UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATEUS MARTINS DE SOUZA

INTRODUÇÃO AOS VETORES COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA: Vetores no plano, operações e propriedades

CAMPINA GRANDE-PB
2025

MATEUS MARTINS DE SOUZA

INTRODUÇÃO AOS VETORES COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA: Vetores no plano, operações e propriedades

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Maxwell Aires da Silva

CAMPINA GRANDE
2025

S729i Souza, Mateus Martins de.
Introdução aos vetores com o uso do software GeoGebra [manuscrito] : Vetores no plano, operações e propriedades / Mateus Martins de Souza. - 2025.
49 p. : il. colorido.

Digitado. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025. "Orientação : Prof. Dr. Maxwell Aires da Silva, Coordenação do Curso de Matemática - CCT. "

1. Vetores. 2. GeoGebra. 3. Software educacional. 4. Tecnologia na educação. I. Título

21. ed. CDD 515.73

Elaborada por Bruno R. F. de Lima - CRB - 15/1021 BC/UEPB

MATEUS MARTINS DE SOUZA

INTRODUÇÃO AOS VETORES COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA: VETORES NO PLANO, OPERAÇÕES E PROPRIEDADES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em: 06/06/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Maria da Conceicao Vieira Fernandes** (***.640.424-**), em **22/06/2025 11:30:59** com chave **842e319c4f7511f0a3181a1c3150b54b**.
- **Josevandro Barros Nascimento** (***.063.584-**), em **20/06/2025 18:55:24** com chave **450e097e4e2111f09fc506adb0a3afce**.
- **Maxwell Aires da Silva** (***.574.364-**), em **20/06/2025 18:55:03** com chave **386b091a4e2111f0905a1a1c3150b54b**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.
Tipo de Documento: Folha de Aprovação do Projeto Final
Data da Emissão: 26/06/2025
Código de Autenticação: 1dfbe8

Aos meus pais, Eliane Martins (Dona Eliane) e Severino Francisco (Seu Bino), por todo incentivo e apoio para seguir nesta caminhada; e aos meus irmãos, Marcos Martins e Mauro Martins, por serem pessoas essenciais em minha vida. Dedico

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pelo dom da vida e por toda a força necessária para conseguir enfrentar todas as dificuldades ao longo desta caminhada.

Aos meus pais, Eliane Martins e Severino Francisco, pelo incentivo e apoio em todos os aspectos necessários ao longo de toda a minha vida. Muito obrigado por tudo que fazem por mim. Tudo o que sou é graças ao esforço e amor de vocês.

Aos meus irmãos, Mauro Martins e Marcos Martins, pela irmandade e parceria que só a gente entende. Vocês são essenciais em minha vida; sou privilegiado por tê-los como irmãos.

Agradeço também à minha amada namorada, Maria das Vitórias, por todo o incentivo durante essa jornada. Esteve presente desde o dia da matrícula, sempre me apoiando e motivando, mesmo à distância. Foi essencial nessa trajetória.

Gostaria também de deixar meus agradecimentos a todos os professores com quem tive a satisfação de estudar durante o curso, em especial aos membros desta banca, e principalmente ao digníssimo professor mestre Maxwell Aires, a quem escolhi para ser meu orientador neste trabalho. Agradeço por todo o conhecimento transmitido e pelo apoio prestado. Afirmo, sem medo de errar, que o senhor é uma inspiração como profissional e como ser humano.

Aos meus colegas e amigos(as) que tive a oportunidade de conhecer e com quem compartilhei momentos bons e ruins durante essa jornada na UEPB. Em especial, José Augusto (Afonso) e Deiwison Guedes (Deiwin), irmãos que a UEPB me presenteou. Vocês tornaram essa jornada mais leve e divertida, e levarei a amizade de vocês para o resto da vida.

"Quanto mais uma teoria matemática é desenvolvida, mais harmoniosa e uniformemente prossegue sua construção, e relações insuspeitadas são reveladas entre ramos até então separados da ciência."

(David Hilbet)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo mostrar como o uso do *software* GeoGebra pode contribuir para o ensino de vetores no plano bidimensional, suas operações de soma de vetores, produto por escalar e suas respectivas propriedades. No decorrer da pesquisa veremos que é possível utilizar o *software* GeoGebra para facilitar o ensino de Vetores no plano bidimensional, pois o GeoGebra traz consigo a visualização geométrica e algébrica de um determinado vetor como também de suas operações e propriedades, além disso, torna o ensino de vetores mais dinâmico e interativo, fazendo com que seja mais produtivo e eficiente. Neste trabalho também traremos sugestões para pesquisas futuras que abordem o respectivo assunto.

Palavras-chave: vetores; geogebra; matemática.

ABSTRACT

The present paper aims to show how the use of GeoGebra *software* can contribute to the teaching of vectors in the two-dimensional plane, their operations of vector addition, scalar product and their respective properties. During the research we will see that it is possible to use GeoGebra *software* to facilitate the teaching of vectors in the two-dimensional plane, since GeoGebra brings with it the geometric and algebraic visualization of a given vector as well as its operations and properties, in addition, it makes the teaching of vectors more dynamic and interactive, making it more productive and efficient. In this paper we will also bring suggestions for future research that address the respective subject.

Keywords: vectors; geogebra; mathematics.

Lista de Ilustrações

1 Placa em homenagem à descoberta de Hamilton na ponte de Broome 14
2 Direções de um segmento. 16
3 Sentidos de um segmento. 17
4 Comprimento de um segmento. 17
5 Distância entre dois pontos. 18
6 Equipolência entre dois segmentos 19
7 Segmentos equipolentes 19
8 Segmentos Colineares. 20
9 Representação geométrica de um vetor. 21
10 Ângulo entre dois vetores. 22

11 Soma de vetores 24
12 Produto de escalar por vetores 26

13 Tela inical do GeoGebra 29
14 Tela inical do GeoGebra 30
15 Barra de ferramentas do GeoGebra 31
16 Barra de ferramentas do GeoGebra - Ponto 32
17 Barra de ferramentas do GeoGebra - Segmento 32
18 Barra de ferramentas do GeoGebra - Vetor 33
19 Barra de ferramentas do GeoGebra - Vetor a Partir de um Ponto 33
20 Modo 1 de inserir vetor no GeoGebra 34
21 Modo 2 de inserir vetor no GeoGebra 34
22 Modo 3 de inserir vetor no GeoGebra 35
23 Modo 4 de inserir vetor no GeoGebra 35
24 Soma de vetores 36
25 Soma de vetores 1 37
26 Soma de vetores 2 37
27 Comutatividade da soma de vetores 38
28 Comutatividade da soma de vetores 39
29 Associatividade da soma de vetores 39
30 Associatividade da soma de vetores 40
31 Elemento neutro aditivo 40

32 Inverso aditivo 41
33 Produto de escalar por vetor 42
34 Produto de escalar por vetor 1 42
35 Associatividade do produto de escalar por vetor 43
36 Associatividade do produto de escalar por vetor 44
37 Distributividade do produto de escalar pela soma de vetores 44
38 Distributividade do produto de escalar pela soma de vetores 45
39 Distributividade do produto de vetor pela soma de escalares 46
40 Distributividade do produto de vetor pela soma de escalares 46
41 Elemento neutro multiplicativo 47

SUMÁRIO

Página

1 INTRODUÇÃO **11**

2 VETORES: Uma construção hitórico-matemática **13**
2.1 A noção de equipolência de segmentos . . . 15
2.1.1 Direção de um segmento . . . 16
2.1.2 Sentido de um segmento . . . 16
2.1.3 Comprimento de um segmento . . . 17
2.1.4 Segmento equipolentes . . . 18
2.2 Vetores no plano . . . 21
2.2.1 Representação geométrica . . . 21
2.2.2 Coordenadas de um vetor . . . 22
2.2.3 Norma de um vetor . . . 22
2.2.4 Ângulo entre dois vetores . . . 22
2.2.5 Alguns casos particulares de Vetores . . . 23

3 OPERAÇÕES COM VETORES **24**
3.1 Soma de vetores . . . 24
3.1.1 Propriedades da soma de vetores . . . 25
3.2 Produto de escalares por vetores . . . 26
3.2.1 Propriedades do produto de escalar por vetor . . . 27

4 VETORES NO GEOGEBRA: Uma proposta visual e interativa **29**
4.1 Apresentação do *software* . . . 29
4.1.1 Janela algébrica . . . 30
4.1.2 Janela de visualização gráfica/geométrica . . . 30
4.1.3 Teclado algébrico . . . 31
4.1.4 Barra de ferramentas . . . 31
4.2 Visualização algébrica e geométrica de vetores pelo GeoGebra . . . 34
4.3 Soma de vetores utilizando o GeoGebra . . . 36
4.3.1 Propriedades da soma de vetores utilizando o GeoGebra . . . 38
4.4 Produto de escalar por vetor utilizando o GeoGebra . . . 41
4.4.1 Propriedades do produto de escalar por vetor utilizando o GeoGebra . . . 43

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS **48**
5.1 Sugestões para pesquisas futuras . . . 48

REFERÊNCIAS **48**

1 INTRODUÇÃO

O ensino de modo geral, tem-se modificado ao longo dos anos principalmente com o avanço das tecnologias que está a cada dia mais presente em nossas vidas, algo que é inevitável, pois está mundialmente integrado na sociedade em que vivemos; portanto devemos aceitar o grande avanço da tecnologia, nos adaptar e usufruir de seus recursos; no ensino da matemática não seria diferente, pois assim como as demais disciplinas no mundo contemporâneo existem diversas ferramentas tecnológicas que auxiliam no seu ensino. E consequentemente na matemática quando falamos de álgebra vetorial é importante ter uma visão ampla sobre seu ensino, pois é um assunto que envolve tanto o conceito algébrico como o geométrico, podendo ser de difícil entendimento de acordo com a forma de ensino. Por isso é importante adotar meios que facilite o entendimento deste conteúdo, seja por estratégias de ensino ou até ferramentas tecnológicas; neste trabalho utilizaremos o *software* GeoGebra como ferramenta para o ensino de vetores, que é um *software* de matemática dinâmico que liga os conceitos algébricos e geométricos em um mesmo ambiente.

O assunto de vetores não é um assunto tão complexo, no entanto é um assunto extenso. Principalmente quando se trata da disciplina de vetores no ensino superior de matemática, pois, tomando como exemplo a ementa da UEPB, que a disciplina "vetores e geometria analítica" em que sua nomenclatura já dar spooler do conteúdo, nessa disciplina é repassado o assunto de vetores e de geometria analítica. Tendo em vista a quantidade de dias letivos em um semestre seguidos de feriados e imprevistos que ocorrem, tem-se um tempo consideravelmente curto para ver toda a ementa dessa disciplina que muitas das vezes ocorre de não dar tempo suficiente para ensinar toda a ementa e termina ficando assuntos pendentes ao decorrer do curso. Por isso é importante pensar em meios, estratégias e ferramentas que facilite o ensino desse conteúdo, tanto em relação ao ensino como também visando o tempo disponível para ensinar todo o conteúdo da disciplina. Com uso do GeoGebra no ensino de vetores, esse *software* contribui para um melhor entendimento ligando álgebra e geometria em um único ambiente e ainda uma melhor visualização e compreensão dos conceitos através de recursos visuais, como gráficos e simulações interativas, o GeoGebra facilita a construção do conhecimento matemático de maneira prática e envolvente. Além disso, a plataforma permite que os usuários experimentem e manipulem objetos geométricos em tempo real, favorecendo uma abordagem mais ativa e exploratória.

Devido a sua eficácia para o ensino de matemática, em particular para o ensino de vetores, o *software* GeoGebra foi utilizado neste trabalho como ferramenta auxiliadora no ensino de vetores no plano, suas operações e propriedades. Com GeoGebra se torna mais dinâmico a forma de ensinar o conteúdo de vetores, devido a sua praticidade e riqueza em ferramentas interativas; Neste trabalho foi desenvolvido primeiro um breve contexto histórico, para que se tenha um melhor entendimento da origem e formalização deste conteúdo ao decorrer da história, em seguida são contextualizados alguns conceitos matemáticos que são essenciais para ter um melhor entendimento sobre os vetores; daí, este trabalho introduz o que são vetores no espaço bidimensional bem como as operações de soma e produto por escalar e suas propriedades, finalizando trazendo a introdução, operações e propriedades dos vetores no espaço bidimensional através do GeoGebra, mostrando como esse *software* pode cooperar e enriquecer o ensino deste conteúdo tornando o mais dinâmico e prático tanto para quem leciona como para quem está aprendendo.

2 VETORES: Uma construção hitórico-matemática

Primeiro, antes de conhecer o conceito de vetor, devemos ter uma noção histórica do desenvolvimento algébrico e geométrico da Matemática que ocorreu entre os séculos 17, 18 e 19. Nessa corrida histórica iremos citar nomes de vários estudiosos na área da Matemática e Física, alguns até bem conhecidos, outros nem tanto, entre eles estão: **René Descartes** (1596 - 1650), **Caspar Wessel** (1745 – 1818), **Carl Friedrich Gauss** (1777 – 1855), **Giusto Bellavitis** (1803 - 1880), **William Rowan Hamilton** (1805 – 1865), **Hermann Grassmann** (1809 – 1877), **J. Willard Gibbs** (1839 – 1903), **Edwin B. Wilson** (1879 – 1964); estes deram grandes contribuições para o avanço da Álgebra, Geometria Analítica, e em particular, da Álgebra Vetorial.

