



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA CAMPUS CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE GRADUAÇÃO LICENCIATURA EM FÍSICA**

**SÉRGIO MURILO DE MENDONÇA LIMA**

**CONSIDERAÇÕES SOBRE MECÂNICA CELESTE E A  
VELOCIDADE ANGULAR DA TERRA**

**CAMPINA GRANDE – PB  
2014**

**SÉRGIO MURILO DE MENDONÇA LIMA**

**CONSIDERAÇÕES SOBRE MECÂNICA CELESTE E A  
VELOCIDADE ANGULAR DA TERRA**

Monografia apresentada ao Curso de Graduação Licenciatura em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em convênio com Escola de Serviço Público do Estado da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Tâmara Pereira Ribeiro de Oliveira Lima e Silva

CAMPINA GRANDE – PB  
2014

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

L732c Lima, Sérgio Murilo Mendonça de.  
Considerações sobre a mecânica celeste e a velocidade angular da terra [manuscrito] / Sérgio Murilo Mendonça de Lima. - 2014.  
36 p. : il. color.

Digitado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.  
"Orientação: Profa. Dra. Tâmara Pereira Ribeiro de Oliveira Lima e Silva, Departamento de Física".

1. Mecânica celeste. 2. Ensino de Física. 3. Astronomia. I.  
Título.

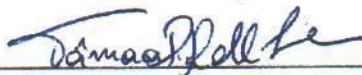
21. ed. CDD 520

SÉRGIO MURILO DE MENDONÇA LIMA

## CONSIDERAÇÕES SOBRE MECÂNICA CELESTE E A VELOCIDADE ANGULAR DA TERRA

Monografia apresentada ao Curso de Graduação Licenciatura em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em convênio com Escola de Serviço Público do Estado da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

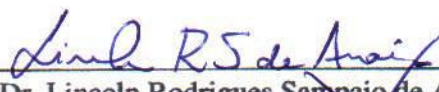
Aprovada em 18/07/2014.



Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Tâmara Pereira Ribeiro de Oliveira Lima e Silva/ UEPB  
Orientadora



Prof. Dr. José Fideles Filho/ UEPB  
Examinador



Prof. Dr. Lincoln Rodrigues Sampaio de Araújo/ UFCG  
Examinador

## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente a Deus que me permitiu percorrer toda essa caminhada até aqui. Apesar de todas as dificuldades que enfrentei, eu as venci uma a uma. Enfim, a minha esposa Dilma Costa que sempre acreditou na minha determinação e afinco. Também gostaria de agradecer a minha orientadora, professora Tâmara Ribeiro, que foi realmente uma grande profissional com sua dedicação. Lembro, para não ser omissos, de todos que direto ou indiretamente contribuíram para o sucesso deste trabalho. Por último quero aqui agradecer de coração a um amigo, Jean Moises, que me ajudou bastante no tocante às figuras apresentadas neste trabalho.

## **Resumo**

Este Trabalho de Conclusão de Curso aborda um método simplificado para se medir a velocidade angular da Terra. Os conceitos básicos da Mecânica Celeste são abordados e relacionados aos movimentos da Terra a partir do problema das forças centrais, destacando-se as Leis de Kepler e a translação do nosso planeta, que tem como consequência as estações do ano. Discutimos a inclinação da Terra em relação à eclíptica e como acontecem os equinócios e solstícios nos hemisférios norte e Sul. A medição da velocidade angular da Terra com material de baixo custo da forma apresentada neste trabalho pode ser usada na didática no Ensino da Física com o objetivo de enriquecer o conteúdo de Movimento Circular Uniforme.

**Palavras Chaves: Mecânica Celeste, Velocidade Angular da Terra, Ensino de Física.**

## **Abstract**

In this work we highlight the movement of the Earth and their consequences for the seasons. We show how the equinoxes and solstices happen in the northern and southern hemispheres taking into account the orbit of the Earth around the Sun. Thus, the central force problem is discussed and also the relation of Kepler's laws to the angular velocity of our planet. Finally we suggest a simple method to measure the angular velocity of the Earth with inexpensive materials, which can be used in high school for teachers who wish to enrich the contents of Circular Motion Kinematics covered in Physics.

