

parâmetro qualquer pertencente aos números reais. A atividade tinha por objetivo generalizar as transformações gráficas ocorridas em Funções do 1º grau com a mudança do parâmetro “a”. Como podemos observar abaixo na Figura 32.

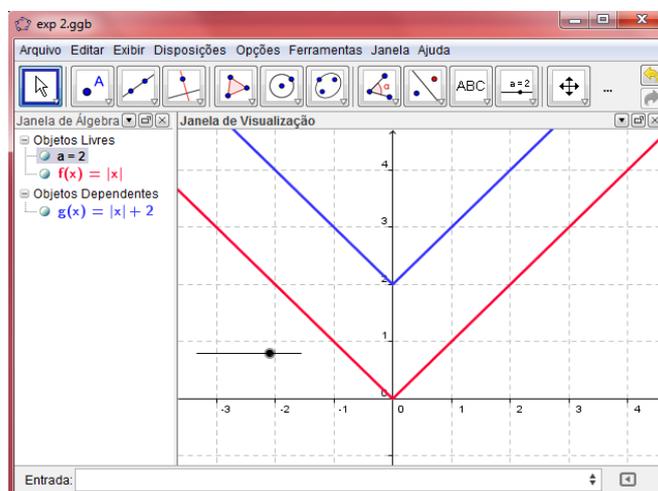


Figura 32: Exploração 4.1.

Notamos no início da exploração que alguns alunos comentavam que a exploração era idêntica a anterior. Após construírem o gráfico no aplicativo e na medida em que eles modificavam o valor do seletor “a”, foram percebendo que desta vez o gráfico da função g movimentava-se para cima ou para baixo, muitos relataram que essa variação de posição no gráfico dependia do valor do parâmetro “a”. Observe os comentários dos alunos A e B em destaque abaixo. Veja que eles conseguiram descrever de maneira sucinta o que ocorria com o gráfico da função com a mudança do parâmetro “a”.

Quando o parâmetro “a” é valor negativo o gráfico translada para baixo.  
Quando o parâmetro “a” é valor positivo o gráfico translada para cima

Registro: Aluno A.

Quando o valor do parâmetro a é positivo o gráfico translada para cima e quando o valor do parâmetro a é negativo o gráfico translada para baixo.

Registro: Aluno B.

A exploração 4 foi compreendida pelos alunos com maior facilidade devido ser uma exploração semelhante à anterior.

### Explorações Matemáticas 5 e 6 (realizadas em 14 de novembro de 2012)

Na exploração 5 propomos aos alunos a construção de quatro gráficos de funções modulares do 2º grau utilizando o aplicativo Geogebra. A esta altura os alunos já estavam familiarizados com as ferramentas utilizadas na construção de gráficos no Geogebra e já conheciam também alguns comandos utilizados no campo de entrada do aplicativo. A exploração 5 foi dividida nos itens “a” e “b”. O item “a” pedia para os alunos identificarem as transformações gráficas ocorridas nas funções com o módulo em relação às mesmas funções sem o módulo. O professor ressaltou aos alunos para construírem os gráficos das funções com módulo e sem módulo em um mesmo ambiente de trabalho no Geogebra, sendo uma função por vez.

O primeiro gráfico (Figura 33) que os alunos construíram no aplicativo foi referente à função  $f(x) = |x^2|$  e fizeram um comparativo com o gráfico da função  $f_1(x) = x^2$ .

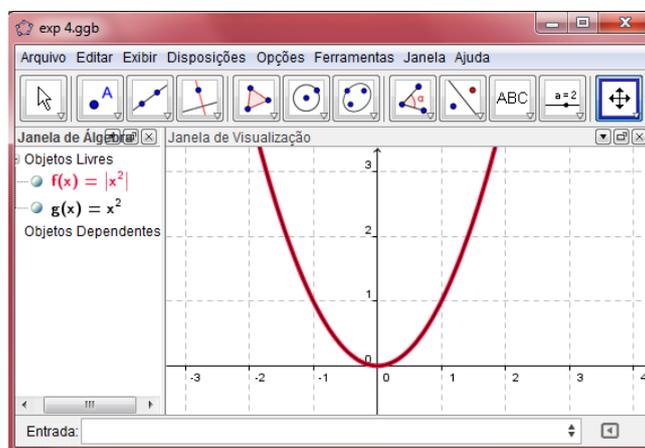


Figura 33: Exploração 5.1.