Iniciaremos pela geometria cartesiana apresentada por Descartes, responsável por trazer uma relação biunívoca entre a geometria e a álgebra, responsável também pelo desenvolvimento do plano cartesiano que consiste em um sistema de eixos sendo um horizontal e outro vertical (eixo das abcissas e ordenadas, respectivamente), em que nesse plano podemos traçar coordenas através do encontro de retas paralelas aos dois eixos do plano. Por volta de 1636, Descartes com seus trabalhos foi um dos principais responsáveis pelo desenvolvimento da geometria analítica e consequentemente um contribuinte para o desenvolvimento do conceito de Vetor, pois o vetor é um ente matemático diretamente ligado à geometria analítica, tendo relação algébrica e geométrica ao mesmo tempo (Delgado, Frensel, Epirito Santo, 2010).

Mais à frente tivemos a representação geométrica dos números complexos, sua primeira representação geométrica foi apresentada no trabalho do norueguês **Caspar Wessel**, submetido à Real Academia Dinamarquesa de Ciência, intitulado de *Om Directionens analytiske betegning*, em 1797, este trabalho trazia a primeira representação geométrica dos números complexos como pontos reais do plano. Mas seu trabalho ficou por muito tempo despercebido e só veio ser redescoberto e apresentado cerca de 98 anos depois de escrito. No entanto antes do trabalho de Wessel ser "revelado" ao mundo, outro matemático, em 1831, também fez representações de um número complexo no plano bidimensional, seu nome é Carl F. Gauss (Eves, 2011).

Gauss nasceu em Brunswick na Alemanha, ele é considerado por alguns o maior matemático do século 19, contribuiu para áreas como Teoria dos números, Estatística, Análise Matemática, Geometria Diferencial e entre outras áreas da ciência. A representação geométrica de Gauss e Wessel é muito semelhante à representação de um vetor no plano bidimensional, mesmo não tendo o conceito formal de vetor nesses trabalhos, podemos considerar que algumas características e propriedades dos vetores no plano bidimensional são consequência desses trabalhos, pela semelhança no que diz respeito às propriedades.

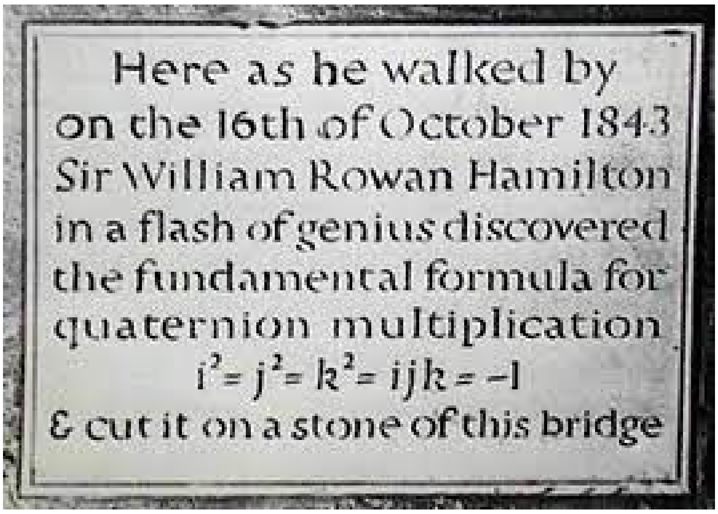
No ano de 1832, Giusto Bellavitis apresentou um trabalho sobre geometria em que trazia um conceito que originou a noção que hoje conhecemos como vetor. Bellavitis considerou que dados dois pontos distintos no plano, A e B, um segmento de reta com extremidades A e B poderia ser percorrido de duas maneiras distintas: partindo de A para B e partindo de B para A. Sendo assim os segmentos AB e BA são objetos distintos, pois ele considerou o sentido do percurso e classificou como segmentos orientados, partindo de uma relação que denominou de equipolência. A partir desta relação se deu origem a noção de Vetor (Delgado, Frensel, Do Espirito Santos, 2010).

Quase nesse mesmo tempo, no ano de 1837, outro personagem muito importante, Willian Rowan Hamilton, considerado por alguns o maior dos irlandeses a merecer a fama em Matemática, mostrou que os números complexos escrito da forma a + bi, poderiam ser considerados abstratamente como pares ordenados (a, b) do plano bidimensional, assim como conhecemos hoje.

Segundo Boyer (1974), Hamilton tentou expandir a demonstração dos números complexos para o espaço tridimensional, porém encontrou muitos obstáculos para preservar as propriedades algébricas básicas dos números reais e complexos; por exemplo a comutatividade do produto de dois complexos, em que não foi possível preservar essa propriedade no espaço tridimensional. Já desmotivado pelas tentativas e insucessos, foi então que no dia 16 de outubro de 1843, quando estava passeando com sua esposa no Royal Canal em Dublin, que Hamilton teve uma grande inspiração para sua ideia, a saber, precisava abrir mão da comutatividade e utilizar quádruplas de números e não de tripas, daí desenvolveu um sistema para quatro dimensões que chamou de quatérnios.

A fórmula agora é exibida em uma placa inaugurada em 1958 na ponte de Broome, perto de onde Hamilton teve sua grande visão.

Figura 1 – Placa em homenagem à descoberta de Hamilton na ponte de Broome



Fonte : https : //www.researchgate.net/figure/Plaque − on − Broome − Bridge − Dublin − commemorating − Hamiltons − discovery − of − quaternions$_{fig}4_{3}05078486$

A placa diz o seguinte: "Aqui enquanto caminhava em 16 de outubro de 1843 Sir William Rowan Ramilton num lampejo de gênio descobriu a fórmula fundamental para a multiplicação de quatérnios $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ e cortá-lo em uma pedra desta ponte."

Foi a partir dos quatérnios de Hamilton, que nasceu a primeira álgebra não comutativa, libertou a álgebra de suas amarras com a aritmética dos números reais, abrindo as portas da álgebra abstrata. Os quatérnios de Hamilton foram escritos na forma a + bi + cj + dk, em que a, b, c, d, são números reais e i, j, k, são como a parte imaginária dos números complexos, no entanto Hamilton utilizando o conceito de que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, os produtos não satisfaziam a propriedade comutativa, pois ij = k mas ji = -k, sendo análogo os demais, ki = j mas ik = -j e jk = i mas kj = -i. Por isso foi necessário abrir mão da comutatividade.

Quase no mesmo tempo que Hamilton descobriu os quatérnios, o matemático alemão Grassmann, em 1844, publicou na Alemanha a primeira edição de seu notável livro *Ausdehnungslebre* (Cálculo de Extensões), onde trazia a ideia de uma multiplicação não comutativa, assim como Hamilton, no entanto, por conter uma escrita muito abstrata sem exemplos explicativos com uma notação muito complicada, não se obteve muito êxito em sua publicação. Foi levado em consideração o fato de Grassmann ser apenas um professor de Ensino Médio sem uma reputação renomada, diferente de Hamilton.

De acordo com Eves (2011) os quatérnios de Hamilton e o cálculo de extensões de Grassmann, são entes difíceis de dominar com rapidez e de aplicar com facilidade, acredita-se que devido a essa dificuldade foi que se deu o surgimento da álgebra vetorial, sendo um conceito mais fácil de dominar e aplicar. A Álgebra vetorial e Análise vetorial como conhecemos hoje foi apresentada pela primeira vez, em 1881, nas notas de aulas sobre Análise Vetorial feitas por J. Willard Gibbs, para seus alunos da Universidade de Yale, nelas trazia o conceito gráfico de vetor como uma flecha ou um segmento de reta orientado.

Gibbs nasceu em New Haven nos Estados Unidos, estudou Matemática e Física na Universidade de Yale, obtendo doutorado em Física em 1863 e foi indicado professor de Física de Yale em 1871. Gibbs deu grande contribuição para a Física-Matemática com sua *Vector Analysis* em 1881. Através das notas de aulas de Gibbs colecionadas por **Edwin B. Wilson**, nascido em Hartford no Estados Unidos, Wilson foi um dos alunos de pós-graduação de Gibbs na Universidade de Yale, dessa coleção foi produzido o primeiro livro sobre Análise Vetorial, o *Vector Analysis* (1901), onde mais para frente em torno de 1960 esse livro foi reimpresso com uma linguagem mais atualizada, retratando o conceito de vetor assim como conhecemos hoje.

2.1 A noção de equipolência de segmentos

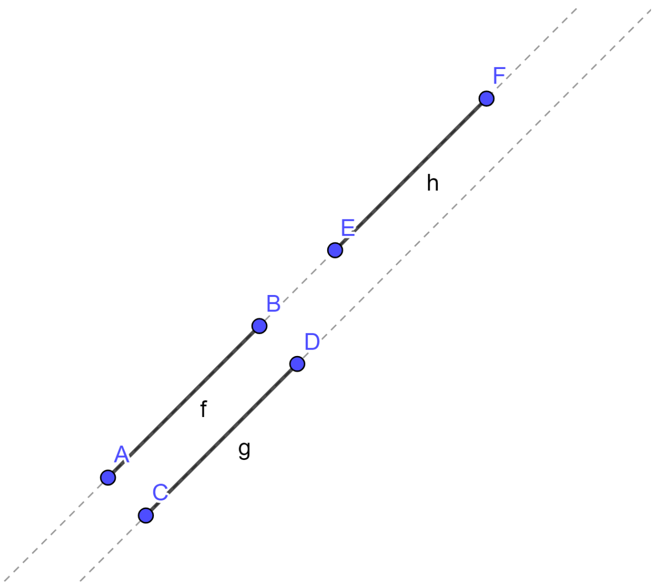
Para uma melhor compreensão, vamos considerar que os elementos usados (ponto, reta, segmento de reta, etc...) estão todos em um plano fixo. Usaremos como base para entender a noção de equipolência (Delgado, Frensel, Do Espirito Santo, 2010).

2.1.1 Direção de um segmento

Considere o segmento de reta AB, em que esse segmento tem origem no ponto A e extremidade no ponto B; agora considerando o segmento de reta BA, com origem em B e extremidade em A; podemos dizer que esses segmentos têm a mesma direção, pois ambos estão sobre uma mesma reta. Esse pensamento também é válido quando os segmentos se encontram em retas coincidentes ou paralelas; caso os segmentos de retas não estejam sobre retas coincidentes ou paralelas, dizemos que os segmentos têm direções diferentes.

Sejam os segmentos AB, CD e EF; todos têm a mesma direção, pois AB e EF estão sobre a mesma reta e AB e EF estão sobre uma reta paralela à reta que contém o segmento CD, veja a figura 2:

Figura 2 – Direções de um segmento.

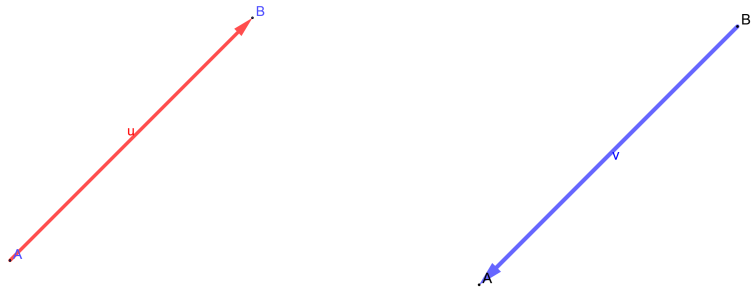


Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

2.1.2 Sentido de um segmento

Considere o segmento de reta AB, com origem em A e extremidade em B; agora considere o segmento de reta BA, com origem em B e extremidade em A; diferente da sua direção esses segmentos têm sentidos opostos. Podemos pensar da seguinte forma: O segmento AB tem seu sentido apontado para B (extremidade), já o segmento BA tem seu sentido apontado para A (extremidade). Tome a seta contida no segmento como um indicador de sentido. Veja a representação a seguir:

Figura 3 – Sentidos de um segmento.



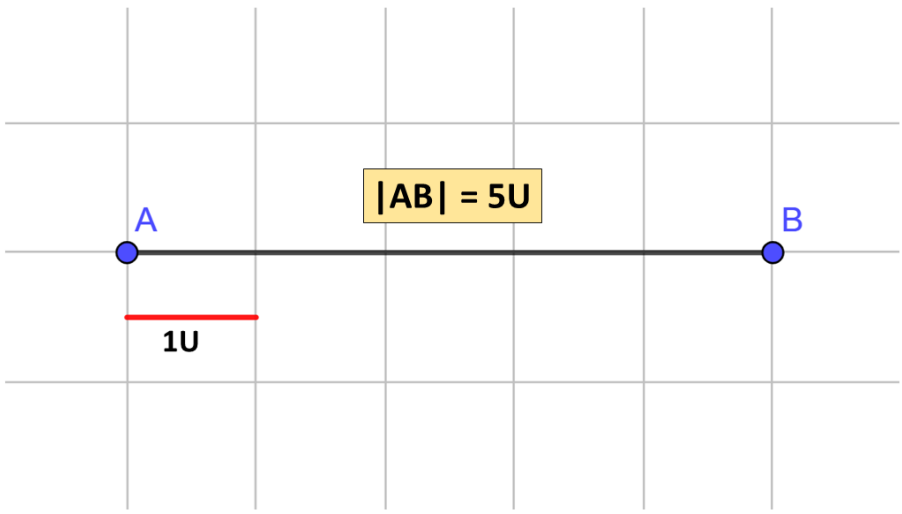
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

2.1.3 Comprimento de um segmento

O comprimento de um segmento de reta é dado pela distância entre a sua origem e sua extemidade. Considere o segmento de reta AB, o seu comprimento será a distácia entre o ponto A (origem) e o ponto B (extremidade), esta medida é representada por d(A, B) ou em módulo $|AB|$.