**Keywords: Celestial Mechanics, Angular Velocity of the Earth, Teaching Physics.**

## Índice

1. Introdução: As Esferas Celestes .....	8
2. Considerações Históricas.....	7
2.2 A Astronomia de Platão, Aristóteles e Aristarco Ptolomeu.....	7
2.1 Ptolomeu.....	9
2.3 Copérnico.....	10
2.4 Tycho Brahe.....	11
2.5 Johannes Kepler.....	11
2.6 Galileu Galilei.....	12
2.7 Issac Newton.....	12
3. Fundamentos da Mecânica Celeste.....	13
3.1 Lagrangeano do Sistema de dois Corpos.....	13
3.2 Conservação de Energia .....	16
3.3 Tipos de Movimento Devido a Uma Força Central.....	17
3.4 Equação da Órbita de um Planeta.....	18
3.5 O Raio da Órbita e a 3ª Lei de Kepler .....	20
4. Os Movimentos da Terra e as Estações do Ano .....	23
4.1 Movimento de Rotação .....	23
4.2 Movimento de Trasnlação .....	24
4.3 Outros Tipos de Movimentos .....	25
4.4 As características das Estações do Ano .....	27
5. Medidindo a Velocidade Angular da Tera: Uma Aplicação no EnsinoMédio.....	30
5.1 Declinação Solar.....	30
5.2 Movimento Circular Uniforme .....	32
5.3 Medindo a Velocidade Angular da Terra .....	33
6. Conclusões.....	37
7. Referências Bibliográficas .....	38



## 1.Introdução: As Esferas Celestes

Há dois aspectos das observações astronômicas que complicam consideravelmente sua interpretação [Nussenzveig, 2002]. Um deles é o fato dos corpos celestes observados estarem distantes da Terra, de modo que usualmente só é possível vê-los como potinhos luminosos. Então, quando se fala de sua “posição”, considera-se em geral a direção em que são observados, sem que se possa estimar a sua distância. Outra complicação deve-se ao movimento de rotação da Terra em torno do seu eixo. Dessa forma, as observações são feitas sobre uma espécie de plataforma girante, como um carrossel; os movimentos aparentes dos corpos celestes vistos da Terra refletem este movimento de rotação. Daí é natural o uso da abóbada celeste, que é uma esfera de raio muito maior que o raio da Terra, sobre a qual são projetadas as posições observadas dos corpos celestes, com seus polos norte, sul e o equador celeste correspondente aos da Terra.

A ideia mais simples e provavelmente a mais antiga sobre o movimento aparente das estrelas é imaginar que a esfera celeste seja uma esfera material (à qual estão presos os corpos celestes) e que se encontra em rotação uniforme em torno da Terra. Entretanto este modelo não explicaria o movimento irregular dos planetas.

A Astronomia é uma ciência natural que estuda corpos celeste como estrelas, cometas, nebulosas, aglomerados de estrelas, galáxias e fenômenos que se originam fora da atmosfera da Terra, como a radiação cósmica de fundo em micro-ondas. Ela está preocupada com a evolução, a física, a química e o movimento de objetos celeste, bem como a formação e desenvolvimento do universo.

Portanto, é apresentada uma revisão bibliográfica sobre a astronomia na antiguidade e os fundamentos da mecânica celeste, destacando-se a relação entre o momento angular e a órbita dos corpos celestes. Em especial, é apresentado um método experimental simples para se medir a velocidade angular da terra, que pode ser usado como ferramenta no Ensino de Física.

## 2. Considerações Históricas

### 2.1 A Astronomia de Platão, Aristóteles e Aristarco

No princípio do século IV a.C, Platão questionava o que influenciaria no desenvolvimento posterior das teorias sobre o sistema solar com a seguinte pergunta [Nussenzveig, 2002]: “Quais são os movimentos uniformes e ordenados cuja existência é preciso supor para explicar os movimentos aparentes dos planetas?” A ideia de Platão era de que todo o Universo deveria ser explicável em termos de formas e figuras perfeitas, como círculos e esferas movendo-se uniformemente.

