UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

SAMUEL DE ARAÚJO SANTOS

ALGUMAS APLICAÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA MATEMÁTICA E EM OUTRAS ÁREAS

CAMPINA GRANDE
2025

SAMUEL DE ARAÚJO SANTOS

ALGUMAS APLICAÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA MATEMÁTICA E EM ÁREAS AFINS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Maxwell Aires da Silva

CAMPINA GRANDE
2025

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S237a Santos, Samuel de Araujo.

Algumas aplicações do cálculo diferencial e integral na matemática e em outras áreas [manuscrito] / Samuel de Araujo Santos. - 2025.

26 p.

Digitado. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2025. "Orientação : Prof. Dr. Maxwell Aires da Silva, Coordenação do Curso de Matemática - CCT. "

1. Matemática. 2. Cálculo diferencial. 3. Cálculo integral . 4. Aplicações matemáticas . I. Título

21. ed. CDD 515

Elaborada por Bruno R. F. de Lima - CRB - 15/1021 BC/UEPB

SAMUEL DE ARAUJO SANTOS

ALGUMAS APLICAÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA MÁTEMÁTICA E EM OUTRAS ÁREAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática

Aprovada em: 04/06/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **Maria Isabelle Silva** (***.746.314-**), em **17/06/2025 14:27:42** com chave **60217f6c4ba011f0be9c2618257239a1**.
- **Maxwell Aires da Silva** (***.574.364-**), em **17/06/2025 08:45:01** com chave **807f84284b7011f094291a7cc27eb1f9**.
- **Luciana Roze de Freitas** (***.867.174-**), em **17/06/2025 10:54:52** com chave **a4784ee84b8211f0b4fb06adb0a3afce**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QrCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.
Tipo de Documento: Folha de Aprovação do Projeto Final
Data da Emissão: 17/06/2025
Código de Autenticação: f2ec35

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, primeiramente pela vida eterna que Ele me concedeu através de Cristo, e por Ele também me permitir chegar até aqui.

Agradeço a minha família, por ter estado sempre ao meu lado.

Agradeço aos meus colegas da universidade, por todo esse tempo de caminhada.

Agradeço ao meu orientador da banca, o professor Maxwell, que me ofereceu toda a ajuda durante a elaboração do TCC.

RESUMO

Este TCC aborda algumas aplicações do Cálculo na Matemática e em áreas afins, onde se torna possível apresentar, de forma simples e direta, as contribuições dessas aplicações no dia a dia. A matemática vai além da abstração, e, por isso, este trabalho analisa possibilidades de aplicações que o Cálculo possui na ciência como um todo. Este estudo é feito a partir de conceitos básicos do Cálculo e segue para a explicação das suas aplicações, utilizando definições, teoremas e exemplos. Ao final do trabalho, percebe-se que o estudo do Cálculo não se restringe apenas à parte teórica, sendo possível reconhecer a utilidade desse ramo na ciência como um todo e também no cotidiano.

Palavras-chave: cálculo diferencial e integral; aplicações; ciências; matemática.

ABSTRACT

This TCC addresses some applications of Calculus in Mathematics and related areas, where it becomes possible to present, in a simple and direct way, the contributions of these applications in everyday life. Mathematics goes beyond abstraction, and, therefore, this work analyzes the possibilities of applications that Calculus has in science as a whole. This study is based on basic concepts of Calculus and goes on to explain its applications, using definitions, theorems and examples. At the end of the work, it is clear that the study of Calculus is not restricted to the theoretical part only, being possible to recognize the usefulness of this branch in science as a whole and also in everyday life.

Keywords: differential and integral calculus. applications; sciences; mathematics.

SUMÁRIO

Página

1 INTRODUÇÃO 7
1.1 Problema da Pesquisa 7
1.2 Objetivos 8
1.3 Organização do Trabalho 8

2 CONCEITOS PRELIMINARES 9
2.1 Limites e Continuidade 9
2.2 Derivadas 10
2.3 Integral 11
2.4 Sequências e Séries 12
2.5 Equações Diferenciais Lineares 12

3 APLICAÇÕES 13
3.1 Aplicações na Matemática 13
3.1.1 Lema de Rolle 13
3.1.2 Teorema do Valor Médio de Lagrange 14
3.1.3 Teorema do Valor Médio de Cauchy 16
3.1.4 Série de Maclaurin 17
3.2 Aplicações em outras áreas 18
3.2.1 Cinemática 18
3.2.2 Crescimento Populacional Malthusiano 20
3.2.3 Equações de Lotka-Volterra 22

4 CONCLUSÃO 25
4.1 Sugestões para pesquisas futuras 25

REFERÊNCIAS 26

1 INTRODUÇÃO

O presente Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) tem como intenção principal estudar algumas aplicações do Cálculo Diferencial e Integral. Reconhecendo a vastidão do tema, este estudo se propõe a abordar uma quantidade específica de aplicações relevantes, reconhecendo a dificuldade de abarcar todas as áreas de aplicação dessa importante ferramenta matemática em um único trabalho.