Seja AB um segmento de reta, seu comprimento será dado por $|AB| = 5U$, conforme ilustra a figura 4.

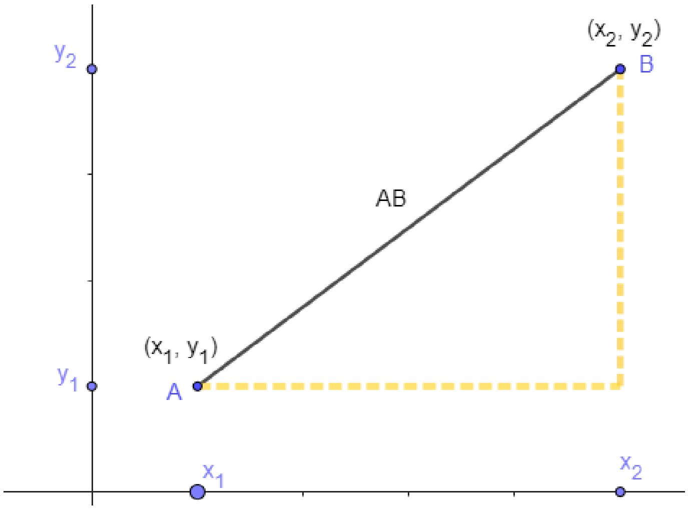
Figura 4 – Comprimento de um segmento.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Podemos calcular a distância entre dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, da seguinte forma: $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, sendo essa expressão obtida pelo teorema de Pitágoras. Veja a figura 5:

Figura 5 – Distância entre dois pontos.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Conforme ilustra a figura anterior, o segmento AB representa a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem $|x_2 - x_1|$ e $|y_2 - y_1|$.

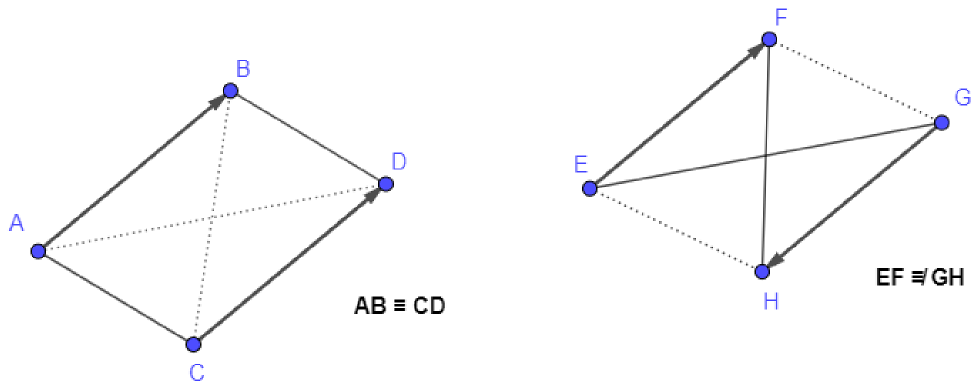
Portanto para calcular a distância entre dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ ou o comprimento de um segmentos AB, faremos da seguinte forma: $d(A, B) = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2.1.4 Segmento equipolentes

Definição 2.1. Dois ou mais segmentos são equipolentes quanto têm mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.

Tomando os segmentos AB e CD, com mesmo comprimento, direção e sentido; eles serão ditos **equipolentes**, e representamos por $AB \equiv CD$. Caso os segmentos não tenha mesma direção, mesmo sentido ou mesmo comprimento, são ditos segmentos não equipolentes, e representaremos por: $AB \not\equiv CD$, conforme ilustra a figura 6:

Figura 6 – Equipolência entre dois segmentos

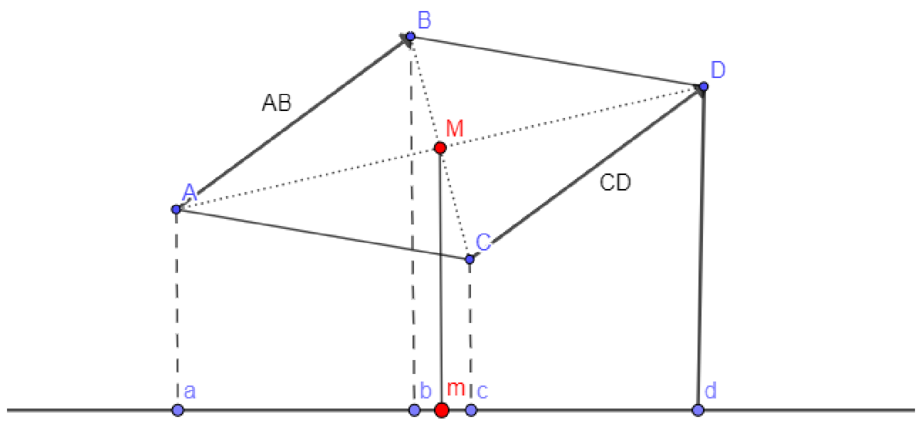


Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Para determinar se dois segmentos são equipolentes, usaremos o seguinte critério:

Proposição 1. *Sejam A, B, C, D pontos do plano (colineares ou não), então $AB \equiv CD$ se, e somente se, AD e BC possuem o mesmo ponto médio.*

Figura 7 – Segmentos equipolentes

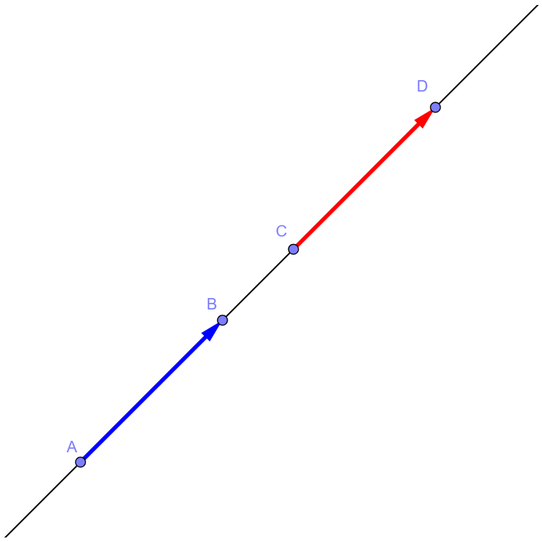


Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Demonstração.

(a) *Tome as AB e CD segmentos colineares, coforme mostra a figura 8.*

Figura 8 – Segmentos Colineares.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

($\Rightarrow$) Suponha que $AB \equiv CD$ então os segmentos AB e CD, têm o mesmo módulo (comprimento), mesma direção e mesmo sentido. Com isto, associando o ponto A ao número real a; o ponto B ao número real b; o ponto C ao número real c e o ponto D ao número real d, o segmento orientado AB tem comprimento b - a e o segmento CD tem comprimento d - c. Daí, tem-se:

$$\text{b - a} = \text{d - c} \Rightarrow \text{d + a} = \text{b + c} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot(d+a) = \frac{1}{2}\cdot(b+c) \Rightarrow \frac{d+a}{2} = \frac{b+c}{2}$$

e daí AD e BC possuem o mesmo ponto médio.

($\Leftarrow$) Por outro lado, supondo que AD e BC possuem o mesmo ponto médio. Tem-se:

$$\frac{d+a}{2} = \frac{b+c}{2} \Rightarrow 2\cdot\frac{d+a}{2} = 2\cdot\frac{b+c}{2} \Rightarrow \text{d + a} = \text{b + c} \Rightarrow \text{b - a} = \text{d - c},$$

e isto nos diz que AB e CD possuem o mesmo comprimento e como têm mesma direção (são segmento colineares) e mesmo sentido $(b-a > d-c > 0)$, segue o resultado.

(b) *Tome AB e CD segmentos não colineares, conforme ilustra a figura 7.*

($\Rightarrow$) Suponha que $AB \equiv CD$, então $ABeCD$ possuem mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Daí temos que o quadrilátero ABDC (desenhado nesta ordem) é um paralelogramo, donde segue que suas diagonais, a saber, AD e BC encontram-se no mesmo ponto, o qual é o ponto médio de cada diagonal.

($\Leftarrow$) Por outro lado, se AD e BC possuem o mesmo ponto médio, como AB e CD são neste caso paralelos, segue que os segmentos AD e BC são diagonais de um quadrilátero

ABDC. Ora, então este quadrilátero é um paralelogramo. Logo, $AB \equiv CD$. □

2.2 Vetores no plano

A palavra VETOR significa **portador** e vem do latim *vector*, sendo seu significado original “o que leva, o que transporta”. O termo vetor na Matemática não é diferente, pois vetor é um conjunto de elementos (segmentos orientados) que têm as mesmas características (mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento), ou seja, pode-se considerar, para efeito de cálculo, um único segmento representante de todo o conjunto dos segmentos orientados, uma vez que todos têm a mesma informação.

Para melhor entendimento considere os pontos $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, dizemos que o segmento de reta orientado de A para B é um representante do vetor e denotamos esse vetor por $\overrightarrow{AB}$. O vetor $\overrightarrow{AB}$ representa o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes e ele, ou seja, qualquer segmento orientado equipolente a $\overrightarrow{AB}$ é um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$.

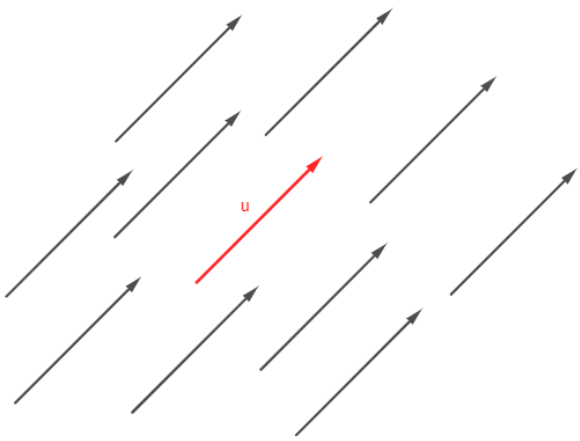
De acordo com a proposição 2.1: $AB \equiv CD$ se, e somente se, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Podemos representar um vetor escrevendo o segmento com uma seta em cima, exemplo $\overrightarrow{AB}$, ou por uma letra minúscula com uma seta em cima $\vec{u}$.

2.2.1 Representação geométrica

A representação geométrica de um vetor é basicamente uma flecha, melhor dizendo é um segmento de reta com uma seta em sua extremidade, essa seta representa o sentido do vetor. Considere um vetor $\vec{u}$ e vários outros segmentos orientados e equipolentes entre si, conforme ilustra a figura 9.

Figura 9 – Representação geométrica de um vetor.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Conforme dito antes, o vetor $\vec{u}$ serve como representante para todos esses segmentos que estão ao seu redor, ou seja, as propiedades e características do vetor $\vec{u}$ se aplicam em todos os seus representantes, por isso quando trabalhamos com vetores basta tomar um único representante.

2.2.2 Coordenadas de um vetor

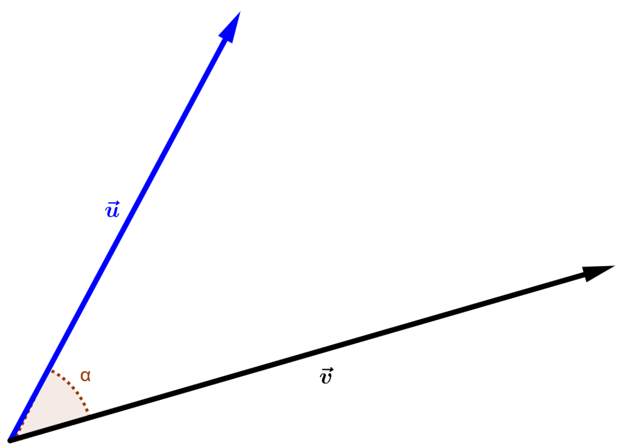
Sejam os pontos no plano bidimensional $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, e considere o vetor $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Para obter as coordenadas deste vetor, faremos o seguinte: $\vec{u} = ((b_1 - a_1), (b_2 - a_2))$. Portanto, dizemos que as coordenadas do vetor $\vec{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

2.2.3 Norma de um vetor

Seja o vetor $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, sua norma será denotada por $\|\vec{u}\|$, e a cálculamos da seguinte forma: $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. A norma de um vetor (ou módulo) é o comprimento do mesmo.

2.2.4 Ângulo entre dois vetores

Figura 10 – Ângulo entre dois vetores.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Dados dois vetores não nulos do plano, $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, o ângulo α formado entre esses dois vetores será dador por: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

2.2.5 Alguns casos particulares de Vetores

(I) Vetores paralelo

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, são paralelos quando existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$.

(II) Vetor nulo

O vetor nulo é aquele que tem sua origem igual à sua extremidade, podendo ser representado por $\overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{AA}$, em que A é um ponto qualquer do plano.

(III) Vetor oposto

O vetor oposto de um vetor $\vec{u}$ é o vetor -$\vec{u}$, em que o vetor -$\vec{u}$ têm o mesmo comprimento, mesma direção, porém sentido oposto de $\vec{u}$. Cada vetor não nulo $\vec{u} = (x_1, y_1)$ corresponde a um vetor oposto -$\vec{u} = (-x_1, -y_1)$.

(IV) Vetor unitário

Vetor unitário é todo vetor $\vec{u}$ em que $\|\vec{u}\| = 1$. Seja o vetor unitário $\vec{u}$ e um vetor qualquer $\vec{v}$, caso $\vec{u}$ tenha o mesmo sentido de $\vec{v}$, dizemos que $\vec{u}$ é *vesor* de todos os vetores que sejam paralelos e tenham o mesmo sentido de $\vec{v}$.