Enquanto só se tratava dos movimentos aparentes diurnos das estrelas, bastava imaginar uma esfera terrestre fixa e uma esfera celeste concêntrica, girando uniformemente em torno da primeira. Entretanto, para explicar ao mesmo tempo os movimentos aparentes diurno e anual Eudoxo, discípulo de Platão, imaginou um sistema muito engenhoso: em lugar de duas esferas apenas, haveria diversas esferas celestes homocêntricas, presas umas às outras de tal forma que lhes fosse permitido girar em torno de eixos diferentes com movimentos uniformes de velocidades diferentes, como no sistema de um giroscópio [Hopkins, 1890].

Eudoxo aparentemente não pensava nas suas esferas como objetos físicos reais, considerando-as apenas como artefatos matemáticos. Entretanto, Aristóteles interpretou-as como objetos materiais, chegando finalmente a um gigantesco mecanismo formado por 55 esferas, todas movidas pela mais externa, o motor primário.

Na época de Aristóteles (384 – 322 a.C), ou seja, no século IV a.C, ainda se amadurecia a ideia da Terra ter o formato de uma esfera [Martins,1997]. Com essa nova compreensão, Aristóteles teria desenvolvido uma nova Física para tentar compreender alguns fenômenos que envolviam as quedas dos corpos. Ele teria concluído que a Terra estava parada no centro do universo e os corpos “pesados”, como os sólidos e líquidos, tinham a tendência natural de se aproximarem do centro da Terra, enquanto que coisas “leves”, como o ar e o fogo, tentavam se afastar do centro da Terra.

A Física aristotélica descrevia, portanto, que os astros (estrelas, planetas, Sol, Lua) não caem nem se afastam em direção a Terra porque não seriam formados nem por terra, nem por água, nem ar ou fogo, mas seriam formados por um “quinto elemento”, o éter. Então, para esse filósofo, o universo seria formado pelo mundo terrestre, ou sublunar (abaixo da Lua), feito de

terra, água, ar e fogo, e o mundo celeste (a partir da Lua) feito de éter [Llwellyn,2006] Dessa forma, na estrutura do universo segundo Aristóteles a Terra ocupava o centro do universo, e os quatro elementos (terra, água, ar, e fogo) preenchiam todo o espaço abaixo da esfera lunar. Acima dela, havia uma série de cascas esféricas onde se moviam os diversos planetas. A última casca seria o céu estrelado, representado na Figura 1.



*Figura 1: Modelo Geocêntrico [Martins, 1997].*

Mesmo não sendo astrônomo e com interesses apenas de explicar o universo sem entrar em detalhes e sem fazer cálculos, as ideias provenientes da filosofia de Aristóteles descritas acima eram as mais compartilhadas e aceitas entre os astrônomos da Antiguidade. No entanto, a referência [Martins, 1997] menciona que Aristarco de Samos (310 – 230 a.C.) já havia afirmado que a Terra girava em torno do Sol, baseando-se no tamanho dos astros e suas respectivas distâncias em relação a Terra. O tamanho da Terra já era conhecido no tempo de Aristóteles, mas discutia-se sobre o tamanho do Sol e da Lua. Teria sido Aristarco o primeiro a fazer medidas das distâncias da Terra até a Lua e o Sol, verificando-se que a Lua era muito menor que a Terra, mas o Sol era muito maior. Aristarco teria concluído, com isso, que o Sol era mais importante e que não poderia ficar girando em torno da Terra. Sabe-se que as ideias de Aristarco não foram aceitas na sua época.

## 2.2 Ptolomeu

O modelo das esferas celestes, visto na Figura 2, continha uma contradição séria com a experiência, [Nussenzveig, 2002]: o brilho aparente dos planetas varia no decurso de suas órbitas, (particularmente quando retrogradem), sugerindo que eles se aproximam e afastam da Terra, o que seria incompatível com estarem se deslocando sobre uma esfera geocêntrica.



