposing situations that stimulate mathematical investigation and the construction and deepening of mathematical knowledge. Such gaps reinforce the need to rethink the development of teaching materials that value the student's context and that use problems that are truly educationally rich, that is, Exploration-Proposition and Problem-Solving, used as the basis for the development of these teaching materials.

Keywords: Mathematical education; Didactic Coherence; Problems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
EP	Exploração de Problemas
EPRP	Exploração Proposição de Resolução de Problemas
PP	Proposição de Problemas
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
LD	Livro didático
MM	Matemática Moderna
MMM	Movimento da Matemática Moderna
PNLD	Programa Nacional do livro e do material didático
RP	Resolução de Problemas
C1, C2, C3, C4, C5, C6	Coleção Conexões volume 1, 2, 3, 4, 5, 6.
D1, D2, D3, D4, D5, D6	Coleção Diálogo volume 1, 2, 3, 4, 5, 6.
M1, M2, M3, M4, M5, M6	Coleção Multiversos volume 1, 2, 3, 4, 5, 6.
P1, P2, P3, P4, P5, P6	Coleção Prisma volume 1, 2, 3, 4, 5, 6.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A docência é, antes de tudo, uma prática social, o que significa atuar em contextos socioculturais diversos e interagir constantemente com grupos de pessoas. Trabalhar com pessoas vai muito além de possuir uma formação técnica ou superior, exige uma postura de constante aprendizado e atualização. A formação continuada, nesse sentido, torna-se essencial para acompanhar as transformações no campo educacional, que frequentemente apresenta novas demandas, abordagens e tendências pedagógicas.

Se voltarmos aproximadamente 30 anos no tempo, encontraremos um cenário de comunicação bem diferente: rádios e televisores predominavam, cartas eram amplamente utilizadas e os telefones, fixos, eram os principais meios de contato à distância. Naquela época, seria inimaginável reunir todos esses recursos em um único aparelho, como fazemos hoje com os smartphones. A comunicação, portanto, passou por profundas e rápidas transformações.

No entanto, quando observamos a educação, percebemos que essas mudanças não ocorreram com a mesma intensidade. Basta perguntar a parentes de gerações anteriores como era a escola em seu tempo para notar que, em muitos aspectos, a estrutura e as práticas educacionais permanecem semelhantes. Na verdade, no tempo atual, existe um melhor acesso a recursos e documentos norteadores, que visam a implementação e a produção de mudanças no ensino. E daí surge, então, um questionamento: por que essas mudanças não são aplicadas a fim de fazer a educação não evoluir com o mesmo vigor? A ausência de inovações significativas e a escassez de políticas públicas comprometidas com transformações profundas e consistentes no campo educacional, podem ser alguns dos pontos que retratam esse comportamento.

Quando comparada com tempos passados, na sala de aula contemporânea, muitos professores de matemática da educação básica têm acesso e fazem uso de diversos recursos que, antes não estavam disponíveis, seja por limitações tecnológicas da época, pela ausência de investimentos, ou até mesmo pela dificuldade em implementar novos recursos e métodos nas suas aulas. Entre os objetos que hoje fazem parte da rotina escolar, alguns são relativamente recentes: os ventiladores, por exemplo, estão sendo gradualmente substituídos por aparelhos de ar-condicionado, o antigo quadro de giz deu lugar ao quadro branco, e o livro didático, que atualmente é distribuído de forma gratuita a todos os estudantes.

Os livros didáticos existem desde o século passado e, historicamente, têm adotado diversas abordagens metodológicas como base para a organização dos conteúdos. Dentre essas abordagens, podemos destacar os exercícios e problemas, onde os exercícios são mais pontuais, como calcular um valor de uma função, e os problemas são mais contextualizados e complexos, e geralmente envolvem várias etapas para a sua resolução, como calcular a inversa de uma função exponencial por exemplo. Os quais estão presentes nesses materiais, orientando a forma como o conhecimento é proposto ao aluno. No entanto, à luz das tendências educacionais mais recentes, novas teorias, propostas pedagógicas, documentos norteadores e metodologias emergem constantemente. Essas mudanças se refletem também no conteúdo dos livros didáticos, que passam por reformulações e atualizações periódicas. Embora alguns professores façam uso recorrente desse material, outros optam por não o utilizar, seja por seguirem metodologias diferentes ou por não se sentirem preparados para explorá-lo adequadamente em sala de aula.

De modo geral, orientados pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os livros didáticos desta análise foram aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), portanto são elaborados com base na Resolução de Problemas (RP), esta, que passou a ganhar espaço no Brasil após a derrota do Movimento da Matemática Moderna na década de 80. Diante disso, neste trabalho, é analisado o conteúdo de livros didáticos da Educação Básica Brasileira de Matemática do Ensino Médio sob uma perspectiva mais recente e atual em relação a Resolução de Problemas.

A motivação para este trabalho surgiu a partir de uma experiência vivenciada durante o Estágio Supervisionado realizado em 2024. Em uma das aulas observadas, foi proposto aos alunos um problema retirado do livro didático adotado pela escola. No entanto, ficou evidente que a atividade estava completamente desconectada da realidade dos estudantes, tanto em termos de linguagem quanto de contexto. A situação revelou uma fragilidade na elaboração dos problemas propostos, indicando que, embora o livro adotasse a metodologia RP como princípio norteador, nem todos os enunciados respeitavam os critérios de coerência didática, isto é, coerência: numérica, contextual e pedagógica (Abramovich e Cho, 2015).

Esse episódio gerou uma reflexão mais ampla sobre a estrutura dos livros didáticos e a forma como seus conteúdos são organizados. A constatação de que problemas mal contextualizados ainda são recorrentes levou à necessidade de investigar de forma mais sistemática o material didático, buscando compreender em que medida ele funciona como mediador entre o conhecimento e o processo de ensino-aprendizagem e condizente com as metodologias que se propõe a adotar.

Dessa forma, este trabalho justifica-se pela necessidade de repensar a forma como os livros didáticos têm sido concebidos, especialmente à luz de abordagens metodológicas mais atuais, como a Exploração de Problemas (EP), Proposição de Problemas (PP) e a RP. Para isso, foram analisadas quatro coleções de livros didáticos de matemática do Ensino Médio aprovadas no PNLD de 2020, com o objetivo de investigar os tipos de problemas presentes em livros didáticos de Matemática da Educação Básica, com o intuito de identificar indícios de uma abordagem pautada na metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.

Essa metodologia é proposta por Andrade (1998, 2017) e constitui uma articulação entre três abordagens — EP, que leva à, PP e a RP — e ainda propõe uma articulação mais sensível entre conteúdo, contexto e participação ativa do aluno no processo de aprendizagem. Sua proposta rompe com sequências rígidas de ensino, priorizando o percurso do aluno na construção do conhecimento. O foco está no processo, e não apenas na solução. A essência desta metodologia está em estimular a participação ativa do estudante, incentivando-o a formular hipóteses, levantar conjecturas e construir significados com autonomia, sempre com a mediação atenta do professor, que assume o papel de orientador e coautor do processo de aprendizagem.

Para essa análise, foi escolhida a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas por se tratar de uma metodologia que possui o “problema” como o ponto de partida. Afinal, o exercício e o problema foram/são por muito tempo o elemento principal do livro didático, dessa forma, eles não podem ser abolidos, mas repensados constantemente, de modo que venha promover um ensino de matemática com mais compreensão.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS AO LONGO DA HISTÓRIA

A RP, enquanto metodologia de ensino, ainda pode ser considerada recente do ponto de vista histórico. De acordo com Morais e Onuchic (2021), foi apenas por volta da primeira metade do século XX que essa abordagem começou a ser utilizada como estratégia metodológica, o que lhe confere uma trajetória inferior a um século. Isso indica que ainda há muito a ser investigado e desenvolvido nesse campo. Segundo os autores, "a literatura na área aponta os Estados Unidos como o país em que a RP se constituiu como teoria" (Morais, Onuchic, 2021).

Em 1945 George Polya publica seu livro “A arte de resolver problemas”. Neste livro ele traz e exemplifica conceitos e prática no âmbito de resolução de problemas, muitas dessas práticas são abordadas até os dias de hoje, como é o caso das definições seguidas de exemplos e finalizando com lista de exercícios ou problemas propostos. Dito isso, podemos ver semelhanças entre a metodologia usada em seu livro, e a metodologia RP. Portanto, podemos considerar Polya como um dos precursores RP como metodologia.

As pesquisas sobre RP desenvolvidas a partir da década de 1980 ocorreram paralelamente ao currículo escolar adotado nos Estados Unidos (Morais, Onuchic, 2021). Esse currículo foi fortemente influenciado pelo Movimento da Matemática Moderna (MMM), que teve impacto em escala global. Inicialmente implementado nos Estados Unidos, a partir da década de 1950, o MMM também chegou a outros países, como o Brasil, onde foi introduzido em 1961 por meio de cursos de formação para professores e, a partir de 1963, com a produção de livros didáticos específicos (Morais, Onuchic, 2021).

O avanço técnico-científico da sociedade passou a exigir maior número de pesquisadores e cientistas, tanto no Brasil quanto no cenário internacional. Nesse contexto, o MMM surgiu como uma tentativa de suprir essa demanda. Segundo Burigo (1989), o movimento foi concebido como uma alternativa para ampliar a formação de pesquisadores na área da Matemática, diante da constatação de que a pesquisa matemática era incipiente no país, em grande parte devido ao baixo nível do ensino básico. Assim, o MMM buscava aprofundar o ensino de Matemática e promover um ensino considerado mais exigente, com o intuito de torná-lo mais eficiente. Ainda de acordo com Burigo (1989), o aumento do número de cientistas e técnicos estava associado à perspectiva de crescimento econômico, premissa que sustentou a implementação do movimento.

Segundo Burigo (1989), o matemático e psicólogo Zoltán Pál Dienes, propôs um ensino que retirava o professor do foco da aula, em contrapartida ao MMM. Professores e educadores adeptos do MMM se mostraram relutantes em aceitar o método de Dienes, pois afirmavam que deixar o aluno parcialmente responsável por seu aprendizado iria causar muitas lacunas e incorreções no aprendizado, resultando nos alunos aprenderem mais coisas erradas do que certas.

Porém alguns professores, educadores e pesquisadores entenderam que os princípios de Dienes, permitiam o resgate do objetivo original do movimento, ou seja, “ênfase nas ideias matemáticas e nos conceitos” Burigo(1989). Grupos de educadores de matemática, cada vez mais, se aproximaram das falas de Dienes e consequentemente, o próprio MMM perdeu forças com o tempo.

Ainda na fala de Burigo (1989), disciplinas como Álgebra Abstrata, Lógica Matemática e Teoria dos Conjuntos compunham a grade dos cursos de aperfeiçoamento oferecidos a professores pesquisadores durante o período de difusão da Matemática Moderna (MM). Alguns dos participantes desses cursos foram, posteriormente, os responsáveis por iniciar as primeiras pesquisas e experimentações no contexto da MM no Brasil. Anos mais tarde, tais investigações serviram de base para os estudos que contribuíram para a consolidação da metodologia de RP no país.

2.2 PROBLEMA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

No Brasil algumas vertentes da RP já eram discutidas muito antes mesmo da consolidação da metodologia RP. Segundo Burigo (1989)

> Um dos temas mais desenvolvidos, a partir dos anos 40, era a preocupação pedagógica da ênfase na compreensão dos procedimentos de seu significado, em oposição a um ensino baseado na memória e na destreza na realização de operações (Burigo, 1989, p. 67).

A partir das reflexões da professora e pesquisadora Burigo (1989), observa-se que já na década de 1940 havia um debate sobre a importância do processo de aprendizagem. O processo em si passou a ser reconhecido como fundamental para a produção do conhecimento.

No período anterior à consolidação da RP como metodologia, a busca era um tanto diferente dos objetivos que hoje no século XXI ela almeja. Na época os problemas que eram abordados não tinham a necessidade de pertencerem ao cotidiano, na verdade, era mais importante que fossem problemas que suprissem apenas a demanda dos conteúdos dados em sala de aula. O que poderia ocasionar em dados absurdos como é o famigerado caso de “Joãozinho tinha 200 laranjas e comeu 100”. Isto passou a ser redefinido no momento de sua caracterização como metodologia de ensino. A abordagem tinha o olhar apenas para os números e as operações que seriam feitas, interessando apenas o arremate de certo ou errado. Isto é, o processo pelo qual o aluno passava era de certa forma irrelevante se a resposta estivesse incorreta, e desconsiderado se estivesse correta.

Ao longo dos anos, o ensino de Matemática passou por diversas reformulações, tendo como um de seus marcos principais o MMM. De acordo com Burigo (1989), o principal objetivo dessas mudanças era aumentar a eficiência do ensino, pois acreditava-se que os problemas que continham dados coerentes e/ou verdadeiros, eram mais propensos a retornar uma aprendizagem matemática melhor, ainda mais se esses problemas fossem adaptados de acordo com o cotidiano dos alunos.

As transformações, no entanto, não se limitaram à reformulação dos enunciados. Houve também a incorporação de ilustrações aos problemas, o que contribuiu para facilitar a compreensão e a resolução das situações propostas. Por exemplo, ao se apresentar um problema que envolve o cálculo da altura de um prédio, conhecendo-se o comprimento de sua sombra e a distância da ponta da sombra até o topo do prédio, a inclusão de uma imagem pode auxiliar o estudante a perceber visualmente que uma simples aplicação do Teorema de Pitágoras é suficiente para encontrar a solução.

Dando sequência, uma vez em sala de aula, foi visto o seguinte problema, “Uma empresa fornece café da manhã para 80 funcionários, gerando um custo de R$ 5000,00 para um período de 120 dias (Bianchini, 2022)”, claramente, um olho levemente treinado, verá que os dados desse problema estão fora da realidade. Seguindo os valores do problema, temos cada café da manhã por aproximadamente R$ 0,53. Esse valor é absurdo pois em muitas realidades não pagaria nem um café preto ou um pão. Então, por mais que tivesse adaptado esse problema para o cotidiano do aluno, ele está incondizente com a realidade. E o mais problemático é que foi visto durante um estágio no ano de 2024, e estava no livro didático usado pelo professor. Ou seja, às vezes a adaptação para o cotidiano não é suficiente, e para que problema seja coerente por completo se faz necessário o uso de dados e situações adequadas.

2.3 EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (EPRP) representa um avanço em relação à RP, sem, no entanto, abandoná-la. A proposta da EPRP consiste em preservar os aspectos positivos da RP e, ao mesmo tempo, complementar seus limites e fragilidades. Nesse enfoque, além da resolução propriamente dita, o professor também propicia momentos voltados à EP e à PP. Essa abordagem possibilita um trabalho mais amplo e significativo com os estudantes, favorecendo o desenvolvimento do pensamento matemático e da autonomia intelectual. A aplicação da metodologia EPRP pode ser adaptada à realidade da turma, permitindo ao professor organizá-la conforme os objetivos didáticos e o contexto de sua prática pedagógica.

