



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS VII
CENTRO CIÊNCIAS EXATAS E APLICADAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MATEMÁTICA

Willian Gustavo Alves Leandro

UMA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA ESPECTRAL VIA CÁLCULO
DIFERENCIAL

PATOS-PB
2025

Willian Gustavo Alves Leandro

**UMA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA ESPECTRAL VIA CÁLCULO
DIFERENCIAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado(a) em Matemática.

Área de concentração: Matemática Pura e Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Ismael Sandro da Silva

**Patos
2025**

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

L437d Leandro, Willian Gustavo Alves.

Uma demonstração do teorema espectral via cálculo diferencial [manuscrito] / Willian Gustavo Alves Leandro. - 2025.

67 f. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e Sociais Aplicadas, 2025.

"Orientação : Prof. Dr. Ismael Sandro da Silva, Coordenação do Curso de Matemática - CCEA".

1. Teorema espectral. 2. Multiplicadores de Lagrange. 3. Autovetores. I. Título

21. ed. CDD 515.72

WILLIAN GUSTAVO ALVES LEANDRO

UMA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA ESPECTRAL VIA CÁLCULO
DIFERENCIAL

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Coordenação do Curso
de Matemática da Universidade
Estadual da Paraíba, como requisito
parcial à obtenção do título de
Licenciado em Matemática

Aprovada em: 04/06/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Ademir Benteus Pampu** (***.824.629-**), em **26/06/2025 17:46:38** com chave **a826566852ce11f0bc1a7cc27eb1f9**.
- **Ismael Sandro da Silva** (***.241.944-**), em **26/06/2025 17:45:38** com chave **8484c39852ce11f09cfe06adb0a3afce**.
- **Arlandson Matheus Silva Oliveira** (***.607.674-**), em **26/06/2025 17:54:44** com chave **c9e7909a52cf11f0a7f41a1c3150b54b**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.

Tipo de Documento: Folha de Aprovação do Projeto Final

Data da Emissão: 26/06/2025

Código de Autenticação: 4bb090



Dedico este trabalho a
Deus e aos meus pais,
Marcos e Lourdes que
deixaram de viver os
seus sonhos para que
o meu fosse realizado.
Sem vocês eu não teria
conseguido.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao Senhor, meu Deus, pela oportunidade, força e discernimento para a realização deste trabalho. Acima de tudo, sou grato por sua proteção em todas as batalhas dessa trajetória, que, quando o medo, o cansaço e o desânimo se faziam presentes, o Senhor os transformava em força, alegria e motivação. Bem-afortunado sou ao meu EU criança que desde cedo observou as dificuldades presentes e se dedicou ao máximo dar uma vida melhor aos meus pais através do estudo. E falando dos meus pais, Maria de Lourdes Mamede Alves e Marcos Alves Leandro eu os agradeço por cada passo que me guiaram, cada conselho e por nunca desistirem de acreditar no filho de vocês, pois o que sempre me manteve firme foi saber que um dia eu daria orgulhos ao senhor(a). Eu amo vocês. Agradeço a toda minha família que se fez presente principalmente a meus avós Fátima e Nicolau que sempre me aconselharam com sua história que levarei pra vida, aos meus tios(as) e primos(as) que me motivaram, e aconselharam fortalecendo e apoiando o meu amor pela matemática. Agradeço ao meu amigo e irmão, Antônio Ramalho, que em todos os momentos esteve ao meu lado, me ajudando e motivando quando mais precisei. Obrigado por toda a positividade e por sempre acreditar que eu conseguiria. A minha namorada, Brenda Priscila, sou grato por nunca ter deixado de acreditar em mim, mesmo diante das frustrações e do cansaço, e por sempre, mesmo com todas essas dificuldades, manter-se firme ao meu lado. Obrigado por todo o apoio, por estar comigo em todos os momentos, tanto nos bons quanto nos ruins. Aos meus amigos da universidade, bem-afortunado sou por todos os ensinamentos compartilhados, pelas conversas que aliviaram os dias difíceis e pela parceria que tornou essa caminhada mais leve e significativa. Levarei comigo cada momento vivido e cada aprendizado construído ao lado de vocês. Gratifico também aqui o meu reconhecimento ao comprometimento do Professor Ismael Sandro da Silva, por toda a orientação, paciência e dedicação ao longo da produção desse trabalho. Suas contribuições e compartilhamento de ideias não só serviram para o meu crescimento acadêmico mas também para o pessoal. Agradeço a cada professor que se fez presente nessa jornada especialmente aos professores Ademir, Paulo, Marcos, Ismael, Arlandson, Geovany e Ginaldo na qual foram responsáveis por despertar o gosto pela matemática pura. Agradeço Imensamente aos membros da banca Composta por Ademir Benteus Pampu, Arlandson Matheus Silva Oliveira e Ismael Sandro da Silva pela disponibilidade e por aceitarem participar deste momento. A presença e contribuição de cada um certamente abrillantarão este trabalho, enriquecendo-o com suas valiosas considerações.

“Tenho-vos dito essas coisas para que em mim tenhais paz; no mundo tereis aflição, mas tende bom ânimo, eu venci o mundo.”

Bíblia Sagrada - João 16:33.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo demonstrar o Teorema Espectral por meio do método dos multiplicadores de Lagrange, destacando a conexão entre Álgebra Linear e técnicas de Otimização provenientes do Cálculo Diferencial. A demonstração é realizada a partir da análise de formas quadráticas associadas a operadores simétricos, cujos extremos estão sujeitos à restrição de norma unitária, o que revela os autovetores e autovalores do operador. Para isso, revisita-se conceitos fundamentais como espaços vetoriais, transformações lineares, autovalores, autovetores, produto interno e operadores Auto-adjuntos.

Palavras-chave: Teorema Espectral. Multiplicadores de Lagrange. Autovetores.

ABSTRACT

The main goal of the present work is proving the Spectral Theorem es by using or by exploiting the Lagrange multipliers method, establishing a connection between Linear Algebra and optimization techniques from Differential Calculus. The approach involves the analysis of quadratic forms associated with symmetric operators, whose extrema are determined under a unit norm vector's constraint, a process that identifies the operator's eigenvectors and eigenvalues. The theoretical development requires a rview of the fundamental concepts,namely, vector spaces, linear transformations, eigenvalues and eigenvectors, inner product, and self-adjoint operators.

Keywords: Spectral Theorem. Lagrange multipliers. Eigenvectors.

SUMÁRIO

	Página
1	INTRODUÇÃO
	9
2	Espaço Vetorial
	12
2.1	Subespaços Vetoriais
	17
2.2	Base e dimensão de um Espaço Vetorial
	20
2.3	Transformação Lineares
	24
2.4	Núcleo e Imagem de uma transformação linear
	29
3	Autovetores e Autovalores
	34
3.0.1	O Polinômio Característico
	36
3.1	Diagonalização de Operadores
	37
3.1.1	Base de Autovetores
	37
3.2	Produto Interno
	40
3.2.1	Processo de Gram-Schmidt
	46
4	Operadores Auto-Adjuntos
	51
5	CONCLUSÃO
	63
	REFERÊNCIAS
	64
	APÊNDICE A – Uma revisão sobre o Teorema dos Multiplica-
	dores de Lagrange
	65

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da história e da evolução da Matemática, convivemos com uma realidade adversa no que se refere ao desenvolvimento da aprendizagem em suas diversas áreas, como: aritmética, álgebra, geometria, estatística, probabilidade e trigonometria, entre outros. Por sua vez, estabelece-se uma relação intrínseca entre professor e aluno que nos motiva a seguinte pergunta: será que tanto o graduando em Licenciatura de Matemática como seus futuros alunos conseguem distinguir as diversas áreas da matemática com a presença de exemplos que as caracterizem como tais. A realidade das salas de aula sugere que não. Muitos estudantes e até mesmo graduandos identificam a Trigonometria apenas como “aquele capítulo sobre triângulos”, a Álgebra como “a parte com letras e equações”, e a Geometria como “figuras para calcular área”, sem compreender como esses conceitos dialogam na resolução de problemas complexos. Ou seja, o olhar perspectivo em relação aos conteúdos matemáticos surgem e são seguidos de forma independente, talvez motivos esse que a matemática seja uma disciplina tão temida para os alunos.

É comum observar que, durante a resolução de exercícios, os alunos enfrentam dificuldades ao transitar entre diferentes áreas da matemática. Por exemplo, ao trabalhar com problemas de álgebra, muitos se deparam com interpretações geométricas que não conseguem articular com os conceitos algébricos. Da mesma forma, ao resolver questões de geometria, frequentemente encontram equações ou relações algébricas que, embora já tenham estudado, não reconhecem como ferramentas úteis naquele contexto. Essa dificuldade em conectar conhecimentos aparentemente distintos não é acidental, mas sim resultado de uma abordagem de ensino que tradicionalmente trata cada área da matemática de forma isolada. Diante disso, motiva-nos a necessidade de correlacionar os conteúdos aparentemente distintos presentes na matemática, ponto em que se destacam duas áreas fundamentais, cujas relações iremos explorar no decorrer do trabalho aqui presente.

A Álgebra Linear é, em linhas gerais, um ramo da matemática que estuda os vetores, as matrizes e as transformações lineares. Ao longo do capítulo que iniciaremos, observaremos que a estrutura algébrica central em relação aos espaços vetoriais é, basicamente, uma estrutura munida com duas operações que podemos denominar de adição e multiplicação por escalares, nas quais esses escalares pertencem a um corpo. Ademais, dentro do espaço vetorial iremos desvendar os diversos conteúdos que servirão como base sólida para observações e ações envolvendo conteúdos futuros. Como por exemplo, a estrutura de um subespaço vetorial que é basicamente um subconjunto do espaço vetorial atendendo a algumas restrições. Assim como, a presença de conceitos como base e dimensão que consiste respectivamente em representação de vetores de forma única, e a indicação de quantos vetores são necessários para gerar todo o espaço. Sem falar na repetição do estudo das Transformações Lineares na qual usaremos como base no desenvolvimento do trabalho.

Além disso, a Álgebra Linear, como área da matemática, não se restringe apenas ao seu próprio contexto. Muitas vezes, é possível encontrar argumentos e ideias que levam o leitor a refletir sobre conceitos da Álgebra aplicados em outras áreas, como o Cálculo Diferencial e, futuramente, em disciplinas mais avançadas, como a Análise Real. Um exemplo dessa conexão pode ser observado no livro LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. Vol. 2. 4. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 2013. Onde ideias fundamentais da Álgebra Linear reaparecem no desenvolvimento da Análise Matemática.

Nosso trabalho se propunha a estudar a demonstração do Teorema Espectral via

Cálculo Diferencial, tema esse que visa fornecer uma facilidade enquanto possíveis questionamentos anteriores ou até mesmo como forma de aprofundar o conhecimento. Vale destacar que, entre os espaços vetoriais, é muito comum estudarmos as transformações lineares. Como já foi citado, trata-se basicamente de um processo determinado no qual, a partir de certas restrições, conseguimos levar um espaço vetorial a outro por meio de uma transformação que preserva a estrutura do espaço original. É bem conhecido também que as Transformações Lineares são representadas por matrizes (como será discutido ao longo do texto), então torna-se de grande importância saber se existem boas representações matriciais, um dos teoremas referente a isso é o chamado *Teorema Espectral* onde afirma, de modo simplificado, que: Para todo operador $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, num espaço vetorial de dimensão finita munido de Produto Interno, existe uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{V}$ e formada por autovetores de T .

São conhecidas várias demonstrações para esse teorema. Neste trabalho, propomos apresentar uma em particular, desenvolvida por meio dos multiplicadores de Lagrange. Tendo em vista a complexidade envolvida, nosso texto tem como objetivo oferecer uma abordagem pouco usual na graduação: uma demonstração do Teorema Espectral utilizando ferramentas do Cálculo Diferencial. É importante destacar que, por se tratar de um texto voltado ao público de graduação, faremos a demonstração em um caso particular, a saber, no espaço $\mathbb{R}^3$. Comentaremos, entretanto, que o método pode ser estendido para o caso n -dimensional.

Quando começamos o estudo de Espaços Vetoriais na Álgebra Linear, em certo ponto aprendemos a construir bases a partir de conjuntos determinados, além disso, conseguimos criar a experiência de mudar coordenadas e a capacidade de poder enxergar e apreciar exercícios no qual entendemos de certa forma como os vetores se organizam no espaço. Com isso, a segunda questão do nosso texto é colocada em pauta:

Será que existe uma base capaz de revelar a essência de uma transformação? Ou seja, seria possível determinar uma base na qual a matriz associada seja simétrica, permitindo, assim, obter uma base ortonormal de autovetores?

O Teorema Espectral responde com elegância: sim, quando lidamos com operadores auto-adjuntos, podemos escolher uma base ortonormal formada por autovetores, e nessa base, o operador se torna o mais simples possível, ou seja, uma matriz diagonal. Essa ideia transforma o modo como enxergamos as transformações lineares, de modo que não a enxergamos mais como uma forma abstrata, mas como um processo de escolher os vetores em direção bem definida.

Todo o trabalho foi realizado ao longo de quatro capítulos, no intuito de compreender cada etapa que será desenvolvida na demonstração do Teorema Espectral via Multiplicadores de Lagrange, da forma mais simples e adequada possível. Neste primeiro capítulo, fizemos uma prévia de tudo que será abordado como forma de motivar o estudo referente e direcionar os processos deste trabalho.

Nos Capítulos 2 e 3, abordamos os principais tópicos fundamentais para a compreensão do conteúdo que será desenvolvido nas seções posteriores. Esses capítulos têm por objetivo estabelecer os alicerces teóricos indispensáveis para a construção da demonstração apresentada adiante. Em particular, discutimos a estrutura dos Autovalores e Autovetores, assim como sua representação matricial, e o conceito de Diagonalização de Operadores, bem como suas propriedades mais relevantes. Também exploramos com profundidade as noções de Produto Interno, elementos centrais no contexto do Teorema Espectral. Por fim, introduzimos a construção de bases ortonormais por meio do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, ferramenta essencial para o tratamento dos operadores no contexto de

espaços com produto interno. O domínio conceitual desses tópicos é fundamental para garantir que o leitor acompanhe com clareza e rigor os próximos passos do trabalho. No Capítulo 4, último desta sequência, aprofundamos o estudo dos operadores auto-adjuntos e introduzimos o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange como instrumento auxiliar. Em seguida, enunciamos o Teorema Espectral e, por fim, apresentamos a demonstração. Vale ressaltar que sempre procuramos respeitar o processo lógico da matemática mas em alguns momentos omitiremos as demonstrações por economia de espaço.

2 Espaço Vetorial

Iremos introduzir alguns conceitos prévios, fornecendo uma revisão não tão aprofundada sobre espaços vetoriais, subespaços vetoriais, bases, dimensão e transformações lineares. Nosso foco será apresentar as ideias principais desses temas, enfatizando suas propriedades fundamentais e como se relacionam. Abordando assim, a estrutura dos espaços vetoriais, a caracterização de subespaços, a importância das bases e o papel das transformações lineares na estrutura dos espaços vetoriais. Essa revisão servirá como um suporte para os desenvolvimentos posteriores.