No decorrer deste, a maioria dos alunos comentavam que os gráficos das funções eram iguais, ou seja, estavam situados no mesmo local do plano cartesiano. Observe à colocação dos alunos A e B abaixo:

$f(x)$ : com módulo e sem módulo, são iguais pois qualquer número que está dentro do módulo o resultado sempre será positivo, e também qualquer número ao quadrado sempre vai dar um número positivo.

Registro: Aluno A.

A função  $f(x)$  com o módulo fica em cima da parábola de  $g(x)$  sem o módulo, pois ambas as funções são iguais

Registro: Aluno B.

O aluno A conseguiu distinguir características entre as duas funções como justificativa. Segundo ele, a função com módulo sempre resultava em um valor positivo, pois a expressão estava contida dentro do módulo e a função sem módulo também resultava em um valor positivo devido os valores do domínio estarem elevados ao quadrado. O aluno B justificou que as funções são iguais porque o gráfico de uma está sobre o gráfico da outra. O esperado para a exploração era que os alunos justificassem que as funções possuíam o mesmo gráfico devido as suas imagens resultarem em valores sempre iguais positivos ou nulo, dado qualquer valor pertencente ao domínio da função. No fim da atividade o professor argumentou tal justificativa e a desenvolveu em debate com o auxílio do aplicativo. A segunda função a ser analisada foi a função  $g(x) = |-x^2|$  e comparada com  $g_1(x) = -x^2$  (Figura 34).

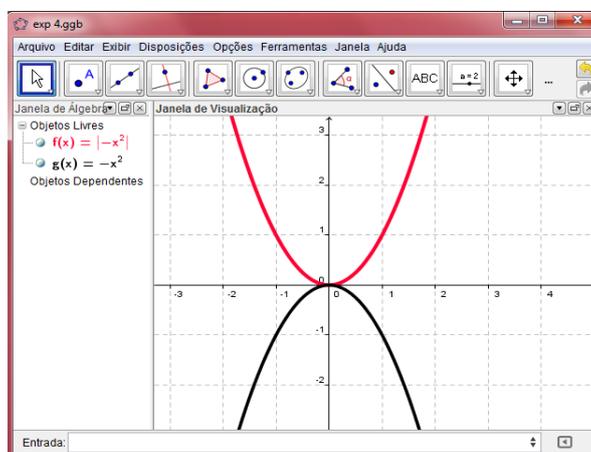


Figura 34: Exploração 5.2.

Ao construírem os gráficos, os alunos perceberam de imediato que a função com o módulo tinha concavidade voltada para cima e a função sem módulo tinha concavidade voltada para baixo, como podemos ver no registro do aluno A. Muitos alunos comentaram ainda que uma função era positiva, daí o professor interveio com a seguinte pergunta: e quando  $x$  é igual à zero? Foi quando alguns refletiram (registro do Aluno B) sobre a pergunta do professor e começaram a falar que quando a função tinha valor  $x$  igual à zero, o valor de  $y$  também era igual à zero, daí a função era nula em  $x = 0$ .

A função  $g(x)$  com o módulo a parábola do gráfico fica voltada para cima e a função  $g(x)$  sem o módulo a parábola do gráfico fica voltada para baixo, isto no eixo  $y$ .

Registro: Aluno A.

a função  $g(x)$  com módulo é positiva em  $\theta$  módulo e negativa mesmo quando o valor de  $x = 0$ .

Registro: Aluno B.

A terceira função construída (Figura 35) pelos alunos com a utilização do aplicativo foi à função  $h(x) = |x^2 - 4|$ . Verificamos que os alunos apresentaram bastante dificuldade ao explorarem as relações existentes entre a função  $h$  com o módulo e a função  $h$  sem o módulo. Essa dificuldade se deu pelo fato da função  $h$  apresentar dois zeros reais.