Figura 2: Modelo de esfera celeste

Os próprios astrônomos gregos propuseram outro modelo, que não sofria deste defeito. Ele foi proposto originalmente pelo astrônomo grego Hiparco de Rodes, no século II a.C., e depois elaborado por Cláudio Ptolomeu de Alexandria, representado na Figura 3. O modelo permanece fiel ao programa platônico, empregando somente figuras perfeitas, círculos e movimentos uniformes. O modelo geocêntrico de Ptolomeu permitiu reproduzir, com muita boa aproximação, mesmos aspectos mais complicados observados no movimento dos planetas.



Figura 3: Cláudio Ptolomeu (Fonte: [www.ghtc.usp.br](http://www.ghtc.usp.br)). O mais famoso astrônomo da Antiguidade foi Cláudio Ptolomeu, que viveu no século II depois de Cristo. Ele aceitou as ideias de Aristóteles e elaborou uma teoria matemática dos movimentos dos planetas. Sua teoria permitia prever, com grande precisão, a posição de qualquer planeta, em qualquer época [Martins, 1997].

A ideia básica é que a órbita do planeta em torno da terra é a resultante de dois movimentos uniformes acoplados.

Então, com essas e outras adaptações, o modelo proposto por Ptolomeu permitia descrever as posições dos planetas com precisão notável para a época, dentro de aproximadamente  $2^\circ$ . A sua obra, que representa o apogeu da astronomia antiga, pôde assim prevalecer durante mais de 15 séculos.

A ideia de um sistema heliocêntrico já havia também sido proposta pelos astrônomos gregos, em particular por Aristarco de Samos no século III a.C. Entretanto, os astrônomos gregos contemporâneos haviam refutado a teoria heliocêntrica com base num argumento muito convincente: ausência de qualquer observação de paralaxe estelar. Naturalmente que as estrelas, mesmo as mais próximas da Terra, estão tão distantes que o efeito é inobservável a olho nu; mesmo com telescópios, só foi detectado em 1838 [King, 2003].

## 2.2 Copérnico

O trabalho de Copérnico era conceitualmente ainda bastante próximo da astronomia grega. Ele procurou demonstrar que a principal vantagem do ponto de vista heliocêntrico seria a de simplificar a descrição, explicando as mesmas observações anteriores através de movimento ainda mais próximo do ideal platônico. Uma das vantagens desse sistema permitiu a Copérnico deduzir pela primeira vez a escala relativa das distâncias dentro do sistema solar, já que no sistema geocêntrico a escala das distâncias era arbitrária; só importava a razão entre os raios do epíclito e do deferente e não os valores absolutos desses raios. Já para Copérnico os deferentes dos planetas internos e os epíclitos dos externos se transformam todos na órbita da Terra em torno do Sol, cujo raio  $r_T$  é chamado hoje de unidade astronômica (1UA = 149.597.870.700m), e se tornava possível determinar os raios das demais órbitas planetárias com respeito a essa unidade. Em seguida, Copérnico obteve, a partir dos períodos sinódicos dos planetas, seus períodos siderais [Varejão-Silva, 2005]. A explicação da eclíptica e as estações (segundo o sistema heliocêntrico) decorrem do eixo de rotação da Terra não ser perpendicular ao plano de sua órbita em volta do Sol.

A obra de Copérnico atingia não apenas dogmas científicos, mas também religiosos, Em 1600 Giordano Bruno, que havia defendido a doutrina de Copérnico, bem como a ideia de que o universo é infinito e eterno, e o Sol uma estrela com as outras, foi queimado em Roma por ordem da Igreja [Martins, 2008]. Seu comentário no final do julgamento foi: “Espero vossa sentença com menos medo do que a promulgais. Chegará o tempo em que todos verão como eu vejo”. Em 1916, o tratado de Copérnico foi colocado no Index pela Igreja.