Um aviso ao leitor: os resultados clássicos e os teoremas básicos terão sempre suas indicações de referências onde estas podem ser encontradas. Decidimos focar nas demonstrações de propriedades mais operacionais, com o objetivo de ilustrar como trabalhar em situações de capítulos posteriores.

Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em Boldrini et al. (1980), Axler (1996) e Lima (2010).

Definição 2.1. : Considere V um conjunto não-vazio definido sobre um corpo $\mathbb{K}$ e as operações:

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V & \cdot : \mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ (a, b) &\mapsto a + b & (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

Verificando os seguintes Axiomas:

Axiomas de Soma

A_1) Comutatividade:

$$u + v = v + u, \forall u, v \in V.$$

A_2) Associatividade:

$$u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in V.$$

A_3) Elemento Neutro:

Existe $0 \in V$ tal que:

$$u + 0 = u, \forall u \in V.$$

A_3) Simétrico:

Para cada $u \in V$, existe um elemento denotado por $(-u)$ tal que:

$$u + (-u) = 0.$$

Axiomas de Multiplicação

M_1) Associatividade:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u, \forall u \in V \text{ e } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

M_2) Distributividade:

$$(\alpha + \beta)u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u, \forall u \in V \text{ e } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

M_3) Distributividade:

$$\alpha(u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v, \forall u, v \in V \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

M_4) Elemento Neutro:

$$1 \cdot u = u, \forall u \in V.$$

A tripla $(V, +, \cdot)$.

Onde “+” e “ $\cdot$ ” verifica os axiomas de “soma” e “multiplicação”, respectivamente é o que chamamos de Espaço Vetorial.

Notação:

$$\mathbb{V} = (V, +, \cdot).$$

Observação: Na literatura, é comum a utilização do termo $\mathbb{K}$ -espaço vetorial para se referir a um espaço vetorial sobre um corpo arbitrário $\mathbb{K}$. No entanto, salvo menção em contrário, assumiremos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou seja, que estamos trabalhando com espaços vetoriais sobre os $\mathbb{R}$.

A seguir, apresentaremos exemplos que ilustram as propriedades fundamentais de espaços vetoriais, abordando casos em distintos níveis, bem como contraexemplos que ajudam a destacar situações em que essas propriedades não se aplicam.

Exemplo 2.1. $\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial.

Seja $u, v \in \mathbb{R}^2$, onde $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$. Note que:

$$u + v = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Ou seja, a soma de dois vetores qualquer pertencentes ao espaço ainda resulta em um vetor de $\mathbb{R}^2$. Portanto, $\mathbb{R}^2$ é fechado sob a operação de adição.

Considere $u \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $u = (x_1, x_2)$. Então:

$$\lambda \cdot u = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Em outras palavras, vale o fechamento para multiplicação.

Verificação dos Axiomas

$A_1)$ Seja $u, v \in \mathbb{R}^2$, onde $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$.

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2) \\ &= (y_1, y_2) + (x_1, x_2) \\ &= v + u. \end{aligned}$$

$A_2)$ Considere $u, v, w \in \mathbb{R}^2$, onde $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ e $w = (z_1, z_2)$

$$\begin{aligned} u + (v + w) &= (x_1, x_2) + ((y_1, y_2) + (z_1, z_2)) \\ &= (x_1, x_2) + ((y_1 + z_1, y_2 + z_2)) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2) \\ &= ((x_1 + y_1), (x_2 + y_2)) + (z_1, z_2) \\ &= ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2) \\ &= (u + v) + w. \end{aligned}$$

$A_3)$ Seja $u \in \mathbb{R}^2$ onde $u = (x_1, x_2)$ e $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Logo,

$$\begin{aligned} u + 0 &= (x_1, x_2) + (0, 0) \\ &= (x_1 + 0, x_2 + 0) \\ &= (x_1, x_2) \\ &= u. \end{aligned}$$

$A_4)$ Considere $u \in \mathbb{R}^2$ e $(-u) \in \mathbb{R}^2$.

$$u + (-u) = 0(x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2) = (0, 0).$$

$M_1)$ Seja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}^2$ onde $u = (x_1, x_2)$.

$$\begin{aligned} \alpha(\beta \cdot u) &= \alpha(\beta \cdot (x_1, x_2)) \\ &= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2) \\ &= (\beta\alpha) \cdot (x_1, x_2) \\ &= (\beta\alpha) \cdot u. \end{aligned}$$

$M_2)$ Considere $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}^2$ onde $u = (x_1, x_2)$.

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \cdot u &= (\alpha + \beta) \cdot (x_1, x_2) \\ &= ((\alpha + \beta) \cdot x_1, (\alpha + \beta) \cdot x_2) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2) \\ &= \alpha(x_1, x_2) + \beta(x_1, x_2) \\ &= \alpha \cdot u + \beta \cdot u. \end{aligned}$$

M_3) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathbb{R}^2$ onde $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2)$.

$$\begin{aligned}\alpha(u + v) &= \alpha((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \\ &= \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2)) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) \\ &= \alpha(x_1, x_2) + \alpha(y_1, y_2) \\ &= \alpha u + \alpha v.\end{aligned}$$

M_4) Seja $u \in \mathbb{R}^2$ onde $u = (x_1, x_2)$ e $1 \in \mathbb{R}$ o elemento neutro da multiplicação

$$1 \cdot u = 1 \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2) = u.$$

Dessa forma, $\mathbb{R}^2$ atende todos os axiomas de espaço vetorial. Portanto, concluímos que $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial.

Comentário: Para $\mathbb{R}^n$, segue por argumentos análogos.

Exemplo 2.2. Seja $l^\infty = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \exists M > 0 \text{ tal que } |x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}\}$. Mostre que l^∞ é um espaço vetorial.

Lembrete:

Definição 2.2. uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita limitada se existe um número real $M > 0$ de modo que:

$$|x_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sejam duas sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$. Ou seja,

Existe M_1, M_2 , tal que:

$$|x_n| < M_1, |y_n| < M_2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora, considere $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência dada por:

$$(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} + (y_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Então, temos:

$$|z_n| = |x_n + y_n|.$$

Pela desigualdade triangular.

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < M_1 + M_2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ também é limitada e pertence a l^∞

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, então:

Existe $M > 0$ tal que:

$$|x_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora, considere a sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$, como sendo:

$$y_n = \lambda x_n.$$

Então,

$$|y_n| = |\lambda x_n| = |\lambda| \cdot |x_n| \leq |\lambda| \cdot M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que, todas as outras propriedades são herdadas da soma e multiplicação. Portanto, o conjunto das sequência l^∞ satisfaz os axiomas de espaço vetorial.

Comentário. Note que os casos de exemplos clássicos de espaços vetoriais, como o conjunto dos polinômios de grau no máximo n , $P^n(\mathbb{R})$, e o conjunto das matrizes reais de ordem $m \times n$, $M(m \times n)$.

Exemplo 2.3. Considere $V = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ onde:

$$\begin{array}{ll} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ (a, b) \mapsto a + b & (\alpha, b) \mapsto \alpha \cdot b \end{array}$$

Tal conjunto não pode ser um espaço vetorial, pois dado um escalar $(-\alpha) \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{N}$, temos que:

$$(-\alpha) \cdot u \notin \mathbb{N}.$$

Ou seja, as operações não estão bem definidas. Logo, V não é um espaço vetorial.

2.1 Subespaços Vetoriais

Antes de apresentar a definição formal, é importante compreender a ideia central de um subespaço vetorial: trata-se de um subconjunto de um espaço vetorial que também é um espaço vetorial, respeitando as mesmas operações de adição e multiplicação por escalar do espaço ao qual pertence.

Definição 2.3. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\mathbf{S}$ um subconjunto não-vazio de $\mathbb{V}$. Dizemos que $\mathbf{S}$ é um subespaço vetorial quando:

- 1- $\mathbf{0}_{\mathbb{V}} \in \mathbf{S}$.
- 2- Se $u, v \in \mathbf{S}$, então $u + v \in \mathbf{S}$.
- 3- Se $u \in \mathbf{S}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então $\lambda \cdot u \in \mathbf{S}$.

Se todas essas condições forem satisfeitas, então $\mathbf{S}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.

Exemplo 2.4. Considere a matriz $M_{2 \times 2}$ onde.

$$M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

O subconjunto $S = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}; x, y \in \mathbb{R} \right\}$ é um subespaço vetorial. verificando:

$$1- \mathbf{0}_{M_2(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S.$$

$$2- \text{ Seja } u, v \in S \text{ onde } u = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \text{ e } v = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}; x, y \in \mathbb{R}.$$

$$u + v = \begin{bmatrix} a + x & 0 \\ 0 & b + y \end{bmatrix} \in S.$$

$$3- \text{ Seja } u \in S \text{ e } \lambda \in \mathbb{R} \text{ onde } u = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R}. \text{ Logo:}$$

$$\lambda \cdot u = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a & 0 \\ 0 & \lambda \cdot b \end{bmatrix} \in S.$$

Portanto, S é um subespaço vetorial de $M_{2 \times 2}$.

Exemplo 2.5. Se $m \leq n$, então $P_m(\mathbb{R})$ é subespaço de $P_n(\mathbb{R})$. Sendo:

$$P_n(\mathbb{R}) = \{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n; b_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq n\}.$$

Verificação: Seja

$$P_m(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m \mid a_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq m\},$$

com $m \leq n$. Observe que cada polinômio $p(x) \in P_m(\mathbb{R})$ pode ser escrito como:

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m + 0 \cdot x^{m+1} + \dots + 0 \cdot x^n.$$

Ou seja, qualquer elemento de $P_m(\mathbb{R})$ também é um elemento de $P_n(\mathbb{R})$, então:

$$P_m(\mathbb{R}) \subseteq P_n(\mathbb{R}).$$

Exemplo 2.6. Considere o subconjunto W de $M_{2 \times 2}$ onde:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} y & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}; x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

W não é subespaço vetorial, pois:

$$\mathbf{0}_{M_2(\mathbb{R})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin W.$$

Com base nos exemplos que acabamos de analisar, podemos seguir para a proposição da interseção, união e soma de subespaços, utilizando os mesmos critérios para verificar se o conjunto dado é um subespaço vetorial. Na qual diz o seguinte:

Proposição 2.1. (*Interseção e Soma de Subespaços*) *Sejam U e W subespaços de um espaço vetorial V . Então:*

1. *A interseção $U \cap W$ é um subespaço de V .*

2. *A soma*

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

é um subespaço de V .

Demonstraremos o caso da interseção $U \cap W$. O argumento para a soma $U + W$ segue de forma análoga, verificando as mesmas propriedades fundamentais de subespaço.

Demonstração. $U \cap W$ é subespaço vetorial de V .

Então,

$$1. 0_V \in U \cap W$$

De fato, por hipótese

$$0_V \in U \text{ e } 0_V \in W$$

Logo,

$$0_V \in U \cap W.$$

$$2. \text{ Se } x, y \in U \cap W, \text{ então } x + y \in U \cap W$$

Com efeito,

$$x + y \in U \text{ e } x + y \in W$$

Dai, sendo U e W subespaço vetorial $x + y \in U$ e $x + y \in W$

Logo,

$$x + y \in U \cap W.$$

$$3. \text{ Se } x \in U \text{ e } W \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ então:}$$

$$\lambda \cdot x \in U \cap W$$

Note que se $x \in U \cap W$, então:

$$x \in U \text{ e } x \in W$$

Sendo U e W subespaço vetorial, temos:

$$\lambda x \in U \text{ e } \lambda x \in W$$

Portanto,

$$\lambda x \in U \cap W.$$

□

Portanto, como a interseção de dois subespaços vetoriais U e W satisfaz as propriedades de fechamento sob adição e multiplicação por escalar, podemos concluir que $U \cap W$ é um subespaço vetorial de V .

Vejamos que a união de dois subespaços vetoriais nem sempre forma um subespaço. Assim, vamos analisar o seguinte exemplo envolvendo subespaços no $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.7. Dados $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$, subespaços de $\mathbb{R}^2$. Mostre que $U \cup W$ não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

De fato, tomando $u = (1, 1) \in U \cup W$ e $w = (1, -1) \in U \cup W$, temos que $u + w = (2, 0) \notin U \cup W$.

2.2 Base e dimensão de um Espaço Vetorial

Nesta seção, iniciamos revisando a importante noção de dependência linear, fundamental para a compreensão da definição de base em espaços vetoriais.

Definição 2.4. Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e B um subconjunto de $\mathbb{V}$. Dizemos que o conjunto B é linearmente independente sempre que, dados $v_1, v_2, \dots, v_n \in B$ e $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, temos:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Exemplo 2.8. Considere $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ e o conjunto $S = \{v_1, v_2\}$ onde:

$$v_1 = (0, 1) \text{ e } v_2 = (1, 0)$$

Seja

$$\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 &= 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0); \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R} \\ a_1(0, 1) + a_2(1, 0) &= (0, 0) \\ (0, a_1) + (a_2, 0) &= (0, 0) \\ (a_1, a_2) &= (0, 0) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Logo, S é linearmente independente.

Definição 2.5. Seja $B \subset \mathbb{V}$ um conjunto não-vazio e $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Definimos o subespaço gerado por B como sendo:

$$[B] = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n \mid n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}, v_1, \dots, v_n \in B\}.$$

Exemplo 2.9. Considere o espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ e o subconjunto S onde:

$$S = \{v_1, v_2\}.$$

Sendo, $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$. Isto é, o gerado de S é igual a $\mathbb{V}$.

Note que,

$$\begin{aligned} [B] &= \{\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha_1, \alpha_2) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}^2 = \mathbb{V}. \end{aligned}$$

Definição 2.6. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um conjunto $B \subset \mathbb{V}$ é base para o espaço vetorial $\mathbb{V}$ quando:

1. B é L.I (**Linearmente Independente**).
2. $[B] = \mathbb{V}$, isto é, B gera $\mathbb{V}$.

Exemplo 2.10. Podemos citar espaços vetoriais que possuem bases canônicas como exemplos gerais, sendo eles:

1. $\mathbb{R}^n$.
2. $P_n(\mathbb{R})$.
3. $M_n(\mathbb{R})$.

Verificação:

1. Seja o conjunto $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, com $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. é base de $\mathbb{R}^n$

- i. B gera $\mathbb{R}^n$.

Seja $V = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Logo, podemos então escrever V como sendo:

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1(1, 0, \dots, 0) + v_2(0, 1, \dots, 0), \dots, v_n(0, 0, \dots, 1)$$

- ii. B é linearmente independente.

Basta observar, o seguinte:

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1(1, 0, \dots, 0) + v_2(0, 1, \dots, 0), \dots, v_n(0, 0, \dots, 1) = (0, 0, \dots, 0) \\ \Rightarrow v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$$

2. Seja $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ é base para $P_n(\mathbb{R})$

- i. De fato, o conjunto B é L.I uma vez que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_{n+1} x^n = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n$$

Logo, só vale para $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$

- ii. Além disso, B gera $P_n(\mathbb{R})$ uma vez que $P(x) \in P_n(\mathbb{R})$, podemos escrever

$$\beta_1 + \beta_2 \cdot x + \dots + \beta_n \cdot x^n$$

Logo, $\{1, x^2, \dots, x^n\}$ é base para $P_n(\mathbb{R})$.