Existem diversas leis matemáticas que permeiam desde os movimentos grandiosos dos astros até os detalhes mais sutis da natureza. Entre os ramos da matemática que podem trabalhar uma diversidade de aplicações, é justamente o Cálculo Diferencial e Integral, que se destaca como uma ferramenta útil para a compreensão de diversos fenômenos. Jaime Alves (1) introduz a sua dissertação, dizendo que o Cálculo é uma das áreas mais importantes da matemática e que sua importância é devido ao estudo de inúmeras aplicações, tanto nas áreas puras como nas áreas aplicadas. Dessa forma, embora muitas vezes associado a conceitos abstratos e fórmulas complexas, o Cálculo se revela, na verdade, como um instrumento de grande utilidade prática, estendendo sua aplicação para além da própria matemática e encontrando terreno fértil em situações de outras ciências que, à primeira vista, podem parecer distantes do universo matemático.

Vale considerar também alguns problemas sobre esse ramo, quando Roberto Seidi (3) afirma sobre o Cálculo Infinitesimal nas universidades que "mesmo sendo de grande importância para várias áreas, há muito tempo, várias pesquisas tem apontado para o alto nível de reprovação e de desistência nesta disciplina". Diante desse cenário, este projeto busca estudar as aplicações do Cálculo Diferencial e Integral, com o objetivo de aprofundar o conhecimento nessa área da matemática e também demonstrar sua relevância para outras áreas do conhecimento.

1.1 Problema da Pesquisa

Como os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral podem ser aplicados na matemática e nas áreas afins? Essa é a pergunta central que norteia este TCC, buscando ir além da abstração matemática e revelar as aplicações práticas e tangíveis do Cálculo nas diversas ciências.

Outros problemas que podem ser abordados ao longo dessa pesquisa seriam: Como esse ramo da Matemática pode solucionar problemas matemáticos? Como o Cálculo pode otimizar diversos aspectos da vida cotidiana? Ao longo dessa jornada investigativa, exploraremos como essas ferramentas matemáticas se traduzem em soluções inovadoras para uma diversidade de desafios.

1.2 Objetivos

- **Objetivo Geral:** Estudar algumas aplicações do Cálculo Diferencial e Integral na matemática e áreas afins.
- **Objetivo Específico:** Relatar sobre algumas aplicações do Cálculo em outras ciências ou áreas de estudo;
- **Objetivo Específico:** Abordar brevemente as possíveis contribuições que as aplicações do Cálculo tem para a Matemática e para outras Ciências.

1.3 Organização do Trabalho

No desenvolvimento desse TCC, é apresentado três capítulos, onde será abordado desde alguns conceitos básicos do cálculo até aplicações que são trabalhadas em áreas além da matemática.

No Capítulo 2, aborda-se sobre alguns conceitos que são muito utilizados no Cálculo, de forma que, sem a compreensão da maioria desses conceitos, seria praticamente impossível estudar as diversas aplicações do Cálculo. Os conceitos abordados são Limites, Continuidade, Derivação, Integração, Sequências e Séries.

No Capítulo 3, vemos algumas aplicações do Cálculo na própria área da matemática. Cada aplicação são, na verdade, afirmações que podem ser demonstradas a partir dos conceitos básicos do próprio Cálculo. As aplicações são Lema de Rolle, Teorema do Valor Médio de Lagrange, Teorema do Valor Médio de Cauchy e Série de Maclaurin.

No Capítulo 4, vemos algumas aplicações do Cálculo em áreas afins da Matemática. Nesse capítulo encontramos aplicações de como o Cálculo pode ser utilizado em ciências com a Física, Biologia e Geografia. As aplicações são Cinemática, Crescimento Populacional e Equações de Lotka-Volterra.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

O Cálculo, ramo importante da Matemática, trata sobre conceitos preliminares que contribuem para a compreensão de diversas aplicações em diversas áreas do conhecimento. A noção intuitiva de variação e a busca por quantificá-la conduzem naturalmente à ideia de limites, que fornecem a base rigorosa para a definição de continuidade de funções e, subsequentemente, a introdução de ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral. A compreensão destes conceitos iniciais, como funções, limites e continuidade, não apenas solidifica o aprendizado do Cálculo em si, mas também se demonstra crucial para modelar e analisar fenômenos na Física, Biologia, além da própria Matemática.