A primeira premissa da metodologia EPRP é a crítica ao modelo tradicional de ensino, no qual o professor ocupa uma posição centralizada, transmitindo conteúdos prontos e ilustrando-os por meio de exemplos. Esse formato, segundo Andrade (2017), não contempla todos os aspectos essenciais à aprendizagem efetiva da Matemática. Para que essa aprendizagem ocorra de forma mais significativa, é necessário diversificar as estratégias didáticas, incorporando métodos que promovam uma matemática com caráter mais transformador e libertador.

Outro ponto importante levantado pela EPRP diz respeito ao papel dos problemas matemáticos no processo de construção do conhecimento. Historicamente, os problemas antecedem a formulação das teorias matemáticas, ou seja, é a necessidade de resolver problemas que impulsiona o desenvolvimento teórico. No entanto, na prática escolar, observa-se que os problemas costumam ser utilizados apenas como exemplos aplicados de conteúdos previamente ensinados. A EPRP se contrapõe a essa lógica, defendendo que o percurso percorrido na resolução de um problema é tão relevante quanto a obtenção da resposta final, valorizando, portanto, o processo investigativo e reflexivo dos estudantes.

Mais precisamente, a proposta de EPRP é de construir um ensino de matemática para além do ato de resolver um problema. Trata-se de adotar uma abordagem que valorize, de maneira integrada, os momentos de EPRP como caminhos para uma aprendizagem mais significativa.

Para alcançar esse objetivo, deveríamos nos perguntar primeiramente o que é um problema? Nesse caso, uma caracterização para um problema é como sendo um ente matemático que possui ou não resolução, contudo é algo que deve desafiar a mente, pois caso contrário, então não é de fato um problema. Tendo consciência disso, caberia ao professor instigar o aluno a problematizar, indagando-o, e fazendo o direcionamento do mesmo até a possível resposta da questão ou tarefa, com a finalidade de conduzir o aluno ao resultado do problema quase que por conta própria. Isso fará com que o aluno esteja diretamente e ativamente envolvido no progresso da solução. Além de fazer o aluno perceber que existe algo para além daquilo. Ou seja, a ideia de um problema desencadear outro e assim sucessivamente.

George Polya, autor do livro “A arte de resolver problemas”, sugere uma espécie de esquema para se resolver um problema. Polya propõe a ideia de dividir a resolução de um problema em quatro fases, que são: compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano, e examinar a solução obtida (Polya, 1945). Essa divisão serve tanto de base para aprender a resolver problemas, quanto de instrumento no ensino de resolução de problemas. Portanto se algo possui tais características, podemos então classificá-lo como problema.

A etapa de compreensão do problema, segundo Polya (1945), tende a ser bastante intuitiva, pois é nela que se identifica claramente qual situação deve ser resolvida. A representação pode se apresentar de diferentes maneiras: de forma verbal, quando o problema é apenas enunciado oralmente; numérica, quando expresso por meio de números; ou algébrica, quando apresentado por meio de expressões e símbolos próprios da álgebra. Independentemente da forma inicial de apresentação, é comum que o problema seja posteriormente generalizado de maneira algébrica, a fim de facilitar sua manipulação e, consequentemente, a obtenção da solução.

Na etapa de estabelecimento do plano, o estudante deve elaborar uma estratégia que o conduza à resolução do problema, utilizando-se de seus conhecimentos prévios relacionados ao conteúdo em questão. É com base nessas experiências e saberes já construídos que ele será capaz de selecionar caminhos possíveis e coerentes para alcançar a solução pretendida.

Na etapa seguinte, o estudante passa à execução do plano previamente elaborado, podendo realizar ajustes ao longo do processo, conforme as demandas da própria resolução. Em seguida, ocorre a análise da solução obtida, etapa em que se verifica se a resposta encontrada é, de fato, válida para o problema proposto, assegurando que ela contemple todos os casos possíveis.

É importante destacar, contudo, que não há obrigatoriedade de que essas etapas sejam seguidas de maneira estritamente linear. Em certas situações, o estudante pode reconhecer imediatamente uma solução ao se deparar com um problema, especialmente quando já teve contato com situações semelhantes anteriormente. Nesses casos, as três primeiras etapas podem ter sido percorridas de forma implícita ou anterior, cabendo ao aluno apenas a última fase, a verificação da solução, para confirmar sua adequação.

Andrade (2017) propõe uma classificação distinta para o conceito de problema. Para o autor, um problema é entendido como um projeto, uma questão ou uma situação para a qual o aluno não possui, ou não reconhece, um método imediato de resolução. Trata-se, portanto, de uma situação que exige do estudante o desejo de resolver, explorar ou realizar um trabalho efetivo.

Sob essa perspectiva, é fundamental que a atividade proposta demande esforço cognitivo por parte do aluno, de modo que apenas assim ela possa ser caracterizada como um problema. A resolução, portanto, implica dedicação e empenho, sendo o processo mais relevante do que a obtenção da resposta final. Em outras palavras, o valor pedagógico reside menos no acerto da solução e mais no percurso realizado pelo aluno ao enfrentá-la. Além disso, segundo Andrade (2017), um problema não precisa necessariamente ter um desfecho definitivo, já que sua resolução pode abrir caminho para novos questionamentos e investigações.

Neste trabalho, utilizaremos os termos problema e situação-problema como conceitos similares, uma vez que a situação-problema pode levar à formulação de um problema, e vice-versa. Definimos a situação-problema como podendo assumir diversas formas, tais como uma pergunta, um dado real, uma notícia, uma imagem ou até mesmo um material manipulável, que sirva de base para a elaboração de um problema.

Segundo Martins (2024), a situação-problema vai além de um simples questionamento, configurando-se como “um contexto que desperta a curiosidade e o interesse do aluno, o que o estimula a explorar e, a partir daí, propor o seu problema” (Martins, 2024, p. 18). Trata-se, portanto, de um recurso pedagógico que visa despertar o interesse e a curiosidade dos estudantes, incentivando-os a formular seus próprios problemas. Dessa maneira, a situação-problema funciona como uma ferramenta essencial na atividade de RP, potencializando o aprendizado por meio dessa metodologia.

2.4 PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Ao analisar individualmente os elementos que compõem a metodologia EPRP, iniciamos pela PP. Essa etapa pode ser explorada de diversas maneiras no ambiente escolar. Uma das possibilidades consiste em o professor ou os próprios alunos apresentarem um ou mais problemas à turma, a partir dos quais se desenvolve um trabalho orientado pelo professor. Nesse contexto, os estudantes podem ser convidados a resolver os problemas propostos, a criar novos problemas relacionados ou ainda a elaborar observações e questionamentos a respeito da situação apresentada. Outra forma de abordar a PP surge a partir da análise de situações-problema reais, como previsões meteorológicas, reportagens, dados estatísticos ou notícias científicas. Esses elementos do cotidiano, quando bem selecionados, despertam a curiosidade dos alunos e funcionam como ponto de partida para a formulação de problemas matemáticos relevantes e contextualizados. E até mesmo na concepção da PP como ferramenta na RP, expressa por Silver (1994), que será apresentada mais adiante. Chegando assim, a novos problemas, a novas reflexões e novas sínteses, além de realização de novos trabalhos (Andrade, 2017).

A proposição de um problema não implica, necessariamente, na exigência de sua resolução. Na verdade, conforme destaca Edward A. Silver (1994), renomado pesquisador da área, a PP abrange diferentes dimensões que vão muito além da simples formulação de enunciados a serem resolvidos. Em seu artigo clássico *“On Mathematical Problem Posing”*, Silver (1994) identifica seis possíveis enfoques para a PP: i) como uma característica proeminente da própria atividade matemática; ii) como um meio de promover uma atitude mais positiva dos alunos em relação à Matemática; iii) como uma forma de aprimorar a capacidade dos alunos de resolver problemas; iv) como um indicativo de atividade criativa ou habilidade matemática excepcional; v) como uma janela para acessar e compreender o pensamento matemático dos alunos; vi) como um elemento central do ensino orientado para a investigação.

Na PP i) como uma característica proeminente da atividade matemática, podemos vê-la, ao realizar atividades matemáticas, onde, a PP entra como uma ferramenta na hora de executar a resolução do problema, pois ao traçar um plano com etapas para resolver um problema (Polya, 1945), essas etapas podem ser encaradas como outros problemas, que se somam e se completam para a resolução do problema como todo (Silver, 1995). Através da PP o aluno pode propor algo que tem mais familiaridade, ou seja, que saiba como resolver ou já tenha visto algo parecido, para que assim chegue o mais perto possível da resolução do problema, onde iria faltar apenas um problema menor, porém ainda sim, mais simples do que o problema original. E nisso a imersão do aluno na obtenção conhecimento idealizada por Andrade (2017), pode ser alcançada. Fato que aproxima o aluno da matemática e evitaria problemas mal estruturados, do ponto de vista da coerência didática e da lógica real.

Quando a PP é considerada ii) como um meio de promover uma atitude mais positiva dos alunos em relação à Matemática, podemos notá-la ao pedir para os alunos proporem problemas. Muito provavelmente, eles irão propor algo que consigam resolver e/ou acham interessante, o que facilitaria a proximidade com a matemática. Ou até mesmo algo que julgam que será interessante para alguém na turma (Silver, 1995). Ademais, faz a matemática se tornar menos temida pelos alunos, e consequentemente mais aceita. Principalmente para aqueles alunos que têm hostilidade na hora de resolver tarefas e atividades.

Em PP iii) como uma forma de aprimorar a capacidade dos alunos de resolver problemas, eles mais uma vez são incentivados a criar seus próprios problemas com intuito de se aproximar da matemática, e fazê-la se aproximar mais de seus interesses. Ao propor problema os alunos se apegam mais a ele, o que os faz analisá-lo melhor, facilitando assim a resolução, até porque ao propor um problema, o aluno o fará em seu nível de abstração, onde o mesmo poderá e será capaz de resolver, melhorando assim seu processo de RP.

O professor, pode notar que alguns alunos propõem problemas mais elaborados e complexos que os outros, e isso pode se encaixar na PP iv) como um indicativo de atividade criativa ou habilidade matemática excepcional. Nessa vertente, o aluno pode ser visto como tendo uma maior intimidade com a matemática. Ao pedir que os alunos proponham o máximo de problemas que conseguirem, o fator criatividade também pode ser analisado. O professor então pode fazer o uso da PP nesse âmbito para caracterizar os alunos por nível de dificuldade e afinidade com a matemática. Outra forma seria fazer um problema não declarado em forma de afirmação, como por exemplo, “Paulo foi ao mercado com 5 reais, e o quilo do pão é 15 reais”, o professor pode descobrir com mais clareza se determinados alunos têm dificuldade, pois logo de cara é possível ver e propor um problema a partir da situação hipotética apresentada.

Em PP v) como uma janela para acessar e compreender o pensamento matemático dos alunos, o intuito é fazer com que os alunos se tornem mais sensíveis sobre a matemática e sobre onde ela está presente. Uma forma de executar isso seria fazer o processo inverso de resolver um problema. Essa ideia seria apresentar uma possível resposta para uma equação e solicitar dos alunos equações ou problemas que quando solucionados as respostas sejam aquela que foi apresentada. Ou até mesmo pedir outra resposta para uma equação que fora apresentada fazendo o uso da primeira (para o caso de uma equação do segundo grau, por exemplo). Assim o aluno pode se aproximar da matemática e entender os métodos que levaram a possível solução e aperfeiçoarem a suas relações com a matemática. Nesse âmbito, se o aluno ainda não possui total domínio sobre resolução de equações, isso o fará melhorar. Ao explorar todas as fases de uma representação algébrica como uma equação, isso dará uma significativa melhora na autonomia de resolução de problemas daquele aluno.

O professor pode usar a PP também como instrumento de incentivo da investigação. Ou seja, em PP vi) como um elemento central do ensino orientado para a investigação, o professor pode solicitar que os alunos proponham problemas tendo como função o incentivo à investigação. Construir regras gerais, construir teorias emergentes, ou ensiná-los a resolver problemas por meio de auto questionamentos, são alguns dos benefícios que pode se obter no uso dessas práticas. Mais uma vez tornando os alunos, seres críticos e autônomos de seu aprendizado.

Porém existem ainda dificuldades que foram enfrentadas pelos professores que se perpetuam até os dias de hoje, que é a falta de vínculo entre os aspectos, coerência didática e adaptação ao cotidiano. Segundo Abramovich e Cho (2015), “A coerência didática de um problema refere-se à: sua solubilidade formal, sua adequação ao nível de ensino e a outras características pedagógicas, assim como à relevância sociocultural.” (Abramovich, Cho, 2015, tradução própria).

Ainda na fala de Abramovich e Cho (2015), a coerência didática é composta de três vertentes: i) a coerência numérica, ii) a coerência contextual e iii) a coerência pedagógica. Podemos dizer que um problema é numericamente coerente quando é solúvel, dentro de um conjunto numérico. Um exemplo seria uma soma de dois números binários, que faz sentido no sistema binário, mas não no sistema decimal .

Afirmamos que um problema é contextualmente coerente, quando se adequa ao contexto sociocultural de um aluno ou grupo de alunos. Apresentar um problema sobre uma balança equilibrada para crianças de 10 anos, por exemplo, pode ser um desafio, uma vez que, não é do contexto sociocultural delas, pois o mais provável é que só conheçam a balança digital. Nesse caso, trazer uma balança desse modelo seria mais adequado, a fim de contextualizar o aluno (Abramovich, Cho, 2015).

Por fim temos a coerência pedagógica, que diz respeito a desenvolver problemas de acordo com o interesse de cada aluno ou grupo de alunos (Abramovich, Cho, 2015). Trazer um objeto ou temática que seja o hiperfoco de um aluno com autismo ou TDAH em um problema, poderia fazê-lo participar mais da aula do que um problema contextualizado nesse caso.

2.5 EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta vertente, o professor apresenta um problema ou situação problema, e junto com os alunos, ele o explora. O objetivo é fazer o aluno tanto obter o resultado do problema quanto impulsionar surgimento de novos problemas. Um ir cada vez mais profundo e curioso, um ir que chega e nunca chega (Andrade, 2017).

No âmbito da sala de aula podemos traçar caminhos onde EP e a RP se intersectam, formando assim, uma viagem aberta pelo ensino de matemática, e não apenas aquele sistema de ensino fechado e sendo sustentado unicamente com base na teoria. Mais uma vez, introduzir o cotidiano do aluno dentro da EP, poderá facilitar essa viagem sobre o conteúdo, e fazer o aluno imergir na aula. Nesse contexto, torna-se improvável que o professor saiba qual o rumo que a aula terá, e a ideia é de que essa aula corra de forma realmente imprevisível, pois só assim isso dará a sensação de viagem aberta, proposta por Andrade (1998). Viagem essa aberta, mas não completamente solta, ou seja, mediada pelo professor.