3. Para responder à questão, utilizaremos o caso particular de $M_2(\mathbb{R})$ para ilustrar a construção da base canônica, e, em seguida, generalizaremos a ideia para $M_n(\mathbb{R})$. Essa abordagem facilita o entendimento do conceito ao partir de um exemplo simples para um caso mais amplo.

Considere a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$ que é composta pelas seguintes matrizes:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Observe que B é base para $M_2(\mathbb{R})$, pois:

Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$, com $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. Podemos escrever:

$$A = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ou seja, B gera $M_2(\mathbb{R})$, e além disso, podemos observar o seguinte:

$$x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Comparando as entradas, temos:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0.$$

Dessa forma, B satisfaz as condições necessárias. Formando, assim, uma base para $M_2(\mathbb{R})$. Subsequentemente, para o caso geral podemos constatar que:

$$A \in M_n(\mathbb{R}) \implies A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sendo

$$A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} E_{ij}.$$

Com

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Note que, se considerarmos o conjunto $B = \{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$, onde cada E_{ij} é uma matriz com 1 na posição (i, j) e 0 nas demais, podemos concluir que B é uma base para o espaço vetorial $M_n(\mathbb{R})$. Ou seja, estabelecendo a ideia para o caso geral. Observe que esses espaços possuem conjuntos de vetores que formam suas bases canônicas, gerando e sendo linearmente independentes dentro de cada espaço.

Exemplo 2.11. Seja $B \in \mathbb{R}^2$, onde: $B = \{e_1, e_2\}$, com $e_1 = (1, 1)$ e $e_2 = (3, 3)$.

Observe o seguinte:

$$a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} = (0, 0); a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Note que

$$\begin{aligned} a_1(1, 1) + a_2(3, 3) &= (0, 0) \\ (a_1 + 3a_2), (a_1 + 3a_2) &= (0, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 + 3a_2 &= 0 \\ a_1 + 3a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Note que $a_1 = 3$ e $a_2 = -1$ é solução do sistema e com isso $a_1 \neq 0$ e $a_2 \neq 0$. Logo, B não é L.I, e portanto, não é base.

Definição 2.7. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Se $\mathbb{V}$ tem uma base com n vetores, então dizemos que $\mathbb{V}$ tem dimensão finita e a dimensão de $\mathbb{V}$ é quantidade de valores da base.

Notação:

$$\dim(\mathbb{V})=n.$$

Baseado no **Exemplo 2.6** que já fizemos na seção anterior, vemos que a dimensão de um espaço vetorial está diretamente ligada à quantidade de elementos de suas bases. Caso surjam dúvidas, recomendamos revisar os exemplos mencionados para reforçar o entendimento.

Exemplo 2.12. Considere os seguintes espaço vetoriais:

1. $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1, 1), (0, 1)\}$ é base de $\mathbb{V}$. Então, $\dim V = 2$.
2. $\dim \mathbb{R}^n = n$.
3. Se $\mathbb{V} = M_{2 \times 2}$. Então, $\dim V = 4$.
4. $\dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

Observação 1: Denominamos de espaço vetorial de **dimensão infinita** aquele cuja base pode ser representado por um número limitado de vetores. Já um espaço de **dimensão finita** pode ser descrito por um conjunto finito de vetores. Neste estudo, vamos nos concentrar apenas em espaços vetoriais de dimensão finita.

Observação 2: Uma pergunta natural surge na definição de dimensão: **será que todas as bases têm a mesma quantidade de elementos?** A resposta é **afirmativa**, e isso é o que veremos no próximo teorema.

Teorema 2.1. *Qualquer base de um espaço vetorial de dimensão finita tem sempre mesmo número finito de elementos.*

Demonstração. Ver Axler (1996) na página 44. □

Outra pergunta natural é sobre existência de Bases: **será que todo espaço vetorial tem uma base?** A resposta é afirmativa.

Verificação: Ver Axler (1996) na página 40.

2.3 Transformação Lineares

No contexto da Álgebra Linear, é comum estudarmos relações entre diferentes espaços vetoriais. Essas relações ocorrem por meio de funções especiais que conectam dois espaços vetoriais distintos, respeitando suas estruturas algébricas. Tais funções, conhecidas como **transformações lineares**, são aquelas que têm como domínio e contradomínio espaços vetoriais e que preservam duas operações fundamentais: a adição de vetores e a multiplicação por escalar. Em casos particulares, quando o domínio e o contradomínio coincidem, essas transformações recebem o nome de **operadores lineares**, nomenclatura que será retomada mais adiante.

Definição 2.8. Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. uma transformação linear é uma aplicação:

$$T: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$$

que satisfaz as seguintes condições:

1. Se $u, v \in \mathbb{V}$, então:

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

2. se $u \in \mathbb{V}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então;

$$T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot (T(u))$$

Exemplo 2.13. Considere $\mathbb{V} = M_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{W} = \mathbb{R}^4$. A aplicação:

$$T: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \longmapsto T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = (x, y, z, w).$$

é uma transformação linear?

1. Sejam $u, v \in M_2(\mathbb{R})$, então:

$$u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } v = \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}; a, b, c, d, m, n, o, p \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} u + v &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a + m & b + n \\ c + o & d + p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

. Note que

$$\begin{aligned} T(u + v) &= T\left(\begin{bmatrix} a + m & b + n \\ c + o & d + p \end{bmatrix}\right) \\ &= (a + m, b + n, c + o, d + p). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} T(u) &= T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, b, c, d). \\ T(v) &= T\left(\begin{bmatrix} m & n \\ o & p \end{bmatrix}\right) = (m, n, o, p). \end{aligned}$$

Assim,

$$T(u) + T(v) = (a + m, b + n, c + o, d + p).$$

Portanto,

$$T(u + v) = (a + m, b + n, c + o, d + p) = T(u) + T(v).$$

ou seja,

$$T(u + v) = T(u) + T(v) \forall u, v \in M_2(\mathbb{R}).$$

2. Seja $u \in M_2(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ sendo:

$$u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Note que,

$$\lambda \cdot u = \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a & \lambda \cdot b \\ \lambda \cdot c & \lambda \cdot d \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$T(\lambda \cdot u) = T\left(\begin{bmatrix} \lambda \cdot a & \lambda \cdot b \\ \lambda \cdot c & \lambda \cdot d \end{bmatrix}\right) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \lambda(T(u)) &= \lambda T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda(a, b, c, d) \\ &= (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d). \end{aligned}$$

Portanto, $T(\lambda u) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d) = \lambda T(u)$, $\forall u \in M_2(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Concluindo assim, que $T: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ é uma transformação linear.

Exemplo 2.14. Seja $V = P_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais e grau menor ou igual a n . A função $T: V \rightarrow V$, definida por $(Tp)(x) = p'(x)$, para todo $p \in V$, é uma transformação linear, pois:

$$\begin{aligned} (T(p+q))(x) &= ((p+q)(x))' = (p(x) + q(x))' \\ &= p'(x) + q'(x) = (Tp)(x) + (Tq)(x) \\ &= (Tp + Tq)(x), \quad \forall p, q \in V. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (T(ap))(x) &= (ap(x))' = ap'(x) = a(Tp)(x) \\ &= (a(Tp))(x) \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ e } p \in V. \end{aligned}$$

Comentário: Vale destacar que o operador fica bem definido porquanto a derivação diminui o grau do Polinômio.

Exemplo 2.15. Defina $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por:

$$T(x, y) = (x + 1, y).$$

Dessa forma,

$$T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2).$$

$$T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = (x_1 + 1, y_1) + (x_2 + 1, y_2) = (x_1 + x_2 + 2, y_1 + y_2).$$

e portanto, $T(x + y) \neq T(x) + T(y)$, não satisfazendo a primeira propriedade. Logo, não é transformação linear.

Lema 2.1. *Sejam $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$, espaços vetoriais e $T: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ uma transformação linear. Então*

a) $T(0_{\mathbb{U}}) = 0_{\mathbb{V}}$, onde $0_{\mathbb{U}}$ e $0_{\mathbb{V}}$ denotam os vetores nulos de $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$, respectivamente.

b) $T(-u) = -T(u)$, para cada $u \in \mathbb{U}$.

Demonstração. Se $T: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$. Então

a)

$$\begin{aligned} T(0_{\mathbb{U}}) &= T(0_{\mathbb{U}} + 0_{\mathbb{U}}) \\ T(0_{\mathbb{U}}) &= 2T(0_{\mathbb{U}}) \\ T(0_{\mathbb{U}}) - T(0_{\mathbb{U}}) &= 2T(0_{\mathbb{U}}) - T(0_{\mathbb{U}}) \\ 0_{\mathbb{V}} &= T(0_{\mathbb{U}}). \end{aligned}$$

□

Demonstração. Basta Observar que

$$\text{b) } -u = (-1)u, \text{ para cada } u \in \mathbb{U} \text{ e, portanto, } T(-u) = T((-1)u) = (-1)T(u) = -T(u).$$

□

Teorema 2.2. *Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais. Se $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base para $\mathbb{V}$ e $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{W}$, então existe uma única transformação linear $T: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ tal que:*

$$T(v_j) = w_j, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Demonstração. Ver Boldrini et al. (1980) na página 151.

□

Um corolário importante que decorre diretamente do Teorema Fundamental das Transformações Lineares é

Corolário 2.1.1. *Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais. e $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base para $\mathbb{V}$. Se $T: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ é uma transformação linear tal que*

$$T(v_1) = 0_{\mathbb{W}}, T(v_2) = 0_{\mathbb{W}}, \dots, T(v_n) = 0_{\mathbb{W}}.$$

Então T é uma transformação nula.

Demonstração. Pelo lema anterior notemos o seguinte:

$$T(v) = 0_{\mathbb{W}} \forall v \in \mathbb{V}$$

Visto isso, considere:

$$V = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n, \forall a_j \in \mathbb{R} \text{ com } j = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} T(v) &= (a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n) \\ &= T(a_1v_1) + T(a_2v_2) + \dots + T(a_nv_n) \\ &= a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \dots + a_nT(v_n) \\ &= a_10_{\mathbb{W}} + a_20_{\mathbb{W}} + \dots + a_n0_{\mathbb{W}} \\ &= 0_{\mathbb{W}}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.16. Seja $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{W} = \mathbb{R}^2$, com uma base $\beta = \{v_1, v_2\}$ para $\mathbb{V}$, onde:

$$v_1 = (1, 0) \quad \text{e} \quad v_2 = (0, 1).$$

Definimos a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de modo que cada vetor da base β seja mapeado para o vetor zero:

$$T(v_1) = (0, 0) \quad \text{e} \quad T(v_2) = (0, 0).$$

Para qualquer vetor $v = av_1 + bv_2$ em $\mathbb{V}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

$$T(v) = T(av_1 + bv_2) = aT(v_1) + bT(v_2) = a \cdot (0, 0) + b \cdot (0, 0) = (0, 0).$$

Portanto, T é a **transformação nula** em $\mathbb{V}$, pois mapeia todos os vetores de $\mathbb{V}$ para o vetor zero em $\mathbb{W}$.

Ainda, uma importante observação a se fazer é a relação entre transformações lineares e matrizes no qual surge ao considerar bases específicas nos espaços vetoriais de partida e chegada.

Observação: Seja $T: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ uma transformação linear. Se $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\gamma = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ são bases para $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, respectivamente, então sempre podemos associar a transformação linear $T: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ a uma matriz, denotada por $[T]_{\beta}^{\gamma}$ de ordem $m \times n$. Um exemplo que ilustra isso:

Exemplo 2.17. Determine a matriz associada a seguinte transformação linear.

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto T(x, y, z) = (x - 2y, 2x + 3y - z). \end{aligned}$$

Verificação: Considere a base canônica do $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (1, 2) = 1(1, 0) + 2(0, 1). \\ T(0, 1, 0) &= (-2, 3) = -2(1, 0) + 3(0, 1). \\ T(0, 0, 1) &= (0, -1) = 0(1, 0) - 1(0, 1). \end{aligned}$$

Observe que a base do $\mathbb{R}^2$ é:

$$\gamma = \{(1, 0), (0, 1)\}.$$

Dessa forma, a matriz associada a transformação linear é:

$$[T]_{\beta}^{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z) &= (x - 2y, 2x + 3y - z) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} x - 2y \\ 2x + 3y - z \end{bmatrix} \\
 &= (x - 2y, 2x + 3y - z).
 \end{aligned}$$

Vejamos agora como se dá o caso geral:

Seja $T : V \rightarrow W$ linear, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V e $\beta' = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W . Então $T(v_1), \dots, T(v_n)$ são vetores de W e, portanto:

$$\begin{aligned}
 T(v_1) &= a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m \\
 &\vdots \\
 T(v_n) &= a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m
 \end{aligned}$$

A transposta da matriz de coeficientes deste sistema, anotada por $[T]_{\beta'}^{\beta}$, é chamada matriz de T em relação às bases β e β' .

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

Observe que T passa a ser a aplicação linear associada à matriz A e às bases β e β' , isto é, $T = T_A$. Note que a representação matricial é importante para as transformações, tanto em aplicações quanto do ponto de vista teórico, pois ela permite visualizar as transformações sob diferentes perspectivas, o que exploraremos nos capítulos posteriores.

2.4 Núcleo e Imagem de uma transformação linear

Dois conceitos fundamentais no estudo de transformações lineares são o núcleo e a imagem de uma transformação. A partir deles, é possível analisar características como injetividade, sobrejetividade e o espaço gerado pelos vetores transformados.

Se $u \in \text{Ker}(T)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

$$T(u) = 0_{\mathbb{W}}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 T(\lambda \cdot u) &= \lambda \cdot T(u) \\
 &= \lambda \cdot 0_{\mathbb{W}} = 0_{\mathbb{W}}.
 \end{aligned}$$

Vejamos agora, como se dá o caso geral:

Definição 2.9. Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais e $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ uma transformação linear. O **núcleo** e a **imagem** de T é o conjunto definido respectivamente por:

$$Ker(T) = \{v \in \mathbb{V}; T(v) = 0_{\mathbb{W}}\}$$

$$Im(T) = \{T(v); v \in \mathbb{V}\}.$$

Importante!

$ker(T) \neq \emptyset$, pois sempre $0_{\mathbb{V}} \in Ker(T)$ uma vez que

$$T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}.$$

Além disso, temos que $Im(T) \subset \mathbb{W}$ e $Im(T) \neq \emptyset$, pois $0_{\mathbb{W}} \in Im(T)$ uma vez que

$$0_{\mathbb{W}} = T(0_{\mathbb{V}}).$$

Proposição 2.2. *Seja $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ uma transformação linear, então $Ker(T)$ é um subespaço de $\mathbb{V}$ e $Im(T)$ é um subespaço de $\mathbb{W}$.*

Parte I: Para mostrar que $Ker(T)$ é um subespaço $\mathbb{V}$, verificamos as propriedades necessárias para um subespaço

- i $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$, logo $0 \in N(T)$
- ii Sejam $u, v \in ker(T)$, então $T(u) = 0_{\mathbb{W}}$ e $T(v) = 0_{\mathbb{W}}$, assim

$$\begin{aligned} T(u + v) &= T(u) + T(v) \\ &= 0_{\mathbb{W}} + 0_{\mathbb{W}} = 0_{\mathbb{W}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$u + v \in Ker(T)$$

- iii Se $u \in Ker(T)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então: $T(u) = 0_{\mathbb{W}}$ Logo,

$$\begin{aligned} T(\lambda \cdot u) &= \lambda \cdot T(u) \\ &= \lambda \cdot 0_{\mathbb{W}} = 0_{\mathbb{W}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda \cdot u \in Ker(T).$$

Parte II: Para mostrar que $Im(T)$ é subespaço de $\mathbb{W}$, verifiquemos as propriedades necessárias para um subespaço:

- i $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}} \Rightarrow 0 \in Im(T)$.
- ii Sejam $u, v \in Im(T)$, então $u = T(a)$ e $v = T(b)$ para alguns $a, b \in \mathbb{V}$. Logo,

$$\begin{aligned} u + v &= T(a) + T(b) \\ &= T(a + b) \in Im(T). \end{aligned}$$

iii Se $u \in \text{Im}(T)$ e $c \in \mathbb{R}$, então $u = T(v)$ para algum $v \in V$. Logo,

$$c \cdot u = T(c \cdot v) \in \text{Im}(T).$$

Portanto, $\text{Im}(T)$ é um subespaço de $\mathbb{W}$.