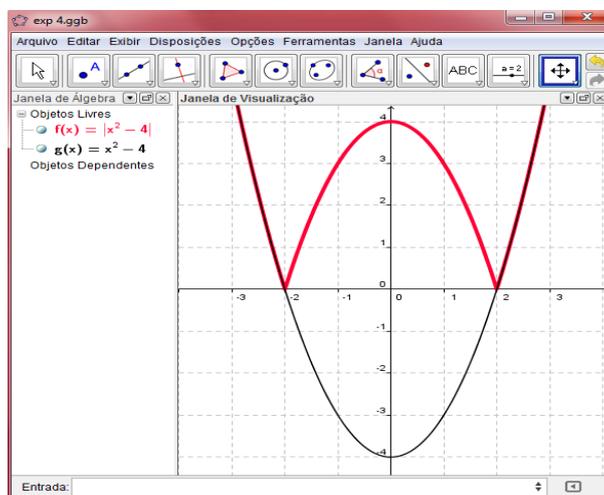


Figura 35: Exploração 5.3.

No decorrer da exploração os alunos argumentavam que a parte do gráfico abaixo do eixo  $x$  da função sem o módulo era a mesma parte do gráfico acima do eixo  $x$  da função com o módulo, porém muitos não souberam descrever em suas justificativas que o gráfico com módulo sempre resultava em valores maiores ou iguais que zero para imagem, por isso o gráfico da função com o módulo rebate a parte negativa do gráfico da função sem o módulo para a parte positiva da função. O registro do aluno A abaixo é o que mais se aproximou daquilo que esperávamos obter como resposta.

a função  $H(x)$  com módulo pega a parte negativa da função sem módulo e descola para parte positiva,  
a função  $H(x)$  é totalmente positiva menos em  $x=2$  e  $x=-2$

Registro: Aluno A.

A quarta e última função proposta (Figura 36) para a construção realizada pelos alunos no aplicativo foi à função  $p(x) = |-x^2 + 4x - 5|$  e a função  $p_1(x) = -x^2 + 4x - 5$ .

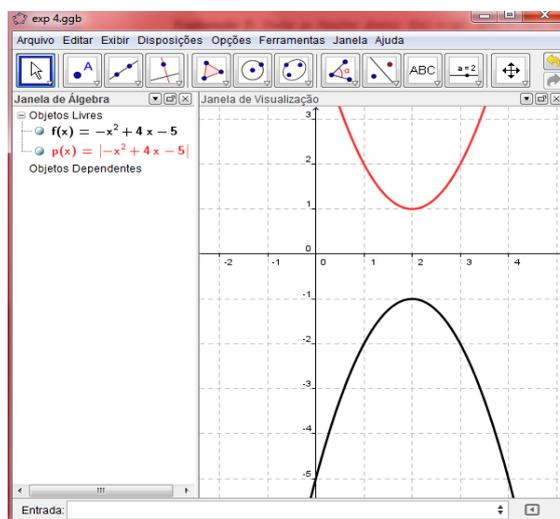


Figura 36: Exploração 5.4.

Como se tratavam de funções cujos gráficos não apresentavam zeros reais, ou seja, os seus gráficos não cortavam o eixo  $x$ , os alunos tiveram uma maior facilidade em compreender e descrever aquilo que visualizavam na tela do computador. Observe os relatos dos alunos A e B abaixo.

$P(x)$ : com módulo, a parábola é voltada para cima e toca somente o eixo  $y$ , seu ponto de interseção é o número 5 na parte superior do gráfico.  
 $P(x)$  sem módulo, a parábola é voltada para baixo, e tem como ponto de interseção o -5 na parte inferior do eixo  $y$ .

Registro: Aluno A.

a função  $P(x)$  é totalmente positiva com módulo, e sem módulo totalmente negativa, a função  $P(x)$  não corta o eixo  $x$ .

Registro: Aluno B.

O item “b” da exploração 5 pedia para os alunos determinarem a imagem das funções trabalhadas. O item foi respondido por todos satisfatoriamente. Observe os registros abaixo:

$Im(q) = d(x) = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$ eixo $y$	sem o módulo
$Im(q) = g(x) = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$ eixo $y$	$\{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$ eixo $y$ .
$Im(q) = h(x) = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$ eixo $y$	$\{y \in \mathbb{R} / y \leq 0\}$ eixo $y$ .
$Im(q) = p(x) = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 1\}$ eixo $y$	$\{y \in \mathbb{R} / y \geq -4\}$ eixo $y$ .
	$\{y \in \mathbb{R} / y \leq -1\}$ eixo $y$ .