## 2.4 Tycho Brahe

A obra de Copérnico, que se havia baseado em dados obtidos na Antiguidade, trouxe um novo impulso à astronomia de observação. As primeiras observações novas de grande valor foram feitas no final do século XVI pelo dinamarquês Tycho Brahe, que propôs que todos os planetas, com exceção da Terra, se moviam em trono do Sol, mas este se moveria ao redor da Terra. Ele não percebeu que seu modelo só diferia do de Copérnico por uma mudança trivial do sistema de referência. Tycho Brahe morreu depois de apenas um ano de colaboração, deixando o legado de suas observações para seu assistente Johannes Kepler.

## 2.5 Johannes Kepler

Johannes Kepler foi uma personalidade extremamente curiosa, motivado por uma firme convicção de que o universo é construído de acordo com um plano matemático, cuja estrutura pode ser deduzida por argumentos de perfeição e da harmonia das esferas. Desde o início de sua carreira Kepler foi guiado por uma ideia fantástica de que os raios das órbitas dos planetas deviam ter alguma explicação geométrico-mística em termo de figuras perfeitas. [Gleiser, 2006].

Para a órbita de Marte, porém, persistia um desvio de 8 minutos de arco e esse desvio estava em desacordo com a precisão das observações de Tycho Brahe, que Kepler sabia serem confiáveis dentro de pelos menos 4 graus. Daí Kepler concentrou seu trabalho baseado nessa discrepância e, para isso, resolveu abandonar qualquer ideia preconcebida e redeterminar a órbita de Marte. Depois de mais dois anos de trabalho o resultado obtido foi uma órbita oval em lugar de circular, com o Sol no eixo, mas não no centro. Esses resultado são mostrado através de três leis [Volchan, 2007]:

1ª Lei de Kepler (lei das órbitas): Os planetas se movem em órbitas elípticas onde o Sol ocupa um de seus focos;

2ª Lei de Kepler (lei das áreas): O raio vetor que liga os planetas ao Sol vare áreas iguais em tempos iguais;

3ª Lei de Kepler (lei dos períodos): O quadrado do período de revolução dos planetas é proporcional ao semi-eixo maior.

Apesar de muito importante o trabalho de Kepler era conhecido apenas por uma pequena roda de amigos e estudiosos. Nesse mesmo tempo viveu Galileu (o introdutor do

método científico) que se destacou por muitas razões, como por introduzir o método de experimentação como meio de estudar um fenômeno ou verificar uma hipótese entre outros [Caniato, 1978].

## **2.6 Galileu Galilei**

Galileu era francamente favorável ao heliocentrismo e, tendo em mãos um aparelho que aproxima objetos distantes (telescópio), ele resolve apontá-lo para o céu em busca de novos conhecimentos [Martins, 2008]. Daí foram feitas novas descobertas que abalaram seu tempo. A lua não era uma esfera geometricamente perfeita como se pensava, Júpiter tinha ao seu redor varias pequenas luas, o Sol apresentava manchas em sua superfície e a mais importante descoberta dessa série, as fases de Vênus. Para Galileu, parecia evidente que depois dessas provas o heliocentrismo seria aceito como verdade científica. Porém, isso não aconteceu; ele foi perseguido pela inquisição e obrigado a negar sua teoria em público e morreu aos setenta anos, cego e confinado em sua casa [Bombassaro, 2007].

## **2.7 Isaac Newton**

Este filósofo natural estudou em Cambridge de 1661 a 1665 retornando, neste ano, à sua fazenda, onde pode desenvolver o método de aproximação das séries (binômio de Newton), método das tangentes (interpolação de Newton), o método direto das flexões (cálculo diferencial), a teoria das cores (experimentos com prisma), o princípio do método inverso das flexões (cálculo integral) e depois começou a pensar em gravidade [Nussenzweig, 2002]. A obra de Newton lança as bases de toda a Física posterior. Ele propõe a lei de atração gravitacional e mostra como ela permite explicar todos os movimentos dos planetas, dos cometas e dos satélites conhecidos na época [Martins, 2008].