(V) Vetores ortogonais

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ditos ortogonais, e representamos por $\vec{u} \perp \vec{v}$, se algum representante de $\vec{v}$ formar um ângulo reto (90°) com algum representante de $\vec{u}$.

3 OPERAÇÕES COM VETORES

Neste capítulo veremos as operações de soma de vetores e multiplicação de escalares (números reais) por vetores, em cada uma dessas operações veremos suas propriedades e exemplos de como se aplica algebricamente e geometricamente.

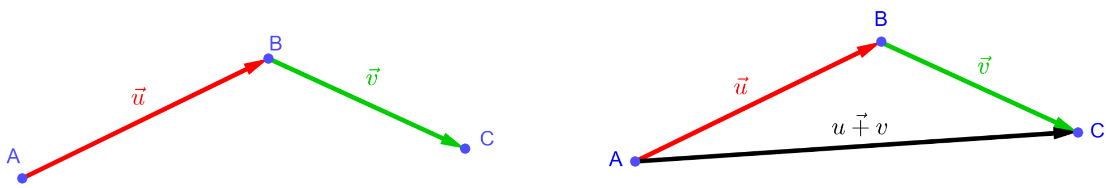
3.1 Soma de vetores

Somar vetores consiste em somar dois ou mais vetores e ter como resultado um novo vetor, denominado de vetor soma. Observe os exemplos abaixo.

Exemplo: Considere os vetor $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$; algebricanente, a soma destes vetores será a soma de suas coordenadas, resultando um novo vetor, ou seja, $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Caso quisesse somar outro vetor com $\vec{u}$ e $\vec{v}$, bastava somar o vetor desejado com o vetor resultante da soma de $\vec{u} + \vec{v}$.

Outra maneira de compreender a soma de vetores é: Considere os segmentos orientados AB e BC, e os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, em que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. O vetor resultante da soma $\vec{u}$ + $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Ou seja, você pega o primeiro vetor ($\vec{u}$) e um representante do segundo vetor ($\vec{v}$) em que sua origem seja coincidente com a extremidade do primeiro vetor, com isso, o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ será igual ao segmento orientado com mesma origem do primeiro vetor e a mesma extremidade do segundo vetor, conforme ilustra a figura 11:

Figura 11 – Soma de vetores



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

3.1.1 Propriedades da soma de vetores

Considerando os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, sendo qualquer vetor, teremos as seguintes propriedades:

(I) Comutatividade: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(II) Associatividade: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(III) Elemento neutro aditivo: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

(IV) Inverso aditivo: $\vec{u}$ + (-$\vec{u}$) = $\vec{0}$

Antes de iniciar as demontrações, consideremos os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3)$ e $\vec{0} = (0, 0)$. Segue abaixo as demonstrações das propriedades:

Demonstração I. Comutatividade. Primeiro faremos $\vec{u} + \vec{v}$.
$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$
$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$

Agora, $\vec{v} + \vec{u}$
$\vec{v} + \vec{u} = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$
$\vec{v} + \vec{u} = (x_2 + x_1,\ y_2 + y_1)$

Como x_1, y_1, x_2 e y_2 são números reais, então $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$. □

Demonstração II. Associatividade. Primeiro faremos $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.
$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3)$
$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) + (x_3, y_3)$
$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (x_1 + x_2 + x_3,\ y_1 + y_2 + y_3)$

Agora, $\vec{u} + (\vec{u} + \vec{w})$
$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (x_1, y_1) + [(x_2, y_2) + (x_3, y_3)]$
$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3,\ y_2 + y_3)$
$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (x_1 + x_2 + x_3,\ y_1 + y_2 + y_3)$

Logo, $\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$.

□

Demonstração III. Elemento neutro aditivo.

Temos, $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{0} = (0, 0)$

Logo, $\vec{u} + \vec{0} = (x_1, y_1) + (0, 0)$

$\vec{u} + \vec{0} = (x_1 + 0,\ y_1 + 0) = (x_1,\ y_1) = \vec{u}$

Portanto, $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.

□

Demonstração IV. Inverso aditivo.

Considere o vetor $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e seu oposto $-\vec{u} = (-x_1, -y_1)$, fazendo $\vec{u}$ + (-$\vec{u}$) teremos:

$\vec{u}$ + (-$\vec{u}$) = $[x_1 + (-x_1),\ y_1 + (\text{-}y_1)]$

$\vec{u}$ + (-$\vec{u}$) = $(x_1$ - $x_1,\ y_1$ - $y_1)$

$\vec{u}$ + (-$\vec{u}$) = $(0,\ 0) = \vec{0}$

Portanto, $\vec{u}$ + (-$\vec{u}$) = $(0,\ 0) = \vec{0}$.

□

3.2 Produto de escalares por vetores

O produto de escalares (número real) por vetores é o produto de um número real α por um vetor $\vec{u}$. Algebricamente multiplicamos o escalar por cada uma das coordenadas do vetor. Geometricamente teremos o seguinte:

I) O comprimento do vetor aumenta e mantém seu sentido se o escalar $\alpha > 1$.

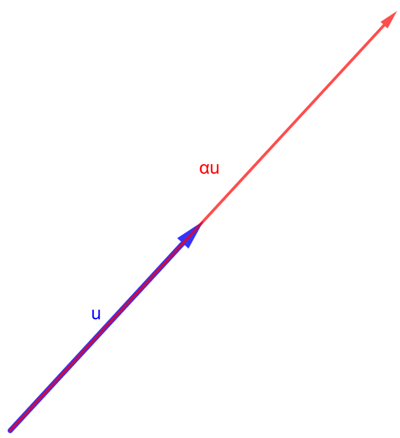
II) O comprimento do vetor aumenta e inverte seu sentido se o escalar $\alpha < -1$.

III) O comprimento do vetor diminui e mantém seu sentido se o escalar α for $0 < \alpha < 1$.

IV) O comprimento do vetor diminui e inverte seu sentido se o escalar α for $-1 < \alpha < 0$.

Exemplo: Considere o vetor $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e o número real α, fazendo $\alpha \cdot \vec{u}$. Algebricamente teremos: $\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1)$. Considerando que α seja um número inteiro positivo, geometricamente teremos:

Figura 12 – Produto de escalar por vetores



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

3.2.1 Propriedades do produto de escalar por vetor

Considerando os escalares 1, α e β e os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, teremos as seguintes propriedades:

(I) Associatividade: $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u}$

(II) Distributividade do produto pela soma de vetores: $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$

(III) Distributividade do produto pela soma de escalares: $\vec{u} \cdot (\alpha + \beta) = \vec{u} \cdot \alpha + \vec{u} \cdot \beta$

(IV) Elemento neutro multiplicativo: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Antes de iniciar as demontrações, consideremos os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e os escalares α, β e 1. Segue abaixo as demonstrações das propriedades:

Demonstração I. Associatividade.

Fazendo: $\beta \cdot \vec{u}$, teremos: $\beta \cdot (x_1, y_1) = (\beta x_1,\ \beta y_1)$
Logo, $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot (\beta x_1, \beta y_1) = (\alpha\beta x_1,\ \alpha\beta y_1)$.

Por outro lado, teremos: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u} = (\alpha \cdot \beta) \cdot (x_1, y_1)$
$(\alpha \cdot \beta) \cdot (x_1, y_1) = (\alpha\beta x_1,\ \alpha\beta y_1)$.
Portanto, como $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$, a associatividade é verdadeira.

□

Demonstração II. Distributividade do produto pela soma de vetores.

Fazendo: $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v})$, teremos: $\vec{u} + \vec{v} = (x_1,\ y_1) + (x_2,\ y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$
Então, $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) = (\alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot x_2,\ \alpha \cdot y_1 + \alpha \cdot y_2)$
Logo, $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot x_2,\ \alpha \cdot y_1 + \alpha \cdot y_2)$.

Por outro lado, teremos: $\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (x_1, y_1) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1)$
E, $\alpha \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (x_2, y_2) = (\alpha \cdot x_2, \alpha \cdot y_2)$
Logo, $\alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v} = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1) + (\alpha \cdot x_2, \alpha \cdot y_2) = (\alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot x_2,\ \alpha \cdot y_1 + \alpha \cdot y_2)$
Portanto, como $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$, a distributividade do produto pela soma de vetores é verdadeira. □

Demonstração III. Distributividade do produto pela soma de escalares.

Fazendo: $\vec{u} \cdot (\alpha + \beta)$, teremos: $(x_1,\, y_1) \cdot (\alpha + \beta)$
$\vec{u} \cdot (\alpha + \beta) = (x_1 \cdot (\alpha + \beta),\, y_1 \cdot (\alpha + \beta))$

Por outro lado, teremos: $\vec{u} \cdot \alpha + \vec{u} \cdot \beta$
Fazendo $\vec{u} \cdot \alpha$: $\vec{u} \cdot \alpha = (x_1, y_1) \cdot \alpha = (x_1 \cdot \alpha,\, y_1 \cdot \alpha)$

Agora $\vec{u} \cdot \beta$: $\vec{u} \cdot \beta = (x_1, y_1) \cdot \beta = (x_1 \cdot \beta,\, y_1 \cdot \beta)$

Logo, $\vec{u} \cdot \alpha + \vec{u} \cdot \beta = (x_1 \cdot \alpha,\, y_1 \cdot \alpha) + (x_1 \cdot \beta,\, y_1 \cdot \beta)$
$(x_1 \cdot \alpha + x_1 \cdot \beta,\, y_1 \cdot \alpha + y_1 \cdot \beta) = (x_1 \cdot (\alpha + \beta),\, y_1 \cdot (\alpha + \beta))$

Portanto, como $\vec{u} \cdot (\alpha + \beta) = \vec{u} \cdot \alpha + \vec{u} \cdot \beta$, a distributividade do produto pela soma de escalares é verdadeira.

$\square$

Demonstração IV. Elemento neutro multiplicativo.

Pegando o escalar 1, e um vetor $\vec{u}$
Teremos: $1 \cdot \vec{u} = 1 \cdot (x_1,\, y_1) = (1 \cdot x_1,\, 1 \cdot y_1)$

Como $1 \cdot x_1 = x_1$, e $1 \cdot y_1 = y_1$

Então, $(1 \cdot x_1,\, 1 \cdot y_1) = (x_1,\, y_1) = \vec{u}$

Portanto, como $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$, então 1 é o elemento neutro multiplicativo.

$\square$

Em seguida, veremos as operações de soma de vetores, produto por escalar e suas respectivas propriedades com o uso do *software* GeoGebra. Contendo uma abordagem mais dinâmica e interativa, em que traz também um guia de como fazer o uso do software para trabalhar com os vetores.

4 VETORES NO GEOGEBRA: Uma proposta visual e interativa

Neste capítulo veremos, utilizando o GeoGebra, os conceitos descritos acima, sobre vetores e suas operações de soma de vetores e produto por escalar, assim como as propriedades dessas operações. O GeoGebra é um *software* matemático que consegue unir a álgebra e a geometria em um único ambiente; o GeoGebra faz com que o aprendizado de um conteúdo como o de vetores, que necessita do conhecimento algébrico ligado ao geométrico, se torne mais dinâmico e ágil.

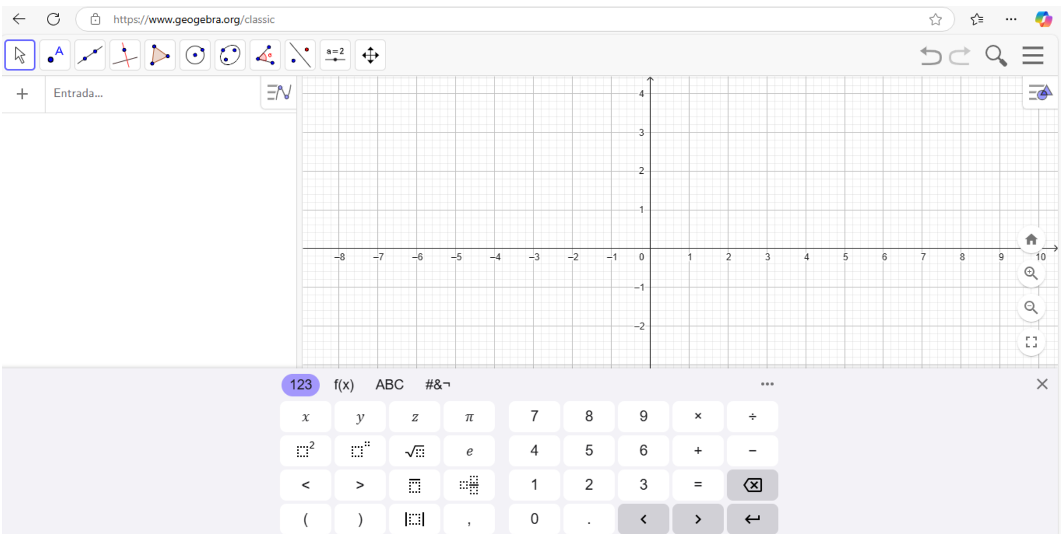
4.1 Apresentação do *software*

O GeoGebra é um *software* matemático que trabalha a geometria, álgebra, gráficos, planilhas e cálculo, em um único ambiente. Podemos acessar o GeoGebra, gratuitamente, através do site https://www.geogebra.org/, em que lá teremos acesso a vários tipos de calculadoras, algumas mais específicas e outras mais abrangentes; encontraremos também conteúdos produzidos e disponibilizados por outros usuários do GeoGebra.

Esse *software* permite que o usuário crie tarefas ou atividades em que possa compartilhar com outros usuários, sendo além de um ambiente de matemática dinâmica, um ambiente de interação e troca de conhecimentos entre os usuários.