Registro: Aluno A.

<u>COM MÓDULO</u>	<u>SEM MÓDULO</u>
$F(x) Im \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$	$F(x) Im \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$
$g(x) Im \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$	$g(x) Im \{y \in \mathbb{R} / y \leq 0\}$
$h(x) Im \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$	$h(x) Im \{y \in \mathbb{R} / y \geq -4\}$
$P(x) Im \{y \in \mathbb{R} / y \geq 1\}$	$P(x) Im \{y \in \mathbb{R} / y \leq -1\}$

Registro: Aluno B.

Na exploração 6 (Figura 37) foi proposto aos alunos construírem com a utilização do aplicativo uma Função Modular do tipo  $f(x) = |ax^2 + bx + c|$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  eram parâmetros pertencentes aos números reais. Os valores dos parâmetros poderiam

ser alterados dinamicamente no aplicativo com a mudança dos valores de seletores criados pelos alunos no campo de entrada do aplicativo.

Os alunos observaram no decorrer da aplicação da exploração 6 que o gráfico da função  $f$ , localizado na janela de álgebra, deslocava-se com a mudança nos valores dos parâmetros. A exploração 6 foi menor que as demais devido à exploração 5 ter sido extensa, ela foi composta por três itens “a”, “b” e “c” e pedia para os alunos descreverem o que ocorria com o gráfico da função na medida em que eles modificavam os valores respectivamente dos parâmetros “a”, “b” e “c”.

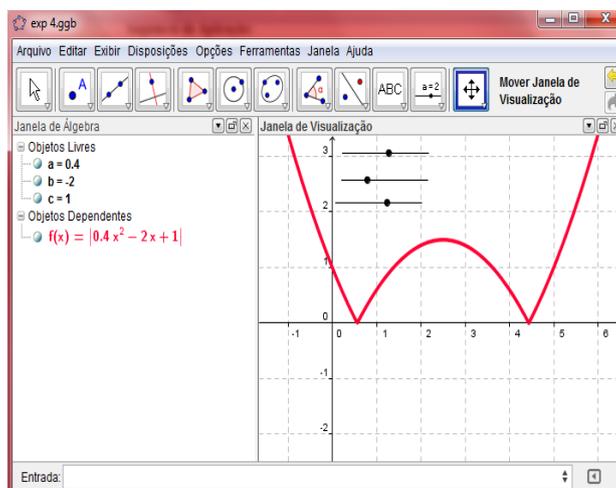


Figura 37: Exploração 6.

Ficou evidente que todos após a exploração conseguiram enxergar que ao modificarem os parâmetros “a”, “b” e “c”, o gráfico da função aumentava ou diminuía sua largura (parâmetro “a”), transladava-se para direita ou esquerda (parâmetro “b”) e transladava-se para cima ou para baixo (parâmetro “c”), como podemos destacar nos registros do aluno A abaixo.

a) O que ocorre com o gráfico da função com a mudança do parâmetro “a”?

Quando aumentamos o parâmetro "a" o que está acontecendo é apenas que está enlaquecendo e diminuindo o comprimento da parábola.

b) O que ocorre com o gráfico da função com a mudança do parâmetro “b”?

Quando o valor do parâmetro “b” é positivo a parábola é translada para esquerda no eixo x e quando o valor do parâmetro “b” é negativo a parábola é translada para direita no eixo x.

c) O que ocorre com o gráfico da função com a mudança do parâmetro “c”?

Quando o valor do parâmetro “c” é positivo a parábola é translada para cima no eixo y e quando o valor do parâmetro “c” é negativo a parábola é translada para baixo no eixo y.

Ao fim da exploração 6 o professor mostrou aos alunos através do Aplicativo que o valor do parâmetro “c” era sempre igual ao valor que o gráfico cortava no eixo y.

Ficamos satisfeitos com o desenvolvimento dos alunos durante as explorações 5 e 6. Notamos que houve uma boa compreensão referente ao que propomos, sempre havendo entre os próprios alunos um debate saudável, o que os ajudava a chegarem, em conjunto, numa resposta concreta.