Dentro da EP é possível também que a situação problema na verdade seja criada pelos alunos. Suponha que o professor chega em sala e distribui dados de seis faces aos alunos. Inicialmente isso não é um problema, o problema surge quando os alunos se perguntam o que deve ser feito com aqueles dados, e é nesse momento que o professor usa da EP e pede aos aluno que criem atividades, questões, e façam observações sobre os objetos em si, podem ser questões envolvendo a soma, ou multiplicação dos números das faces, a probabilidade de cair determinados valores, ou até mesmo a geometria por trás do formato cúbico do dado. Nessa situação, como são os alunos que criam a problematização, eles de forma imediata já estão explorando e consequentemente sendo ativos no próprio ensino.

Quando um aluno começa a explorar um problema, inicialmente ele pode ter dificuldade, mas à medida que ele se dispõe a continuar a exploração, isso se torna cada vez mais fácil e imediato para ele. Além do que a própria mediação do professor, fará o aluno se sentir mais centrado no objetivo da EP, que é o de ir cada vez mais a fundo, como já foi previamente enunciado.

3. METODOLOGIA

Esta pesquisa consiste em uma análise qualitativa de quatro coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovadas pelo Programa Nacional do Livro e do Material didático (PNLD/2020-2024). As coleções selecionadas foram: Conexões (2020), Diálogo (2020), Multiversos (2020) e Prisma (2020). Cada coleção é composta por seis volumes, que abrangem os conteúdos previstos para os três anos do Ensino Médio.

A abordagem metodológica adotada foi qualitativa, em que é definida por Bogdan e Biklen (1994, p. 48-50), a partir de cinco características: i) a pesquisa qualitativa é feita tendo contato direto com a fonte (Bogdan e Biklen, 1994, p. 47), que nesse caso serão os livros didáticos, ii) “A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 48), diante disso que foram analisados problemas dos livros para exemplificar, iii) o processo é mais importante para um pesquisador qualitativo do que os resultados (Bogdan e Biklen, 1994, p. 48), é nesse âmbito que problemas analisados foram aqueles que podiam ser melhor explorados, iv) a pesquisa qualitativa é feita de forma indutiva (Bogdan e Biklen, 1994, p. 50), isto é, a pesquisa é feita passo a passo, sem formular teorias ou procurar dados que firmem uma possível hipótese, e por fim v) “O significado é de importância vital na abordagem qualitativa” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 50), nesse ponto, os dados obtidos de extrema importância para que a análise tenha uma conclusão, ou melhor dizendo, que através da pesquisa seja construído um significado. De modo curto, a ênfase é na qualidade e no aprofundamento das informações, ao invés da quantificação de ocorrências. Ademais, as análises foram feitas sob o olhar da metodologia EPRP, buscando identificar como os livros incorporam (ou não) elementos dessa perspectiva em suas propostas didáticas.

Assim, a análise seguiu as seguintes etapas:

1. Leitura dos sumários:

A primeira parte da análise foi feita usando o sumário do livro, com o intuito de ter uma ideia sobre como o livro estava composto. Quais eram os principais conteúdos alvos daquele volume e se a sequência dos conteúdos estava adequada à proposta. Nessa etapa foi observado como as coleções dividiram os conteúdos do Ensino Médio em seus volumes, como estavam sequenciados, e até se os objetivos de cada volume faziam sentido, quando considerado o volume completo, isto é, se os conteúdos eram complementares e fazia sentido estarem em um mesmo volume.

2. Análise preliminar:

Nesta etapa foi feito um breve exame dos materiais didáticos onde inicialmente foi feita uma leitura leve, tendo como objetivo responder à pergunta, De que forma a metodologia é utilizada neste livro/coleção e qual sua proposta de aplicação? Para então poder avaliar como ela poderia estar se aproximando da EPRP. O propósito era observar como as coleções se comportam, e se haviam singularidades variando de uma para outra.

3. Análise aprofundada:

Nesta etapa foi feita uma leitura mais meticulosa visando agora a sintonia dos conteúdos apresentados e a metodologia utilizada. Onde foi analisado se o autor se atém a um padrão de organização dos capítulos, ou se cada tema e/ou volume é abordado de forma diferente.

4. Análise dos dois primeiros volumes:

Nesta etapa foi analisado de forma mais minuciosa os dois primeiros volumes, de modo que foram retirados alguns problemas que retratavam tanto a estratégia metodológica da coleção, quanto a relevância daquele tipo de problemas para seus determinados conteúdos. A ideia principal era trazer apenas problemas, mas com o decorrer vemos que situações problemas, atividades propostas e atividades resolvidas, também tinham um papel relevante no ensino. Porém, como a EPRP gira tem como ponto de partida os problemas, foram analisados em sua grande maioria os problemas obtidos dos LD, como eles estavam incluídos em cada obra, e se o nível estava adequado com a proposta da coleção.

5. Metodologia de cada coleção/ livro didático:

Ao fim da análise de cada coleção, foi estabelecida o que seria considerada a metodologia característica daquele livro/coleção, e apontadas características individuais e semelhantes às outras coleções. Ao término das análises de todas as coleções, foi também estabelecido o que seria uma metodologia comum dos livros didáticos, isto é, algo que foi comum em todas as coleções.

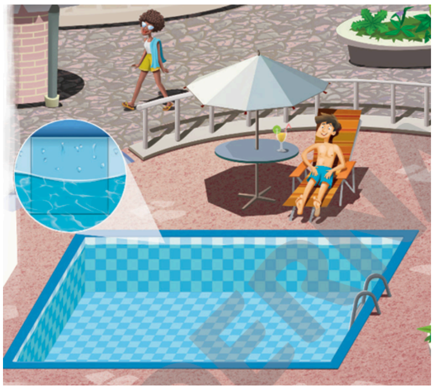
4. ANÁLISES DOS LIVRO DIDÁTICOS E DISCUSSÕES

4.1.1 Coleção Conexões (Leonardo, 2020) volume 1 (C1) - Grandezas, álgebra e algoritmos

Ao analisar o sumário do primeiro livro da coleção, vemos que foi dividido em quatro capítulos, sendo eles, Grandezas e medidas, Conjuntos, Funções e Algoritmos e introdução à programação, com isso temos que um dos objetivos dele com sendo à programação em Python, que é a última seção do livro. Com base nisso, a distribuição dos conteúdos nos capítulos do livro, faz sentido, assim como a sequência deles.

O capítulo inicia com uma situação problema descrita e ilustrada. Os primeiros exercícios propostos do C1, retomam ela, porém parece que foram colocados apenas para justificar a metodologia usada, pois não havia conteúdo teórico suficiente para propor exercícios ainda. Um dos exercícios pedia para contar os quadrados de uma piscina, entretanto, era difícil de ver os quadrados para contar em um dos lados da piscina, o poderia ser mais difícil ainda para alguém com deficiência visual. Abaixo temos a figura com a situação problema usada nesse exercício.

Figura 1 - Situação problema



Fonte: Conexões volume 1 (2020, p. 15)

Em seguida temos um exercício resolvido, sobre como usar um paquímetro, para medir algo e depois um exercício proposto focado em pesquisa de grandezas. A partir desse ponto foi notado um padrão no nível dos exercícios propostos e resolvidos no livro, onde tinham de fato o intuito de praticar, o que seria diferente com problemas, que exigem um pouco mais de atenção abstração do aluno. Algo mais elaborado para os alunos resolverem, seria possível, pois os exercícios poderiam de fato ir um pouco mais além. Dois foi o total de problemas que foram encontrados neste primeiro capítulo. Ambos em exercícios complementares e ambos retirados do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de anos anteriores, porém estavam bem estruturados de acordo com o tema do capítulo.

Dos problemas do capítulo 2 (Conjuntos), foram encontrados no total 8 (oito). Dessa vez eram 5 do assunto de conjuntos e todos podiam ser resolvidos do mesmo jeito, que era usando o diagrama de venn. Logo a dificuldade seria a apenas para o primeiro problema e os outros poderiam ser encarados com exercícios de fixação. Porém tiveram 3 problemas que se destacaram, e dois deles foram:

Figura 2 - Exercício Resolvido, Problema

Considerando que no conjunto dos números inteiros, para a adição e a multiplicação, a propriedade do fechamento é válida, isto é, que a soma $(a + b)$ e que o produto $(a \cdot b)$ de dois números inteiros, a e b, são também números inteiros, demonstrar as afirmações abaixo.

a) A soma de dois números racionais é um número racional.

b) O produto de dois números racionais é um número racional.

Fonte: Conexões volume 1 (2020, p. 48)

Figura 3 - Problema

Observe a expressão:

$$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{4}{2n-1}$$

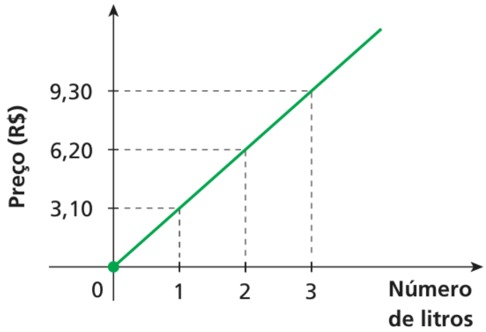
Fonte: Conexões volume 1 (2020, p. 48)

Na figura 2, os alunos podem observar e serem convencidos de uma propriedade matemática muito útil, bem como aprender como a matemática geralmente é produzida. Problemas como esse, poderiam muito bem, serem propostos para os alunos, para que eles desenvolvam o pensamento lógico e posteriormente o conhecimento matemático. Existe ainda outro exercício resolvido no capítulo, que pede para mostrar que √2 é irracional.

Na figura 3 o problema consiste em os alunos investigarem a soma da sequência com o uso de uma planilha eletrônica, os valores de n variando de 1 a 10 e depois de n = 10000. E depois discutissem para qual número irracional ela se aproximava, sendo π (pi) esse valor.

No terceiro capítulo que era o de funções os problemas se seguiram quase que iguais e seguindo a mesma metodologia das capítulos anteriores, foram retirados 2 problemas que são muito pertinentes, nos quais o critério para isso foi a capacidade de exploração do problema, e eles são:

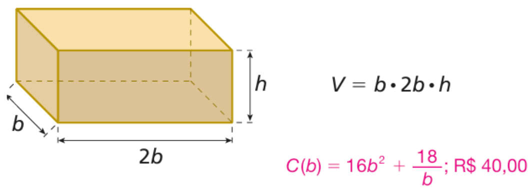
Figura 4 - Situação problema



Fonte: Conexões volume 1 (2020, p. 72)

Figura 5 - Problema

Uma empresa fabrica caixas de diferentes dimensões, mas de volume sempre igual a 2 m^3. O comprimento dessas caixas é o dobro da largura. Observe abaixo o esquema da caixa.



O material com o qual é feita a base superior e a base inferior da caixa custa R$ 4,00 o metro quadrado, e o material das laterais custa R$ 3,00 o metro quadrado.

Expresse o custo C do material para a fabricação da caixa em função da largura *b* da base. Calcule o preço de custo de uma caixa de 0,5 m de largura.

Fonte: Conexões volume 1 (2020, p. 90)

Na figura 4 temos uma situação problema clássica de função afim, onde se pode explorar desde os valores de x e y até a expressão algébrica. Já na figura 5 é um problema mais elaborado e com condições únicas, tanto que no livro é proposto como desafio. Tal problema não avalia só o conhecimento de função do aluno, mas também o nível de abstração matemática, pois no problema os valores das laterais e das bases de caixa são diferentes, mas o volumes é sempre constante, o que significa que dada a largura da caixa, pode acontecer de a altura ser muito pequena ou muito grande, mas isso cabe à o aluno perceber. Mas de modo geral, os problemas desse capítulo foram melhores, talvez pelo nível de dificuldade que está aumentando.

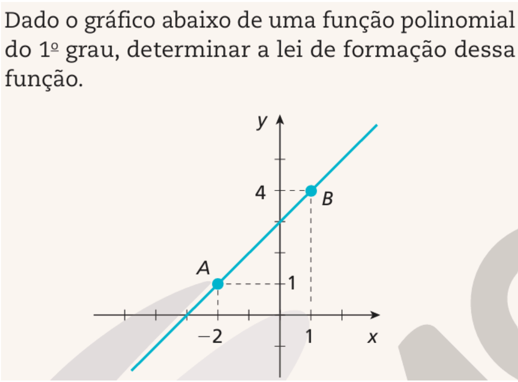
No último capítulo (Algoritmos e introdução à programação), não houveram praticamente problemas matemáticos, pois como um dos objetivos do livro era a introdução a programação em Python, os problemas eram voltados para a linguagem de programação.

4.1.2 Coleção Conexões (Leonardo, 2020) volume 2 (C2) - Funções e aplicações

Iniciando com o sumário temos uma clara divisão dos conteúdos, onde o foco é de fato funções. E após isso temos algumas aplicações de funções, logo o objetivo do livro é o exato tema que leva o subtítulo dele. Esse livro foi disposto em 6 capítulos, sendo eles: Função afim, função quadrática, função exponencial, função logarítmica, sequências e matemática financeira. A sequência está coesa, afinal, os dois últimos temas do livro, podem ser aplicações dos capítulos anteriores. Dito isso serão levadas em consideração os 4 primeiros capítulos como sendo um tema só, já que todos falam de função.

Nos primeiros 4 capítulos, o assunto de função é explorado da mesma forma que no livro anterior. Nele há poucos problemas, novamente divididos em exercícios propostos e resolvidos. Posto isso, segue um problema muito explorável que foi retirado do primeiro capítulo.

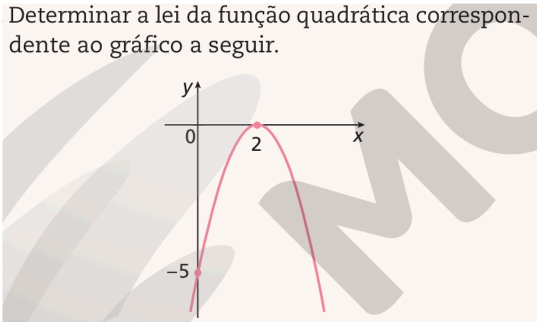
Figura 6 - Problema



Fonte: Conexões volume 2 (2020, p. 22)

Este tipo de problema tem uma grande relevância, pois trata a função afim representada em forma de gráfico, ou seja, uma reta. Uma investigação pode ser feita a fim de notar que quando o valor de x cresce, o valor de y cresce de forma proporcional ao crescimento de x. Mais uma vez, isso deve ser constatado pelos alunos e mediado pelo professor. Este problema estava resolvido no livro, porém, existe nele uma riqueza que poderia ser devidamente explorada, visto que existem várias formas de se determinar a lei de formação de uma reta. Usando Interpolação Linear, usando o coeficiente angular, ou até mesmo plotando o gráfico numa plataforma como o Geogebra por exemplo. O que mostraria ao aluno que era possível resolver esses problemas por vários caminhos, contanto que a matemática estivesse correta, não existiria caminho errado, no máximo poderia haver um modo mais prático. A seguir temos um exercício resolvido, agora retirado do capítulo 2.