2.1 Limites e Continuidade

Definição 2.1. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função dada. Dizemos que f tem **limite** L quando x **tende** a x_0, e denotamos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se, para cada $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definição 2.2. *Seja $X \subset \mathbb{R}$, uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é **contínua em um ponto** $x_0 \in X$ se a seguinte condição for satisfeita: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in X, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

A função f é dita **contínua** se for contínua em todo $x_0 \in X$

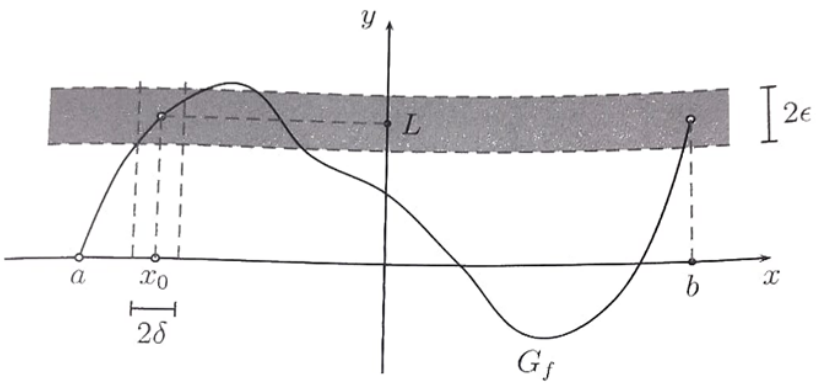
Tanto para limite como para continuidade, podemos ver o comportamento de determinada função a partir do gráfico da **Figura 1**.

Teorema 2.1. *Se $f(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo c, exceto possivelmente em $x = c$, e os limites de f e g existirem quando x se aproxima de c, então*

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x).$$

Demonstração: É possível encontrar uma prova em (4).

Figura 1 – Limite e Continuidade de uma função



Fonte: Muniz Neto (2015, p. 123)

2.2 Derivadas

Definição 2.3. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função dada. Fixado $x_0 \in I$, diremos que f é **derivável** em x_0 se existir o limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

*Nesse caso, tal limite será denominado a **derivada** de f em x_0, sendo denotado por $f'(x_0)$.*

Exemplo 2.1. *A partir dessa definição, podemos justificar as situações abaixo:*

- *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função constante, então f é derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(x_0) = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.*
- *Se $n \in \mathbb{Z}$ e $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é a função dada (para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) por $f(x) = x^n$, então f é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$ para todo $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Demonstração: A prova desses exemplos podem ser encontrados em (2).

Proposição 2.1. *Sejam f e g funções deriváveis em x. Então:*

- *A soma $f + g$ é derivável em x, e sua derivada é dada por:*

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

- *O produto $f \cdot g$ é derivável em x, e sua derivada é dada pela regra do produto:*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- *Se $g(x) \neq 0$, então o quociente $\frac{f}{g}$ é derivável em x, e sua derivada é dada pela regra do quociente:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Demonstração: As provas podem ser encontradas em (4).

Teorema 2.2 (Teorema de Taylor)**.** *Sejam I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^n em I. Para $x, x_0 \in I$ distintos, existe c entre x_0 e x tal que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Demonstração: A prova pode ser encontrada em (2).
Observação: Dizer que uma função é de classe C^n para qualquer $n \in \mathbb{N}$

2.3 Integral

Definição 2.4. *Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Dizemos que um número J é a **integral definida de f em** $[a, b]$, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, se para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para qualquer partição $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ de $[a, b]$ com $\Delta x_i < \delta$ e qualquer escolha de $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, temos*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - J\right| < \epsilon.$$

Teorema 2.3. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função integrável em todo intervalo $[a, b] \subset I$. Dado $c \in I$, seja $F : I \to \mathbb{R}$ a integral indefinida de f definida por:*

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

Se f é contínua em $x_0 \in I$, então F é derivável em x_0, e

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Demonstração: A prova pode ser encontrada em (2).

Teorema 2.4. *Uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável se existe o limite*

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

de suas somas de Riemann, para todo pontilhamento ξ de P. Além disso, nesse caso, tem-se

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

2.4 Sequências e Séries

Definição 2.5. *Sequência é uma função $f : A \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida sobre um subconjunto A dos números naturais que toma elementos no conjunto $\mathbb{R}$.*

Definição 2.6. *Dada uma sequência numérica (a_n), a série associada é definida como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, que representa a soma dos termos $a_1, a_2, \cdots, a_n$.*

2.5 Equações Diferenciais Lineares

Definição 2.7. *Uma Equação Diferencial Linear de Primeira Ordem é uma equação da forma*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

em que $P(x)$ e $Q(x)$ são funções contínuas de x.

Para uma visão mais geral sobre equações diferenciais, indicamos a leitura de (5). Podemos encontrar a solução desse tipo de equação a partir da fórmula

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)Q(x)dx,$$

em que $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$.