### Explorações Matemáticas 7 e 8 (realizadas em 19 de novembro de 2012)

Na exploração 7 foi proposto aos alunos analisarem com o auxílio do Geogebra se as propriedades envolvendo módulos de um número real  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$  e  $|x + y| \leq |x| + |y|$  eram verdadeiras para qualquer x e y pertencentes aos números reais. Cada propriedade conteve três itens. O objetivo dessa exploração foi mostrar aos alunos que as propriedades envolvendo módulos eram válidas.

Durante a exploração 7 os alunos utilizaram no aplicativo apenas o campo de entrada e a janela de álgebra e construíram funções com duas variáveis.

Na análise da propriedade  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$  (Figura 38), os alunos construíram as funções  $f(x,y) = |x \cdot y|$  e a função  $g(x,y) = |x| \cdot |y|$ , também foram criados seletores a e b no campo de entrada e os valores  $f(a,b)$  e  $g(a,b)$ , os quais determinavam o valor das funções f e g, respectivamente. Os valores a e b eram escolhidos pelos alunos através dos seletores criados no Geogebra.

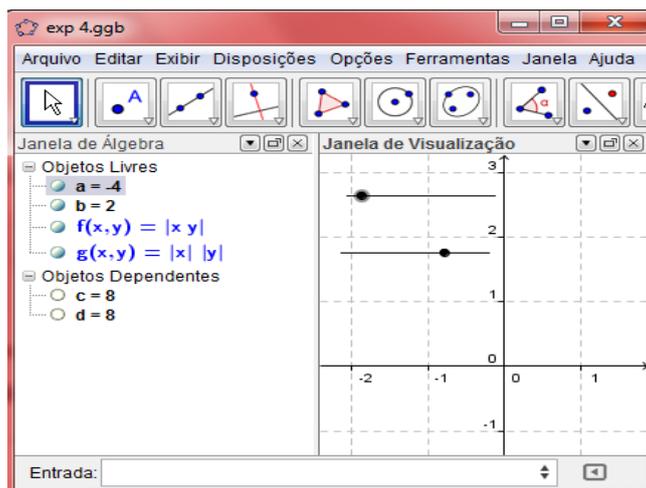


Figura 38: Exploração 7.1.

No item “a” foi pedido aos alunos para descreverem o que eles observavam em relação aos valores das funções  $f$  e  $g$ . O professor propôs aos alunos que na medida em que eles modificassem os valores dos seletores  $a$  e  $b$ , anotassem a parte, os valores das funções  $f$  e  $g$  obtidos e em seguida os verificassem. Observe os registros abaixo.

- a) O que você observa em relação aos valores de  $f(a,b)$  e  $g(a,b)$ ?

obsrveei que os valores de  $f(a,b)$  e  $g(a,b)$  sempre são positivos ou  $= 0$ , mesmo quando os valores de  $f(a,b)$  são negativos e os valores de  $f(a,b)$  são positivos ou vice-versa. Ex.:  $a=1$  e  $b=-3$ , temos que  $f(1,-3)=3$  e  $g(1,-3)=3$ .

Registro: Aluno A.

para  $x=2$  e  $y=-3$  temos que  $f(2,3)=6$  e  $g(2,3)=6$   
 para  $x=-5$  e  $y=4$  temos que  $f(-5,4)=20$  e  $g(-5,4)=20$   
 para  $x=-3$  e  $y=-4$  temos que  $f(-3,-4)=12$  e  $g(-3,-4)=12$   
 para  $x=1$  e  $y=3$  temos que  $f(1,3)=3$  e  $g(1,3)=3$   
 observou-se que  $f$  e  $g$  são sempre positivas ou zero.

Registro: Aluno B.

Alguns alunos como é o caso dos alunos A e B testaram alguns valores para as funções  $f$  e  $g$  para evidenciar suas respostas, outros justificaram de forma direta como podemos ver nos registros dos alunos C e D.

Os valores de  $f(a, b)$  e  $g(a, b)$  são positivos ou iguais a zero.

Registro: Aluno C.

Podemos constatar que os valores de  $f(a, b)$  e  $g(a, b)$  são positivos ou igual a 0.

Registro: Aluno D.

A alternativa “b” perguntava se os valores de  $f$  eram maiores, menores ou iguais que os valores de  $g$ . Houve quase 100% de acertos neste item, observe os registros dos alunos A e B abaixo.

b) Os valores da função  $f$  são maiores, menores ou iguais aos valores da função  $g$ ?