Figura 7 - Problema



Fonte: Conexões volume 2 (2020, p. 47)

Esse exercício na figura 7 é similar ao outro, pois a proposta é a de achar a lei de formação da função e ao mesmo tempo bem diferente. Este problema que está em forma de gráfico, pode ser investigado de várias formas. Como por exemplo o fato de a equação do segundo grau que corresponde a ele possuir apenas uma raiz, ou seja, o Delta é zero. Outra é que o coeficiente a é negativo. E juntando as duas anteriores o ponto máximo é 2, que é também a raiz, logo, quanto o delta é zero e, a é negativo, então a raiz é o ponto máximo. Para perceber isso, o aluno não precisa resolver o problema, na verdade, seria muito bom que o aluno conseguisse notar isso por conta própria, por isso a importância da observação e da exploração do problema, para além da sua resolução é claro.

No capítulo 3 (Função Exponencial), não foi visto algo que poderia ser considerado um problema explorável, pois a maioria era apenas para exercitar. Isso talvez se dê a dificuldade que se tem de se obter a fórmula geral da equação que deu origem a um gráfico exponencial mesmo sabendo algumas características dele. No capítulo 4 (Função Logarítmica) também não foi retirado nenhum problema pertinente, pois os possíveis problemas eram em sua maioria de matemática financeira que é outro tópico que será abordado mais adiante nesse livro.

No capítulo 5 (Sequências) era esperado ter muitos problemas, devido a riqueza do conteúdo, porém apenas 1 chamou a atenção, e ele foi:

Figura 8 - Problema

(Fuvest-SP) Sejam a e b números reais tais que:

(I) a, b e $a + b$ formam, nessa ordem, uma PA;

(II) 2^a, 16 e 2^b formam, nessa ordem, uma PG.

Então, o valor de a é: alternativa e

Fonte: Conexões volume 2 (2020, p. 123)

Este na figura 8 foi um problema bem objetivo, mas ao mesmo tempo bem elaborado do ponto de vista da RP, pois não foi algo tão claro de se resolver. Mas a riqueza dele está na quantidade de conceitos usados, e na análise que é feita, para saber quais e quando usá-los. Onde a solução é dada na análise do comportamento das razões de uma PA e uma PG.

No último capítulo (matemática financeira), os exercícios foram aplicação das fórmulas de juros simples e compostos.

4.1.3 Coleção Conexões (Leonardo, 2020) volume 3 (C3) - Estatística e probabilidade

Ao analisar o sumário do C3, vemos 5 capítulos, dispostos da seguinte forma: Organização e apresentação de dados, Análise de dados, Medidas estatísticas, Análise combinatória e Probabilidade. De fato, fica claro que o livro tem dois objetivos, sendo eles, o ensino básico de estatística e de probabilidade. Dito isso, a forma como os conteúdos são sequenciados tem sentido e coerência. Porém como foi pontuado dos volumes anteriores, há uma escassez de problemas.

4.1.4 Coleção Conexões (Leonardo, 2020) volume 4 (C4) - Trigonometria

Neste volume os conteúdos estão dispostos em 4 capítulos da seguinte forma: A semelhança e os triângulos, Trigonometria no triângulo retângulo, Ciclo trigonométrico e trigonometria em um triângulo qualquer e por último Funções trigonométricas. Obviamente está o livro está coeso do modo qual foi organizado e o objetivo é a trigonometria e o que a compõe. Neste volume existiam mais problemas eram um pouco mais contextualizados pelo fato de ser um conteúdo facilmente aplicado, embora ainda a maioria sendo apenas exercícios simples. Até mesmo as questões desafios eram solucionadas simplesmente com aplicação.

4.1.5 Coleção Conexões (Leonardo, 2020) volume 5 (C5) - Geometria plana e espacial

No volume 5 intitulado de Geometria plana e espacial, a partir do sumário temos a seguinte divisão dos 4 capítulos: Superfícies poligonais, círculo e áreas, Introdução à Geometria espacial, Poliedros e Corpos redondos. Este volume tem como objetivo a geometria, e a divisão dos conteúdos é coerente e adequada.

Neste volume houveram muitos problemas, mas com poucas contextualizações para os alunos, e muitas vezes a contextualização era muito específica e algo menos prático onde era possivelmente improvável que os alunos necessitassem daquela aplicação do conteúdo no cotidiano deles. Ademais, ainda continuavam sendo exercícios onde era necessário um ou dois passos para resolução, e consequentemente uma escassez de problemas.

4.1.6 Coleção Conexões (Leonardo, 2020) volume 6 (C6) - Matrizes e geometria analítica

Este é o último livro da coleção, vemos que a disposição dos 4 capítulos são: Matrizes e determinantes, Sistemas Lineares, Geometria analítica e Transformações geométricas. O volume então pode ser classificado como tendo dois objetivos, o breve estudo de matrizes, e a introdução matematicamente analítica. Nesse livro, assim como nos anteriores, a maioria das proposições eram apenas exercícios de fixação, e tinham poucos que poderiam ser de fato problemas. Porém dados o nível de abstração do tema, na maioria das vezes eram exercícios sem contexto ou aplicação direta.

4.1.7 Análise crítica da Coleção Conexões (Leonardo, 2020)

Ao observar a coleção Conexões como um todo, vemos que um dos objetivos trabalhado no primeiro livro, que era o de introdução a programação, na verdade está presente em toda obra. Em grande parte dos exercícios propostos era pedido para o aluno plotar um gráfico em algum software de construção gráfica como o Geogebra por exemplo, ou usaram um programa de planilha eletrônica para ajudar em cálculos de sequências, e até mesmo no final, no último volume quando era pedido para usar comandos para transladar e rotacionar figuras geométricas no plano. Dito isso, podemos afirmar que como um objetivo geral da obra o desenvolvimento do pensamento computacional, que de fato foi mencionado algumas vezes no decorrer do livro e também no início de cada volume, o que propicia a ideia de que a proposta da coleção é uma educação matemática voltada para a utilização da tecnologia, e do digital para a vida cotidiana.

4.2.1 Coleção Diálogo (Teixeira, 2020) volume 1 (D1) - Grandezas, Medidas e Matemática Financeira

Na análise do primeiro livro da coleção Diálogo, logo vemos semelhanças com a coleção anterior mas também vemos diferenciais, como mostra uma fala no início do livro que diz: “Para ajudá-lo na compreensão dos assuntos tratados, são apresentados exemplos, exercícios e problemas resolvidos, seguidos de propostas de exercícios e problemas que buscam consolidar a aprendizagem, além de seções que tratam do uso de softwares e de linguagem de programação.” (Teixeira, v. 1, p. 3).

Inicialmente a coleção promete algo muito próximo da anterior, porém nesta o autor assegura que a RP está na metodologia usada. Partindo para o sumário, prontamente surge uma grande diferença nessa coleção, onde os capítulos são muito mais numerosos que a anterior.

Nesse volume há 18 capítulos, sendo eles: Potenciação e notação científica, Sistema Internacional de Unidades, Tempo, comprimento e massa, Área, volume e velocidade, Grandezas, medidas e voluntariado, Algarismos significativos, Capacidade de armazenamento, Armazenamento de dados e Medicina, Taxa de transferência de dados, Velocidade de processamento, Porcentagem, Alíquotas do IPI, Indicadores socioeconômicos, Acréscimos e descontos sucessivos, Juro, Equivalência de capitais, Sistema de amortização e Planejamento orçamentário.

O primeiro objetivo que podemos destacar é o ensino de grandezas medidas e notações (capítulos 1 à 6), depois temos um estudo sobre a medição, análise, armazenamento de dados (capítulos 7 à 10), e por último temos a matemática financeira (capítulos 11 à 18) como objetivo final do livro.

A metodologia do livro é como na coleção passada, onde inicia com uma contextualização motivacional nesse caso. Foi vista também uma grande diferença na didática do livro, tendo as explicações desenvolvidas aos poucos até a chegada da fórmula algébrica geral, ou generalização matemática. Para só então começar a proposição na aba de Exercícios e problemas.

A análise então foi feita dividindo o livro dos objetivos previamente enunciados. De fato, nesse livro temos problemas matemáticos sendo propostos e usados como exercícios da matemática. Iniciaremos com o primeiro objetivo. Segue um exercício que foi retirado.

Figura 9 - Exercício, problema

Utilizando as propriedades das potências, mostre que

$$\frac{\left(a^3 \cdot b\right)^2 \cdot \left(a^{-3}\right)^2}{\left(\frac{b^{-2}}{a^3}\right)^2} = \left(a \cdot b\right)^6, \text{ com } a \neq 0 \text{ e } b \neq 0.$$

Resposta no final do livro.

Fonte: Diálogo volume 1 (2020, p. 14)

A questão da anterior figura 9, normalmente se trataria de um exercício, porém o fato dela pedir para mostrar algo, faz com que possa ser tratada como um problema. Ademais, como nela o aluno já sabe onde deve chegar, então o processo é o que realmente interessa. Realizando o que chamamos na matemática de demonstração.

No segundo objetivo do livro, ficou evidente a preocupação do autor com o avanço tecnológico, e esse era o intuito da parte de dados do livro. Nela os alunos aprenderiam como os dados são medidos e como classificá-los, e tudo isso para o uso no cotidiano. Para aprenderem qual a diferença entre um cabo USB-A e USB-C por exemplo. Que nesse caso é a tanto a velocidade e quantidade de dados que podem ser processados, quanto a quantidade de funcionalidades de cada. Os problemas nesses capítulos eram em grande parte aplicação da regra de três com a finalidade de comparar e converter.

Dando sequência temos agora a matemática financeira como objetivo. E como já era esperado muitos dos exercícios e problemas eram aplicados a compra e venda de produtos e porcentagem de um ou mais valores em relação a outro. Nesse âmbito foram retirados dois problemas, que são:

Figura 10 - Problema

Um comerciante tem um lucro de 60% sobre o preço de custo de um produto. No último mês, ele vendeu 47 unidades desse produto e arrecadou R$ 5 113,60. Qual é o preço de custo de cada unidade desse produto? R$ 68,00

Fonte: Diálogo volume 1 (2020, p. 94)

Figura 11 - Problema

O salário de Marcos é 8% maior do que o salário de Bruno. Sabendo que no próximo mês Marcos receberá um aumento de 25% sobre o valor de seu salário, determine quantos por cento seu salário será maior do que o de Bruno. alternativa e

Fonte: Diálogo volume 1 (2020, p. 94)

Aqui vemos dois problemas clássicos de matemática financeira. O da figura 10 pode ser resolvido com regra de três simples, e o da figura 11 com uma pequena equação de primeiro grau. Mas ambos são problemas que por mais que sejam bem distintos, possuem um nível abstração semelhante, sendo muito provável que um aluno que consiga resolver um, também seja capaz de resolver o outro.

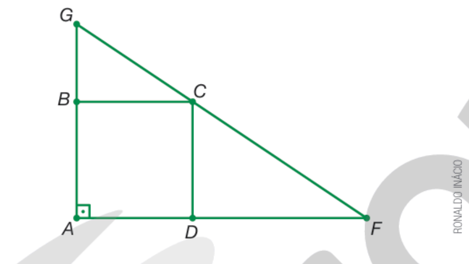
No capítulo de juros, o que foi descoberto também estava dentro do esperado. Mais uma vez, questões envolvendo compras e vendas, juntamente com o advento de questionamentos sobre investimentos. Sendo eles comuns ou compostos. Os capítulos finais, juntos, possuem uma ideia de conscientização e informação sobre sistemas complexos como: amortização e organização financeira. Os problemas vistos nesses capítulos podem ter o propósito de preparar os alunos para uma vida adulta mais consciente. Do ponto de vista financeiro. Logo, são aplicações dos conceitos às situações hipotéticas, mas podendo ao mesmo tempo serem reais.

4.2.2 Coleção Diálogo (Teixeira, 2020) volume 2 (D2) - Geometria plana

O segundo volume da coleção Diálogo, trata da Geometria plana. Nele o conteúdo está disposto em 12 capítulos, tais quais: O Teorema de Tales e a semelhança de triângulos, As relações métricas e a trigonometria no triângulo retângulo, Trigonometria em um triângulo qualquer, Trigonometria na circunferência, Funções trigonométricas, Função do tipo trigonométrica: um modelo matemático, Fórmulas de transformação, relações e equações trigonométricas, Ladrilhamento, Área do quadrado, do retângulo, do paralelogramo e do losango, Área do triângulo e de polígonos regulares, Área e as vagas de estacionamento destinadas aos idosos e Área do círculo. Podemos observar 3 objetivos neste volume, o primeiro são relações métricas e trigonometria no triângulo e na circunferência (capítulos 1 a 4), segundo sendo conjuntos e funções trigonométricas (capítulos 5 a 7), por fim o cálculo de áreas de figuras planas (capítulos 8 a 12). Iniciando com um exercício retirado do livro que diz.

Figura 12 - Problema

O quadrado *ABCD* possui um vértice em comum com o triângulo *AFG* e, além disso, os vértices *B*, *C* e *D* pertencem a cada um dos lados do triângulo *AFG*.



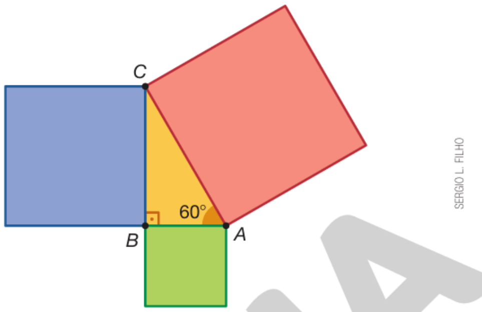
Sabendo que $AG = 20$ cm e que $AF = 30$ cm, determine o perímetro do quadrado *ABCD*.

Fonte: Diálogo volume 2 (2020, p. 19)

Neste problema na figura 12, muitos conceitos de geometria plana são usados. Congruência e proporcionalidade de segmentos são alguns deles. Tal problema é muito interessante pois à primeira vista parece que tem algo faltando para ser possível obter uma solução, mas na verdade não há. A seguir foram retirados mais dois problemas.

Figura 13 - Problema

A imagem apresentada a seguir é formada por um triângulo retângulo e três quadrados.