3 APLICAÇÕES

No presente Capítulo 3, dedicaremos nossa atenção à demonstração da aplicabilidade prática e intuitiva do Cálculo Diferencial em uma variedade de campos do saber. Partindo dos conceitos fundamentais já estabelecidos, exploraremos como as ferramentas do Cálculo se manifestam em contextos distintos, com foco principal em sua relevância intrínseca na própria Matemática (aprofundando a compreensão do Cálculo), em sua poderosa descrição do movimento na Física (através da Cinemática) e em sua capacidade de modelar fenômenos complexos por meio de Equações Diferenciais. Através de exemplos selecionados, buscaremos ilustrar a versatilidade e a importância do Cálculo Diferencial na resolução de problemas e na compreensão de sistemas em diversas áreas do conhecimento.

3.1 Aplicações na Matemática

3.1.1 Lema de Rolle

Nesta seção vamos estudar a primeira dentre as aplicações do Cálculo Diferencial, e esta é chamada de Lema de Rolle, em homenagem ao matemático francês **Michel Rolle** (1652 - 1719). Este resultado é um caso particular do chamado Teorema do Valor Médio de Lagrange (Que será estudado na próxima seção), o qual nos diz o seguinte:

Lema 3.1 (Rolle)**.** *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$ *e derivável em* (a, b)*. Se* $f(a) = f(b) = 0$*, então existe* $c \in (a, b)$*, tal que* $f'(c) = 0$*.*

Demonstração: Se supormos que $f(c) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$ (com $f(c) \geq f(x), \forall x \in [a, b]$ seguimos o mesmo raciocínio), então

$$f(x) - f(c) \geq 0. \tag{3.1}$$

Com $x \in (c, b)$, temos

$$x > c \Rightarrow x - c > 0. \tag{3.2}$$

Logo, de (3.1) e (3.2) temos

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \tag{3.3}$$

em que $f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$, pois f é derivável e, portanto, $f'(c) \geq 0$.
Agora, com $x \in (a, c)$, temos

$$x < c \Rightarrow x - c < 0. \tag{3.4}$$

Logo, de (3.1) e (3.4) temos

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0, \tag{3.5}$$

em que $f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, pois f é derivável e portanto $f'(c) \leq 0$. Logo, com $f'(c) \geq 0$ e $f'(c) \leq 0$, existe $c \in (a,b)$, tal que $f'(c) = 0$.

Exemplo 3.1. *Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, mostre que a equação $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c) = 0$ tem uma raiz entre 0 e 1.*

Solução: Vamos tomar a seguinte função $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$. Vamos calcular a derivada dela:

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c). \tag{3.6}$$

É possível após os cálculos, ver que $f(0) = f(1) = 0$ e que $f(x)$ é contínua em $[0,1]$ e derivável em $(0,1)$.

Logo, pelo Teorema de Rolle, existe $x_0 \in (0,1)$, tal que

$$f'(x_0) = 4ax_0^3 + 3bx_0^2 + 2cx_0 - (a+b+c) = 0. \tag{3.7}$$

Isso é o mesmo que dizer que a equação $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c) = 0$ tem uma raiz entre 0 e 1.

3.1.2 Teorema do Valor Médio de Lagrange

Nessa seção, vamos trabalhar com o Teorema de Valor Médio de Lagrange, homenageando o matemático italiano **Joseph Louis Lagrange** (1736 - 1813), cuja demonstração utiliza o Lema de Rolle.

Teorema 3.1. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Demonstração: Vamos tomar a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(x) - \left(\left(\frac{b-x}{b-a}\right) f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right) f(b)\right). \tag{3.8}$$

Logo a sua derivada é

$$g'(x) = f'(x) - \left(\left(\frac{-f(a)}{b-a}\right) + \left(\frac{f(b)}{b-a}\right)\right). \tag{3.9}$$

É possível após os cálculos, ver que $g(a) = g(b) = 0$ e que $g(x)$ é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b).

Logo, pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$, tal que $g'(c) = 0$.
Então,

$$0 = f'(c) - \left(\left(\frac{-f(a)}{b-a}\right) + \left(\frac{f(b)}{b-a}\right)\right); \tag{3.10}$$

$$0 = f'(c) - \left(\frac{f(b) - f(c)}{b-a}\right); \tag{3.11}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c). \tag{3.12}$$

Portanto, existe $c \in (a,b)$, tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exemplo 3.2. *Suponha que f e g sejam contínuas em $[a,b]$ e deriváveis em (a,b). Suponha também que $f(a) = g(a)$ e $f'(x) < g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$. Prove que $f(b) < g(b)$.*

Solução: Vamos tomar a seguinte função:

$$h = f - g. \tag{3.13}$$

Pelas propriedades das funções contínuas temos que se f e g são contínuas em $[a,b]$ e deriváveis em (a,b), então $h = f - g$ é também contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b).