Justifique

São iguais, porque os valores de  $f$  e  $g$  dão o mesmo resultado.

Registro: Aluno A.

são iguais pois os valores de  $f$  e  $g$  são iguais.

Registro: Aluno B.

No item “c” pedia para os alunos descreverem a conclusão que eles tinham chegado em relação aos valores das duas funções. Os alunos comentavam que esta pergunta era idêntica a do item “a”, mas o professor argumentou que eles deveriam observar as funções e relacioná-las com a propriedade em destaque, observando se ela era válida ou não e justificando sua resposta. Daí os alunos observaram que ao

modificar os valores de a e b os resultados para as duas funções eram sempre iguais.

Observe alguns Registros abaixo:

- c) A qual conclusão chegou em relação ao que você observou entre os valores das duas funções f e g?

Observei que os valores  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ , pois  $f(x,y)$  não sempre iguais aos valores de  $g(x,y)$  para qualquer  $x$  e  $y \in \mathbb{R}$ .  
Concluí que realmente a propriedade  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$  é verdadeira.

Registro: Aluno A.

Concluímos que os valores das funções  $F(a,b)$  e  $G(a,b)$  não sempre iguais e que  $|x \cdot y|$  é igual  $|x| \cdot |y|$ .

Registro: Aluno B.

A análise da segunda propriedade  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (Figura 39) foi idêntica a da primeira propriedade e conteve os mesmos três itens.

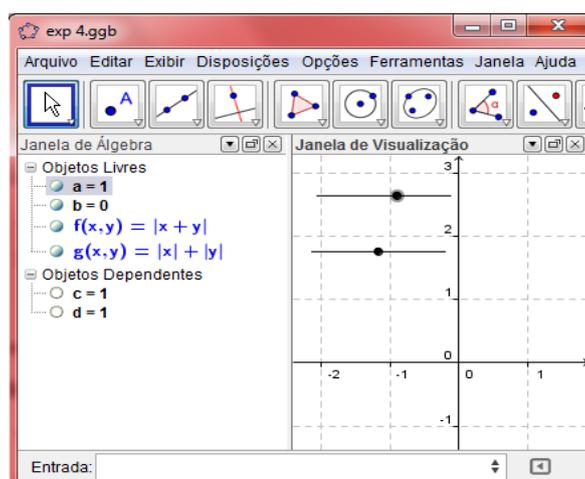


Figura 39: Exploração 7.2.

Durante a análise do item “a” os alunos comentaram que seria relatada a mesma resposta relatada na análise da primeira propriedade. O professor observando que eles estavam corretos com aquela afirmação, mas que estavam inseguros porque seria notificada a mesma resposta da análise anterior, perguntou aos alunos se algum valor deu menor que zero? E os alunos responderam que não. Daí os alunos refletiram e a maioria deles disse que os valores de  $f$  e  $g$  são sempre maiores ou iguais que zero como se percebe nos seguintes registros.

- a) O que você observa em relação aos valores de  $f(a,b)$  e  $g(a,b)$ ?

Para  $a=1$  e  $b=4$   $f(1,-4)=3$   $g(1,-4)=5$   
 Para  $a=5$  e  $b=2$   $f(5,2)=7$   $g(5,2)=7$   
 Para  $a=-2$  e  $b=-3$   $f(-2,-3)=5$   $g(-2,-3)=5$   
 cheguei a conclusão que os resultados de  $f$  e  $g$  são positivos ou zero

Registro: Aluno A.

Para  $a=3$  e  $b=-2$ ,  $f(3,-2)=1$  e  $g(3,-2)=5$ .  
 Para  $a=2$  e  $b=5$ ,  $f(2,5)=7$  e  $g(2,5)=7$ .  
 Para  $a=-1$  e  $b=-4$ ,  $f(-1,-4)=5$  e  $g(-1,-4)=5$   
 Portanto, todos os resultados de “ $f$ ” e “ $g$ ” são positivos ou igual à zero.

Registro: Aluno B.

Como já haviam analisado a primeira propriedade não tiveram dificuldades em analisar os itens da segunda propriedade. Os registros abaixo demonstram que durante a análise realizada, houve uma excelente absorção do conhecimento requerido. Observe:

- b) Os valores da função  $f$  são maiores, menores ou iguais aos valores da função  $g$ ? Justifique.