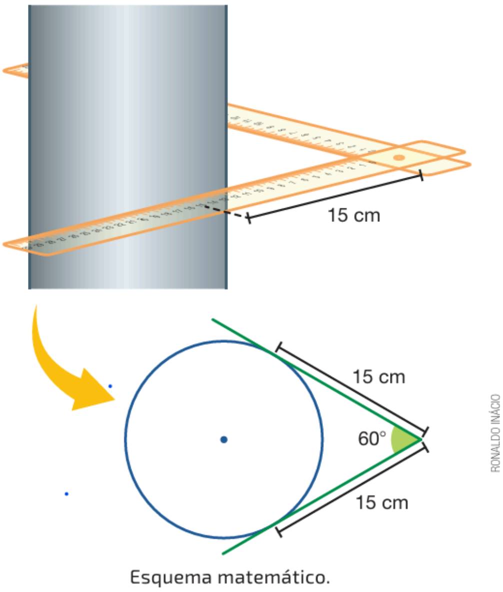


Se $AB = 4,5$ cm, então a soma das áreas dos três quadrados é: alternativa a

Fonte: Diálogo volume 2 (2020, p. 39)

Figura 14 - Problema

Na medição do diâmetro de um tubo de aço cujas extremidades estão inacessíveis, um operário utilizou um instrumento em forma de "V", com hastes graduadas, como ilustrado a seguir.



De acordo com as informações, calcule aproximadamente o diâmetro do tubo. 17,3 cm

Fonte: Diálogo volume 2 (2020, p. 40)

O primeiro na figura 13 é um problema é notável por uma das formas de resolução dele ser utilizando o conceito de cosseno aliado ao teorema de Pitágoras. Isso além da própria fórmula da área de um quadrado. Já no segundo na figura 14, temos um problema onde é mostrada uma situação que facilmente por ser real, ou melhor, uma situação de matemática aplicada. Com a ilustração fica visível que é possível calcular o raio do tubo e consequentemente o diâmetro. Porém o mais importante é que com esse problema, pode ser feita uma generalização mostrando que é possível calcular qualquer diâmetro, usando como referência o método que foi aplicado na resolução desse problema.

No segundo objetivo observamos uma breve explicação dos conceitos de conjunto e de função. Para então ter foco principal no ensino faz funções seno, cosseno e tangente. Análise de gráfico, transformações e equações, são alguns dos conteúdos desse objetivo. A questão abaixo exemplifica o nível dos problemas encontrados.

Figura 15 - Problema

Mostre que $\cos^4\beta - \text{sen}^4\beta = \cos 2\beta$.
Resposta no final do livro.

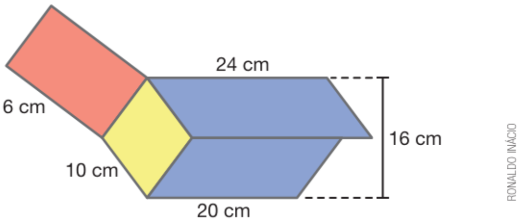
Fonte: Diálogo volume 2 (2020, p. 101)

Nesse objetivo do livro, tinham muitas questões de exercícios. Porém, por se tratar de um assunto complexo, a prática com muito exercícios se faz necessária antes de se chegar a resolver um problema como esse, que envolve além dos conteúdos deste capítulo, outros conteúdos como produtos notáveis. Além é claro de mais uma vez, o passo a passo ser o que realmente interessa, uma vez que a resposta da expressão já foi dada. E neste problema na figura 15, o passo inicial seria aplicar um produto notável conhecido como a diferença entre dois quadrados, após aplicar uma equivalência trigonométrica.

No terceiro objetivo inicia-se com o tema de ladrilhamento do plano, no qual sequenciamento é usado numa tentativa de demonstrar as fórmulas de área de um quadrado ou retângulo. E assim sucessivamente demonstrando as fórmulas da área de outras figuras geométricas com paralelogramo e losango. Segue um problema retirado.

Figura 16 - Problema

De acordo com as medidas indicadas, calcule a área total da figura, sabendo que os polígonos em vermelho, em azul e em amarelo são, respectivamente, retângulo, paralelogramo e losango.
608 cm²

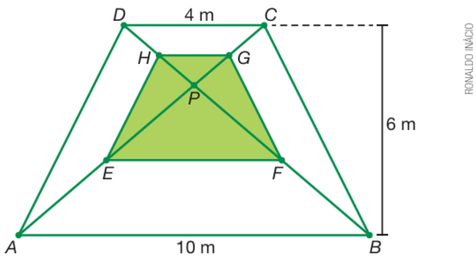


Fonte: Diálogo volume 2 (2020, p. 120)

Neste problema na figura 16, vemos que aplicações das fórmulas das áreas de cada uma das figuras será necessário para a resolução, e apesar de ser simples, é muito favorável ao aluno, pela prática e identificação das formas. A partir desse ponto o livro traz e mostra mais fórmulas de áreas de polígonos regulares ou irregulares.

Figura 17 - Problema

Luiz deseja reduzir a área de seu jardim. Para se planejar, ele construiu o seguinte esquema, em que o jardim atual está representado pelo trapézio isósceles *ABCD*.

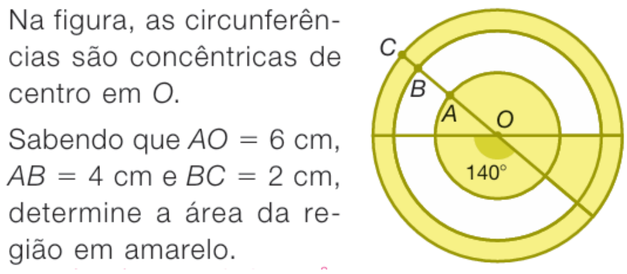


Sabendo que o novo jardim de Luiz está representado pelo trapézio *EFGH* e que *E*, *F*, *G* e *H* são pontos médios de $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ e $\overline{DP}$, determine sua área. 10,5 m²

Fonte: Diálogo volume 2 (2020, p. 130)

No problema da figura 17, temos uma figura que foi reduzida proporcionalmente a outra. Cabe nesse caso o aluno descobrir qual a é constante de proporcionalidade e usá-la. Nesse problema o aluno pode notar que os lados da figura menor são metade dos lados correspondentes na figura maior, e que isso altera a área de modo diferente do esperado, sendo nesse caso o valor da área ser reduzido não pela metade, mas sim a área menor correspondendo à quarta parte da área maior. O volume, então, finaliza com a área de um círculo e mais alguns problemas. Como por exemplo.

Figura 18 - Problema



Fonte: Diálogo volume 2 (2020, p. 147)

Que nesse caso da figura 18 é um pouco similar ao anterior do ponto de vista que pode ser resolvido usando as proporções encontradas na figura. A grande diferença é a figura que nesse caso é um círculo e que serão necessários mais cálculos, das figuras, inclusive pedaços dos círculos que exigem outra forma diferente. E assim terminamos o D2.

4.2.3 Coleção Diálogo (Teixeira, 2020) volume 3 (D3) - Geometria espacial

Da mesma forma como foi feita a coleção anterior, a partir daqui faremos a análise dos sumários e objetivos do livro. O livro é composto de 13 capítulos, sendo eles, Geometria espacial de posição, Projeções ortogonais no plano e distância no espaço, Poliedros, Prismas, Prismas na natureza, Pirâmides, O volume da Grande Pirâmide de Gizé, Cilindro, Volume interno de um motor, Cone, Esfera, Uma aplicação de volume: adulteração de combustíveis, Projeções cartográficas. Podemos dizer então que o livro possui 3 objetivos. O primeiro é a geometria espacial e o estudo de figuras poligonais (capítulos 1 ao 7), o segundo é o estudo de corpos redondos no espaço (capítulos 8 ao 12), e por fim o terceiro, que era o capítulo de projeções gráficas (capítulo 13). A forma como está sequenciado os conteúdos está coerente, e ainda mais interessante do que na coleção anterior pois existem capítulos inteiramente de aplicação como o 12 (Uma aplicação de volume: adulteração de combustíveis), que são como se fossem um apêndice, onde o professor ou até o aluno pode escolher se quer estudar aquilo. Porém ainda sim se faz proveito o estudo de uma possível aplicação a algo real, além de despertar e satisfazer a própria curiosidade no estudante.

4.2.4 Coleção Diálogo (Teixeira, 2020) volume 4 (D4) - Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas

Tomando partido pelo sumário temos a seguinte divisão dos 14 capítulos: Coordenadas e distâncias, Matrizes, Operações com matrizes, Matriz inversa e determinantes, Uma aplicação de matrizes, O ponto e a reta, Sistemas lineares, Escalonamento de sistemas lineares, Circunferência, Circunferência e Arte, Cônicas, A elipse e o cometa Halley, Transformações geométricas, Transformações geométricas e Arte. Temos 3 objetivos nesse livro que podem ser vistos como sendo: geometria analítica e álgebra linear (capítulos 1, 6, 9 ao 12), o estudo e matrizes (capítulos 2 ao 5, 7 e 8), e por fim, o estudo de transformações e aplicações (capítulos 13 e 14). A forma como está organizado o conteúdo nesse volume é um tanto diferente, pois os objetivos estão sendo trabalhados de forma simultânea em alguns capítulos, e em outro estão sendo alternados. Essa divisão é cativante pois faz os alunos sempre retornarem aos assuntos já passados ao longo do ano, e ainda mostra a correlação entre eles, portanto apesar de ser uma estratégia organizacional diferente, a topicalização nesse volume está coerente.

4.2.5 Coleção Diálogo (Teixeira, 2020) volume 5 (D5) - Estatística e probabilidade

Neste volume existem 13 capítulos que são: Os conjuntos, Princípio aditivo, multiplicativo e arranjos, Permutações, Combinação simples e Binômio de Newton, Probabilidade, Probabilidade condicional, Probabilidade e a produção de resíduos, Estatística, Gráficos e tabelas, Medidas de tendência central, Medidas separatrizes, Medidas de dispersão, Estatística e probabilidade. Nele existem três objetivos que são análise combinatória (capítulos 1 ao 4) probabilidade (capítulos 6, 7 e 13) estatística (capítulos 8 ao 13). Nessa divisão apenas o capítulo final (13) possui dois objetivos em um só. Diferente da coleção anterior, nesse livro tem uma ênfase em estatística. O livro também tem uma excelente divisão dos conteúdos, e uma sequência melhor ainda.

4.2.6 Coleção Diálogo (Teixeira, 2020) volume 6 (D6) - Funções e progressões

O volume 6 é composto de 19 capítulos sendo eles: Os conjuntos, Números reais no método braille, Noção intuitiva de função, Gráfico de uma função, Função afim, Função afim crescente e função afim decrescente, Proporcionalidade e função linear, Modelo linear, Função quadrática, Coeficientes de uma função quadrática, Vértice de uma parábola, Inequação do 1o e do 2o grau, Progressão aritmética, Função exponencial, Função exponencial e radioatividade, Equação e inequação exponencial, Progressão geométrica, Logaritmo e Função inversa e logarítmica. O primeiro objetivo é o ensino de conjuntos (capítulo 1), que serve de base para os demais. O segundo é o ensino de função (capítulos 3 ao 12, 14 ao 16, 18 e 19), e o terceiro a particularização de função para progressão (capítulos 13, 17). A sequência disposta neste volume é também diferente da coleção anterior, onde no livro atual as progressões são vistas de acordo com o conteúdo e não em sequência, o que faz total sentido visto que uma PA geralmente é uma função afim, e um PG uma função exponencial. Ademais há nesse livro também aplicação e capítulos apêndices, onde existem ideias de aplicação ou curiosidades. Além de ser dada uma breve explicação de logaritmo antes da função em si.

4.2.7 Análise crítica da Coleção Diálogo (Teixeira, 2020)

Ao analisarmos a coleção Diálogo com um todo temos que a proposta dela é um pouco mais sociopolítica, no sentido de tentar trazer os conceitos matemáticos com aplicações para o lado do cotidiano, como foi o caso do cálculo de proporção de gasolina para álcool para saber se existia adulteração (D3). A grande diferença entre essa e a coleção anterior foi o fato de que os problemas eram muito mais frequentes nessa coleção, além de que eram muito mais coesos, no quesito nível de dificuldade. Nessa coleção também existiam questões que eram necessários outros elementos didáticos como calculadoras e o uso do visualG, para resolver problemas, onde quando necessário eram apresentados o problema e o material didático que deveria ser usado para resolvê-lo. Porém com uma frequência bem menor que na coleção passada. A maior singularidade dessa coleção foi a riqueza nos detalhes, tanto dos problemas quanto da disposição dos conteúdos. Portanto podemos dizer que o principal objetivo dessa obra foi o de ensinar o aluno a matemática em conjunto com o cotidiano em que ela aparece, fazendo as ligações entre teoria e prática.

4.3.1 Coleção Multiversos (Souza, 2020) volume 1 (M1) - Conjuntos e função afim

Inicialmente foi notada uma grande diferença na disposição dessa coleção, onde o manual do professor fica no fim do livro e não no começo como visto nas coleções anteriores, isso pode ser explicado pelo fato de a editora dessa coleção e da seguinte ser outra, nesse visto que nesse caso a editora foi a FTD. Ademais a coleção conta com uma forma diferente. Nesta coleção o autor tenta fazer com que o aluno seja mais ativo com seu próprio ensino, portanto para praticar os conhecimentos os alunos são convidados a fazer atividades.

Analisando o sumário temos que o livro é constituído por 3 capítulos, sendo eles, Conjuntos, Relações entre grandezas e noção de função e Função afim. Em consequência temos dois objetivos, o primeiro sendo o estudo de conjuntos, o segundo é o estudo de grandezas e função da forma intuitiva e por fim o conceito de função afim.

Podemos ver que nessa coleção onde nas anteriores encontramos exercícios, nesta temos atividades. E a diferença entre eles fica mais clara com um exemplo. Segue um caso retirado do livro.

Figura 19 - Problema

Considere os seguintes conjuntos e resolva as questões.

- $A = \{x \mid x$ é número par positivo, menor do que 7$\}$.
- $B = \{y \mid y$ é divisor positivo de 12$\}$.
- $C = \{z \mid z$ é número quadrado perfeito menor do que 30$\}$.

a) Represente cada conjunto, indicando seus elementos entre chaves.

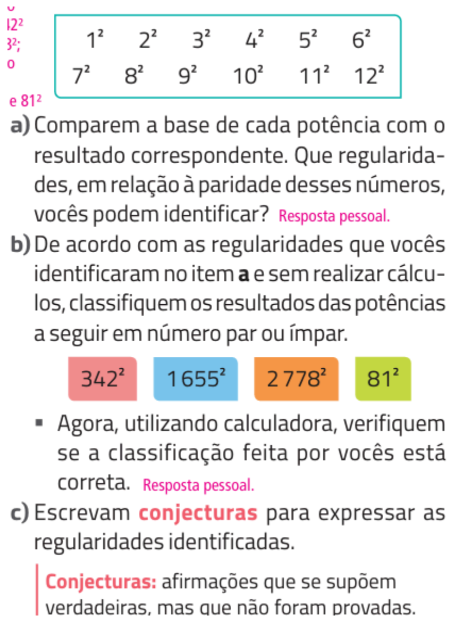
b) Entre esses conjuntos, algum é subconjunto de outro? Justifique.