### 3. Fundamentos da Mecânica Celeste

O movimento de um sistema composto por dois corpos influenciado por uma força direcionada ao longo da linha que conecta os centros de ambos é o chamado problema de força central. Como exemplos de forças centrais temos: as forças gravitacionais, moleculares, elétricas e elástica.

Nesta seção vamos destacar o problema de dois corpos celeste ou, ainda, o movimento planetário [Oliveira, 2014].

#### 3.1 Lagrangeano do Sistema de Dois Corpos

O sistema de dois corpos pode ser visualizado como na Figura 4, onde o vetor  $\vec{r}$  é a diferença entre os vetores  $\vec{r}_2$  e  $\vec{r}_1$ , que representam as coordenadas espaciais dos corpos de massa  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente.

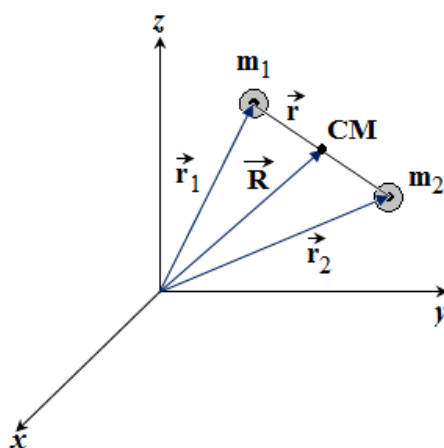


Figura 4: Sistema contém as massas  $m_1$  e  $m_2$ , e o vetor  $\vec{R}$  que representa as coordenadas do centro de massa (CM) do sistema.

Podemos descrever o sistema através do seu lagrangeano ( $L$ ), que é a diferença entre sua energia cinética ( $T$ ) e potencial ( $U$ ) [Marion, 2004]:

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{1}{2}(m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + m_2 \dot{\vec{r}}_2^2) - U(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad (1)$$



onde  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  são as velocidades dos corpos de massa  $m_1$  e  $m_2$ .

Entretanto, a equação (1) pode ser simplificada se adotarmos o sistema do ponto de vista de suas coordenadas  $\vec{R}$  e  $\vec{r}$ . Para isso, temos que:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_2}{m_1} + \frac{m_2 \vec{r}_1}{m_2}, \quad (2.a)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_1 \vec{r}}{m_1 m_2}, \quad (2.b)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2}, \quad (2.c)$$

onde as equação (2.b) e (2.c), que descrevem  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  em função de  $\vec{R}$  e  $\vec{r}$ , são substituídas na equação (1), resultado um novo lagrangeano:

$$L(\vec{r}, \vec{R}, \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{R}}) = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}), \quad (3)$$

em que  $M = m_1 + m_2$  e a massa reduzida é  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ .

Podemos notar que  $\vec{R}$  é uma coordenada cíclica, pois  $L$  não depende explicitamente dela, ou seja,  $\frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = 0$ . Como  $\vec{R}$  é cíclica, se aplicarmos a equação de Euler-Lagrange

[Marion, 2004] ao problema em questão temos:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{R}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} \right) = 0, \quad (4)$$

em que  $\vec{P}_{CM}$  é o momento linear do centro de massa do sistema, o qual é constante. Se  $\vec{P}_{CM}$  e constante, então sua energia cinética relacionada também é. Isto significa que o 1º termo do lado direito da equação (3) é constante e  $L$  só varia com  $\vec{r}$  e  $\dot{\vec{r}}$ , ou seja:

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(r). \quad (5)$$

A equação (5) equivale ao problema de uma partícula de massa  $\mu$ . Além disso, devido à simetria de rotação, o momento angular do sistema em relação a um eixo que passa pela origem se conserva,  $l = cte$ . Para verificar tal fato, aplicamos a equação de Euler- Lagrange ao sistema 2D (escrevendo  $L$  em coordenadas polares). Assim:

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 - U(r)), \quad (6)$$

De acordo com equação (6) nos diz que  $L$  não depende explicitamente de  $\theta$ , então:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \rightarrow l = \mu r^2 \dot{\theta}, \quad (7)$$

onde  $l$  é o momento angular constante, como já dito.