Mesmo que o valor do relator “ $a$ ” é positivo e o valor do relator “ $b$ ” negativo ou vice-versa, os valores da função  $f(a,b)$  serão  $\geq$  que os valores da função  $g(a,b)$  e quando ambos relatores “ $a$ ” e “ $b$ ” são positivos ou ambos negativos, os valores da função  $f(a,b)$  e  $g(a,b)$  serão iguais.

Registro: Aluno A.

os valores de  $f$  são menores ou iguais em relação aos valores de  $g$

Registro: Aluno B.

c) A qual conclusão chegou em relação ao que você observou entre os valores das duas funções  $f$  e  $g$ ?

Conclui que a propriedade  $|x+y| \leq |x|+|y|$  é realmente verdadeira.

Registro: Aluno A.

conclui que a propriedade  $|x \cdot x| \leq |x| \cdot |x|$  é verdadeira.

Registro: Aluno B.

Na exploração 8 (Figura 40) foi proposto aos alunos construírem uma Função Modular do tipo  $f(x) = |ax + b| + c$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  eram parâmetros quaisquer pertencentes aos números reais e podiam ser modificados a partir de comandos realizados no campo de entrada do aplicativo. O intuito da exploração, composta por quatro itens, foi desenvolver nos alunos a capacidade de relacionarem e reconhecerem o gráfico da Função Modular com suas respectivas funções na sua forma analítica.

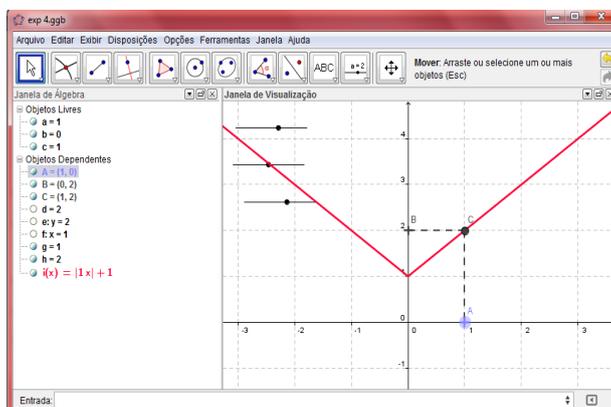


Figura 40: Exploração 8.1.

O item “a” pedia para os alunos relatarem o que ocorre com o gráfico da função com a mudança do parâmetro “b” quando o valor do parâmetro “a” estivesse fixado em 1, logo após em -1 e em seguida fixado em zero. O item “b” de maneira análoga foi pedido para os alunos analisarem o gráfico quando modificavam os valores do parâmetro “c” quando os valores do parâmetro “a” estavam fixos em 1, -1 e 0.

No início da exploração após a construção do gráfico de  $f$ , os alunos foram percebendo que se tratava de uma atividade muito parecida com as explorações 3 e 4. Na verdade tratou-se de uma generalização daquelas explorações. Daí os resultados que obtivemos nos item “a” e “b” foram bastante expressivos. Observe os registros em destaque abaixo:

- a) O que ocorre com o gráfico da função com a mudança do parâmetro “b”, quando o valor de  $a = 1$ ? E quando o valor de  $a = -1$ ? E quando  $a = 0$ ?

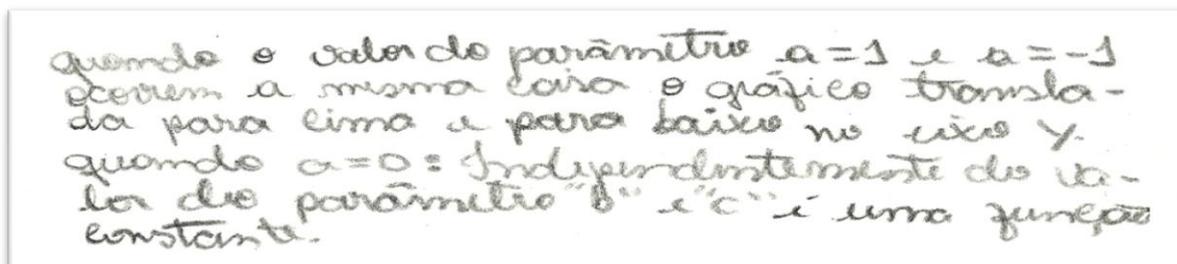
$a = 1$  e  $b < 0$  o gráfico translada para a direita e  $b > 0$  o gráfico translada para a esquerda.  
 $a = -1$  e  $b < 0$  o gráfico translada para a esquerda e  $b > 0$  o gráfico translada para a direita.