Fonte: Multiversos volume 1 (2020, p. 16)

Nesse trecho da atividade na figura 19 foi utilizada uma notação diferente da que foi vista nas outras coleções, mas que foi abordada nele. Contudo, a maior diferença é que por mais se essas questões sejam similares aos exercícios comuns na primeira coleção, nessas em particular temos que dará um certo trabalho para os alunos responder, além de que uma situação problema como esses três conjuntos descritos, estão sendo explorados em mais de um questionamento, enquanto na primeira coleção as questões eram geralmente diretas. Aqui o livro já mostra o que foi apontado fazer parte de sua metodologia e objetivo. Ou seja, criar um aluno ativo e crítico. É claro que nesse livro também possui muitos exercícios simples, mas a grande diferença é que eles são mais fáceis no começo, e vão ficando mais elaborados com o passar de uma mesma atividade. Porém até esse momento o livro ainda não usou problemas, nem propostos nem resolvidos.

Nessa situação na figura 20, fica claro mais uma vez o objetivo de fazer de o aluno ser ativo em seu ensino. Nela o aluno pode explorar as características das potências quadradas, e como proposto, expressá-las em forma de conjecturas. A partir desse ponto o professor pode entrar como mediador e fazer até mesmo a generalização matemática, e de fato provando a veracidade das conjecturas, transformando-as em afirmações concretas.

Figura 20 - Atividade


1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2

7^2 8^2 9^2 10^2 11^2 12^2

a) Comparem a base de cada potência com o resultado correspondente. Que regularidades, em relação à paridade desses números, vocês podem identificar? Resposta pessoal.

b) De acordo com as regularidades que vocês identificaram no item **a** e sem realizar cálculos, classifiquem os resultados das potências a seguir em número par ou ímpar.

342^2 1655^2 2778^2 81^2

- Agora, utilizando calculadora, verifiquem se a classificação feita por vocês está correta. Resposta pessoal.

c) Escrevam **conjecturas** para expressar as regularidades identificadas.

Conjecturas: afirmações que se supõem verdadeiras, mas que não foram provadas.

Fonte: Multiversos volume 1 (2020, p. 32)

No início do capítulo 2 temos novamente nada muito distinto das outras coleções e consequentemente também nada novo, pelo menos na seção de grandezas do Sistema Internacional de medidas. A mudança vem no componente noção de função, onde para exemplificar temos a situação.

Figura 21 - Atividade, problema

Considere o quadrado representado a seguir, em que x corresponde à medida do lado, em centímetro.

ILUSTRAÇÕES: CBOOK PRODUÇÕES

a) Escreva uma função que relacione:
- o perímetro p desse quadrado e a medida x; $p = 4x$
- a área a desse quadrado e a medida x. $a = x^2$

b) Com base nas funções que você escreveu, calcule o perímetro e a área de um quadrado de lado $x = 5$. perímetro: 20 cm; área: 25 cm²

c) Determine o valor de x para que o quadrado tenha:
- 56 cm de perímetro; $x = 14$
- 144 cm² de área. $x = 12$

Fonte: Multiversos volume 1 (2020, p. 66)

Figura 22 - Atividade, problema

Obtenha o domínio da função definida em cada item, justificando seu procedimento.

a) $f(x) = \dfrac{9 - 2x}{2x - 6}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9x + 3}}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\dfrac{1}{3}\right\}$

c) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 81}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -9 \text{ e } x \neq 9\}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{7x + 5}}{\sqrt{6x + 1}}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\dfrac{1}{6}\right\}$

e) $f(x) = \dfrac{3}{2x^2 - 800} + \sqrt{3x - 5}$

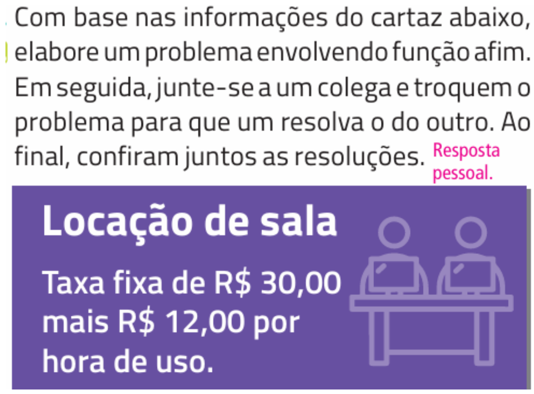
Fonte: Multiversos volume 1 (2020, p. 78)

Nessa situação problema na figura 21, é dada uma simples ideia do que é função e de como ela pode ajudar a descobrir valores desconhecidos, apenas sabendo a lei de formação dela. Esse tipo de atividade é interessante pois faz o aluno despertar e perceber que, nesse caso, que ao resolver a primeira questão, as demais ficam bem mais elementares, compactuando com o aluno ser ativo no próprio aprendizado. Ou seja, nesse livro existem exercícios simples de fixação, mas também existem atividades como essa que despertam algo a mais nos alunos. A seguir temos uma atividade retirada com o capítulo de função do livro. Outro tipo de atividade bem regular pode ser observado a partir da seguinte atividade.

Nessa atividade na figura 22 vemos que ela não pergunta apenas o domínio da função, mas ela quer que expresse o método usado, como que afirmando a importância do meio usado e não somente a resposta.

O livro também de forma similar à primeira coleção, trata de apresentar algumas funções muito úteis como o uso de planilhas eletrônicas. Como simular curvas de gráficos, por exemplo. Chegando ao capítulo final, em que o tema são as funções a fim, vemos mais uma vez a ideia de incentivo ao aluno em ser ativo no seu aprendizado.

Figura 23 - Atividade, Problema


Com base nas informações do cartaz abaixo, elabore um problema envolvendo função afim. Em seguida, junte-se a um colega e troquem o problema para que um resolva o do outro. Ao final, confiram juntos as resoluções. Resposta pessoal.

Fonte: Multiversos volume 1 (2020, p. 101)

Na figura 23 vemos uma imagem ou situação problema, na qual é pedido para os alunos e que a explorem e criem um problema. Ou seja, a EP e a PP aliadas à RP, a fim de fazer mais uma vez o aluno participar ativamente de seu ensino. Como professores, podemos então analisar o quanto os alunos sabem, ou, se sabem da teoria, pois a ideia esperada é que proponham desde problemas de função afim, até achar valores como numa PA, até o termo geral que modela essa função, ou, equação algébrica.

4.3.2 Coleção Multiversos (Souza, 2020) volume 2 (M2) - Funções e suas aplicações

No segundo volume como era esperado o assunto e sobre funções diferentes das coleções anteriores neste livro as funções são divididas em 3 capítulos sendo eles: Função quadrática, Função exponencial, Logaritmo e função logarítmica. Nesse livro não fala sobre a função afim, pois ela é contemplada no volume 1.

No primeiro capítulo como previsto inicia com uma curiosidade sobre o tema. Nesse caso fazendo paralelo com um salto em distância. As primeiras atividades para praticar os conceitos básicos apresentados no início do livro. Questões pedindo para identificar quais eram funções quadráticas, e pedindo para calcular algum valor específico. Porém retiramos um trecho de uma atividade, que segue abaixo.

Figura 24 - Trecho de atividade

A seguir estão relacionadas as coordenadas de alguns pontos dos gráficos das funções quadráticas *f*, *g* e *h*.

x	$y = f(x)$	x	$y = g(x)$	x	$y = h(x)$
-2	A	-2	-8	-2	2
-1	3	-1	-2	-1	C
0	0	0	0	0	0
1	3	1	B	1	$\frac{1}{2}$
2	12	2	-8	2	2

a) Determinem os valores correspondentes às letras *A*, *B* e *C*. A: 12; B: -2; C: $\frac{1}{2}$

b) Utilizando um plano cartesiano para cada função e as coordenadas obtidas nesses quadros, representem os gráficos das funções *f*, *g* e *h*. Resposta nas **Orientações para o professor**.

c) Determinem se os coeficientes de cada função são maiores, menores ou iguais a zero. f: $a > 0$, $b = 0$ e $c = 0$; g: $a < 0$, $b = 0$ e $c = 0$; h: $a > 0$, $b = 0$ e $c = 0$

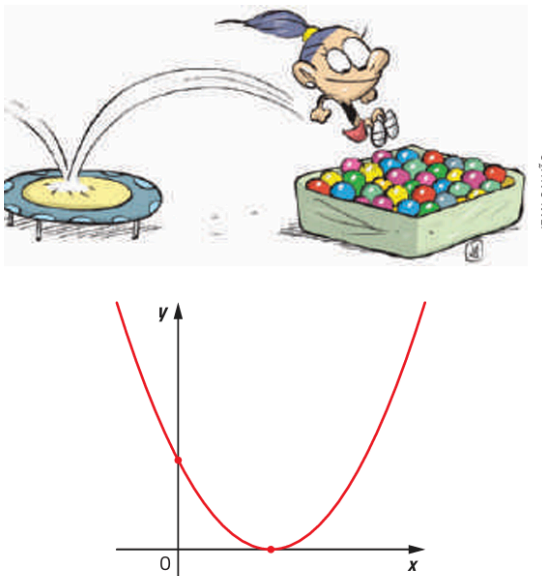
d) Escrevam a lei de formação das funções *f*, *g* e *h*. Em seguida, descrevam o que elas têm em comum.

Fonte: Multiversos volume 2 (2020, p. 30)

Mais uma vez com trecho de atividade na figura 24 temos que o livro leva o aluno a ser mais ativo em seu aprendizado, observando os valores simétricos na tabela por exemplo, é possível responder a primeira letra da atividade. A segunda letra leva à uma prática de esboço simples, a terceira o aluno tem de pensar uma equação que satisfaz cada ponto, para isso ele usará o conhecimento tanto dos coeficientes quanto do esboço do gráfico. Sendo essa uma atividade que pode ser formuladas conjecturas através da exploração da situação problema apresentada. Então, vemos que não é algo solto, as partes dessa questão se juntam para formar objetivo dela que é o de trabalhar as características de uma função quadrática. A atividade a seguir até então não foi vista nas outras coleções.

Figura 25 - Trecho de atividade

Com base na tirinha e no gráfico a seguir, escreva dois problemas que envolvam o cálculo do valor máximo ou do valor mínimo de uma função. Depois, junte-se a um colega e troquem o problema para que um resolva o do outro. Ao final, confiram juntos as resoluções.
Resposta pessoal.



Fonte: Multiversos volume 2 (2020, p. 41)

Essa atividade na figura 25 é de Proposição e RP, mas também usa um pouco de EP. Então vemos que o tema atividades que foi usado nessa coleção, foi bem apropriado pois de fato existe muita atividade diferentes do que foi encontrado nas anteriores. E mais uma vez, esse tipo de atividade permite ao professor analisar como está o andamento dos alunos, apenas observando a coerência de seus problemas com as situações problemas apresentados. Nessa atividade então, a própria proposição, é tão importante e talvez até mais do que a RP.

No capítulo de exponenciais, o livro trabalha o assunto tentando fazer paralelo a algo. Como a aplicação de função exponencial na matemática financeira e a formação de uma PG, ou datação de fósseis por exemplo. Nele também é feita a comparação em juros simples e composto, mais uma vez afirmando que um dos objetivos da coleção é preparar o estudante para a vida adulta.

No terceiro capítulo temos que a maioria das atividades tinham o intuito de praticar, uma vez que operações com logaritmos exigem muita prática, e que normalmente os logaritmos são usados como ferramenta para realizar cálculos, então faz sentido que tenham muita exercícios do tipo. Como exemplo temos a questão a seguir.

Figura 26 - Problema

(IFPE) Biólogos estimam que a população P de certa espécie de aves é dada em função do tempo t, em anos, de acordo com a relação $P = 250 \cdot (1{,}2)^{\frac{t}{5}}$, sendo $t = 0$ o momento em que o estudo foi iniciado. Em quantos anos a população dessa espécie de aves irá triplicar? (dados: $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 3 = 0{,}48$.) alternativa e

Fonte: Multiversos volume 2 (2020, p. 125)

Tal questão na figura 26 demanda não apenas o conhecimento sobre logaritmos, mas também um certo domínio, pois é necessário operar usando as propriedades dos logaritmos a fim de fazer a aparecer os valores que a questão dá, afinal esse tipo de questão não se deve e nem pode fazer o uso de uma calculadora. Fazendo o uso das operações logarítmicas mais simples é possível chegar à solução de forma prática.

4.3.3 Coleção Multiversos (Souza, 2020) volume 3 (M3) - Sequências e trigonometria

O volume 3 trata de sequências e trigonometria, e a priori não fica claro como serão relacionados esses dois temas. Partindo para o sumário temos que mais uma vez foi dividido em 3 capítulos sendo eles: Sequências e noções de linguagem de programação, Relações métricas e trigonometria no triângulo e Trigonometria na circunferência e funções trigonométricas. Portanto temos que o livro aborda 3 objetivos: o primeiro é o estudo de sequências dos tipos PA e PG, onde no fim tem uma abordagem desse estudo através de planilhas eletrônicas. O segundo é o estudo de relações e trigonometria do triângulo e polígonos, que vai desde o teorema de Tales até leis dos cossenos e senos. E por fim as relações trigonometria dentro da circunferência e funções trigonométricas.

Apesar do primeiro objetivo não ter muita relação com os demais, a sequência escolhida para dispor os conteúdos está bem aceitável. Ainda mais se considerarmos as coleções como um todo, uma vez que no volume anterior exatamente era o de função e meio que faltou esse estudo de sequências. Então encaramos como uma continuação do volume passado. Também nota se a preocupação, não apenas nesta, mas em todas as coleções até então, em sempre usar planilhas para o estudo de sequências em algum momento.

4.3.4 Coleção Multiversos (Souza, 2020) volume 4 (M4) - Matemática Financeira gráficos e sistemas

Temos nesse volume 3 capítulos sendo eles: Matemática financeira, Estatística: gráficos e tabelas e Matrizes, sistemas lineares e transformações de figuras. Mas uma vez observamos uma escolha de conteúdos diferentes das coleções anteriores, onde existe um estudo inicial de estatística, e não está no mesmo volume do estudo de probabilidade. Temos também algebra linear e matemática financeira no mesmo volume, o que faz pouco sentido. Dito isso, então temos 3 objetivos, sendo eles: o estudo de matemática financeira, o estudo de gráficos e tabelas e por fim o estudo de álgebra linear. São três objetivos que normalmente não possuem relação entre si. Então essa disposição não segue um caminho sequenciado como era comum nas outras coleções. Porém ainda sim se avaliarmos cada capítulo de forma individual vemos sentido nas sequências dos subtópicos deles. Mas juntos parecem desconexos.