Desse modo, pelo Teorema do Valor Médio existe um $c \in (a,b)$, tal que

$$h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b-a}. \tag{3.14}$$

Note que $h'(x) = f'(x) - g'(x)$, sendo que $f'(x) < g'(x)$, o que implica dizer que $h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0$.

Portanto,

$$h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b-a} < 0. \tag{3.15}$$

Como $b - a > 0$, então $h(b) - h(a) < 0$. Mas se $h = f - g$, então

$$h(b) - h(a) = (f(b) - g(b)) - (f(a) - g(a)) < 0. \tag{3.16}$$

Como $f(a) = g(a)$, então

$$f(a) - g(a) = f(a) - f(a) = 0. \tag{3.17}$$

Logo,

$$h(b) - h(a) = f(b) - g(b) - 0 = f(b) - g(b) < 0. \tag{3.18}$$

Note que $f(b) - g(b) < 0$ implica dizer que $f(b) < g(b)$.

Portanto, vimos que se $f(a) = g(a)$ e $f'(x) < g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$, em que f e g são contínuas em $[a,b]$ e deriváveis em (a,b), então de fato, $f(b) < g(b)$.

3.1.3 Teorema do Valor Médio de Cauchy

Vamos agora estudar o Teorema do Valor Médio de Cauchy, cujo nome homenageia o matemático francês **Augustin-Louis Cauchy** (1789 — 1857). A demonstração vai ser feita a partir do TVM de Lagrange.

Teorema 3.2. *Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas em $[a,b]$ e deriváveis em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.*

Demonstração: Vamos tomar a função

$$h : [a,b] \to \mathbb{R}, \tag{3.19}$$

dada por

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x). \tag{3.20}$$

A sua derivada é

$$h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x). \tag{3.21}$$

Além disso, podemos determinar $h(a)$:

$$h(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a), \tag{3.22}$$

$$h(a) = (f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a)) - (g(b) \cdot f(a) - g(a) \cdot f(a)), \tag{3.23}$$

$$h(a) = f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a) - g(b) \cdot f(a) + g(a) \cdot f(a), \tag{3.24}$$

$$h(a) = f(b) \cdot g(a) - g(b) \cdot f(a), \tag{3.25}$$

$$h(a) = f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b). \tag{3.26}$$

E também podemos determinar $h(b)$:

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b), \tag{3.27}$$

$$h(b) = (f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(b)) - (g(b) \cdot f(b) - g(a) \cdot f(b)), \tag{3.28}$$

$$h(b) = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(b) - g(b) \cdot f(b) + g(a) \cdot f(b), \tag{3.29}$$

$$h(b) = -f(a) \cdot g(b) + g(a) \cdot f(b), \tag{3.30}$$

$$h(b) = f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b). \tag{3.31}$$

Observa-se que $h(a) = h(b) = f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b)$ e que $h(x)$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Logo, pelo TVM de Lagrange, existe $c \in (a, b)$, tal que $h'(c) = \frac{h(b)-h(a)}{b-a}$, sendo que se $h(a) = h(b)$, então $h'(c) = \frac{0}{b-a} = 0$.

Logo, de (3.21), temos

$$h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c), \tag{3.32}$$

$$0 = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c), \tag{3.33}$$

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c), \tag{3.34}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{f'(c)} = \frac{g(b) - g(a)}{g'(c)}. \tag{3.35}$$

Portanto, então existe $c \in (a, b)$, tal que $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

3.1.4 Série de Maclaurin

Teorema 3.3. *Se f puder ser derivada n vezes em $x_0 = 0$, então o $n-$ésimo polinômio de Maclaurin de f é dado por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Demonstração: Sabemos que a série de potências pode ser definida como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots. \tag{3.36}$$

Quando $x = 0$, $f(x) = a_0$.

Além disso ao diferenciar a função dada, ela se torna

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots. \tag{3.37}$$

Ao substituir novamente $x = 0$, obtemos

$$f'(0) = a_1. \tag{3.38}$$

Então, diferenciando novamente, obtemos

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots. \tag{3.39}$$

Também substituindo $x = 0$ na diferenciação de segunda ordem, obtemos

$$f''(0) = 2a_2. \tag{3.40}$$

Portanto, $\frac{f''(0)}{2!} = a_2$.
Generalizando a equação, obtemos

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n. \tag{3.41}$$

Como a_n é a n–ésima derivada de f aplicada no 0 dividido por $n!$, então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{3.42}$$

Esse somatório é chamado de **Série de Maclaurin**, em homenagem ao matemático escocês **Colin Maclaurin** (1698 - 1746) que a desenvolveu em seus estudos. Essa série tem importante lugar de destaque tanto na Matemática quanto em outras ciências, uma vez que ela nos permite exibir funções como soma de monômios, por exemplo, a função $f(x) = e^x$, é escrita via Série de Maclaurin como

$$e^x = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots; \tag{3.43}$$

ou ainda

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots. \tag{3.44}$$

Quando a soma é finita, obtemos o que chamamos de **Polinômio de Maclaurin**, o qual faremos uso na próxima seção.