Neste trabalho utilizaremos o GeoGebra Clássico, será utilizado essa versão por acreditar que seja mais completa e didática entre as calculadoras disponibilizadas pelo GeoGebra. Segue abaixo a tela inicial do *software* e algumas de suas ferramentas.

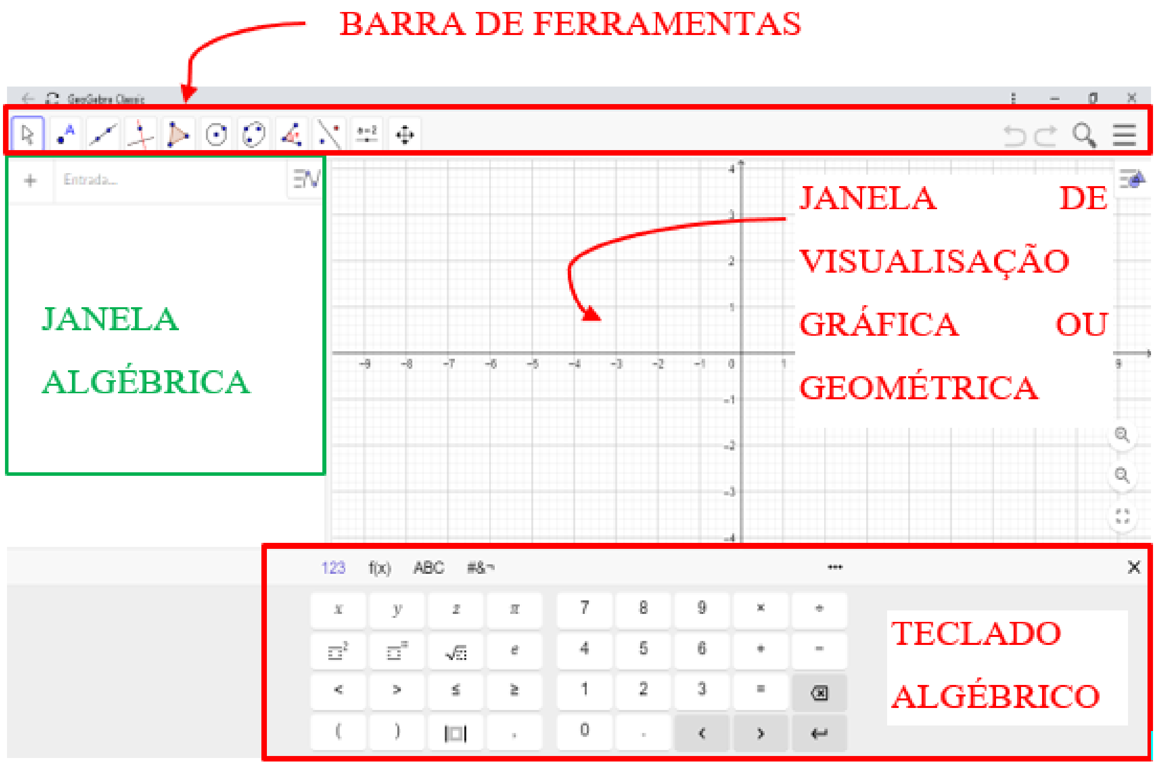
Figura 13 – Tela inical do GeoGebra



Fonte: Print da tela inicial do GeoGebra.

Nesta tela inicial, podemos considerar as seguintes divisões: Barra de ferramentas, janela de entradas algébricas, janela de visualização gráfica e um teclado algébrico.

Figura 14 – Tela inical do GeoGebra



Fonte: Print da tela inicial do GeoGebra.

4.1.1 Janela algébrica

A janela algébrica serve para inserir expressões algébricas, funções e fórmulas matemáticas, que tenha um retorno geométrico; onde consta "Entrada"é por lá que inserimos as expressões, para ter o retorno geométrico ao lado. Essa janela é essencial para o usuário, pois além de ter sua função de inserir fórmulas matemáticas, ela auxilia no entendimento da relação entre a álgebra e a geometria.

4.1.2 Janela de visualização gráfica/geométrica

A janela de visualização gráfica, como o próprio nome já diz, ela serve para o usuário ter a visão gráfica/geométrica. Essa janela serve tanto para obter o retorno gráfico do que é inserido na janela algébrica, como também podemos inserir objetos geométricos diretamente nessa janela e fazer manipulações conforme o usuário necessite; e ainda é obtido o inverso da janela algébrica, ao inserir objetos geométricos diretamente nessa janela, teremos o retorno algébrico na janela algébrica.

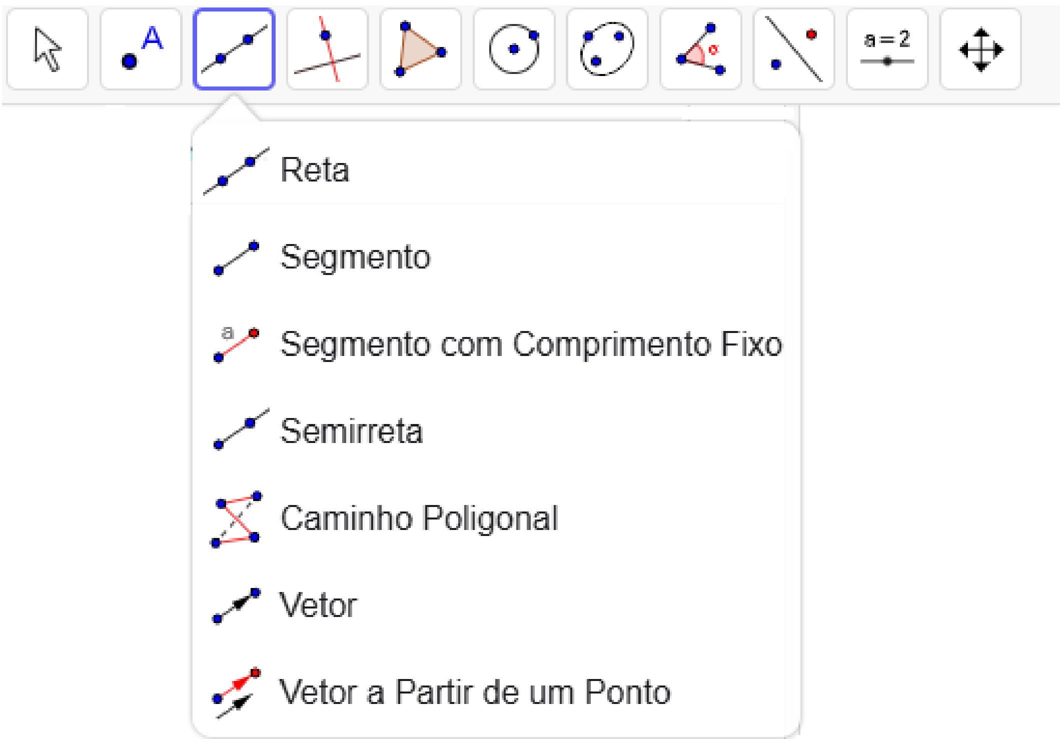
4.1.3 Teclado algébrico

O teclado algébrico disponibilizado no próprio *software*, é utilizado para digitar expressões algébricas, funções ou alguma sentença matemática; nesse teclado o usuário encontrará diversos caracteres matemáticos, além de disponibilizar um atalho que contém diversas funções e sentenças matemáticas

4.1.4 Barra de ferramentas

A barra de ferramentas, ou barra de ferramentas geométricas, serve como um atalho de ferramentas geométricas que o usuário pode utilizar diretamente na janela gráfica; essa barra de ferramentas é composta de vários ícones (ferramentas geométricas), em que o usuário ao clicar em algum desses ícones ele irá dispor de várias outros ícones que trazem ferramentas geométricas semelhantes ao ícone escolhido.

Figura 15 – Barra de ferramentas do GeoGebra

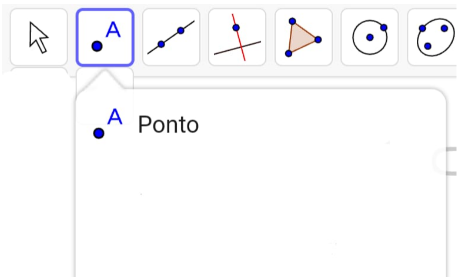


Fonte: Print da tela inicial do GeoGebra.

Segue alguns ícones (ferramentas geométricas) que teremos uma maior frequência de utilização no decorrer deste trabalho.

Ponto

Figura 16 – Barra de ferramentas do GeoGebra - Ponto

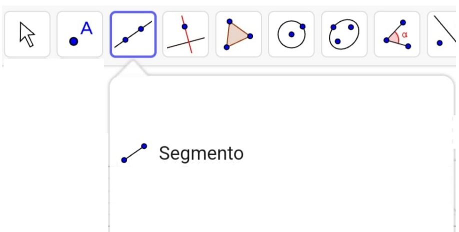


Fonte: Print da tela inicial do GeoGebra.

Esse ícone serve de atalho para inserimos pontos diretamente no gráfico, clicamos no ícone e selecionamos onde queremos inserir o ponto, diretamente no gráfico. Assim que inserimos o ponto sua representação algébrica é gerada automaticamente no campo algébrico.

Segmento

Figura 17 – Barra de ferramentas do GeoGebra - Segmento

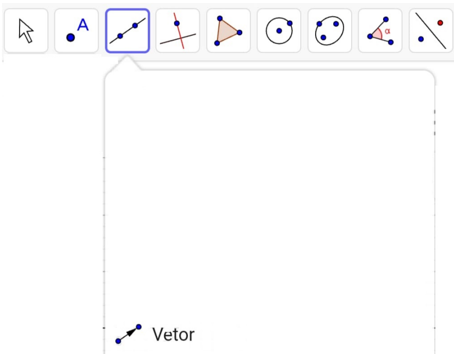


Fonte: Print da tela inicial do GeoGebra.

Esse ícone serve de atalho para inserimos segmentos diretamente no gráfico, clicamos no ícone e selecionamos onde inicia o segmento e em seguida onde queremos que o segmento termine, no gráfico. Assim que inserimos o segmento sua representação algébrica é gerada automaticamente no campo algébrico.

Vetor

Figura 18 – Barra de ferramentas do GeoGebra - Vetor

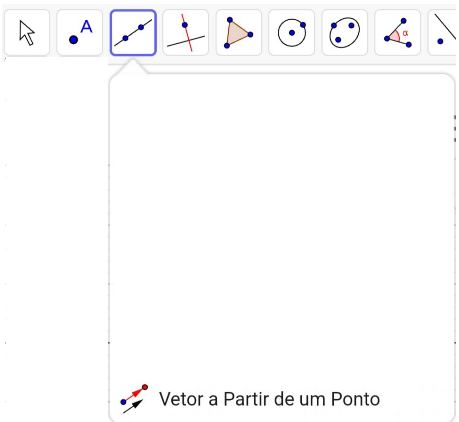


Fonte: Print da tela inicial do GeoGebra.

Esse ícone serve de atalho para inserimos vetores diretamente no gráfico, clicamos no ícone e selecionamos o ponto de origem do vetor e em seguida seu ponto de extemidade, diretamente no gráfico. Assim que inserimos o vetor sua representação algébrica é gerada automaticamente no campo algébrico.

Vetor a partir de um ponto

Figura 19 – Barra de ferramentas do GeoGebra - Vetor a Partir de um Ponto



Fonte: Print da tela inicial do GeoGebra.

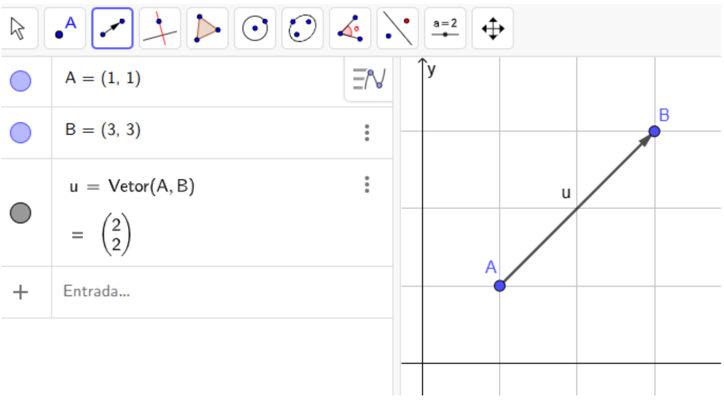
Esse ícone serve de atalho para inserimos vetores já gerados, apartir de pontos já gerados no gráfico, clicamos no ícone e selecionamos o ponto onde queremos que seja a origem do vetor e em seguida selecionamos o vetor que pretendemos gerar com origem no ponto escolhido. Assim que inserimos o vetor sua representação algébrica é gerada automaticamente no campo algébrico.

4.2 Visualização algébrica e geométrica de vetores pelo GeoGebra

Com o GeoGebra podemos “visualizar”, “criar”, “inserir” um vetor de diversas formas, podemos iniciar pela parte algébrica ou geométrica que consequentemente teremos o retorno das duas formas, algébrica e geométrica. Segue algumas formas de conseguir representar um vetor algébrico e geometricamente no GeoGebra.

Podemos ir à barra de ferramentas selecionar o ícone ”vetor”e inserir um vetor escolhendo seu ponto de origem e sua extremidade. Veja o exemplo abaixo, o vetor u com origem no ponto A = (1, 1) e extremidade no ponto B = (3,3).