4.3.5 Coleção Multiversos (Souza, 2020) volume 5 (M5) - Geometria

Novamente vemos diferença logo no título deste volume, que no caso nos dá a entender que os estudos de geometria plana e espacial, não estão divididos em dois volumes distintos nessa coleção. Ao analisarmos o sumário dele temos 3 capítulos que são: Figuras geométricas planas, perímetro e área, Geometria espacial de posição e Figuras geométricas espaciais, área de superfície e volume. Por mais que sejam 3 capítulos, podemos considerar 2 objetivos, a geometria plana e a geometria espacial. Sendo a geometria plana trabalhada no primeiro capítulo e a espacial nos demais. Sobre a disposição e sequência dos capítulos e tópicos, temos que estes volumes é mais lógico, e por mais que em outras coleções esses assuntos estejam em dois volumes distintos, não aparenta que esse estudo das geometrias em conjunto, deixa a desejar. Mas é claro que em um volume a quantidade de assunto que pode ser passado é bem menor do que em dois.

4.3.6 Coleção Multiversos (Souza, 2020) volume 6 (M6) - Estatística e probabilidade

Finalizando a coleção Multiversos temos o volume 6, que assim como nas outras coleções, os pontos, estatística e probabilidade estão em um mesmo volume. A disposição do livro é feita de novo em 3 capítulos, sendo eles: Estatística: pesquisa e medidas de posição e de dispersão, Análise combinatória e Probabilidade. Neste volume podemos notar 3 objetivos, que são os estudos de: estatística, análise combinatória e probabilidade. Esses objetivos nessa disposição, formam uma boa sequência. E por fim, temos que o livro trata de relacionar a estatística com a probabilidade. Assim como as coleções passadas.

4.3.7 Análise crítica da Coleção Multiversos (Souza, 2020)

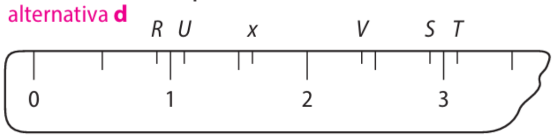
Nessa coleção a principal diferença foi a investida em fazer o aluno ser parte ativa de seu aprendizado. Além da própria preparação do jovem para a vida adulta. A integralização com outros conteúdos e disciplinas estava bastante presente nessa coleção, e até mesmo elementos de outras metodologias estavam bem presentes na obra, como exemplo temos que a PP e a EP apareceram com frequência nas atividades do livro. Ainda no início de cada volume, era listado todos os objetivos específicos que se esperava alcançar com o volume. Alguns deles não faziam sentido juntos e outros eram esperados serem complementares. Outra característica era a disposição em 3 capítulos de todos os volumes da obra, e o motivos para isso era que na seção de orientações para o professor, era sugerido que o conteúdo fosse dividido em 3 unidades, além de outras recomendações. Por fim, reconhecemos essa coleção como indo mais para o lado de uma metodologia qualitativa do que quantitativa. O que foi diferente nas coleções passadas.

4.4.1 Coleção Prisma (Bonjorno, Giovanni, Sousa, 2020) volume 1 (P1) - Conjuntos e funções

Essa coleção tem uma proposta de trazer recursos tecnológicos para o ensino, onde os próprios autores dela afirmam que: “Além dos conteúdos matemáticos específicos, o livro ainda traz possibilidades de explorar o uso de recursos tecnológicos, como softwares de geometria dinâmica e planilhas eletrônicas, e de refletir sobre as relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (Bonjorno, Giovanni e Câmara p.3)”. Similarmente à coleção anterior, o volume 1 é disposto em 3 capítulos, sendo eles: Conjuntos, Função afim e Função quadrática. Dito isso temos que os objetivos desse volume são 3. A introdução a conjuntos e funções e os estudos de função afim e função quadrática. A metodologia do livro também fica em volta de RP, com atividades resolvidas seguidas de atividades propostas. O lado positivo é que na hora de resolver as atividades propostas o aluno pode usar como base as atividades resolvidas.

No capítulo 1, nas primeiras atividades, não existe um estímulo para RP, mas no decorrer dele, os problemas aparecem, mas em sua maioria foram retirados de provas de universidades. A seguir foram retirados alguns deles.

Figura 27 - Problemas



(Unicamp-SP) Ache dois números inteiros positivos e consecutivos sabendo que a soma de seus quadrados é 481. 15 e 16

(UFAL) No universo $\mathbb{N}$, sejam A o conjunto dos números pares, B o conjunto dos números múltiplos de 3 e C o conjunto dos números múltiplos de 5. Determine os 10 menores números que pertencem ao conjunto $B - (A \cup C)$.

(OBMEP) A figura representa parte de uma régua graduada de meio em meio centímetro, onde estão marcados alguns pontos. Qual deles melhor representa o número $2x - 2$? alternativa **d**

(UFRJ) Prove que, se o quadrado de um número natural n é par, então o próprio número n tem que ser, obrigatoriamente, par (isto é, $n \in \mathbb{N}$, n^2 é par $\Rightarrow$ n é par).

Fonte: Prisma volume 1 (2020, p. 33)

Na figura 27 O primeiro deles (Unicamp-SP) é um problema simples, onde a maior dificuldade estaria em montar a equação algébrica, pois a própria resolução dela é de certa forma clara usando Bhaskara. Porém ainda sim pertinente. O segundo problema (UFAL) tem o objetivo de praticar as concepções de conjuntos de suas propriedades e operações. Mas ainda sim necessita de um certo domínio. O terceiro (OBMEP) demanda um pouco de abstração e lógica, tanto que foi retirado da OBMEP. O último (UFRJ) é o tipo de problema que deve aparecer mais nos livros, pois evidencia uma característica inata da matemática que é a obrigatoriedade de tudo ter que ser provado, ou seja, demonstrado. Pois a demonstração de proposições e conjecturas poderia ser introduzida bem antes, do que apenas esperar o aluno ir para o ensino superior. No final do primeiro capítulo tem uma lista de exercícios complementares onde todos os exercícios são problemas retirados de provas de concursos ou vestibulares. Dando sequência temos um trecho de uma atividade retirada do segundo capítulo.

Figura 28 - Trecho de atividade

Observe a sequência de triângulos cujos lados são formados por palitos de fósforo.

Ver as **Orientações para o professor**.

a) Reproduza a tabela em seu caderno e complete-a com os valores que faltam.

Número de palitos em cada lado	1	2	3	4	5	6
Total de palitos em cada triângulo	3	6				

b) Considere *x* o número de palitos em cada lado e *y* o total de palitos em cada triângulo para escrever uma sentença matemática que expressa *y* em função de *x*.

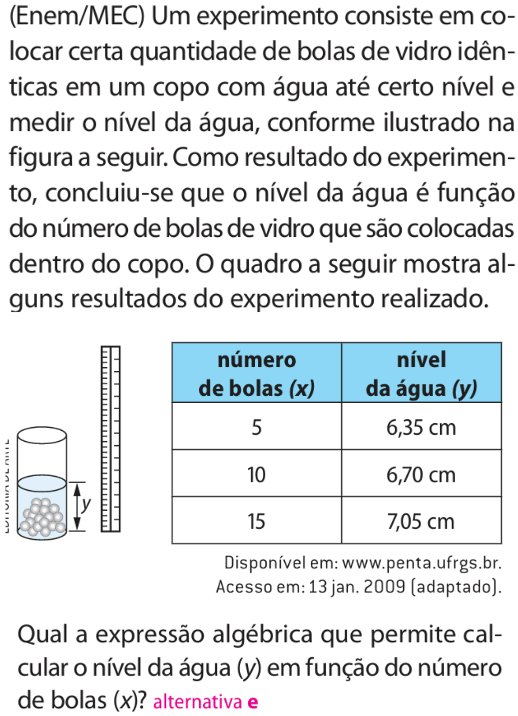
c) Qual é o domínio dessa função? E a imagem?

d) Quantos palitos deve ter cada lado para se construir um triângulo com 45 palitos?

Fonte: Prisma volume 1 (2020, p. 70)

A atividade da figura 28 tem vários objetivos, que vão desde explorar e preencher a tabela passando pela representação algébrica e depois pedindo para calcular os valores usando-a. Então vemos uma atividade onde não é apenas pedido algo elementar e pronto. Nesse caso o aluno faz o uso do raciocínio lógico, para analisar a figura e tirar conclusões. E depois através da manipulação da forma algébrica, responder às demais letras. O próximo problema é similar.

Figura 29 - Problema



(Enem/MEC) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo. O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas *(x)*	nível da água *(y)*
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br.
Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (*y*) em função do número de bolas (*x*)? alternativa **e**

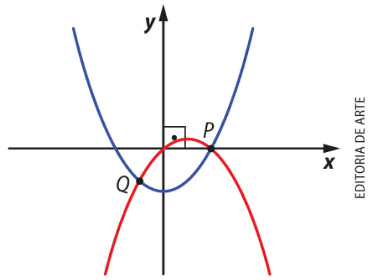
Fonte: Prisma volume 1 (2020, p. 89)

O problema da figura 29 é similar ao anterior no quesito objetivo de obter a fórmula algébrica que modele essa situação. Porém neste a forma algébrica possui uma constante, ou seja, o gráfico dela não irá passar na origem do plano, e isso pode ser um pouco mais complexo, e mais desafiador.

No terceiro capítulo temos que os exercícios eram similares aos do capítulo anterior, com o adendo que eram sobre função quadrática. Como exemplo temos os problemas a seguir

Figura 30 - Problema

(UEA-AM) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais estão representados os gráficos das funções dadas por $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = -x^2 + 2x$, com os pontos comuns P e Q, conforme a figura.



As coordenadas dos pontos P e Q são, respectivamente, alternativa **d**

Fonte: Prisma volume 1 (2020, p. 118)

Neste problema na figura 30, o aluno devera descobrir as coordenadas de dois pontos, com ajuda das funções em gráfico e forma algébrica. Então o aluno tem que ter o conhecimento de análise de gráfico, e manipulação algébrica, para só então perceber que a resposta está em igualar as duas equações e resolver. Porém, a resposta ainda não seria a solução da equação quadrática, e isso os alunos teriam que visualizar. Então esse tipo de problema, além de ser intuitivo, também necessita de abstração matemática. Que nesse caso é que o valor de equação são os as coordenadas x dos dois pontos que foram pedidos na questão, e que só faltaria a coordenada y. A seguir temos mais uma questão.

Figura 31 - Problema

(PUC-RS) A função quadrática tem diversas aplicações no nosso dia a dia. Na construção de antenas parabólicas, superfícies de faróis de carros e outras aplicações, são exploradas propriedades da parábola, nome dado à curva que é o gráfico de uma função quadrática. Seja $p(x) = mx^2 + nx + 1$. Se $p(2) = 0$ e $p(-1) = 0$, então os valores de m e n são, respectivamente, iguais a alternativa **a**

Fonte: Prisma volume 1 (2020, p. 149)

Nesse outro problema na figura 31 a solução é bem simples. Basta formar um sistema linear com os valores dados a resolvê-lo. Porém, esse tipo de problema leva o aluno a pensar, primeiro se é possível e segundo por onde começar. Então a EP se encaixa muito bem nesse momento, pois é como se fosse feito o processo inverso da obtenção de valores para y dado o x. Então fazer a volta e achar os coeficientes dado y e x, é muito apropriado, principalmente no ensino de álgebra.

4.4.2 Coleção Prisma (Bonjorno, Giovanni, Sousa, 2020) volume 2 (P2) - Funções e progressões

Nesse volume o autor dispôs os 4 capítulos em: Função definida por mais de uma sentença, Função exponencial, Função logarítmica, Progressões. Logo de cara notamos que a sequência é um pouco diferente, onde as progressões são vistas no mesmo capítulo e ao final do livro, enquanto em outras coleções o final do livro de funções geralmente era a parte de logaritmos. Ou seja, temos 3 objetivos, sendo eles, a introdução mais formal das funções: exponencial, logarítmica e do tipo progressão.

No primeiro capítulo o objetivo é aprofundar os conceitos e características de uma função. Como, domínio, contradomínio e imagem. E também mostra uma nova forma de definir uma função, como mostra o exemplo a seguir.

Figura 32 - Exercícios

Dadas as funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 1, \text{ se } x \leqslant 3 \\ x^2 + 2, \text{ se } x > 3 \end{cases} \text{ e}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, \text{ se } x < 1 \\ -x, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

calcule:

a) $f(3) - g(5)$ 16

b) $g(0) + 2 \cdot f(-1)$ -7

c) $\dfrac{f(4)}{g(1)}$ -18

Fonte: Prisma volume 2 (2020, p. 18)

Essa questão da figura 32, tirada de uma atividade, exemplifica o que foi dito antes, e ainda reforça as operações com funções. É claro que é interessante que o aluno perceba a diferença entre as funções e suas leis de formação, e que nem sempre será possível operar duas funções, pois no caso da divisão por exemplo, o valor da função que estará no denominador não pode ser nulo. Outros conceitos também são abordados neste capítulo, como as definições de função: injetiva, sobrejetiva, objetiva e inversa, e no final é feito um paralelo com o uso do Geogebra para o estudo desses conceitos de funções.

No capítulo seguinte que foi o de função exponencial temos algo que não foi explorado com afinco que foi às operações com expoente, onde foi visto com muito fervor neste volume, os exemplos seguintes exemplificam isso.

Figura 33 - Exercícios

(UFSM-RS) Determine o valor da expressão

$$\sqrt[3]{\frac{(60\,000)\cdot(0{,}00009)}{0{,}0002}}\ .\ 30$$

(FEI-SP) Que número real representa a expressão $\dfrac{(0{,}1)^{-1}-(0{,}8)^{0}}{2\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$? $-\dfrac{1}{3}$

Fonte: Prisma volume 2 (2020, p. 63)

Nesse trecho na figura 33, vemos uma preocupação maior em ter o domínio das operações com potências, para só então trabalhar com funções exponenciais. E sobre as funções exponenciais, a ideia era a mesma das coleções anteriores, comumente trazendo um modelo em forma de equação e pedindo para calcular algo.

Partindo para o capítulo 3 que é o de funções logarítmicas, temos o mesmo estilo do aspecto no ensino, o exemplo a seguir mostra isso.