3.2 Aplicações em outras áreas

3.2.1 Cinemática

A Física, como ciência fundamental, busca descrever e explicar os fenômenos naturais que nos cercam. Para isso, ela se utiliza de diversas ferramentas matemáticas, sendo o Cálculo uma das mais poderosas. O Cálculo aplicado à Física permite analisar o movimento, a energia, as forças e outras grandezas físicas de forma precisa e rigorosa. Especificamente na Cinemática, ramo da Física que estuda o movimento dos corpos sem se

preocupar com suas causas, o Cálculo desempenha um papel crucial. Através do Cálculo Diferencial e Integral, podemos determinar a velocidade, a aceleração e a posição de um objeto em função do tempo. Essa frase resume a importância do conhecimento acumulado e da aplicação de ferramentas matemáticas como o Cálculo para o avanço da Física e da nossa compreensão do universo.

A cinemática é a parte da Física que se dedica a **descrever** o movimento dos corpos, sem se preocupar com as causas desse movimento (forças). Ela estuda grandezas como:

- **Posição:** em que o objeto está em um determinado instante.
- **Velocidade:** Quão rápido o objeto se move e em que direção.
- **Aceleração:** A taxa com que a velocidade varia ao longo do tempo.

A relação entre cinemática e derivadas é fundamental, pois as derivadas nos permitem **quantificar** as mudanças nas grandezas cinemáticas ao longo do tempo. Desse modo, vamos estudar essas três grandezas citadas acima como uma aplicação do conceito de derivadas.

Definição 3.1. *Seja $s(t)$ a função que descreve a posição de um objeto em um determinado instante t, então a velocidade instantânea $v(t)$ desse objeto no instante t é dada por:*

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

em que:

- *$v(t)$ representa a velocidade no instante t;*
- *$s'(t)$ é a notação para a derivada da função posição s em relação à variável tempo t;*
- *$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$ é a definição formal da derivada através do limite, representando a taxa de variação instantânea da posição;*
- *Δt representa um intervalo de tempo infinitesimalmente pequeno;*
- *$s(t + \Delta t) - s(t)$ representa a variação infinitesimal da posição durante o intervalo de tempo Δt.*

Definição 3.2. *Seja $v(t)$ a função que descreve a velocidade de um objeto em um determinado instante t, então a aceleração instantânea $a(t)$ desse objeto no instante t é dada por:*

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Como $v(t) = \frac{ds}{dt}$, podemos escrever a aceleração como a segunda derivada da posição:

$$a(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Aplicando o Polinômio de Maclaurin de ordem n $f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ e as equações de velocidade e aceleração, se um determinado objeto parte da posição inicial x_0 no instante $t = 0$, com velocidade inicial v_0, temos que

$$s(t) = s(0) + s'(0)t + \frac{s''(0)}{2}t^2 \implies s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{3.45}$$

e

$$v(t) = s'(t) \implies v'(t) = v_0 + at. \tag{3.46}$$

As equações (3.45) e (3.46) fazem parte do que é conhecido, respectivamente, como **Movimento Retilíneo Uniforme** e **Movimento Uniformemente Variado**.

Nesse estudo, a aplicação do Cálculo pode ser útil para diversas situações práticas do cotidiano. Em veículos autônomos, por exemplo, a capacidade de prever a futura posição e velocidade de outros carros serve para evitar colisões e planejar manobras, como a mudança de faixa. Essa previsão precisa é possível mediante o conhecimento da posição atual do veículo ($s(t)$), de sua velocidade ($v(t) = s'(t)$) e da estimativa de sua aceleração ($a(t) = v'(t) = s''(t)$), demonstrando a interconexão entre conceitos fundamentais do Cálculo e a tecnologia automotiva avançada.

3.2.2 Crescimento Populacional Malthusiano

O modelo malthusiano de crescimento populacional, proposto por **Thomas Robert Malthus** no final do século XVIII, oferece uma perspectiva inicial sobre a dinâmica entre o crescimento da população humana e a disponibilidade de recursos. Essencialmente, o modelo postula que enquanto a população tende a crescer em progressão geométrica, os recursos necessários para sustentá-la, como alimentos, aumentam apenas em progressão aritmética. Essa disparidade inerente levaria inevitavelmente a um ponto de crise, marcado por escassez, fome e aumento da mortalidade, atuando como "verificações"naturais para restabelecer o equilíbrio.