Proposição 2.3. *Seja $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ uma transformação linear. Então, T é injetora se, e somente se, $\text{Ker}(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que T é injetiva, seja $u \in \text{Ker}(T)$, então:

$$\begin{aligned} T(u) &= 0_{\mathbb{W}} = T(0_{\mathbb{V}}) \\ \Rightarrow T(u) &= T(0_{\mathbb{V}}) \end{aligned}$$

Assim, $u = 0_{\mathbb{V}}$.

$(\Leftarrow)$ Sejam $u, v \in \mathbb{V}$. Note que, se $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$. De fato, se

$$\begin{aligned} T(u) &= T(v) \\ T(u) - T(v) &= 0 \\ T(u - v) &= 0_{\mathbb{W}} \end{aligned}$$

Logo, $u - v \in \text{Ker}(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$.

Dai, $u - v = 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow u = v$. □

Observação: Podemos também nos perguntar sobre a sobrejetividade de uma Transformação T , nesse caso. $\text{Im}(T) = \mathbb{W}$, observe também que T é injetora se $\dim \text{Ker}(T) = 0$ e T é sobrejetora se $\dim \text{Im}(T) = \dim \mathbb{W}$. pois, como $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$ são subespaço vetoriais podemos encontrar base e dimensão desses espaços.

Teorema 2.3. (Teorema do Núcleo e da Imagem) *Seja $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ uma transformação linear, onde V tem dimensão finita. Então:*

$$\dim N(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim V.$$

Demonstração. Ver em Axler (1997) página 45. □

Para compreender melhor os conceitos de núcleo e imagem de uma transformação linear, vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.18. Determinar o núcleo e a imagem do operador linear:

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z).$$

Verificação: Por definição, temos o seguinte:

$$N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x, y, z) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)\}.$$

Por conseguinte,

$$(x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z) = (0, 0, 0).$$

vindo o sistema,

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ y + 2z = 0, \\ x + 3y + z = 0. \end{cases}$$

cuja solução geral é $(5z, -2z, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

Logo:

$$N(T) = \{(5z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(5, -2, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} = [(5, -2, 1)].$$

Para a Imagem, temos o seguinte:

$$Im(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x, y, z) = (a, b, c)\},$$

isto é, $(a, b, c) \in Im(T)$ se existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que:

$$(x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z) = (a, b, c).$$

e o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = a, \\ y + 2z = b, \\ x + 3y + z = c. \end{cases}$$

somente terá solução se $a + b - c = 0$.

Logo:

$$Im(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b - c = 0\}.$$

Notemos que:

$$\dim N(T) + \dim Im(T) = 1 + 2 = 3.$$

que é a dimensão do domínio $\mathbb{R}^3$.

Observação: O vetor imagem $T(x, y, z)$ pode ser expresso da seguinte forma:

$$(x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z) = (x, 0, x) + (2y, y, 3y) + (-z, 2z, z).$$

ou

$$(x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z) = x(1, 0, 1) + y(2, 1, 3) + z(-1, 2, 1).$$

Logo, qualquer vetor do conjunto imagem é combinação linear dos vetores $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 3)$ e $(-1, 2, 1)$ e, portanto:

$$Im(T) = \{(1, 0, 1), (2, 1, 3), (-1, 2, 1)\}.$$

Observando que:

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 1), \quad T(0, 1, 0) = (2, 1, 3), \quad T(0, 0, 1) = (-1, 2, 1).$$

conclui-se que:

$$Im(T) = \{T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1)\}.$$

3 Autovetores e Autovalores

No estudo das transformações lineares, surge naturalmente a necessidade de compreender como certos vetores se comportam ao serem transformados. Em especial, interessa-nos identificar aqueles vetores que não mudam de direção, apenas são “alongados ou encurtados” por uma transformação. Esses vetores especiais são chamados de autovetores, e os fatores pelos quais eles são multiplicados são os chamados autovalores.

Definição 3.1. Seja $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ uma transformação linear. Dizemos que o escalar λ é um **autovalor** de T se existe um vetor não nulo $v \in \mathbb{V}$ tal que:

$$T(v) = \lambda v$$

Dizemos que esse vetor $\mathbf{v}$ é o **Autovetor** de T associado ao **Autovalor** de λ .

Observação 1: Dizemos que a transformação linear T é um **operador linear** quando domínio e contradomínio de T são iguais ao mesmo espaço vetorial associado.

Observação 2: Note que λ pode ser o número 0, embora v não possa ser o vetor nulo. Pois, neste caso, ele não definiria uma direção ou sentido no espaço vetorial.

Note que, ao tratarmos de autovalores e autovetores, estamos nos referindo aos valores e vetores associados à transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, cuja representação matricial, em relação à base canônica, é dada por uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Mais precisamente, dizemos que um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é um *autovalor* de A se existir um vetor não nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$T_A(\mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v},$$

Daremos a seguir um exemplo de como calcular autovalores e autovetores, a partir da definição.

Exemplo 3.1. Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por:

$$T(x, y) = (8x + 4y, -6x - 2y).$$

Determine se existe autovalores para T . Caso existam, determine seus respectivos autovetores.

Verificação: Seja $T(v) = \lambda v$ com $v \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 \neq \bar{0}$ temos:

$v = (x, y); x, y \in \mathbb{R}$, portanto:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \lambda(x, y) \\ (8x + 4y, -6x - 2y) &= (\lambda x, \lambda y). \end{aligned}$$

Analisando as entradas, temos o sistema seguinte:

$$\begin{cases} 8x + 4y = \lambda x \\ -6x - 2y = \lambda y \end{cases} \implies \begin{cases} 8x - \lambda x + 4y = 0 \\ -6x - (\lambda y) - 2y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (8 - \lambda)x + 4y = 0 \\ -6x + (-2 - \lambda)y = 0. \end{cases}$$

Note que podemos representar esse sistema na forma matricial, ou seja, $A \cdot v = 0$, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 8 - \lambda & 4 \\ -6 & -2 - \lambda \end{bmatrix}$$

Para que o sistema possua soluções não triviais (ou seja, além de $\mathbf{v}=\mathbf{0}$), o determinante da matriz A deve ser igual a zero. Assim, calculamos:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 8 - \lambda & 4 \\ -6 & -2 - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

$$\det(A) = (8 - \lambda)(-2 - \lambda) + 24 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

Logo, temos que $\lambda = 2$ e $\lambda = 4$.

Substituindo no sistema para $\lambda = 2$

$$\begin{cases} 6x + 4y = 0 \\ -6x - 4y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 4y = -6x \\ y = -\frac{3x}{2} \end{cases}$$

sendo, então o autovetor associado:

$$v = (t, -\frac{3t}{2}); t \in \mathbb{R}.$$

Para $\lambda = 4$, temos:

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ -6x - 6y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 4y = -4x \\ y = -x \end{cases}$$

Portanto, o autovetor associado é

$$v = (t, -t); t \in \mathbb{R}.$$

O teorema a seguir destaca a estrutura dos autovetores, mostrando que todos os múltiplos não nulos de um autovetor também compartilham o mesmo autovalor.

Teorema 3.1. *Dada uma transformação linear $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ e um autovetor v associado a um autovalor λ , qualquer vetor $w = \alpha v (\alpha \neq 0)$ também é autovetor de T associado a λ .*

Observação: O conjunto formado pelos autovetores associados a um autovalor λ e o vetor nulo é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$, isto é, $\mathbb{V}_\lambda = \{v \in \mathbb{V} : T(v) = \lambda v\}$

Definição 3.2. Seja T um operador linear em um espaço $\mathbb{V}$ e seja λ um autovalor de T . O conjunto $E_\lambda = \{v \in \mathbb{V} : T(v) = \lambda v\}$ é chamado de **Autoespaço** de λ .

Antes de avançarmos no estudo de autovalores e autovetores, é importante introduzirmos o conceito de subespaço invariante, isto é, um subespaço que é preservado pela ação do operador linear.

Definição 3.3. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial e $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ um operador linear. Se $\mathbb{W}$ é um subespaço de $\mathbb{V}$, dizemos que $\mathbb{W}$ é um *subespaço vetorial invariante pelo operador T* ou *T -invariante* se, para cada vetor $w \in \mathbb{W}$, tivermos $T(w) \in \mathbb{W}$, isto é, $T(\mathbb{W}) \subseteq \mathbb{W}$.

3.0.1 O Polinômio Característico

Seja A uma matriz de ordem n . Os autovalores e autovetores correspondentes de A são aqueles que satisfazem a equação $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, ou ainda $p(\lambda) = (A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$. Onde esse $p(\lambda)$ é o Polinômio Característico. Escrevendo esta equação na forma matricial, temos:

$$A \cdot v - \lambda \cdot v = (A - \lambda \cdot I)v = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observe que o desenvolvimento dessa matriz dá-nos um polinômio $\delta(\lambda)$ de grau n em λ . Além disso, notemos que se nosso $\det A \neq 0$, teremos que o nosso sistema acima admite uma única solução trivial, ou seja a solução nula. Dessa forma, como queremos expressar os autovetores $\mathbf{v}$ que no caso seria a solução não nula da equação. Portanto, bastaria pensar no seguinte:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Note que como se trata de um $P(\lambda)$, ou seja, um polinômio característico gerado a partir $\det(A - \lambda I) = 0$. Temos que, os autovalores procurados são as raízes deste polinômio.

Comentário: O polinômio que se trata é o chamado **Polinômio Característico** que possui importantes propriedades. Para uma melhor análise Ver em Boldrini et al. (1980) na página 185.

Para facilitar a compreensão do método de obtenção de autovalores e autovetores de matrizes, apresentamos exemplos práticos que utilizam o polinômio característico.

Exemplo 3.2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$ cuja matriz em relação à base canônica α é

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine se existem autovalores para T . Caso existam, determine seus respectivos autovetores.

Verificação: Inicialmente, calculamos os autovalores:

$$\text{Det}(B - \lambda I) = \text{Det} \left(\begin{bmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ -1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \right) = (-3 - \lambda)(2 - \lambda) + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2 = P(\lambda).$$

Dessa forma, $P(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$, oque implica em $\lambda = -2$ ou $\lambda = 1$. Consequentemente, temos que: os autovalores de B são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$. Procuramos agora os autovetores associados.

i) Para $\lambda_1 = 1$: Resolvemos a equação $(B - 1I)v = 0$, temos:

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observe que recaímos em um sistema

$$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Então, temos que $x = y$. Portanto os autovetores associados a $\lambda_1 = 1$ são os vetores $v = (x, x); x \neq 0$

ii) Para $\lambda_2 = -2$: Resolvemos a equação $(B + 2I)v = 0$, temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Novamente recaímos em um sistema

$$\begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$$

Então, temos que $x = 4y$. Portanto os autovetores associados a $\lambda_2 = -2$ são os vetores $v = (4y, y); y \neq 0$

3.1 Diagonalização de Operadores

Nosso objetivo será encontrar uma base do espaço vetorial V na qual a matriz de um determinado operador linear seja a mais simples possível. Como você verá, a melhor situação é aquela em que conseguimos uma matriz diagonal associada a um operador. Além disso, alguns resultados de alguns casos, terão suas demonstrações omitidas para economizar espaço, porem sempre com indicação de referências onde estas podem ser encontradas

3.1.1 Base de Autovetores

Dado um operador linear $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, nosso objetivo é conseguir uma base β de V na qual a matriz do operador nesta base $[T]_{\beta}^{\beta}$ seja uma matriz diagonal, que é a forma mais simples possível de se representar um operador. Observemos inicialmente a seguinte propriedade dos autovetores.

Teorema 3.2. *Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.*

Demonstração. Ver em Boldrini et al. (1980) na página 200

□

Uma consequência deste teorema que nos interessará particularmente é dada a seguir.

Corolário 3.0.1. *Se $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial de dimensão n e $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ é um operador linear que possui n autovalores distintos, então $\mathbb{V}$ possui uma base cujos vetores são todos autovetores de T .*

Em outras palavras, se conseguirmos encontrar tantos autovalores distintos quanto for a dimensão do espaço, podemos garantir a existência de uma base de autovetores. Visto isso, podemos pensar o seguinte.

Dada uma transformação linear qualquer $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, se conseguirmos uma base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ formada por autovetores de T , então, como

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n, \\ T(v_2) &= 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0v_n, \\ &\vdots \\ T(v_n) &= 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_n v_n. \end{aligned}$$

A matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$ será uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são os autovalores λ_i , isto é,

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Não precisamos ter necessariamente os λ_i distintos. Na verdade, um autovalor aparecerá na diagonal tantas vezes quantas forem os autovetores LI a ele associados.

Por outro lado, se $\gamma = \{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base de $\mathbb{V}$ tal que

$$[T]_{\gamma}^{\gamma} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

Note que $u_1, \dots, u_n$ são necessariamente autovetores de T com autovalores $a_1, \dots, a_n$ respectivamente. De fato, da definição de $[T]_{\gamma}^{\gamma}$ temos:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= a_1 u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_n, \\ T(u_2) &= 0u_1 + a_2 u_2 + \dots + 0u_n, \\ &\vdots \\ T(u_n) &= 0u_1 + 0u_2 + \dots + a_n u_n. \end{aligned}$$

Observe que em decorrência disso, temos:

Teorema 3.3. *Um operador $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ admite uma base β em relação à qual sua matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$ é diagonal, se e somente se, essa base β for formada por autovetores de T*

Que por consequência é o motivo da definição que se segue.

Definição 3.4. Seja $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ um operador linear. Dizemos que T é um **operador diagonalizável** se existe uma base de $\mathbb{V}$ cujos elementos são autovetores de T .

Para uma melhor fixação do conceito, vejamos agora alguns exemplos.

Importante: Para o Exemplo seguinte usaremos os dados do **Exemplo 3.2**.

Exemplo 3.3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$ cuja matriz em relação à base canônica α é

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Obtenha, se possível, uma base β de autovetores e $[T]_{\beta}^{\beta}$.

Observação: Usaremos as informações da lei de formação dos autovetores e autovalores já obtidas do mesmo exemplo anterior.

Verificação: Sabendo que os autovetores de T são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$ e como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ pelo corolário anterior podemos garantir que existe uma base de autovetores.

Com efeito, dois autovetores associados a λ_1 e λ_2 são $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (4, 1)$, respectivamente. Note também que tais vetores são L.I, ou seja, formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Admitindo assim, uma base $\alpha = \{v_1, v_2\}$ formada por autovetores de T .