Figura 34 - Exercícios

Usando a aproximação $\log 11 = 1{,}041$, calcule:

a) $\log 110$ $\simeq 2{,}041$

b) $\log 121$ $\simeq 2{,}082$

c) $\log \frac{1}{11}$ $\simeq -1{,}041$

d) $\log \sqrt{1331}$ $\simeq 1{,}562$

e) $\log 1{,}21$ $\simeq 0{,}082$

f) $\log 0{,}121$ $\simeq -0{,}918$

Fonte: Prisma volume 2 (2020, p. 97)

Na figura 34 vemos que a prática dos conceitos e propriedades de logaritmos são bem solicitadas para na resolução dessa atividade. Na maioria das questões das atividades, a mesma abordagem segue para as demais atividades de função, que é a aplicação de um modelo matemático onde algum valor pede para ser calculado, assim como no capítulo anterior. Mas havia outras que eram diferentes como.

Figura 35 - Problema

.(Vunesp-SP) Leia a matéria publicada em junho de 2016.

Energia eólica deverá alcançar 10 GW nos próximos dias

Energia eólica deverá alcançar 10 GW nos próximos dias. O dia mundial do vento, 15 de junho, terá um marco simbólico este ano. Antes do final do mês, a fonte de energia que começou a se tornar realidade no país há seis anos alcançará 10 GW, sendo que o potencial brasileiro é de 500 GW. A perspectiva é a de que, em metade deste tempo, o Brasil duplique os 10 GW.

(www.portalabeeolica.org.br. Adaptado.)

Considerando que a perspectiva de crescimento continue dobrando a cada três anos, calcule o ano em que o Brasil atingirá 64% da utilização do seu potencial eólico. Em seguida, calcule o ano aproximado em que o Brasil atingirá 100% da utilização do seu potencial eólico, empregando um modelo exponencial de base 2 e adotando $\log 2 = 0{,}3$ no cálculo final. 2031 e 2033

Fonte: Prisma volume 2 (2020, p. 107)

Nesse exemplo na figura 35 temos a existência de uma modelo de função logarítmica, mas que está implícito, então deve ser equacionado para após ser resolvido usando as operações e propriedades de logaritmos. Essa questão é um pouco diferente pois a dificuldade está na modelagem da equação e não na resolução. E no capítulo final, Progressões, é dado ênfase nas funções PA e PG, com a mesma estrutura, tendo exercícios e alguns problemas de aplicação.

Figura 36 - Problema

(FGV-SP) É dada a progressão geométrica infinita (45, 15, 5, ...).

a) Ache a soma de seus termos. 67,5

b) Obtenha o menor valor de n, de modo que o enésimo termo a_n seja menor que $\frac{1}{30}$.
(Adote os valores $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$.)

Fonte: Prisma volume 2 (2020, p. 141)

Por fim temos o exemplo acima, que parece complexo, mas usando os conteúdos que foram ensinados no volume permitem facilmente a resolução, a primeira letra com uma aplicação de uma fórmula, e a segunda, a partir da modelagem da questão e substituição dos valores desejados.

4.4.3 Coleção Prisma (Bonjorno, Giovanni, Sousa, 2020) volume 3 (P3) - Geometria e trigonometria

Este volume é composto de 4 capítulos, sendo eles: Proporcionalidade e semelhança, Trigonometria no triângulo, Razões trigonométricas na circunferência, Funções trigonométricas. Temos de fato, 2 objetivos, geometria plana e trigonometria. Mas como visto nas coleções anteriores, os volumes que tinham geometria ou trigonometria como temas principais, geralmente eram focados apenas em sua temática, enquanto nessa coleção vemos a geometria atrelada a trigonometria. Essa divisão por mais que seja inédita nesta análise, faz bastante sentido, pois a trigonometria é usada na geometria plana, e como está sendo discutida a trigonometria, se discute também sobre a função trigonométrica.

4.4.4 Coleção Prisma (Bonjorno, Giovanni, Sousa, 2020) volume 4 (P4) - Sistemas, matemática financeira e grandezas

A composição desse volume tem 4 capítulos dispostos em: Matrizes e sistemas lineares, Porcentagem e juros, Matemática Financeira e Grandezas. Logo de cara vemos 3 objetivos, que são o estudo de financeira, álgebra linear e grandezas. Diferente das outras coleções que abordam grandezas no primeiro volume, está optou por fazer esse estudo no volume 4, o que é inusitado ainda mais dado os outros temas desse livro. É também curioso o fato de ser inquirido apenas no último capítulo. Quanto aos outros objetivos vemos que a matemática financeira está separada da parte de juros, o que parece contraditório. Porém o capítulo de matrizes está bem estruturado, indo de matrizes e operações com matrizes até sistemas e escalonamento. Por fim, pode ser dito desse volume que apesar dos conteúdos não terem uma linearidade, estão até bem organizados.

4.4.5 Coleção Prisma (Bonjorno, Giovanni, Sousa, 2020) volume 5 (P5) - Geometria

No volume 5, temos que o tema dele é a geometria espacial e plana, e está disposto em 4 capítulos, que são: Áreas, Geometria espacial de posição, Poliedros, Corpos redondos. Nesse volume temos como objetivo principal a geometria espacial, que foi dividida em 4 objetivos, sendo, o primeiro o cálculo de áreas e o estudo de polígonos, que não foi abordado no volume passado, o segundo seria o estudo de geometria espacial, envolvendo retas e planos por exemplo, o terceiro foi os poliedros e figura com tridimensionais, e por fim temos o estudo de corpos redondos. A sequência dos capítulos está boa, pois os estudos de retas e planos ficam logo após os estudos de figuras planas e uma antes das figuras espaciais, e finalizando com os corpos redondos. Esta forma disposta é diferente das outras coleções, porém ela busca ensinar os conteúdos conforme eles são necessários. Portanto está sim coerente.

4.4.6 Coleção Prisma (Bonjorno, Giovanni, Sousa, 2020) volume 6 (P6) - Estatística, combinatória e probabilidade

Este livro está composto de 4 capítulos, onde eles são: Noções de Estatística, Pesquisa estatística, Combinatória, Probabilidade. Como esperado, temos 3 objetivos: o estudo de estatística, o estudo de probabilidade e a combinatória. A forma como está sequenciado não é muito diferente do que já foi visto em outra coleção, porém, a sequência, iniciando com combinatória depois probabilidade e por fim estatista, soa mais coeso, do que a estatística primeiro. Entretanto, essa não é a primeira coleção que aborda dessa maneira.

4.4.7 Análise crítica da Coleção Prisma (Bonjorno, Giovanni, Sousa, 2020)

Essa coleção tem como principal diferença as atividades resolvidas que interiorizam as atividades que são propostas, ou seja, no lugar de uma questão resolvida, nessa coleção temos uma atividade completa, algo exclusivo desta obra. Outra particularidade era o uso frequente das tecnologias utilizando Geogebra, calculadoras e planilhas eletrônicas em exemplificações. Os volumes eram divididos majoritariamente em 4 capítulos, e possuíam alguns volumes de conteúdos mistos, alguns desses faziam sentido como complementares, e outros nem tanto. Mas de fato as atividades resolvidas completas foram o grande diferencial dela. Concluindo, a metodologia usada nessa coleção é diferente em parte, mas não muito, então, ainda podemos considerar um ensino qualitativo, porém mais ainda como quantitativo.

4.5 Análise crítica das coleções analisadas

Ao fim dessa análise, temos uma pequena ideia de como é composto um livro didático. Primeiramente, o livro é dividido em partes (capítulos), e a quantidade varia de autor para autor. Cada capítulo inicia com uma curiosidade, ou manifestação daquele conteúdo na prática, ou motivação para criação daquele estudo, ou um contexto histórico sobre aquele tema. É dado em sequência uma ideia informal das sobre do tema abordado, para após, serem feitas as definições formais e exemplos, que se repete até os exercícios, que são divididos em exercícios resolvidos e exercícios propostos, geralmente nessa ordem. E esse processo de definir, dar exemplo e propor atividades se repete até o final do capítulo, ou tema abordado e finaliza com exercícios complementares, que geralmente são mais complexos e normalmente retirados de prova de concursos e vestibulares de universidades brasileiras, e ainda temos também a seção de auto avaliação. No decorrer de cada capítulo, existem também algumas contextualizações e aplicações dos temas à realidade, e até mesmo paralelos interdisciplinares. Atividade de investigação usando softwares de planilha eletrônica e/ou planilhas gráficas, também eram bem comuns.

Algumas coleções traziam os objetivos que gostariam de contemplar em cada volume logo no início, enquanto outras traziam na seção do professor. O livro do professor geralmente tem as respostas a perguntas em cada questão, e no fim volume tem uma breve forma de como resolver cada questão que está no livro.

A metodologia majoritária foi a RP, que é caracterizada pela explicitação dos conteúdos, seguido de exercícios, atividades e problemas, apesar de que houveram poucos problemas. Ainda assim, foi a metodologia mais presente, porém outras também apareceram, como a Modelagem, o uso das tecnologias, a PP e a EP. Entretanto, com menos frequência.

5. CONCLUSÃO

O livro didático é um recurso que além de fácil acesso e muito importante no ensino básico, serve também de roteiro, principalmente para professores iniciantes. Porém, os docentes no início de carreira, são instruídos durante toda a graduação, a fazer da sua aula o diferencial, porém, ao estar perante alunos pela primeira vez como professor titular, isso pode ser um pavoroso, e o livro didático acaba por ser mais acolhedor e descomplicado, o que faz com que toda a trajetória de mudança, instigada na graduação, se perca. Nesse ponto ressalta a evolução contínua da sociedade, que a todo tempo muda, e ao mesmo tempo a crítica de que devem ser aplicadas todas as práticas vistas e evidenciadas no período da graduação. Tais mudanças com igual ímpeto, e isso será possível com a aplicação, tanto de políticas públicas, quanto a força de vontade de novos e experientes professores.

Este estudo, avaliou de forma mais ampla as quatro coleções de livros didáticos, e de forma mais diligente os dois primeiros volumes, que serviram como uma base para descobrir como era composta a coleção de um modo geral, porém só seria possível extrair toda a essência das coleções ao serem avaliados todos os volumes. Outra vertente, que poderia ser analisada era o material de orientação para o professor, que variava de uma coleção para outra e valia a pena ser retratado, entretanto fugiria um pouco do objetivo deste trabalho.

Com o intuito de avaliar de forma crítica e objetivas um dos materiais didáticos mais habituais, entretanto, sob uma perspectiva mais atual, foi feita esta análise de livros didáticos, através da investigação de problemas retirados dos livros e comentados por meio da metodologia EPRP (Andrade, 1998, 2017). O protagonista deste trabalho foi o problema, que em grande parte de suas aparições se revelou pouco explorado. No contexto dos livros avaliados o problema foi explorado de forma padrão, onde havia em grande parte uma falta de ênfase no processo de resolução e sem muita atenção às questões socioculturais dos grupos sociais de alunos. Este estudo foi para mostrar que, por mais que a educação matemática esteja evoluindo, ainda existem materiais de usos didáticos, que estão presos em um outros tempos, bem como a estagnação da profissão tanto por parte dos professores que não buscam inovar, quanto por parte daqueles que têm o conhecimento e a formação, mas ainda sim nao levam para a sala de aula.

Esse trabalho foi executado de modo qualitativo, onde a pesquisa que foi realizada nele, estava em constante mudança e adaptação, onde ideias foram surgindo e se reinventam. Uma delas consistia em futuramente usar a metodologia EPRP como metodologia base de uma coleção de livros didáticos. E a conclusão que temos é que de fato, um livro didático mais estruturado e completo e que seja ao mesmo tempo comprometido com a educação dos alunos, pode ser produzido, pois nota-se algumas características marcantes da metodologia proposta por Andrade (1998, 2017), estavam tangenciadas em uma ou mais coleções. A partir desse estudo, temos como proposta para estudos futuros, a criação de um livro didático fundamentado na metodologia de EPRP, desenvolvida por Andrade (1998, 2017).

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Silvanio de. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: IGCE, UNESP, 1998.

ANDRADE, Silvanio de. Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. In: ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L. C.; PIRONEL, M. **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 355-396.

ABRAMOVICH, Sergei; CHO, Eun Kyeong. **Using Digital Technology for Mathematical Problem Posing**. Nova Iorque: Springer, 2015. 71 p. ISBN 978-1-4614-6258-3.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é base. Matemática**,** 2022. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 27 out. 2023.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. 10. ed. São Paulo: MODERNA, 2022. v. 9. ISBN 978-85-16-13576-8.

BOGDAN, Robert C; BIKLEN, Sari Knopp. **INVESTIGAÇÃO QUALITATIVA EM EDUCAÇÃO**: Uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto Editora, 1994. p. 47-50 ISBN 972-0-34112-2.

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara. **Diálogo**: Matemática e suas Tecnologias. São Paulo: Editora FDT, 2020. v. 1. Conjuntos e funções. v. 2. Funções e progressões. v. 3. Geometria e trigonometria. v. 4. Sistemas, matemática financeira e grandezas. 5. Geometria. v. 6. Estatística, combinatória e probabilidade.

LEONARDO, Fabio Martins. **Conexões**: Matemática e suas Tecnologias. 1. ed. São Paulo: MODERNA, 2020. v. 1. Grandezas, álgebra e algoritmos. v. 2. Funções e aplicações. v. 3. Estatística e probabilidade. v. 4. Trigonometria. v. 5. Geometria plana e espacial. v. 6. Matrizes e geometria analítica.

MARTINS, Fabíola da Cruz. **Exploração-Proposição-Resolução de Problemas na Licenciatura em Matemática:** implicações para a sala de aula. 2024, 248f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande.

ONUCHIC, Lourdes De La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andresa Maria. **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. 2. ed. Jundiaí-SP: Paco Editorial, 2021. ISBN 978-65-5840-734-8.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: Um novo aspecto do método matemático. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1977. 179p. Título original: How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. ISBN 978-85-3780-888-7.

SILVER, Edward A. "**On Mathematical Problem Posing**." **For the Learning of Mathematics**, vol. 14, no. 1, 1994, pp. 19–28. JSTOR, http://www.jstor.org/stable/40248099. Accessed 2 Aug. 2024.

SINGER, Florence Mihaela; ELLERTON, Nerida F.; CAI, Jinfa. **Mathematical Problem Posing**: From Research to Effective Practice. Nova Iorque: Springer, 2015. 71 p. ISBN 978-1-4614-6258-3.

SOUZA, Joamir. **Multiversos:** Matemática e suas Tecnologias. 1. ed São Paulo: Editora FTD, 2020. v. 1. Conjuntos e função afim. v. 2. Funções e suas aplicações. v. 3. Sequências e trigonometria. v. 4. Matemática financeira, gráficos e sistemas. v. 5. Geometria. v. 6. Estatística e probabilidade.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida. **Diálogo**: Matemática e suas Tecnologias. 1. ed São Paulo: MODERNA, 2020. v. 1. Grandezas, medidas e matemática financeira. v. 2. Geometria plana. v. 3. Geometria espacial. v. 4. Geometria analítica, sistemas e transformações geométricas. v. 5. Estatística e probabilidade. v. 6. Funções e progressões.