Matematicamente, esse modelo pode ser expresso por uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) simples, em que a taxa de variação da população ao longo do tempo é diretamente proporcional ao tamanho da população naquele instante. Essa formulação básica encontra aplicações em estudos introdutórios de dinâmica populacional, fornecendo um ponto de partida para análises mais complexas e incorporando fatores como avanços tecnológicos, mudanças sociais e políticas de controle de natalidade.

Vamos tomar esse seguinte modelo:

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

em que

- t: Instante em que a população está crescendo em tal número;
- P: População no instante t;
- $k > 0$: É uma taxa constante de crescimento.

Fazendo algumas manipulações na equação, podemos notar que

$$\frac{dP}{P} = kdt. \tag{3.47}$$

Integramos em ambos os membros:

$$\int \frac{dP}{P} = \int kdt \Rightarrow \ln|P| + C_1 = kt + C_2; \tag{3.48}$$

ou ainda,

$$\ln|P| = kt + C_3. \tag{3.49}$$

Elevando tudo a partir de e, vem

$$e^{\ln|P|} = e^{kt+C_3} \Rightarrow |P| = e^{kt}e^{C_3}; \tag{3.50}$$

ou ainda

$$P = e^{kt}e^{C_3}. \tag{3.51}$$

Vamos descobrir quem é $P(0)$:

$$P(t) = e^{kt}e^{C_3}; \tag{3.52}$$

$$P(0) = e^{k*0}e^{C_3}; \tag{3.53}$$

$$P(0) = e^{C_3}. \tag{3.54}$$

Logo o valor de P:

$$P = P(0)e^{kt}. \tag{3.55}$$

Essa solução, $P(t) = P(0)e^{kt}$, encapsula a essência do modelo malthusiano de crescimento populacional: um crescimento exponencial. O que essa fórmula fundamentalmente

significa é que, sob as premissas do modelo (taxa de crescimento constante e recursos ilimitados), o tamanho da população ($P(t)$) aumenta ou diminui a uma taxa proporcional ao seu tamanho atual.

3.2.3 Equações de Lotka-Volterra

O modelo de Lotka-Volterra, desenvolvido independentemente por **Alfred J. Lotka** e **Vito Volterra** na década de 1920, oferece uma descrição matemática da dinâmica populacional de predadores e presas em um ecossistema. Diferentemente do modelo malthusiano que considera o crescimento isolado de uma única população, o Lotka-Volterra é um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) acopladas, descrevendo as interações cíclicas entre duas populações: a presa, cuja abundância favorece o crescimento da população de predadores, e o predador, que por sua vez limita o crescimento da população de presas através da predação. Esse modelo matemático encontra aplicações em diversas áreas da Ecologia e Biologia Populacional, fornecendo insights sobre a estabilidade de ecossistemas, o controle biológico de pragas, a dinâmica de doenças infecciosas e até mesmo em modelagens de interações econômicas e sociais com características de competição e exploração.

Vamos, então, trabalhar com as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma y, \end{aligned}$$

em que

- $x(t)$: número de presas no tempo t;
- $y(t)$: número de predadores no tempo t;
- α: taxa de crescimento natural da população de presas na ausência de predadores;
- β: taxa na qual as presas são predadas pelos predadores;
- δ: taxa na qual os predadores convertem presas consumidas em novos predadores;
- γ: taxa de mortalidade natural da população de predadores na ausência de presas.

Fazendo algumas manipulações nas equações, podemos notar que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} &= (\alpha - \beta y)dt, \\ \frac{dy}{y} &= (\delta x - \gamma)dt. \end{aligned}$$

Calculamos ambas as equações da mesma forma que o modelo malthusiano. Integrando a primeira equação, temos

$$\int \frac{dx}{x} = \int (\alpha - \beta y)dt, \tag{3.56}$$

$$\ln|x| + C_1 = (\alpha - \beta y)t + C_2, \tag{3.57}$$

$$\ln|x| = (\alpha - \beta y)t + C_3, \tag{3.58}$$

$$e^{\ln|x|} = e^{(\alpha-\beta y)t+C_3}, \tag{3.59}$$

$$|x| = e^{(\alpha-\beta y)t}e^{C_3}, \tag{3.60}$$

$$x(t) = e^{(\alpha-\beta y)t}e^{C_3}. \tag{3.61}$$

Integrando a segunda equação,

$$\int \frac{dy}{y} = \int (\delta x - \gamma)dt, \tag{3.62}$$

$$\ln|y| + C_4 = (\delta x - \gamma)t + C_5, \tag{3.63}$$

$$\ln|y| = (\delta x - \gamma)t + C_6, \tag{3.64}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{(\delta x-\gamma)t+C_6}, \tag{3.65}$$