Calculemos agora, $[T]_{\beta}^{\beta}$

Para $T(v_1)$, temos o seguinte:

$$T(v_1) = \lambda v_1 \Rightarrow T(v_1) = 1 \cdot (1, 1) = (1, 1).$$

$$\text{Portanto, temos: } (1, 1) = a_{11}(1, 1) + a_{21}(4, 1) = 1(1, 1) + 0(4, 1).$$

Para $T(v_2)$, temos o seguinte:

$$T(v_2) = \lambda v_2 \Rightarrow T(v_2) = -2 \cdot (4, 1) = (-8, -2).$$

$$\text{Portanto, temos: } (-8, -2) = a_{12}(1, 1) + a_{22}(4, 1) = 0(1, 1) - 2(4, 1).$$

Por conseguinte, tem-se que:

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz de T em relação à base de autovetores é uma matriz diagonal.

Exemplo 3.4. Seja $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz em relação à base canônica α é

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Verificação: $P(\lambda) = \det([T]_{\alpha}^{\alpha} - \lambda I) = (3 - \lambda)^2(-1 - \lambda)$.

Os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$. Associado a $\lambda_1 = 3$ temos autovetores do tipo $(x, y, 0)$.

Portanto obtemos dois autovetores LI.

$$v_1 = (1, 0, 0) \text{ e } v_2 = (0, 1, 0).$$

Associado a $\lambda_2 = -1$ temos um autovetor LI, $u = (4, -5, 4)$. Então $\beta = \{v_1, v_2, u\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída de autovetores de T e

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3.2 Produto Interno

Estamos interessados nessa seção em formalizar o estudo de espaços vetoriais com produto interno, função essa cujo domínio é o produto cartesiano de um espaço vetorial por si mesmo e o contradomínio é um corpo, satisfazendo um conjunto de axiomas, ou seja, uma função que associa a pares de vetores um escalar. Desde suas propriedades e algumas aplicações importantes.

Iniciamos o estudo de produto interno definindo o produto interno sobre Espaços Vetoriais reais.

Definição 3.5. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial real. Um **produto interno** sobre $\mathbb{V}$ é uma função.

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

ou seja, que associa a cada par de vetores $(u, v) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ um número $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$, satisfazendo os seguintes axiomas:

- i. $\langle u, u \rangle \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{V}$, e $\langle u, u \rangle = 0$, se e somente se, $u = 0$ (Axioma de Positividade)
- ii. $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$ (Axioma de Aditividade)
- iii. $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ (Axioma de Homogeneidade)
- iv. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (Axioma de Comutatividade ou Simetria)

Observação 1: A definição de produto interno também faz sentido no caso geral de $\mathbb{K}$ espaço vetorial. Nesse caso, a função fica sendo $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$. No nosso caso, consideraremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Observação 2: Os axiomas de um produto interno real derivam diretamente das propriedades do produto escalar, garantindo que qualquer espaço com produto interno satisfaça essas condições naturalmente.

Em geral, existem muitos produtos internos diferentes sobre o mesmo espaço vetorial. Apresentamos a seguir um dos mais importantes produtos internos

Exemplo 3.5. Seja $V = \mathbb{R}^n$ e $u = (x_1, \dots, x_n)$, $v = (y_1, \dots, y_n)$. A função

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

onde $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, define $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como um produto interno sobre $V = \mathbb{R}^n$. Este é chamado de produto interno canônico ou usual sobre $\mathbb{R}^n$

Verificação: De fato, verifiquemos que a função satisfaz os axiomas de produto interno.

1. Para todo $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\langle u, u \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

Como $x_j^2 \geq 0$, para todo $1 \leq j \leq n$ segue que $\langle u, u \rangle \geq 0$.

Suponha que $u \neq 0$, ou seja, que alguma de suas componentes é não nula, digamos que $x_j \neq 0$, para algum $1 \leq j \leq n$. Então,

$$\begin{aligned} &\iff \langle u, u \rangle = 0 \\ &\iff x_1^2 + \dots + x_j^2 + \dots + x_n^2 = 0 \\ &\iff \left(\frac{x_1}{x_j}\right)^2 + \dots + 1 + \dots + \left(\frac{x_n}{x_j}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(\frac{x_1}{x_j}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n}{x_j}\right)^2 = -1 \end{aligned}$$

Contradição, pois o primeiro membro da última igualdade é maior que ou igual a zero enquanto o segundo membro é negativo.

Portanto,

$$\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$$

2. Para todo $u_1 = (x_1, \dots, x_n)$, $u_2 = (y_1, \dots, y_n)$, $v = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\begin{aligned} \langle u_1 + u_2, v \rangle &= \langle (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n) \rangle \\ &= \langle (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle \\ &= (x_1 + y_1)z_1 + \dots + (x_n + y_n)z_n \\ &= (x_1 z_1 + \dots + x_n z_n) + (y_1 z_1 + \dots + y_n z_n) \\ &= \langle (x_1, \dots, x_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle + \langle (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n) \rangle \\ &= \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle. \end{aligned}$$

3. Para todo $u = (x_1, \dots, x_n), v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}\langle \alpha u, v \rangle &= \langle \alpha(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle \\ &= \langle (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle \\ &= (\alpha x_1)y_1 + \dots + (\alpha x_n)y_n \\ &= \alpha(x_1y_1 + \dots + x_ny_n) \\ &= \alpha \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle \\ &= \alpha \langle u, v \rangle\end{aligned}$$

4. Para todo $u = (x_1, \dots, x_n), v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &= \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle \\ &= x_1y_1 + \dots + x_ny_n \\ &= y_1x_1 + \dots + y_nx_n \\ &= \langle (y_1, \dots, y_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle \\ &= \langle v, u \rangle.\end{aligned}$$

Exemplo 3.6. Seja $V = P_n(\mathbb{R})$, então:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx, \quad p, q \in P_n(\mathbb{R})$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $P_n(\mathbb{R})$.

Verificação: De fato, verifiquemos que a função satisfaz os axiomas de produto interno.

1. Para todo $f(x) \in P_n(\mathbb{R})$, temos:

$$\begin{aligned}\langle f, f \rangle &= \int_{-1}^1 f(x)f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 [f(x)]^2 dx.\end{aligned}$$

Do calculo diferencial integral sabe-se que se $f(x)$ é integrável em $[a, b]$ e se $f(x) \geq 0$ neste intervalo, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. Como $[f(x)]^2 \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, segue que:

$$\langle f, f \rangle = \int_{-1}^1 [f(x)]^2 dx \geq 0.$$

Para todo $x \in [-1, 1]$.

Além disso, como $[f(x)]^2 \geq 0$ e $f(x)$ é continua e $[1, 1]$, segue que $\int_{-1}^1 [f(x)]^2 dx = 0$ se, e somente se, $f(x) = 0$ para todo $x \in [-1, 1]$. (**Sugestão:** Para uma justificativa mais detalhada sobre esse tipo de argumento envolvendo integrais de funções

contínuas, consulte o livro *Cálculo, Volume 1*, de James Stewart (2013). Veja também o *Curso de Análise, Volume 1*, de Elon Lages Lima (2012) sobre Integrais). Portanto, como $f(x)$ é um polinômio $f(x) = 0$ para todo $\mathbb{R}$. Ou seja, só vai existir um polinômio que é constante no intervalo igual a 0 sendo ele o próprio nulo.

2. Para todo $f, p, q \in P_n(\mathbb{R})$, temos:

$$\begin{aligned}\langle f + p, q \rangle &= \int_{-1}^1 [f(x) + p(x)] + q(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 [f(x)q(x) + p(x)q(x)] dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x)q(x) dx + \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx \\ &= \langle f, q \rangle + \langle p, q \rangle.\end{aligned}$$

3. Para todo $p, q \in P_n(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned}\langle \alpha p, q \rangle &= \int_{-1}^1 \alpha p(x) + q(x) dx \\ &= \alpha \int_{-1}^1 p(x) + q(x) dx \\ &= \alpha \langle p, q \rangle.\end{aligned}$$

4. Para todo $p, q \in P_n(\mathbb{R})$, temos:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x) + q(x) dx = \int_{-1}^1 q(x) + p(x) dx = \langle q, p \rangle.$$

Ainda sobre o conceito de produto interno, podemos pensar nos resultados do **Exemplo 3.5** como uma forma de entender as ideias de comprimento e distância entre vetores. No caso do espaço euclidiano, ao trabalhar com dois vetores u e v em $\mathbb{R}^n$, o produto interno ajuda a relacionar esses vetores de maneira geométrica. Dessa relação, surgem dois conceitos importantes que são a norma, que mede o tamanho de um vetor, e a distância, que indica o quanto dois vetores estão separados.

Definição 3.6. Seja $\mathbb{V}$ um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Definimos a **Norma** (ou comprimento) de um vetor v em relação a este produto interno

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Importante: Se $\|\mathbf{v}\| = 1$, isto é, $\langle v, v \rangle$ é chamado vetor unitário. Dizemos também, neste caso, que v está normalizado.

Já para a **Distância** entre dois vetores podemos expressar como sendo:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle}.$$

É importante destacar que para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. A **Norma euclidiana** de x é definida por

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

Teorema 3.4. *Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial com produto interno. Para quaisquer v, w em $\mathbb{V}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$*

- i. $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0$ se, e somente se, $v = 0$.*
- ii. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.*
- iii. $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ (Desigualdade de Schwarz).*
- iv. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Desigualdade triangular).*

Demonstração. Segue-se que (i) e (ii) é deduzida a partir das propriedades do produto interno usando técnicas de cálculo bem conhecidas. E para (iii) e (iv) ver Axler (1997) páginas 104 e 105. $\square$

Definição 3.7. Seja $\mathbb{V}$ um espaço com produto interno. Dizemos que os vetores $u, v \in \mathbb{V}$ são ortogonais, ou que u é ortogonal a v , se

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Note que, na definição de ortogonalidade, a ordem dos vetores envolvidos no produto interno não altera o resultado. Em outras palavras, a ortogonalidade é uma relação simétrica: se $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$, ou seja, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, então também temos $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$, de modo que $\mathbf{v}$ é ortogonal a $\mathbf{u}$.

Definição 3.8. Uma lista de vetores é chamada de **ortonormal** se os vetores nele são pares ortogonais e cada vetor possui norma 1. Em outras palavras, uma lista $(v_1, \dots, v_n)$ de vetores de $\mathbb{V}$ é ortonormal se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, quando $i \neq j$ e $\langle v_i, v_j \rangle = 1$, quando $i = j$ para $(i, j = 1, \dots, n)$.

Veremos uma importante propriedade dos conjuntos ortogonais, a saber, que um conjunto de vetores ortogonais não nulos é sempre linearmente independente.

Teorema 3.5. *Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto de vetores não nulos, dois a dois ortogonais, isto é, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$. Então $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente independente.*

Demonstração. Considere $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$.

Fazendo o produto interno dos dois membros da igualdade acima por v_i , temos:

$$\langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, v_i \rangle = \langle 0, v_i \rangle$$

e, portanto,

$$a_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + a_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + a_n \langle v_n, v_i \rangle = 0.$$

Como $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ e $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$, temos $a_i \langle v_i, v_i \rangle = 0$. E assim $a_i = 0$. Como isso vale para todo $i = 1, \dots, n$, temos $a_1 = 0, \dots, a_n = 0$; logo $\{v_1, \dots, v_n\}$ é L.I $\square$

Observe que, pelo teorema anterior, se obtivermos um conjunto de n vetores dois a dois ortogonais num espaço de dimensão n , este conjunto será uma base ortogonal. Portanto, definimos:

Definição 3.9. Diz-se que uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{V}$ é base ortogonal se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$, isto é, os vetores da base são dois a dois ortogonais.

Ao considerarmos o espaço $\mathbb{R}^3$, os cálculos se tornam mais intuitivo, pois a ortogonalidade facilita a manipulação. Isso se deve em grande parte à característica de que estes vetores são dois a dois ortogonais. Mostremos um exemplo de tal aplicação:

Exemplo 3.7. Seja $B = \{(1, 1, -1), (1, 1, 2), (1, -1, 0)\}$ uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Isto é, os vetores de B são dois a dois ortogonais. Determine $v = (5, -4, 3)$ escrito como combinação linear dos vetores da base B .

Verificação: Escrevendo v como combinação linear dos vetores da base B , temos:

$$\begin{aligned} v &= a(1, 1, -1) + b(1, 1, 2) + c(1, -1, 0); a, b, c \in \mathbb{R} \\ (5, -4, 3) &= a(1, 1, -1) + b(1, 1, 2) + c(1, -1, 0). \end{aligned}$$

Sabendo que os vetores de B são dois a dois ortogonais. Fazemos assim, o produto interno para cada vetor da base, ou seja:

$$\begin{aligned} \langle (5, -4, 3), (1, 1, -1) \rangle &= \\ \langle a(1, 1, -1), (1, 1, -1) \rangle + \langle b(1, 1, 2), (1, 1, -1) \rangle + \langle c(1, -1, 0), (1, 1, -1) \rangle. \end{aligned}$$

consequentemente, o produto interno de:

$$\langle b(1, 1, 2), (1, 1, -1) \rangle + \langle c(1, -1, 0), (1, 1, -1) \rangle = 0.$$

portanto, temos:

$$\begin{aligned} \langle (5, -4, 3), (1, 1, -1) \rangle &= \langle a(1, 1, -1), (1, 1, -1) \rangle \\ 5 \cdot 1 + (-4) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) &= a(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)) \\ 5 - 4 - 3 &= 3a \\ a &= \frac{-2}{3}. \end{aligned}$$

Observe que usando o produto interno entre os vetores da base com o vetor v , obtemos pelo mesmo processo quem é b e c .

$$\begin{aligned} \langle (5, -4, 3), (1, 1, 2) \rangle &= \langle b(1, 1, 2), (1, 1, 2) \rangle \\ 5 \cdot 1 + (-4) \cdot 1 + 3 \cdot 2 &= b(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2) \\ 5 - 4 + 6 &= 6b \\ b &= \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle (5, -4, 3), (1, -1, 0) \rangle &= \langle c(1, -1, 0), (1, -1, 0) \rangle \\
5 \cdot 1 + (-4) \cdot (-1) + 3 \cdot 0 &= c(1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0) \\
5 + 4 &= 2c \\
c &= \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

ou seja, Obtemos o seguinte:

$$(5, -4, 3) = \frac{-2}{3}(1, 1, -1) + \frac{7}{6}(1, 1, 2) + \frac{9}{2}(1, -1, 0).$$

3.2.1 Processo de Gram-Schmidt

Agora analisamos o método que permite transformar um conjunto de vetores linearmente independentes em um conjunto ortogonal que gera o mesmo espaço vetorial. Ou seja, por meio desse processo, denominado **Gram-Schmidt**, obtemos uma base ortogonal (ou ortonormal) a partir de uma base arbitrária.