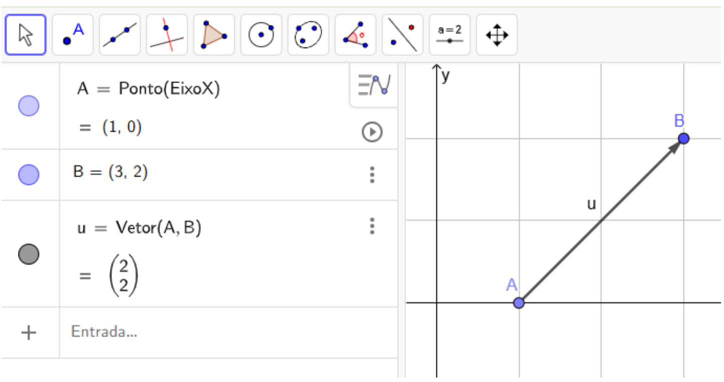
Figura 20 – Modo 1 de inserir vetor no GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Podemos ir à barra de ferramentas selecionar o ícone “ponto” inserir dois pontos A e B no plano, em que A seja a origem e B a extremidade do vetor; e em seguida escrever na janela algébrica: vetor = (A, B). Segue o exemplo, com A = (0, 1), B = (3, 2) e vetor = (A, B); resultado: u = vetor (A, B)

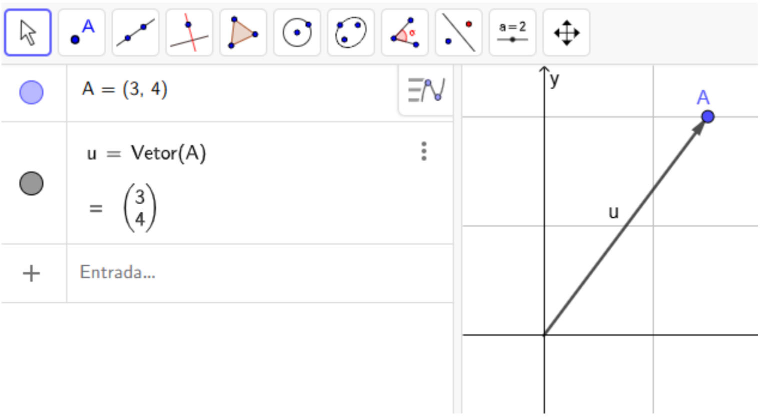
Figura 21 – Modo 2 de inserir vetor no GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Podemos ir à barra de ferramentas selecionar o ícone "ponto" inserir um ponto A no plano, em que esse ponto A suas coordenadas serão as coordenadas do vetor; e em seguida escrever na janela algébrica: vetor = (A) ou u = (A). Exemplo: Insira o ponto A = (3, 4) e em seguida escreva "vetor = (A)".

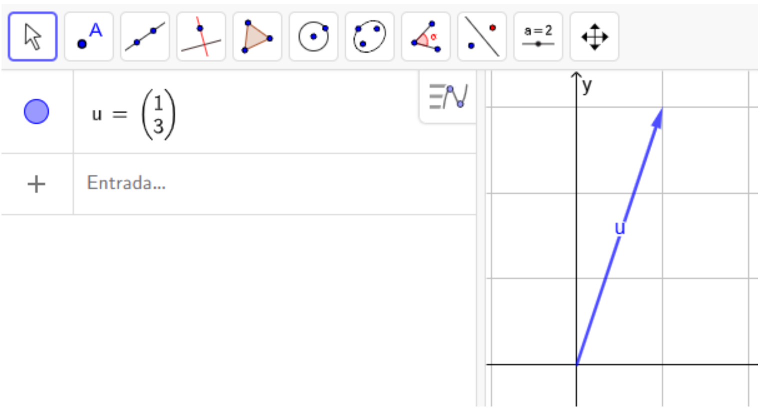
Figura 22 – Modo 3 de inserir vetor no GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Podemos escrever diretamente na janela algébrica: vetor = $((x_1, y_1))$ ou u = (x_2, y_2), em que x_1, y_1 e x_2, y_2 são as coordenadas dos vetores, respectivamente. Exemplo: Escreva na janela algébrica " u = (1, 3)".

Figura 23 – Modo 4 de inserir vetor no GeoGebra



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

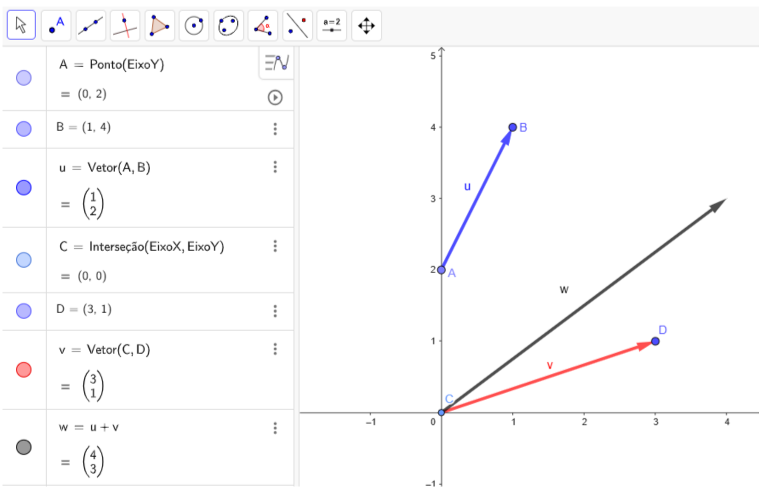
As duas últimas formas (modo 3 e 4) de inserir vetor no GeoGebra, apresentadas acima, é interessante notar que nesses modos teremos a representação geométrica dos vetores tendo como origem o ponto (0, 0) do plano cartesiano; diferente dos dois primeiros modos, em que suas origens são determinadas conforme é escolhido o ponto **A**.

4.3 Soma de vetores utilizando o GeoGebra

Uma forma bem prática de fazer a soma de vetores com o GeoGebra, é o usuário utilizar o ícone "vetor" e traçar dois vetores u e v, e em seguida digitar na janela algébrica um vetor w = u + v; em que o vetor w será o vetor resultante da soma de u com v.

Como dito acima, utilizamos o ícone "vetor" e traçamos os vetores u e v, com as seguintes coordenadas: u = (1 , 2) e v = (3, 1). Em seguida digitamos na janela algébrica w = u + v, e tivemos o resultado da soma dos vetores u com v, conforme mostra a figura 24, obtivemos tanto o resultado algébrico na janela algébrica como o resultado geométrico na janela geométrica.

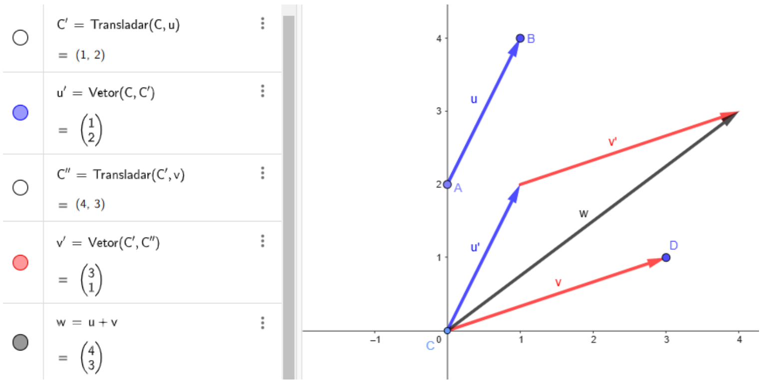
Figura 24 – Soma de vetores



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Utilizando o GeoGebra podemos dar diversos exemplos de como ocorre a soma de vetores, principalmente mostrar formas dinâmicas de "enxergar" como ocorre a soma de vetores geometricamente. Segue dois exemplos, no primeiro traçaremos um representante do vetor u (u ') na origem (0, 0) e um representante do vetor v (v ') com origem na extremidade do representante de u (u ').

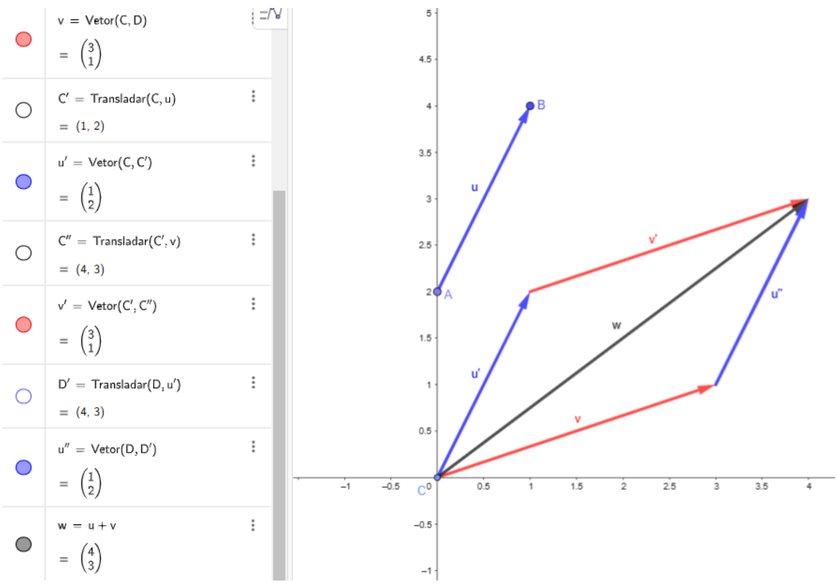
Figura 25 – Soma de vetores 1



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

O segundo exemplo faremos pela regra do paralelogramo, em que traçaremos um paralelogramo utilizando representantes de u (u') e v. Primeiro adicionamos um representante de u (u') na origem (0, 0), em seguida adicionamos um representante de v (v ') com origem na extremidade de u'; agora adicionamos um novo representante de u (u") com origem na extremidade de v, de acorco com a figura 26:

Figura 26 – Soma de vetores 2



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Teremos então, um paralelogramo traçado com os vetores u e v e seus representantes, e a soma dos vetores u com v será a diagonal principal desse paralelogramo, conforme mostra a figura 26.

4.3.1 Propriedades da soma de vetores utilizando o GeoGebra

Veremos a seguir as propriedades do produto de escalar por vetor, através do GeoGebra. Não será feito as demonstrações das propriedades, como foi feito no capitulo 3 deste trabalho, no entanto, com o GeoGebra conseguimos visualizar essas propriedades com mais facilidade, o conceito algébrico e principalmente o geométrico.

Vale ressaltar que com o GeoGebra não teremos como fazer as contas de forma genéricas, mas como essas propriedades já foram demonstradas acima, utilizaremos números que melhor convém para o desenvolver do trabalho.

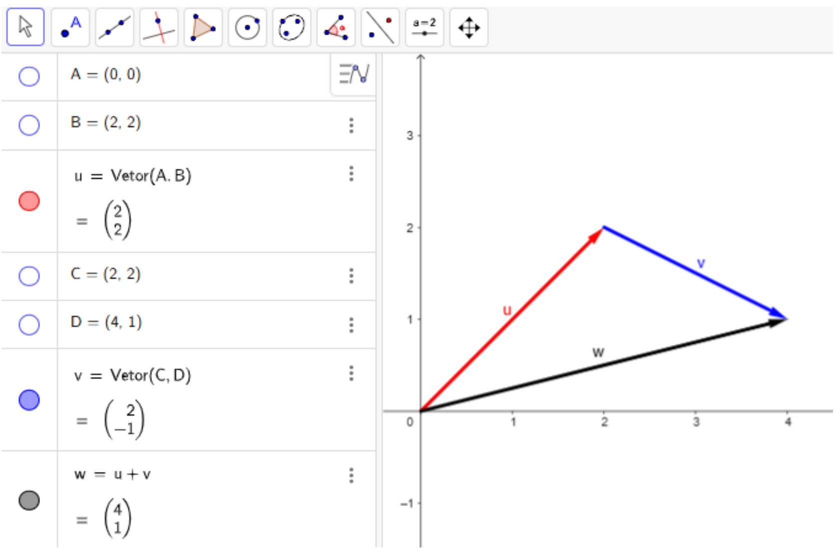
Propriedades:

Comutatividade: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
Associatividade: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
Elemento neutro aditivo: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
Inverso aditivo: $\vec{u}$ + (-$\vec{u}$) = $\vec{0}$

Comutatividade

Utilizaremos dois vetores u e v, em que u = (2, 2) e v = (2, -1). Primeiro faremos a soma de u com v (w = u + v).

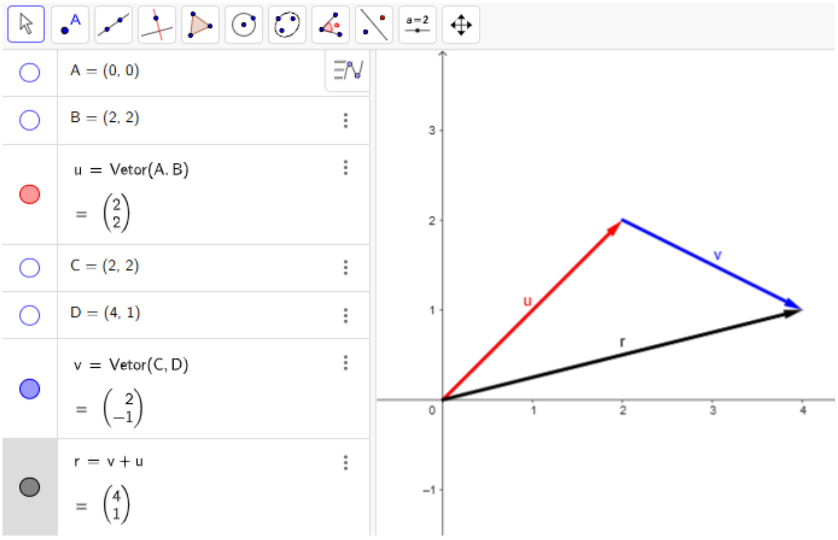
Figura 27 – Comutatividade da soma de vetores



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Agora faremos a volta, somaremos o vetor v com o vetor u (r = v + u).