$$|y| = e^{(\delta x-\gamma)t}e^{C_6}, \tag{3.66}$$

$$y(t) = e^{(\delta x-\gamma)t}e^{C_6}. \tag{3.67}$$

Vamos descobrir quem é $x(0)$ e $y(0)$:

$$x(0) = e^{(\alpha-\beta y)0}e^{C_3}, \tag{3.68}$$

$$x(0) = e^{0}e^{C_3}, \tag{3.69}$$

$$x(0) = e^{C_3}, \tag{3.70}$$

$$y(0) = e^{(\delta x - \gamma)0} e^{C_6}, \tag{3.71}$$

$$y(0) = e^{0} e^{C_6}, \tag{3.72}$$

$$y(0) = e^{C_6}. \tag{3.73}$$

Logo o valor de x e y é:

$$x(t) = e^{(\alpha - \beta y)t} x(0), \tag{3.74}$$

$$y(t) = e^{(\delta x - \gamma)t} y(0). \tag{3.75}$$

As soluções apresentadas, $x(t) = e^{(\alpha-\beta y)t}x(0)$ e $y(t) = e^{(\delta x-\gamma)t}y(0)$, demonstram a interdependência entre as populações de presa e predador no modelo de Lotka-Volterra. A taxa de crescimento da população de presas ($x(t)$) não é constante, mas sim modulada pela presença de predadores ($y(t)$), enquanto o crescimento da população de predadores ($y(t)$) depende da disponibilidade de presas ($x(t)$). Essa natureza acoplada das soluções implica um comportamento dinâmico e oscilatório, no qual o aumento de uma população inevitavelmente leva a um aumento ou diminuição da outra, gerando ciclos populacionais característicos.

4 CONCLUSÃO

A vasta área do Cálculo Diferencial e Integral não se limita à exploração de seus conceitos teóricos, estendendo sua influência a diversas áreas do conhecimento. Nesse sentido, é possível, por exemplo, observar a aplicação de seus princípios no estudo das soluções de uma equação polinomial, exemplificado através do Lema de Rolle; na representação de funções infinitamente deriváveis, através da Série de MacLaurin; na análise quantitativa de grandezas físicas, como aquelas que foram abordadas no estudo da Cinemática; e na modelagem matemática de fenômenos biológicos e ecológicos, a exemplo do crescimento populacional e das interações predador-presa, descritos por EDOs.

Assim, ressalta-se a relevância de investigar, mesmo que seja de nível fundamental, as diversas ocorrências do cotidiano onde os conceitos do Cálculo podem ser empregados. Posto isso, é de considerável valor que profissionais de variados domínios desenvolvam uma compreensão acerca das ferramentas matemáticas aplicáveis às suas atividades, notadamente o Cálculo Diferencial, o qual se configura como um instrumental de grande utilidade para a análise e resolução de problemas complexos em uma diversidade de contextos.

4.1 Sugestões para pesquisas futuras

Em termos de futuras pesquisas, propõe-se a investigação de exemplos práticos e contextualizados que contribuem na compreensão das aplicações exploradas neste estudo. No que concerne ao Modelo de Lotka-Volterra, por exemplo, sugere-se a construção de cenários hipotéticos ou o estudo de dados empíricos de interações predador-presa em ambientes definidos. Essa abordagem metodológica poderia envolver a parametrização do modelo com dados ambientais relevantes, permitindo uma análise mais rica e aplicável da dinâmica populacional.

Além disso, outras linhas de investigação podem concentrar-se nas aplicações do Cálculo em domínios do saber não relatados nesse trabalho. Entre estes, incluem-se a Química (com a modelagem cinética e termodinâmica de reações), a Geometria Analítica (na análise de propriedades geométricas via métodos analíticos), a Economia (na otimização de modelos micro e macroeconômicos), a Computação (no desenvolvimento e análise de algoritmos computacionais), e a Estatística (na modelagem de distribuições de probabilidade e processos estocásticos). Dessa forma, é sugerida também a pesquisa de modelos matemáticos específicos que utilizam as teorias do Cálculo em cada uma das áreas mencionadas.

REFERÊNCIAS

[1] ALVES DE OLIVEIRA JUNIOR, Jaime. **Um estudo sobre a implementação cáclulo diferencial e integral no ensino médio**. 2015. Dissertação (Mestrado – Programa de PósGraduação) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

[2] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Fundamentos de cálculo**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[3] SEIDI IMAKUFU, Roberto. **Sobre o estudo de uma passagem de uma função de uma variável real para o caso de duas variáveis**. 2008. Dissertação – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

[4] THOMAS, George B. **Cálculo, volume 1**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

[5] VIANA, M. ESPINAR, J. **Differential Equations: a dynamical systems approach to theory and practice**, 1ª ed. American Mathematical Society. 2022.