Registro: Aluno A.

quando o valor do parâmetro  $a = 0$ :  
 o gráfico fica em uma função constante para qualquer valor  $x$ .

Registro: Aluno B.

- b) O que ocorre com o gráfico da função com a mudança do parâmetro “c”? , quando o valor de a = 1? E quando o valor de a = -1? E quando a = 0?



Registro: Aluno C.

O item “c” (Figura 41) propôs aos alunos que eles digitassem no campo de entrada os pontos D(-b,c) e E(b,c) e descrevessem a relação existente entre a função f e seu gráfico com os pontos D para “a” igual a 1 e depois com o ponto E para “a” igual a -1 quando modificavam os valores dos parâmetros b e c. O intuito da exploração era encontrar uma forma de descrever a Função Modular a partir dos pontos A ou B, já que eles representavam sempre o bico formado no gráfico da função.

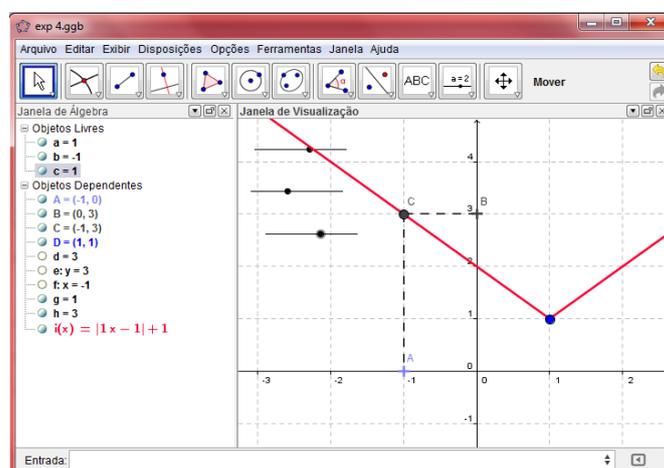


Figura 41: Exploração 8.2.

Na medida em que os alunos iam modificando os valores de b e c, foram percebendo que os pontos D e E ficavam localizados sempre no bico da função. O professor comentou aos alunos que a observação em relação ao gráfico da função estava correta, porém faltava eles analisarem o que ocorria com a função em sua forma analítica. Para isso era preciso analisar os valores da função através da janela de álgebra do Geogebra. Merece destaque a notificação do aluno A, ele conseguiu compreender a

relação existente entre os pontos A e B e a função f e evidenciou sua justificativa com dois exemplos.

- c) Descreva qual a relação existente entre o ponto D(-b,c) quando  $a = 1$  com a função em sua forma analítica e com o seu gráfico. Logo após faça o mesmo com o ponto E(b,c) quando  $a = -1$ .

O ponto  $(b, c)$  é o ponto onde fica localizado o Bico do gráfico. Para os valores de  $a = 1$   
 Por ex:  $|x + 2| - 1$  o Bico do gráfico fica localizado em  $(-2, -1)$  quando,  $a = -1$  o ponto onde fica o bico do gráfico, é o ponto  $(b, c)$   
 Ex:  $1 - |x + 2| + 3$  o ponto B  $(2, 3)$   
 Os pontos A e B sempre ficam no Bico do gráfico da função.

Registro: Aluno D.

No item “d” foi proposto aos alunos determinarem a Função Modular em sua forma analítica correspondente aos gráficos dados. Tratou-se de uma questão que serviu para evidenciar a análise realizada pelos alunos no item “c”. No início da exploração, o professor falou aos alunos para utilizarem os conhecimentos que eles tinham compreendido durante o item “c”. Durante a atividade o professor sugeriu aos alunos que escrevessem a função que eles achavam que era a resposta correta no campo de entrada do Geogebra. Daí eles poderiam verificar por tentativas, se o gráfico construído na janela gráfica era o mesmo que estava no item “d”. Ao fim verificou-se que a atividade foi compreendida com êxito pelo maior percentual de alunos. Observe o registro abaixo.