Teorema 3.6. (*Gram-Schmidt*): Se $(v_1, \dots, v_m)$ é uma lista de vetores linearmente independentes em $\mathbb{V}$, então existe uma lista **ortonormal** de vetores $(e_1, \dots, e_m)$ em $\mathbb{V}$ tal que

$$[(v_1, \dots, v_j)] = [(e_1, \dots, e_j)], \text{ para } j = 1, \dots, m$$

Deixamos uma ideia precisa de partida seguida de um exemplo. Ou seja, no procedimento a ideia inicial é supor que $(v_1, \dots, v_m)$ seja uma lista linearmente independente de vetores em $\mathbb{V}$. E posteriormente, considerar $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$. Para $j = 1, \dots, m$, definindo e_j indutivamente por

$$e_j = \frac{v_j - \langle v_j, e_1 \rangle e_1 - \dots - \langle v_j, e_{j-1} \rangle e_{j-1}}{\|v_j - \langle v_j, e_1 \rangle e_1 - \dots - \langle v_j, e_{j-1} \rangle e_{j-1}\|}$$

Então $e_1, \dots, e_m$ é uma lista ortogonal de vetores em $\mathbb{V}$, ou seja, recaindo na igualdade dos gerados visto no teorema acima.

Demonstração. Para demonstração completa ver Ver em Axler, p.183 □

No exemplo a seguir, buscamos construir uma base ortogonal, garantindo que os vetores sejam ortogonais entre si. Além disso, expressemos os vetores de tais forma para obtermos uma base ortogonal normalizada. Usando diretamente a ideia da norma do vetor. Para isso, se faz necessário:

$$e_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$$

Exemplo 3.8. Encontre uma base ortogonal de $P_2(\mathbb{R})$, onde o produto interno é dado por $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$.

Verificação: Tomamos como base inicial do $P_2(\mathbb{R})$

$$\beta = \{1, x, x^2\}.$$

De inicio, para $P_1 = \frac{1}{\|1\|}$, ou seja com vetor já normalizado, temos:

$$\|1\|^2 = \int_{-1}^1 1^2 dx = 2.$$

Importante: ao se tratarmos de $\|1\|$ nessa questão usamos o que já foi apresentado $\|1\| = \langle 1, 1 \rangle$ em termo do que se pede temos: $\int_{-1}^1 \langle 1, 1 \rangle dx$.

Por isso, $\|1\| = \sqrt{2}$, e portanto, $P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, Para P_2 , temos:

$$P_2 = x - \langle x, e_1 \rangle e_1 = x - \left(\int_{-1}^1 x \sqrt{\frac{1}{2}} dx \right) \sqrt{\frac{1}{2}} = x.$$

Logo

$$\|x\|^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Assim, $\|x\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$, e portanto $e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x$. Para P_3 , temos:

$$\begin{aligned} & x^2 - \langle x^2, e_1 \rangle e_1 - \langle x^2, e_2 \rangle e_2 \\ &= x^2 - \left(\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{\frac{1}{2}} dx \right) \sqrt{\frac{1}{2}} - \left(\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{\frac{3}{2}} x dx \right) \sqrt{\frac{3}{2}} x \\ &= x^2 - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Sendo

$$\left\| x^2 - \frac{1}{3} \right\|^2 = \int_{-1}^1 \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9} \right) dx = \frac{8}{45}.$$

Assim,

$$\left\| x^2 - \frac{1}{3} \right\| = \sqrt{\frac{8}{45}},$$

e portanto

$$e_3 = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right).$$

Sendo assim, a lista de funções

$$\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right).$$

é uma base ortogonal para $P_2(\mathbb{R})$.

Exemplo 3.9. Determine uma base ortonormal, em relação ao produto interno canônico, para o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$.

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y + z = 0\}$$

Verificação: O primeiro passo do nosso exemplo referente é achar uma base que satisfaça a equação do nosso W . Seja $y = t$ e $z = k$ onde $t, k \in \mathbb{R}$, portanto, $x = 2t - k$. Logo, para $w = (x, y, z) \in W$. Temos:

$$w = (2t - k, t, k); t, k \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma, podemos escrever então:

$$(x, y, z) = t(2, 1, 0) + k(-1, 0, 1); t, k \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, nosso conjunto formado gera W e também é L.I. Portanto é base de W . Note que tal conjunto não é ortogonal pois $-2 \neq 0$ e não é normal pois o módulo de cada vetor não é 1. Usemos o processo de Gram-Schmidt para a partir dessa base achar uma base ortonormal. Logo,

$$v'_1 = (2, 1, 0) \text{ e } v'_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1$$

Portanto,

$$\begin{aligned} v'_2 &= (-1, 0, 1) - \frac{\langle (-1, 0, 1), (2, 1, 0) \rangle}{\langle (2, 1, 0), (2, 1, 0) \rangle} (2, 1, 0) \\ &= (-1, 0, 1) - \frac{(-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} (2, 1, 0) \\ &= (-1, 0, 1) + \frac{2}{5} (2, 1, 0) \\ &= \left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1 \right). \end{aligned}$$

Note que

$$B' = \{(2, 1, 0), \left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1 \right)\}.$$

é base ortogonal, pois:

$$\langle (2, 1, 0), \left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1 \right) \rangle = 0.$$

Posteriormente, os vetores da base não são ortonormais, pois seus comprimentos (normas) não são iguais a 1. Para obter uma **base ortonormal**, basta **normalizar** cada vetor da base ortogonal B' . Vamos fazer isso:

Sejam os vetores ortogonais:

$$v'_1 = (2, 1, 0) \quad \text{e} \quad v'_2 = \left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1 \right)$$

Calculando a norma de v'_1 :

$$\|v'_1\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

Normalizando v'_1 :

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right)$$

Calculando a norma de v'_2 :

$$\|v'_2\| = \sqrt{\left(\frac{-1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + 1} = \sqrt{\frac{5}{25} + \frac{25}{25}} = \sqrt{\frac{30}{25}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

Normalizando v'_2 :

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{6/5}} \left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1 \right) = \sqrt{\frac{5}{6}} \left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1 \right)$$

Portanto, a base ortonormal procurada é:

$$B'' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0), \sqrt{\frac{5}{6}} \left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}, 1 \right) \right\}.$$

Definição 3.10. Se S é subconjunto não vazio de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ com produto interno. O **complemento ortogonal** de S é o conjunto dos vetores de $\mathbb{V}$ que são ortogonais a todos os vetores de S . Dessa forma, denotamos S como sendo:

$$S^\perp = \{v \in \mathbb{V} : v \perp w \text{ para todo } w \in S\}$$

Exemplo 3.10. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y - 2z = 0\}$. Determine $S^\perp$.

Verificação: O primeiro passo do nosso exemplo referente é achar uma base que satisfaça a equação do nosso S . Seja $y = t$ e $z = k$ onde $t, k \in \mathbb{R}$, portanto, $x = t + 2k$. Logo, para $u = (x, y, z) \in S$. Temos:

$$u = (t + 2k, t, k); t, k \in \mathbb{R}.$$

Dessa forma, podemos escrever então:

$$t(1, 1, 0) + k(2, 0, 1); t, k \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, nosso conjunto formado gera S e também é L.I. Portanto é base de S . Além disso:

$$u \in S \implies u = a(1, 1, 0) + b(2, 0, 1); a, b \in \mathbb{R} \text{ e } v \in S^\perp \implies v \perp u$$

Sendo $v = (x, y, z) \in S^\perp$

$$\begin{cases} \langle v, (1, 1, 0) \rangle = 0 \\ \langle v, (2, 0, 1) \rangle = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

Colocando em função de x :

$$y = -x \text{ e } z = -2x.$$

Ou seja,

$$S^\perp = (t, -t, -2t); t \in \mathbb{R}.$$

Note que para verificação basta pensar o seguinte. Seja $u \in S$ e $s \in S^\perp$, então:

$$\begin{aligned} \langle u, s \rangle &= \langle a(1, 1, 0) + b(2, 0, 1), (t, -t, -2t) \rangle \\ &= \langle a(1, 1, 0), (t, -t, -2t) \rangle + \langle b(2, 0, 1), (t, -t, -2t) \rangle \\ &= a \cdot t + a \cdot (-t) + 0 \cdot (-2t) + 2b \cdot t + 0 \cdot (-t) + b \cdot (-2t) \\ &= at - at + 2bt - 2bt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lema 3.1. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita, munido de produto interno. Para todo subespaço vetorial $V \subseteq E$ tem-se a decomposição em soma direta*

$$E = V \oplus V^\perp.$$

A partir deste ponto, destacaremos apenas os principais argumentos da demonstração.

Demonstração. Seja $\{u_1, \dots, u_n\} \subset E$ uma base ortonormal cujos primeiros m elementos $u_1, \dots, u_m$ formam uma base (ortonormal) de V . Inicia-se com uma base qualquer de V , estende-se essa base a uma base de E e, em seguida, aplica-se o **Teorema 3.6** denominado *Gram-Schmidt* que garante a construção de uma base ortonormal a partir de qualquer base de um espaço com produto interno. Ou seja,

Para todo vetor $v \in E$ tem-se $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = z + w$, onde

$$z = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m \in V \quad \text{e} \quad w = \alpha_{m+1} u_{m+1} + \dots + \alpha_n u_n \in V^\perp.$$

Portanto $E = V + V^\perp$. Como $V \cap V^\perp = \{0\}$, segue-se que

$$E = V \oplus V^\perp.$$

□

Como consequência desse teorema podemos citar dois corolários importantes que irão nos servir futuramente. Sendo, para E com dimensão finita e V subespaço de E , portanto:

Corolário 1. $\dim V + \dim V^\perp = \dim E$.

Corolário 2. *Para todo subespaço vetorial $V \subseteq E$, tem-se $(V^\perp)^\perp = V$.*

Demonstração. Com efeito, seja qual for o conjunto não-vazio $X \subset E$, vale a inclusão $X \subset (X^\perp)^\perp$. Em particular, o subespaço V está contido em $(V^\perp)^\perp$. Do Corolário 1 resulta que

$$\dim(V^\perp)^\perp = \dim E - \dim V^\perp = \dim E - (\dim E - \dim V) = \dim V.$$

Logo $V = (V^\perp)^\perp$.

□

Portanto, se $\dim E = n$ e $\dim V = k$, então $\dim V^\perp = n - k$.

4 Operadores Auto-Adjuntos

Veremos agora o estudo dos operadores auto-adjuntos, uma parte fundamental para o entendimento do teorema principal do nosso trabalho. Esses operadores possuem propriedades especiais, como autovalores reais e autovetores ortogonais, o que os torna essenciais para a demonstração do Teorema Espectral.

Antes, porém, é importante introduzirmos com clareza o conceito de operador adjunto.

Definição 4.1. Seja V um espaço vetorial com produto interno e $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Dizemos que a transformação linear $T^* : V \rightarrow V$ é o **Adjunto** de T se, para todos os vetores $v, w \in V$, vale:

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle.$$

Observação:: Um ponto a declarar é que existem resultados que garante a existência e boa definição da Adjunta(veja o livro do Lima, Álgebra Linear. Página 133.)

A partir dessa definição, surge naturalmente uma classe especial de operadores: aqueles que coincidem com seu próprio adjunto. Esses operadores são denominados **Auto-adjuntos**.

Definição 4.2. Um operador linear $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ num espaço vetorial munido de produto interno, chama-se **Auto-adjunto** quando $T = T^*$, ou seja, quando $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$ para quaisquer $u, v \in \mathbb{V}$.

Dito isso, citamos a seguir algumas propriedades dos operadores auto-adjuntos que serão úteis ao longo deste capítulo.

Se $T, S : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ são operadores auto-adjuntos e $\alpha \in \mathbb{R}$, então:

- i) $(\alpha T)^* = \alpha T^* = \alpha T$.
- ii) $(T^*)^* = T$.
- iii) $I^* = I$ onde I é o operador identidade em $\mathbb{V}$.
- iv) Se $TS = ST$, então vale o seguinte:

$$(TS)^* = S^*T^* = ST = TS.$$

Importante: Para **iv)** temos que TS é auto-adjunto se, e somente se, $ST = TS$, posteriormente veremos um exemplo que ilustra tal caso.

Demonstração. Para demonstração das propriedades de **i)** a **iv)** Ver em Axler (1996), página 206. $\square$

Exemplo 4.1. Seja $T, S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ os operadores lineares definidos por $T(x, y) = (x, 2y)$ e $S(x, y) = (y, x)$. Para todo $v = (x, y)$. Determine se os operadores T e S são auto-adjuntos.

Verificação: Por definição, para os operadores T e S serem auto-adjunto é necessário, o seguinte:

$$\langle e_1, T^*v \rangle = \langle Te_1, v \rangle = e \text{ e } \langle e_2, S^*v \rangle = \langle Se_2, v \rangle$$

Onde o par (e_1, e_2) são compostos pela base canônica de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \langle e_1, T^*v \rangle &= \langle Te_1, v \rangle & \langle e_2, S^*v \rangle &= \langle Se_2, v \rangle \\ &= \langle e_1, v \rangle & &= \langle 2e_2, v \rangle \\ &= x. & &= 2y. \end{aligned}$$

Portanto, $T^*v = (x, 2y) = Tv$, ou seja, $T^* = T$. Analogamente se mostra que $S^* = S$.

Observação: Em um caso como esse, podemos nos questionar sobre o produto entre:

$$TS(x, y) = (y, 2x)$$

Para tal caso será que esses operadores seriam auto-adjuntos? Dito isso, recaímos na propriedade **v**) que foi citado no acima. Ou seja:

$$\begin{aligned} \langle e_1, TS^*v \rangle &= \langle TSe_1, v \rangle & \langle e_2, TS^*v \rangle &= \langle TSe_2, v \rangle \\ &= \langle 2e_1, v \rangle & &= \langle e_2, v \rangle \\ &= 2y & &= x \end{aligned}$$

Observe que $\langle e_1, (TS)^*v \rangle = \langle TSe_1, v \rangle = 2y$, enquanto $\langle e_2, TSv \rangle = y$. Logo, $(TS)^* \neq TS$, ou seja, o produto TS dos operadores auto-adjuntos T, S não é auto-adjunto. Isto se dá porque $TS \neq ST$. Com efeito, $TS(x, y) = (y, 2x)$ e $ST(x, y) = (2y, x)$.

Para o próximo teorema, é fundamental a noção de matriz simétrica. Dizemos que uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é simétrica quando coincide com sua transposta, ou seja, $A = A^T$. Isso equivale a dizer que $a_{ij} = a_{ji}$ para todos os índices i e j . Isso vai ficar mais claro no **Exemplo 4.2.** abaixo.

Teorema 4.1. $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ é auto-adjunto se, e somente se, sua matriz $A = [a_{ij}]$ relativamente a uma (e portanto a qualquer) base ortogonal $U = \{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{V}$ é uma matriz simétrica.

Demonstração. Ver em Álgebra Linear-Elon Lages na página 157. □

Exemplo 4.2. Usemos os dados do **Exemplo 4.1** para calcular as respectivas matrizes de T e S na base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Verificação: Para T e S , temos o seguinte:

$$T(e_1) = T(1, 0) = (1, 0) \text{ e } T(e_2) = T(0, 1) = (0, 2).$$

$$S(e_1) = S(1, 0) = (0, 1) \text{ e } S(e_2) = S(0, 1) = (1, 0).$$

Logo, suas respectivas matrizes são:

$$T = [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } S = [S] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observação: Pelo teorema acima, garantimos que, se as matrizes de tais operadores em relação à base canônica que é ortonormal é simétrica, então elas coincidem com suas transpostas, ou seja: $[T] = [T]^T$ e $[S] = [S]^T$.