Podemos relacionar a equação (7) ao movimento planetário pela 2ª Lei de Kepler [Marion, 2004], que diz que um planeta, por exemplo, varre áreas iguais em tempos iguais ou, matematicamente:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2\mu}, \quad (8)$$

onde usamos a definição da equação (7) e a definição do elemento diferencial de área de um setor ( $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ ), representado na Figura 5.

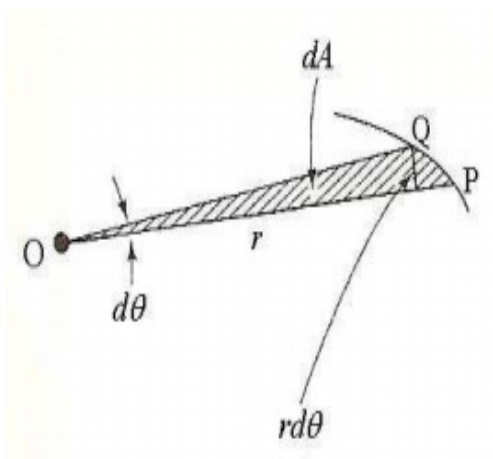


Figura 5: O planeta vai do ponto P ao ponto Q movimentando-se em torno do Sol (ponto O). No intervalo de tempo  $dt$ , o planeta cobre a distância  $rd\theta$  e o raio vetor varre a área sombreada na figura.

### 3.2 Conservação de Energia

A energia total do sistema é a soma de suas energias cinética e potencial, isto é:

$$E = T + U = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\theta}^2 + U(r), \quad (9)$$

onde  $\dot{r}^2$  o módulo ao quadrado do vetor velocidade. Usando a equação (7) na equação (9), tem-se:

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + V(r), \quad (10)$$

em que  $V(r) = \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$  é a energia potencial efetiva. A energia  $E$ , portanto, se conserva. A equação (10) corresponde agora ao problema de uma partícula de massa  $\mu$  em 1D com energia potencial efetiva  $V(r)$ .

### 3.3 Tipos de Movimento Devido a Uma Força Central

Toma-se como exemplo uma força que varia com o inverso do quadrado da distância isto é,  $F(r) = \frac{-k}{r^2}$ , e que seja conservativa ( $-\vec{\nabla}U = \vec{F}$ ). Tem-se, então, para a energia potencial:

$$U(r) = -\frac{k}{r}, \quad (11)$$

onde  $k$  é uma constante. Substituindo a equação (11) no potencial efetivo equação da equação (10), este (devido à atração gravitacional) passa a ser escrito como:

$$V(r) = \frac{-k}{r} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2}. \quad (12)$$

O gráfico da equação (12) é visto na Figura 6. Quando  $r \rightarrow \infty$ ,  $V$  tende à zero. Nesta Figura, se a energia total da partícula, dada pela equação (10), é positiva ( $E_1 > 0$ ), significa que seu movimento é ilimitado. Mais adiante, veremos que tal situação corresponde a uma órbita hiperbólica. Para energia nula ( $E = 0$ ), a trajetória da partícula corresponde a uma parábola. Para uma energia menor que zero e maior que a mínima, como  $E_2$ , então o movimento da partícula é limitado, com  $r_2 \leq r \leq r_4$ . Para a energia mínima ( $E_3$ ), o raio da órbita da partícula possui um valor único ( $r_3$ ) e, nesse caso, o movimento é circular [Oliveira, 2014].