Figura 28 – Comutatividade da soma de vetores



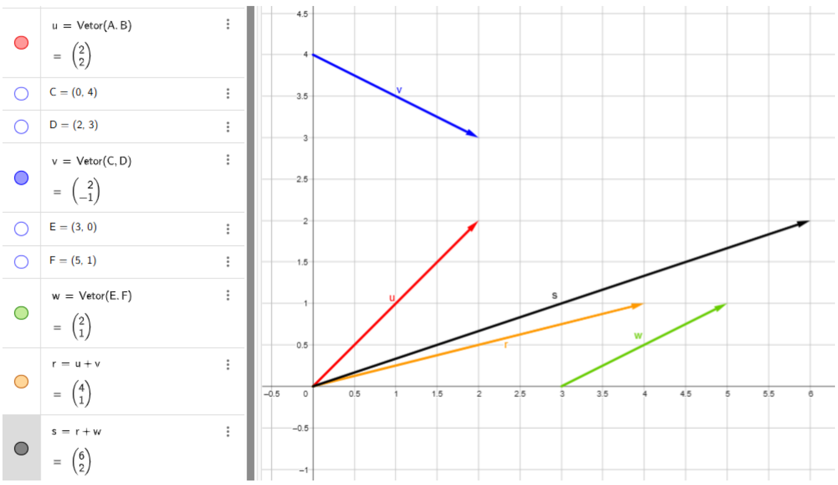
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Conforme consta nas figuras 27 e 28, os vetores resultantes w e r são iguais, confirmando assim a comutatividade da soma.

Associatividade

Utilizaremos três vetores u, v e w, em que u = (2, 2), v = (2, -1) e w = (2, 1). Primeiro faremos a soma do vetor u com o vetor v (r = u + v), em seguida faremos a soma com o vetor w (s = r + w).

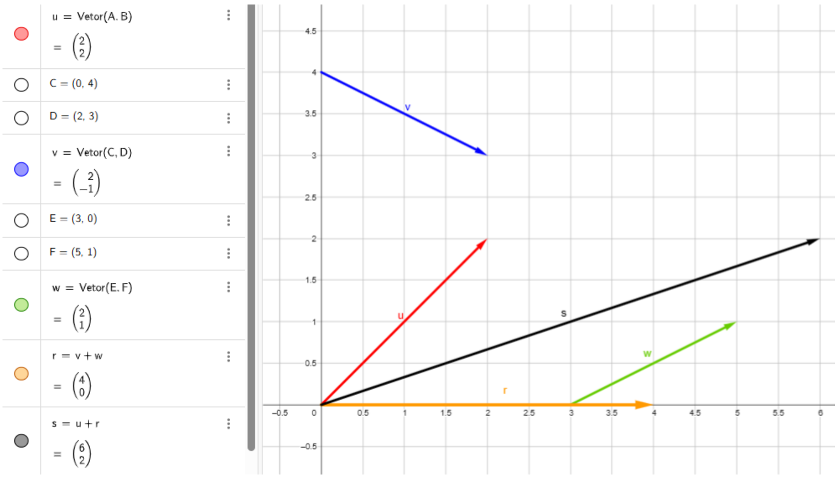
Figura 29 – Associatividade da soma de vetores



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Agora faremos a volta, somaremos o vetor v com o vetor w (r = v + w), em seguida faremos a soma com o vetor u (s = u + r).

Figura 30 – Associatividade da soma de vetores



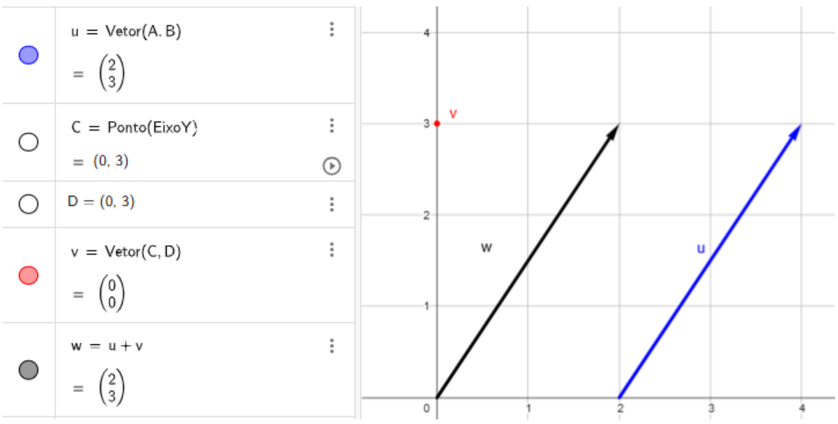
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Conforme consta nas figuras 29 e 30, os vetores resultantes s são iguais, confirmando assim a associatividade da soma.

Elemento neutro aditivo

Utilizando um vetor u = (2, 3) e o vetor v = (0, 0). Fazendo a soma dos vetores u com v (w = u + v), teremos:

Figura 31 – Elemento neutro aditivo



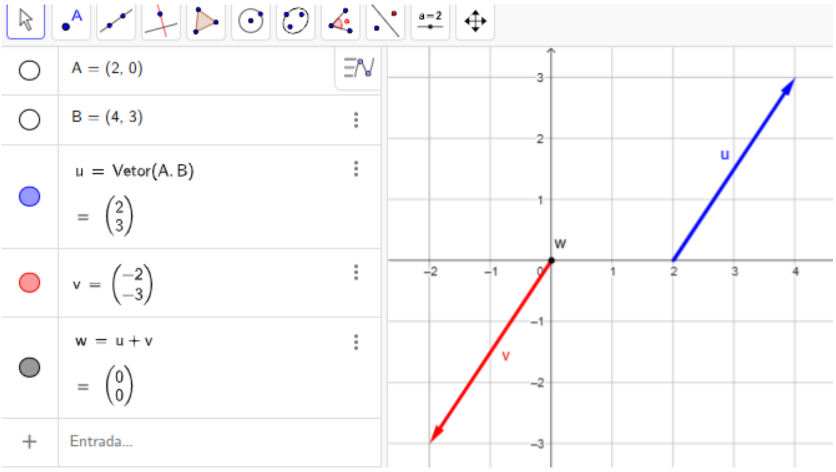
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Conforme ilustrado na figura acima, o vetor resultante w, da soma de u com v, é igual ao vetor u. Sendo assim o vetor v será o elemento neutro aditivo.

Inverso aditivo

Utilizando os vetores u = (2, 3) e v = (-2, -3), fazendo a soma dos vetores u com v (w = u + v), teremos:

Figura 32 – Inverso aditivo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

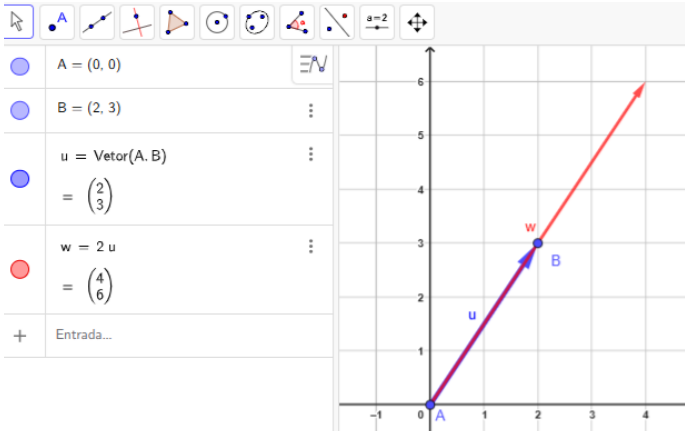
De acordo com a figura 32, o vetor resultante w, da soma dos vetores u com v, será o elemento neutro aditivo. Pois o vetor v é o inverso aditivo do vetor u.

4.4 Produto de escalar por vetor utilizando o GeoGebra

Para fazer o produto de um escalar por um vetor, no GeoGebra, basta que utilizamos o ícone "vetor"para traçar o vetor pretendido e em seguida digitar na janela algébrica o escalar pretendido para multiplicar pelo vetor, o símbolo de multiplicação " * "e o vetor. Exemplo: w = α * u, em que u é o vetor inserido utilizando o ícone "vetor", α é o escalar que queremos multiplicar pelo vetor u, e w será o vetor resultante da multiplicação de α pelo vetor u.

Observe o seguinte exemplo: Primeiro utilizaremos o ícone "vetor" e inserimos um vetor u = (2, 3), em seguida escrevemos "w = 2 * u" na janela algébrica, então teremos o vetor w sendo o resultado do produto do escalar 2 pelo vetor u. Conforme ilustra a figura 33.

Figura 33 – Produto de escalar por vetor



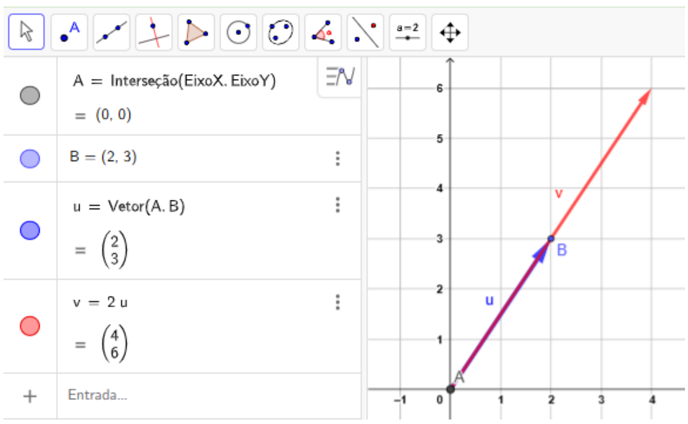
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Neste exemplo, podemos observar que na janela geométrica que o vetor w tem duas vezes o comprimento do vetor u, que é o resultado de multiplicar o vetor u pelo escalar 2, caso fosse um escalar 3 seria três vezes o comprimento do vetor u e assim sucessivamente. E na janela algébrica as coordenadas do vetor w será o produto do escalar 2 pelas coordenadas do vetor u, ou seja,

$$\text{w} = 2 \cdot u$$
$$\text{w} = 2 \cdot (2, 3)$$
$$\text{w} = (2 \cdot 2, 2 \cdot 3)$$
$$\text{w} = (4,\ 6)$$

Outra forma de fazer o produto de um escalar 2 por um vetor u = (2, 3), será, primeiro inserimos o vetor pretendido e em seguida digitamos na janela algébrica "2 * u" que teremos como resultado um vetor v $= 2 \cdot u$ ou 2u.

Figura 34 – Produto de escalar por vetor 1



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

4.4.1 Propriedades do produto de escalar por vetor utilizando o GeoGebra

Veremos a seguir as propriedades do produto de escalar por vetor, através do GeoGebra. Não será feito as demonstrações das propriedades, como foi feito no capitulo 3 deste trabalho, no entanto, com o GeoGebra conseguimos visualizar essas propriedades com mais facilidade, o conceito algébrico e principalmente o geométrico.

Vale ressaltar que com o GeoGebra não teremos como fazer as contas de forma genéricas, mas como essas propriedades já foram demonstradas acima, utilizaremos números que melhor convém para o desenvolver do trabalho.

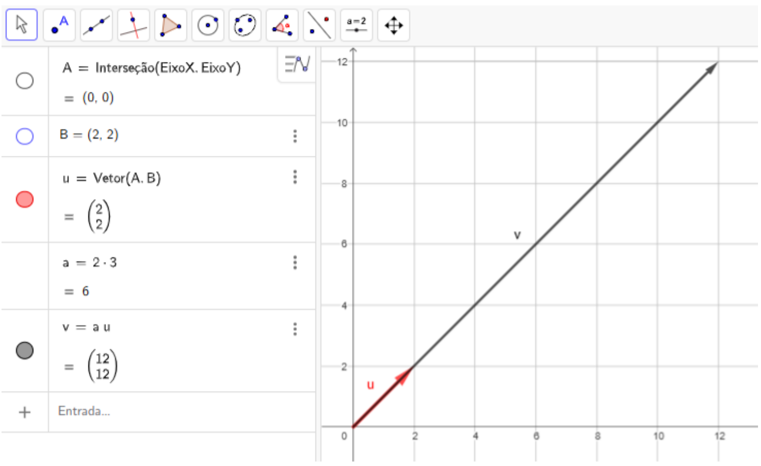
Propriedades:

(I) Associatividade: $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u}$
(II) Distributividade do produto pela soma de vetores: $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$
(III) Distributividade do produto pela soma de escalares: $\vec{u} \cdot (\alpha + \beta) = \vec{u} \cdot \alpha + \vec{u} \cdot \beta$
(IV) Elemento neutro multiplicativo: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Associatividade

Utilizaremos o vetor u = (2, 2) e os escalares 2 e 3. Primeiro faremos o produto dos escalares 2 e 3 ($a = 2 \cdot 3$), em seguida o produto pelo vetor u ($a \cdot u$). Observe a figura 35.