Teorema 4.2. *Se $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são autovalores dois a dois diferentes do operador auto-adjunto $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, os autovetores correspondentes $v_1, \dots, v_m$ são dois a dois ortogonais.*

Demonstração. Para $i \neq j$ quaisquer.

$$\lambda_i \langle v_i, v_j \rangle = \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle = \langle T v_i, v_j \rangle = \langle v_i, T v_j \rangle = \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle$$

Note que

$$\begin{aligned} \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle - \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle &= 0 \\ (\lambda_i - \lambda_j) \langle v_i, v_j \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Como $(\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$, de $\lambda_i \langle v_i, v_j \rangle - \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = 0$ resulta $\langle v_i, v_j \rangle = 0$. $\square$

Um aspecto estrutural que merece destaque em relação aos capítulos anteriores é que os operadores lineares possuem representação matricial, e o cálculo do valor de $T(v)$ depende do produto entre matriz e vetor. Nesse contexto, a matriz representa a transformação e o vetor coluna corresponde às coordenadas do vetor em relação à base escolhida, geralmente a base canônica. Logo, isso nos motiva à busca por boas representações matriciais, pois elas facilitam os cálculos envolvendo tais operadores. Vejamos um exemplo que ilustra tal situação:

Suponha que temos um operador linear $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que é diagonalizável, e que existe uma **base ortonormal** $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de autovetores. Nesse caso, para φ a matriz associada é:

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Note que, qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n,$$

Agora, aplicando φ , temos:

$$\varphi(v) = a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + a_n \lambda_n v_n.$$

Percebemos que a expressão $\varphi(v)$ fica extremamente calculada com simplicidade. Isso mostra como seria útil termos um resultado que assegure a existência de bases ortonormais constituída por autovetores. Isso motiva a principal pergunta do capítulo:

Pergunta 1: Existiria um teorema que garante a existência de tais tipos de base?

Pergunta 2: Existe algum teorema que garante a existência ou uma condição para que o operador seja diagonalizável?

Veremos ao longo do texto que a resposta é afirmativa. Esse é o conteúdo do famoso Teorema Espectral enunciado abaixo:

Teorema 4.3. (*Teorema Espectral*) Para todo operador Auto-adjunto $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, num espaço vetorial real de dimensão finita munido de produto interno, existe uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{V}$ e formada por autovetores de T .

Antes de demonstrarmos o *Teorema Espectral*, gostaríamos de destacar que nossa proposta é apresentar uma demonstração menos usual, e em nossa opinião pessoal, elegante, que relaciona o cálculo diferencial com a álgebra linear. Considerando nosso objetivo, iremos nos concentrar no caso $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, mencionando que os cálculos aqui apresentados podem ser adaptados ao caso geral de um espaço vetorial $\mathbb{V}$.

Com base nos resultados acima, podemos enunciar o Teorema Espectral do seguinte modo:

Teorema 4.4. (*Teorema Espectral*) Para todo operador Auto-adjunto $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, considerando $\mathbb{R}^n$ como o produto interno canônico, existe uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{R}^n$ e formada por autovetores de T .

Para nossa demonstração, faremos uso de dois famosos resultados entre eles é o teorema conhecido como *Multiplicadores de Lagrange* e também o de *Weierstrass*.

Teorema 4.5. (*Multiplicadores de Lagrange*) Seja $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no aberto A e seja $B = \{(x, y, z) \in A \mid g(x, y, z) = C\}$, com $C \in \mathbb{R}$, onde g é suposta de classe C^1 , ou seja, continuamente diferenciável em A , e $\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, para todo $(x, y, z) \in B$. Uma condição necessária para que $(x_0, y_0, z_0) \in B$ seja extremo local de f em B é que exista um real λ_0 tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

Demonstração. Ver Um Curso de Cálculo Vol. 2 Guidorizzi página 324. $\square$

Comentário: Embora tenhamos enunciado este teorema no espaço $\mathbb{R}^3$, existe uma versão mais geral para o caso n -dimensional. Para maiores detalhes, consulte os **Apêndices** e as **Referências**.

Lema 4.1 (Weierstrass). Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Então, f é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em K ; ou seja, existem pontos $x_1, x_2 \in K$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \text{para todo } x \in K.$$

Demonstração. Ver Livro do Elon, Curso de Análise Vol. 2 página 239. $\square$

Comentário: Tais demonstrações são sofisticadas e usam ferramentas avançadas da Análise, que não compete inserir neste texto. Aqui, nosso propósito é utilizar o resultado e fazer uma relação com o que estudamos. Por simplicidade faremos a demonstração com $n = 3$. Os Cálculos evidenciam que o caso geral é análogo.

Demonstração. (*Teorema Espectral*) Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear auto-adjunto. Para iniciar a demonstração do Teorema Espectral, consideramos a **forma quadrática associada** a T , definida como uma função

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$f(v_1) = \langle T(v_1), v_1 \rangle, \quad \text{para todo } v_1 \in \mathbb{R}^3.$$

Para facilitar os cálculos, representamos v_1 pelas suas coordenadas na base canônica, isto é, tomamos $v_1 = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Pela hipótese, T é auto-adjunto, o que implica que $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ é uma matriz simétrica. Ou seja:

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$$

Portanto, a simetria da matriz significa

$$a_{ij} = a_{ji} \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Note que um resultado das propriedades de transformação lineares, de forma mais explícita, é que podemos recordar o seguinte:

$$\begin{aligned} [Tv_1]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}[v_1] \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^3 a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{2j}x_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{3j}x_j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Note que esse vetor coluna que encontramos corresponde de fato ao valor $T(v_1)$. Dessa forma, podemos representar nossa $f(v_1)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \left\langle \left(\sum_{j=1}^3 a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^3 a_{2j}x_j, \sum_{j=1}^3 a_{3j}x_j \right), (x_1, x_2, x_3) \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^3 a_{1j}x_jx_1 + \sum_{j=1}^3 a_{2j}x_jx_2 + \sum_{j=1}^3 a_{3j}x_jx_3 \\ &= \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_jx_i \end{aligned}$$

Agora, passaremos a investigar os pontos críticos da função f quando restrita à esfera unitária, isto é, ao subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ com $S = \{v_1 \in \mathbb{R}^3; \|v_1\| = 1\}$. Sendo,

$$f(v_1) = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_jx_i.$$

É importante destacar que, como estamos interessados nos pontos críticos de f , é ne-

cessário calcular suas derivadas parciais. Assim sendo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(v_1) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\sum_{j=1}^3 a_{1j}x_jx_1, \sum_{j=1}^3 a_{2j}x_jx_2, \sum_{j=1}^3 a_{3j}x_jx_3\right) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\sum_{j=1}^3 a_{1j}x_jx_1\right) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\sum_{j=1}^3 a_{2j}x_jx_2\right) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\sum_{j=1}^3 a_{3j}x_jx_3\right) \\ &= 2a_{11}x_1 + \sum_{j=2}^3 a_{1j}x_j + a_{21}x_2 + a_{31}x_3.\end{aligned}$$

Observe que estamos lidando com a nossa T sendo um operador linear auto-adjunto, oque significa:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Dessa forma, podemos escrever nossa 2° e 3° soma como sendo o somatório de

$$2a_{11}x_1 + \sum_{j=2}^3 a_{1j}x_j + \sum_{j=2}^3 a_{1j}x_j$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(v_1) &= 2a_{11}x_1 + \sum_{j=2}^3 a_{1j}x_j + \sum_{j=2}^3 a_{1j}x_j \\ &= 2a_{11}x_1 + 2\sum_{j=2}^3 a_{1j}x_j \\ &= 2\sum_{j=1}^3 a_{1j}x_j\end{aligned}$$

Observa-se que, por estarmos tratando de derivadas parciais, é oportuno recordar o conceito de gradiente, conforme estabelecido nos livros de Cálculo. Dessa forma, a utilização do gradiente para representar a derivada parcial torna-se uma estratégia que facilita o desenvolvimento da demonstração. Logo,

$$\begin{aligned}\nabla f(v_1) &= 2\left(\sum_{j=1}^3 a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^3 a_{2j}x_j, \sum_{j=1}^3 a_{3j}x_j\right) \\ &= 2\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^3 a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{2j}x_j \\ \sum_{j=1}^3 a_{3j}x_j \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2[Tv_1]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\end{aligned}$$

Note que o que fizemos até agora não foi por acaso. Uma vez que adotamos a investigação dos pontos críticos na esfera unitária, passaremos agora a averiguar os valores extremos de f restrito à esfera unitária. Observa-se que essa condição de norma unitária pode ser

descrita como uma superfície de nível de uma função auxiliar $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$g(v_1) = \langle v_1, v_1 \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

de modo que:

$$S = g^{-1}(1).$$

Assim, a esfera unitária é interpretada como a superfície de nível da função $g(v_1)$, correspondente ao valor 1. Com isso, passamos a observar o seu gradiente, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_1}(v_1) &= \frac{\partial g}{\partial x_1} \langle v_1, v_1 \rangle \\ &= \frac{\partial g}{\partial x_1} x_1^2 + \frac{\partial g}{\partial x_1} x_2^2 + \frac{\partial g}{\partial x_1} x_3^2 \\ &= 2x_1. \end{aligned}$$

Para que possamos aplicar o *teorema dos multiplicadores de Lagrange* é necessário que $\nabla g(v_1) \neq 0$. Suponha que $\nabla g(v_1) = 0$, então:

$$\begin{aligned} \nabla g(v_1) &= 0 \\ 2v_1 &= 0. \end{aligned}$$

Observe que se isso ocorre nosso v é o vetor nulo. Mas o vetor nulo não mora na esfera, pois a condição posta é que os vetores da esfera tenha normal igual a 1. Dessa forma,

$$\nabla g(v_1) \neq 0 \quad \forall v_1 \in S.$$

Assim as funções f e g verificam as condições do *teorema dos multiplicadores de Lagrange*. E portanto, se $v \in S$ é ponto crítico de $f|_S$, então, pelo Teorema dos *Multiplicadores de Lagrange*, existe um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\nabla f(v_1) = \lambda \nabla g(v_1),$$

Fazendo as substituições necessárias de cada gradiente, temos:

$$\begin{aligned} 2[Tv_1]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= \lambda \cdot 2v_1 \\ [Tv_1]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= \lambda \cdot v_1 \\ \Rightarrow Tv_1 &= \lambda v_1 \end{aligned}$$

Uma breve conclusão do que fizemos até o momento foi que se v_1 é ponto crítico de $f|_S$ então v_1 é autovetor de T e λ autovalor. Ou seja, definimos uma função $f(v_1)$ de modo que achar os pontos críticos dessa função $f(v_1)$ corresponde a buscar os autovetores de nosso operador T .

Como f é contínua e está restrita a S , que é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^3$, temos que $f|_S$ está definida sobre um conjunto compacto. Pelo *Lema de Weierstrass*, isso garante que $f|_S$ atinge seus valores máximo e mínimo. Além disso, se esse ponto é máximo. então ele é ponto crítico de f . Logo, é autovetor de T . Digamos que $v_1 \in S$

então, temos:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \langle Tv_1, v_1 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_1 \rangle \\ &= \lambda \langle v_1, v_1 \rangle \\ &= \lambda \|v_1\|^2 \\ &= \lambda \cdot 1 = \lambda_1. \end{aligned}$$

Note que como pegamos $v_1 \in S$ a sua normal é 1, ou seja, λ_1 é o maior autovalor de T . Prosseguindo, para determinarmos os demais autovalores e autovetores do operador T , consideramos agora o subespaço formado pelos vetores ortogonais a v_1 . Definimos então:

$$E = \{v_1\}^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v_1, v \rangle = 0\},$$

Observe que está bem definida nossa $T : E \rightarrow E$. Ou seja, o *Complemento Ortogonal* de v_1 , no qual buscaremos o próximo ponto crítico de f , correspondente ao segundo maior autovalor de T .

Mostraremos que esse o complemento ortogonal do subespaço E é invariante por T (isto é, se $v \in E$, então $T(v) \in E$.) Pelo fato de serem auto-adjuntos, temos:

$$\begin{aligned} \langle Tv, v_1 \rangle &= \langle v, Tv_1 \rangle \\ &= \langle v, \lambda v_1 \rangle \\ &= \lambda \langle v, v_1 \rangle \\ &= \lambda \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\langle T(v), v_1 \rangle = 0$ para todo $v \in E$, o que implica que $T(v) \in E$. Assim, concluímos que o subespaço E é *invariante por* T .

Pelo lema do *Complemento Ortogonal*, temos que $\dim E = 2$. Como já vimos que E é invariante por T , podemos agora considerar a restrição do operador T ao subespaço E , dada por:

$$T|_E : E \rightarrow E,$$

com o objetivo de aplicar novamente a mesma construção para encontrar os demais autovalores e autovetores do operador T dentro de E . Vale destacar que será omitido algumas parte do processo para não deixar o texto longo e cansativo, porém sempre deixando claro oque deve ser feito. Ou seja, Consideremos a forma quadrática associada $T|_E$ definida como uma função

$$f_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$f_1(v_2) = \langle T|_E(v_2), v_2 \rangle.$$

Note que representamos v_2 pelas suas coordenadas na base canônica, isto é, $v_2 = (x_1, x_2, x_3) \in E$.

Como os cálculos anteriores estão explícitos, diante das condições, note que, seguindo o mesmo raciocínio obtém-se v_2 e λ_2 autovetor e autovalor de T .

Dessa forma, ao final do processo, surge uma questão natural: sendo v_1 e v_2 autovetores das minhas funções estabelecidas, obtidos por pontos críticos distintos, será que necessariamente $v_1 \neq v_2$?

A resposta para essa pergunta é Sim!. Vejamos que o nosso conjunto E é o perpendicular a v_1 , e o vetor v_2 que encontramos ainda está em $\mathbb{R}^3$, mas mora mais especificamente em E , que é subespaço. Ou seja, v_1 não pode ser igual a v_2 pelo simples fato de serem perpendiculares. Por consequência, se dois vetores são perpendiculares, então são linearmente independentes, por definição.

Perceba que, usando o mesmo método do processo para determinarmos os demais autovalores e autovetores considerando um novo conjunto E , no qual foi aplicado o lema do *Complemento Ortogonal*, agora consideremos um subespaço E_1 , com $\dim(E_1) = 1$, e, pelos mesmos motivos já expostos, encontramos um vetor v_3 que satisfaz o *Teorema dos Multiplicadores de Lagrange*. Ou seja,

$$E_1 = \{v_1, v_2\}^\perp = \{v \in E \mid \langle v, v_2 \rangle = 0\}.$$

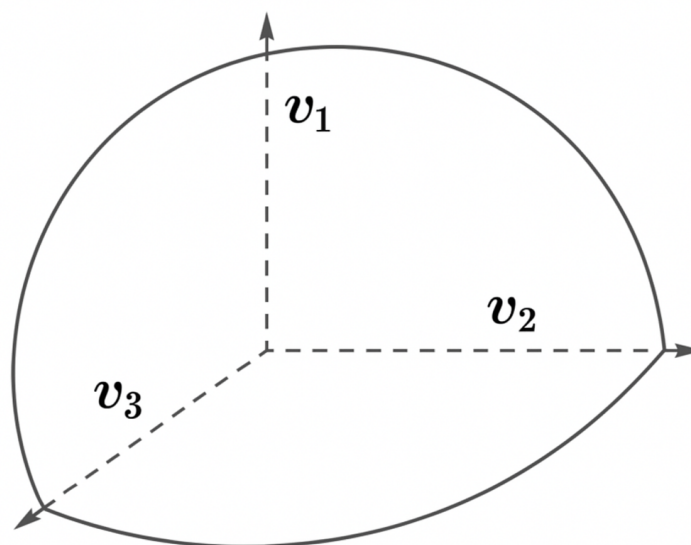
Note que, como E_1 satisfaz as condições do *Teorema dos Multiplicadores de Lagrange*, o vetor $v_3 \in E_1$ é um autovetor. Ademais, podemos afirmar que v_3 é linearmente independente de v_1 e v_2 , pois é ortogonal a ambos simultaneamente.