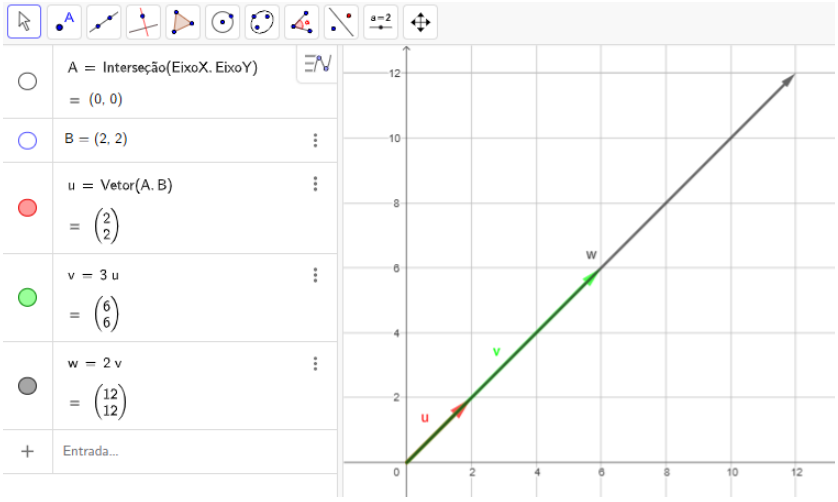
Figura 35 – Associatividade do produto de escalar por vetor



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Agora faremos a volta, faremos o produto do escalar 3 pelo vetor u ($v = 3 \cdot u$) e em seguida o produto pelo escalar 2 ($w = 2 \cdot v$), conforme mostra a figura 36.

Figura 36 – Associatividade do produto de escalar por vetor



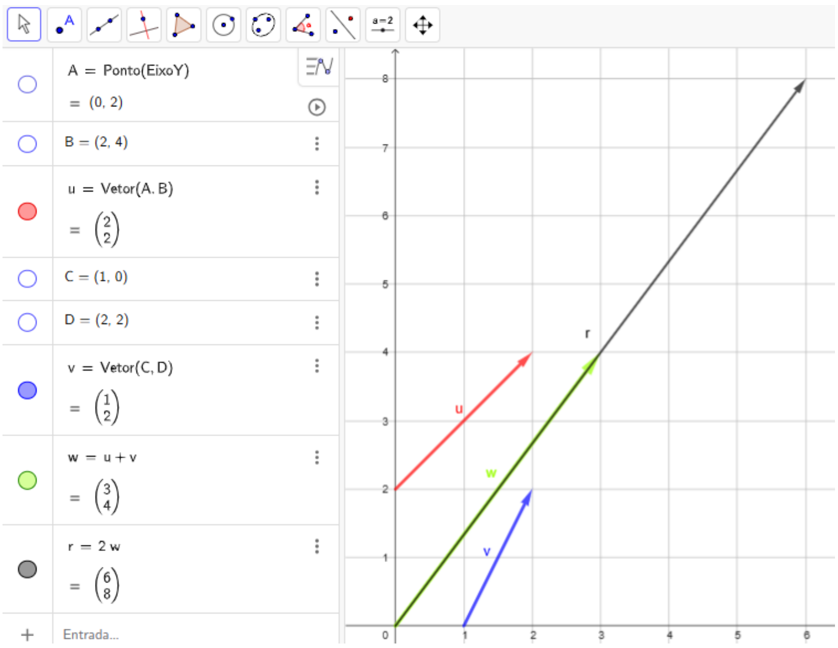
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Conforme exposto acima teremos o mesmo resultado em ambos os casos, validando assim a associatividade do produto de escalar por vetor.

Distributividade do produto pela soma de vetores

Utilizaremos os vetores u = (2, 2) e v = (1, 2), e o escalar 2. Primeiro, faremos a soma dos vetores u e v (w = u + v), em seguida o produto pelo escalar 2 (r = $2 \cdot w$).

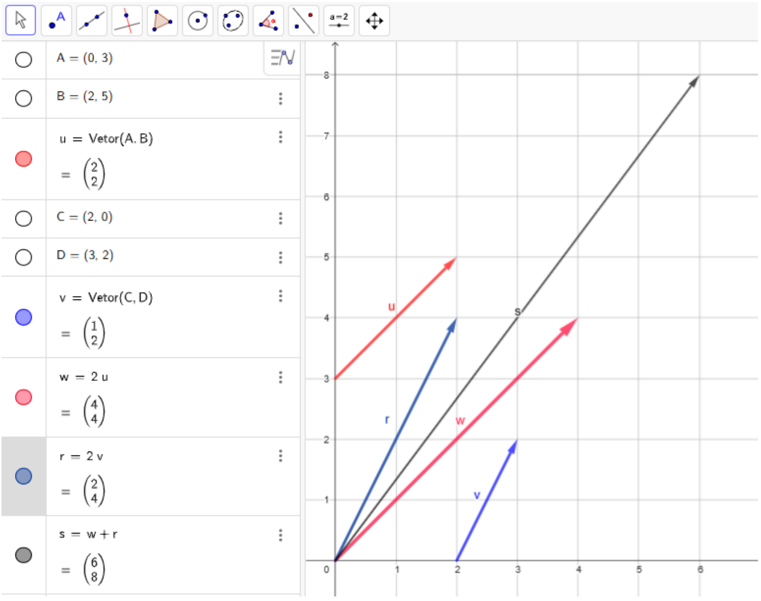
Figura 37 – Distributividade do produto de escalar pela soma de vetores



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Fazendo a volta, iniciaremos pelos produtos do escalar 2 pelos vetores u e v (w = $2 \cdot u$; r = $2 \cdot v$), em seguida faremos a soma desses resultados (s = w + r). Conforme ilustra a figura 38

Figura 38 – Distributividade do produto de escalar pela soma de vetores



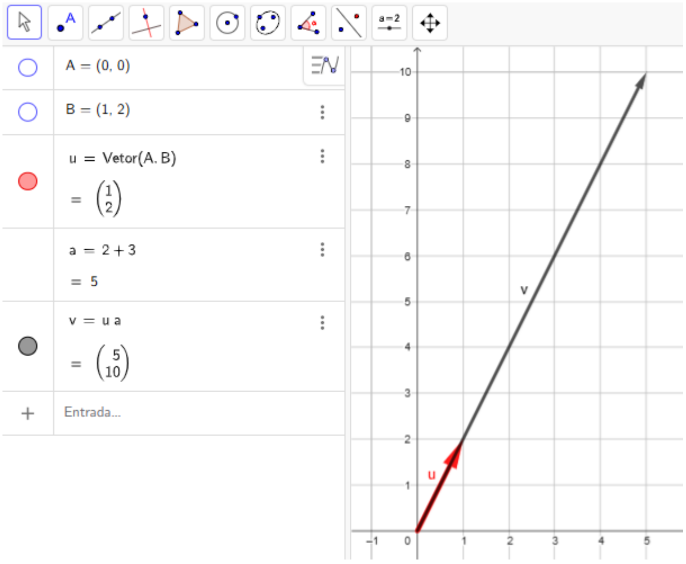
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Conforme as figuras 37 e 38, teremos os mesmo resultado pelos dois caminhos, sendo assim, a distributividade de escalar pela soma de vetores é válida.

Distributividade do produto pela soma de escalares

Utilizaremos um vetor u = (1, 2) e os escalares 2 e 3. Primeiro faremos a soma dos escalares (a = (2 + 3)), em seguida o produto do vetor u pela soma dos escalares (v = u + a). Conforme consta na figura 39.

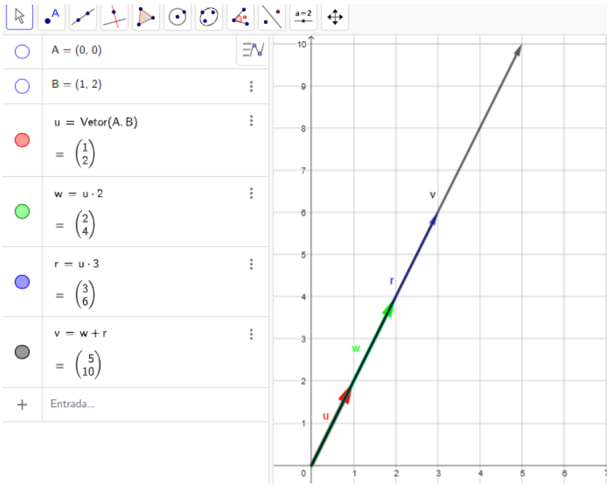
Figura 39 – Distributividade do produto de vetor pela soma de escalares



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Fazendo o caminho contrário, primeiro faremos o produto do vetor u pelo escalar 2 ($w = u \cdot 2$) e o produto do vetor u pelo escalar 3 ($r = u \cdot 3$), em seguida faremos a soma dos resultados (v = w + r).

Figura 40 – Distributividade do produto de vetor pela soma de escalares



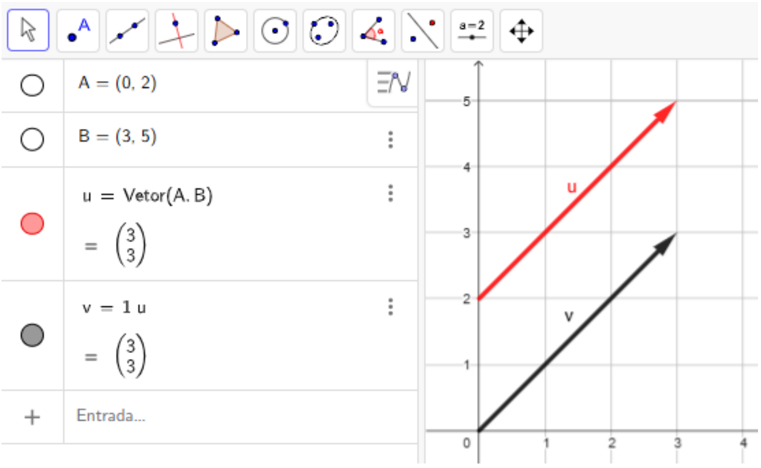
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Conforme as figuras 39 e 40, teremos os mesmo resultado pelos dois caminhos, sendo assim, a distributividade de vetor pela soma de escalares é válida.

Elemento neutro multiplicativo

Aqui utilizaremos um vetor u = (3, 3) e o escalar 1. Faremos o produto do escalar 1 pelo vetor u ($v = 1 \cdot u$).

Figura 41 – Elemento neutro multiplicativo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Observamos que o vetor v, resultante do produto 1 u, é equipolente ao vetor u (igual), ou seja, o escalar 1 será o elemento neutro multiplicativo pois o resultado do produto de um vetor por esse escalar resultará no mesmo vetor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente Trabalho de Conclusão de Curso busca demonstrar como o uso do *software* GeoGebra pode contribuir para o ensino e a aprendizagem de vetores no plano e suas operações de soma entre vetores e produto de vetores por escalar, visando uma abordagem mais dinâmica e ágil na transmissão deste conteúdo.

Neste sentido, apresentamos inicialmente um contexto histórico buscando ter um maior entendimento de como foi surgindo o conceito de vetores e sua ligação entre os conceitos algébrico e geométrico. Em seguida fazemos a introdução do assunto, abordando as operações, propriedades e suas demonstrações algébricas; e podemos notar que a aprendizagem de conceitos vetoriais, além de ser um conteúdo extenso, tem a sua natureza abstrata tornando assim algo extenso e complexo de aprender.

Com o apoio do GeoGebra, observamos que é possível tornar o estudo dos vetores mais visual, interativo e dinâmico. Seu ambiente gráfico favorece a manipulação direta dos vetores, permitindo que o professor ou os alunos experimentem, visualizem modifiquem, observem o comportamento dos vetores sob diferentes condições e compreendam conceitos como direção, sentido, módulo, soma de vetores, produto por escalar. Além de cooperar grandemente no entendimento geométrico das propriedades das operações de soma de vetores e produtor por escalar, facilitando a compreensão do comportamento geométrico de tais operações e propriedades.

Concluímos, portanto, que o uso do *software* GeoGebra, juntamente com uma metodologia bem planejada, pode enriquecer o ensino de vetores no espaço bidimensional, suas operações e propriedades, promovendo uma aprendizagem mais dinâmica, ágil, interativa e consequentemente mais eficaz.

5.1 Sugestões para pesquisas futuras

Assim como em qualquer ciência, na matemática uma pesquisa é apenas um pontapé inicial abrindo as portas para que novas pessoas possam dar continuidade ou até fazer outras pesquisas a partir do que foi produzido. Tendo em vista essa perspectiva, sugerimos aos leitores e interessados pela área de conhecimento do presente trabalho, que possam trabalhar nessa mesma perspectiva, avançando ainda mais, para vetores no espaço tridimensional podendo abordar além das operações já apresentadas neste trabalho, outras operações como, por exemplo, o produto vetorial; explorando o potencial que tem o GeoGebra, um *software* rico em ferramentas que contribuem significativamente para o ensino da matemática. Portanto esse *software* pode facilitar ainda mais o ensino do assunto de vetores, tanto no espaço bidimensional como foi apresentado neste trabalho, como também no espaço tridimensional tornando-o seu ensino mais dinâmico, interativo e consequentemente mais produtivo.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl Bejamin. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo; Edgard Blucher, 1974.

DELGADO, Jorge J. FRENSEL, Kátia Rosenvald. ESPIRITO SANTO, Nedir do. **Geometria Analítica I**. 3 ed. Rio de Janeiro; Cederj, 2010.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5 ed. São Paulo; Unicamp, 2011.

GEOGEBRA. *GeoGebra:* uma plataforma de matemática dinâmica. Disponível em: `https//www.gegebra.org/`.

MARTINS, Rosival Lacerda. **O ensino de vetores e a interdisciplinaridade**. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015. Disponivél em: `https://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/tede/2382/2/PDF%20-%20Rosival%20Lacerda%20Martins.pdf.` Acesso em: 29 de mar. 2025.

MATHSHISTORY. Disponível em: `https//mathshistory.st-andrews.ac.uk/`. Acesso em: 06 de mai. 2025.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. 2 ed. São Paulo; Pearson 2014.