O que foi demonstrado até o momento nos permite concluir o seguinte: os vetores v_1, v_2 e v_3 são mutuamente ortogonais, e cada um possui norma igual a 1. De fato, em todas as etapas tanto em $\mathbb{R}^3$, quanto nos subespaços E e E_1 consideramos unicamente vetores de norma unitária.

Consequentemente, como os vetores v_1, v_2 e v_3 são ortogonais entre si e possuem norma igual a 1, eles formam um conjunto ortonormal. Sabemos também que vetores ortogonais não nulos são linearmente independentes. Assim, $\{v_1, v_2, v_3\}$ constitui um conjunto L.I. E, como o espaço $\mathbb{R}^3$ possui dimensão 3, concluímos que esse conjunto forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Portanto, tais vetores constituem a base procurada.

□

Vejamos uma Interpretação Geométrica:



Observação: O método acima pode ser estendido para o caso n -dimensional, considerando uma versão do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para n -dimensional e considerando vetores de v de $\mathbb{R}^n$ com N variáveis. Veja o Livro do Elon Lages. Curso de Análise Vol.2 página 173.

Cabe aqui um comentário quanto ao perfil da demonstração apresentada: alguém pode questionar o grau de sua extensão ou até mesmo sua complexidade. Ressaltamos, no entanto, que o nível de detalhamento foi pensado especialmente para o público-alvo. Vários passos poderiam ser omitidos ou reduzidos a poucas linhas, considerando uma experiência mais avançada do leitor com as ferramentas do cálculo diferencial. Optamos, contudo, por uma abordagem extremamente detalhada para que um aluno com pouca experiência possa acompanhar o raciocínio. Ademais, a escolha por essa demonstração se justifica também pela beleza intrínseca em comparar dois conteúdos aparentemente distintos, atribuindo um perfil até mesmo geométrico a algo que, à primeira vista, parece ser de natureza puramente algébrica.

Neste capítulo, propusemos apenas uma ilustração da possibilidade de correlação entre áreas da Matemática que, à primeira vista, podem parecer distintas. O resultado apresentado encerra o estudo desta seção e evidencia como uma abordagem sólida de diferentes ramos da Matemática pode contribuir para uma compreensão mais ampla e integrada da disciplina.

O teorema discutido mostra que os conteúdos matemáticos não são desconexos. Na graduação, é comum que sejam apresentados de forma segmentada, o que muitas vezes impede que o estudante aprecie plenamente a beleza e a unidade da Matemática. É fundamental compreender que um mesmo conceito pode ser abordado sob diferentes perspectivas, e que essa multiplicidade de olhares enriquece o entendimento. Para uma melhor compreensão do Teorema Espectral, vejamos um exemplo concreto onde ele pode ser aplicado para garantir a diagonalização de um operador Autoadjunto na qual os elementos dessa diagonal sejam os autovalores.

Exemplo 4.3. Sejam $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$A(x, y, z) = (x, y + 2z, 2y + z)$$

Para quaisquer $u = (a, b, c)$ e $v = (x, y, z)$. Cujas matrizes na base canônica do $\mathbb{R}^3$ é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que por definição, o operador linear A é auto-adjunto, ou seja:

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle &= \langle (a, b + 2c, 2b + c), (x, y, z) \rangle \\ &= ax + by + 2cy + 2bz + cz \\ &= ax + b(y + 2z) + c(2y + z) \\ &= \langle (a, b, c), (x, y + 2z, 2y + z) \rangle \\ &= \langle u, Av \rangle, \end{aligned}$$

Dessa forma, o polinômio característico de A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

isto é, desenvolvendo o determinante da matriz A , obtemos

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)[(1 - \lambda)^2 - 4] = 0.$$

Como os autovalores de A são as raízes do polinômio $p(\lambda)$, obtemos os autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ ou $\lambda_3 = 3$.

Calculemos uma base ortonormal de autovetores de A . O sistema homogêneo de equações lineares que permite a determinação dos autovetores associados é:

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

Considerando

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então obtemos as seguintes equações:

$$(1 - \lambda)x = 0 \quad (3.1)$$

$$(1 - \lambda)y + 2z = 0 \quad (3.2)$$

$$2y + (1 - \lambda)z = 0 \quad (3.3)$$

Observe o coeficiente $(1 - \lambda)$ de y da equação (3.2). Vamos encontrar o autovetor associado a $\lambda_1 = 1$. Substituindo-o na equação (3.2) tem-se $z = 0$ e, a partir da equação (3.3), obtemos $y = 0$.

Podemos arbitrar qualquer valor para x , por exemplo $x = 1$. Logo,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$. De modo análogo obtemos os autovetores

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Com respeito aos autovalores $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$. Verifica-se que v_1, v_2 e v_3 são autovetores do operador linear A , pois $Av_1 = A(1, 0, 0) = 1 \cdot (1, 0, 0) = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = A(0, 1, -1) = (0, -1, 1) = -1 \cdot (0, 1, -1) = \lambda_2 v_2$, e $Av_3 = A(0, 1, 1) = (0, 3, 3) = 3 \cdot (0, 1, 1) = \lambda_3 v_3$.

Finalmente, multiplicando os autovetores v_1, v_2 e v_3 pelo inverso de suas respectivas normas, obtemos uma base ortonormal $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ formada por autovetores do operador linear A , tais que:

$$u_1 = (1, 0, 0); \quad u_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad u_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Dessa forma, a matriz de A com relação à base α é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

isto é, uma matriz diagonal, onde os elementos dessa diagonal são os autovalores de A .

Comentário: Uma pergunta honesta é a seguinte: o teorema foi demonstrado apenas no caso de $\mathbb{R}^n$, porém o enunciado é feito para um espaço vetorial geral $\mathbb{V}$. Como adaptar a demonstração feita em $\mathbb{R}^n$ para o caso geral de um espaço de dimensão finita? Essa adaptação se baseia nos dois resultados a seguir:

Lema 4.2. *Todo espaço $\mathbb{V}$ de dimensão n é isomorfo ao $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Ver livro do Elon. Álgebra Linear página 64. □

Lema 4.3. *Cada operador auto-adjunto de $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ corresponde a um operador auto-adjunto $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Ver em Axler (1996), página 218. □

Aqui como já mencionado no começo do capítulo omitiremos os detalhes desses fatos mas fica registrado ao leitor que o resultado pode ser estendido naturalmente para o espaço de dimensão finita $\mathbb{V}$.

5 CONCLUSÃO

Esperamos que este teorema sirva como uma ilustração significativa da interconexão entre as diversas áreas da Matemática, reforçando a ideia de que todas elas fazem parte de um mesmo corpo coeso de conhecimento. A Matemática, embora frequentemente apresentada de forma dividida no ambiente escolar e acadêmico, é, na verdade, uma ligação entre todos os conceitos já preexistentes que conhecemos no âmbito matemático. Ou seja, tudo culmina no momento em que trabalhamos de forma integrada com todas as áreas formuladas na Matemática. Desde a Aritmética e a Álgebra elementar até a Análise, a Geometria Diferencial e a Topologia, tudo está conectado por princípios comuns, embora isso muitas vezes não seja evidenciado no cotidiano. Além disso, a forma como abstraímos conteúdos de diferentes áreas faz com que nossos métodos de resolução e de pensamento ganhem certa ampliação à medida que avançamos na complexidade dos temas.

Os fundamentos que aprendemos nos primeiros anos de estudo, como as operações básicas, propriedades dos números e resolução de equações simples, não são meramente introdutórios, mas servem como base para estruturas muito mais sofisticadas. Por exemplo, a manipulação algébrica utilizada na resolução de equações no ensino fundamental é essencial para a compreensão de polinômios, que, por sua vez, são a porta de entrada para o estudo de autovalores e autovetores em Álgebra Linear, fundamentais na diagonalização de operadores e na aplicação do Teorema Espectral, como se tudo tivesse uma ligação já estabelecida.

Podemos observar essa conexão também entre os conceitos de Geometria e Álgebra, como ocorre na construção de espaços vetoriais com produto interno, ou quando o Cálculo Diferencial e Integral fornece ferramentas para investigar propriedades de funções descritas por expressões algébricas. Até mesmo tópicos considerados abstratos, como a Teoria dos Números ou a Topologia, se relacionam com outras áreas.

Portanto, adotar e reconhecer essa forma de pensamento é essencial para uma apreciação mais profunda da Matemática. Quando compreendemos que as fronteiras entre os campos são, na verdade, pontes de conexão, ganhamos uma visão mais clara de como os conhecimentos se complementam, se reforçam e se estendem mutuamente. Essa percepção não apenas enriquece o aprendizado, mas também estimula o pensamento crítico e a criatividade matemática, fundamentais para a formação de um profissional ou pesquisador na área.

No trabalho que se refere, foi desenvolvido e apresentado, do início ao fim, definições cruciais para chegar ao objetivo final, que é uma demonstração do Teorema Espectral via Cálculo Diferencial. Muitos conceitos importantes em Álgebra Linear são a base para se atingir esse objetivo. Dessa forma, iniciamos com os conceitos de Espaço Vetorial e Transformações Lineares.

Em seguida, introduzimos os conceitos de Autovalores e Autovetores, que são fundamentais para o processo de diagonalização de operadores. Após isso, abordamos a diagonalização propriamente dita. Explicamos que nem todo operador linear definido em espaços vetoriais reais pode ser diagonalizado, ou seja, nem sempre é possível representá-lo por uma matriz diagonal cujos elementos na diagonal principal sejam seus autovalores.

A partir dos conceitos de produto interno e dos espaços vetoriais munidos desse produto, foi possível definir e exemplificar um operador linear de grande relevância: o operador auto-adjunto. Além disso, apresentamos outras nomenclaturas relacionadas ao contexto do produto interno, como operadores ortogonais, simétricos e unitários. Em seguida, destacamos um dos teoremas centrais da Álgebra Linear, o Teorema Espectral, cujo foco

foi a demonstração, desenvolvida com base no método dos multiplicadores de Lagrange. Por fim, é importante destacar os inúmeros benefícios que o domínio desse conteúdo proporciona, tanto no aprofundamento do conhecimento teórico quanto na aplicação prática em diversas áreas, contribuindo significativamente para o desenvolvimento acadêmico e profissional do aluno.

REFERÊNCIAS

- [1] ALVES, Jordi Faria et al. **Operadores compactos e teoria espectral**. 2020.
- [2] AXLER, Sheldon. **Linear algebra done right**. Cham: Springer Nature, 2024.
- [3] BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. São Paulo: Harper & Row, 1980.
- [4] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. Vol. 2. Rio de Janeiro: Grupo Gen – LTC, 2000.
- [5] LANG, Serge. **Álgebra**. Reading, MA: Addison-Wesley, 1966.
- [6] LIMA, Elon Lages. **Álgebra linear**. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 2010.
- [7] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. Vol. 2. 4. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 2013.
- [8] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. Vol. 1. 9. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 2021.
- [9] NOGUEIRA, Leonardo Bernardes. **Transformações lineares no plano e aplicações**. 2013.
- [10] RUAS, Vitoriano. **Análise aplicada**. São Paulo: PUC, 1983.
- [11] SANTOS, João Antonio Silva. **O teorema espectral em dimensão finita**. 2014.
- [12] SANTOS, Maria Eduarda Berro Sabin dos et al. **Diagonalização de operadores e formas canônicas de Jordan**. 2022.
- [13] STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 7. ed., 2013.
- [14] THOMAS, George B.; FINNEY, Ross L. **Cálculo – Volume 1**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 12. ed., 2018.
- [15] WINTERLE, Paulo; STEINBRUCH, Alfredo. **Álgebra linear**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1987.

APÊNDICE A – Uma revisão sobre o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange

Definição A.1. Seja $f(x, y)$ uma função de duas variáveis definida em um subconjunto aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Fixando $y = y_0$, obtemos uma função de uma variável:

$$g(x) = f(x, y_0).$$

Se essa função for derivável em x_0 , então o número

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

é chamado de **derivada parcial de f em relação a x no ponto (x_0, y_0)** .

Analogamente, fixando $x = x_0$, obtemos a função:

$$h(y) = f(x_0, y),$$

e se esta for derivável em y_0 , então

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

é a **derivada parcial de f em relação a y no ponto (x_0, y_0)** .

As derivadas parciais obtidas em cada direção coordenada podem ser reunidas em um único objeto: o **vetor gradiente**, definido como

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Comentário: Ressaltamos que a definição apresentada de derivada parcial assim como o gradiente para funções de duas variáveis pode ser estendida de forma análoga ao caso de funções definidas em $\mathbb{R}^3$ ou em espaços de dimensão ainda maior como o $\mathbb{R}^n$.

Comumente, no estudo do Cálculo, encontramos as seguintes versões do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange.

Teorema A.1. (*Multiplicadores de Lagrange*) Seja $f(x, y)$ diferenciável no aberto A e seja $B = \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$, onde g é suposta de classe C^1 em A , e $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$, para todo $(x, y) \in B$. Uma condição necessária para que $(x_0, y_0) \in B$ seja extremo local de f em B é que exista um real λ_0 tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0).$$

Demonstração. Ver Um Curso de Cálculo Vol. 2 Guidorizzi página 324. □

Teorema A.2. (*Multiplicadores de Lagrange*) Seja $f(x, y, z)$ diferenciável no aberto A e seja $B = \{(x, y, z) \in A \mid g(x, y, z) = 0\}$, onde g é suposta de classe C^1 em A , e $\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, para todo $(x, y, z) \in B$. Uma condição necessária para que $(x_0, y_0, z_0) \in B$ seja extremo local de f em B é que exista um real λ_0 tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

Demonstração. Ver Um Curso de Cálculo Vol. 2 Guidorizzi página 324. (O processo se dá para o $\mathbb{R}^2$, porém é análogo para o $\mathbb{R}^3$).

□

Para finalizar este apêndice, mencionamos ainda que existe uma formulação mais geral do teorema.

Teorema A.3. (*Multiplicadores de Lagrange*) Consideremos $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, uma função de classe C^k ($k \geq 1$) no aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, e $M = \varphi^{-1}(c)$ uma hipersuperfície contida em U , imagem inversa do valor regular $c \in \mathbb{R}$ por uma função $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^k . Um ponto $p \in M$ é ponto crítico de $f|_M$ se, e somente se, existe um número real λ tal que:

$$\nabla f(p) = \lambda \cdot \nabla \varphi(p).$$

Demonstração. Ver livro do Elon. Curso de análise vol. 2 página 171.

□