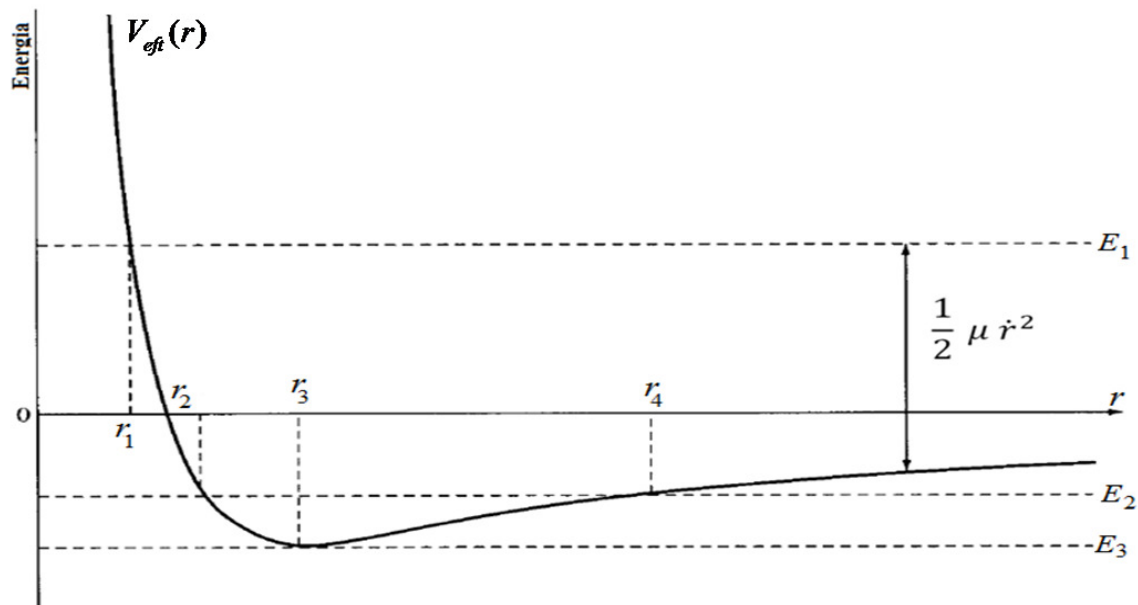


Figura 6: Gráfico de  $V_{\text{eff}}(r)$  e a relação com os possíveis valores para a energia total ( $E$ ) da partícula, o que nos fornece o seu tipo de movimento (órbita).

### 3.4 Equação da órbita de um Planeta

Pode-se encontrar a equação da órbita de um planeta, por exemplo, usando a equação de Euler-Lagrange para a coordenada  $r$  na equação (6) [Azevedo, 2001]. Assim, temos

(usando  $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$ ) [Symon, 1982]:

$$\frac{-dU}{dr} + \frac{l^2}{\mu r^3} - \mu \ddot{r} = 0, \quad (13.a)$$

$$F(r) = \mu \ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3}, \quad (13.b)$$

onde  $\mu \ddot{r}$  é uma força efetiva conservativa ( $F_{\text{ef}} = -\vec{\nabla} V$ ). Então, para encontrarmos a equação de movimento da partícula, precisamos conhecer  $\ddot{r}$ . Na equação (6),  $r = r(\theta)$ ; então:

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{d\theta} \dot{\theta}\right), \quad (14.a)$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\left[\frac{-l}{\mu} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = \frac{-l^2}{\mu^2 r^2} \frac{dr^2}{d\theta^2} \frac{1}{r}, \quad (14.b)$$

onde usa-se a definição da equação (7) para  $l$ . Substituindo a equação (14.b) na equação (13.b), temos:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{-\mu r^2}{l^2} F(r), \quad (15)$$

que é a equação de movimento do planeta. Para encontrar a equação de sua órbita de

raio  $r = r(\theta)$ , vamos escrever que  $r = \frac{1}{v}$  e  $F = -\frac{k}{r^2}$ . Daí a equação (15) é reescrita como:

$$\frac{d^2 v}{d\theta^2} + v = \frac{\mu k}{l^2}, \quad (16)$$

Resolvendo a equação (16), chegamos a  $v = A \cos(\theta) + \frac{\mu k}{l^2}$  [Sontos, 2007], onde A é, uma

constante. Usando o conceito de  $v = \frac{1}{r}$  e  $r = \frac{-l}{\mu} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$  na equação da energia da partícula ( $E$ ), temos:

$$E = \frac{l^2 A^2}{2\mu} = -\frac{1}{2} \frac{\mu k^2}{l^2}, \quad (17.a)$$

$$A = \frac{\mu k}{l^2} \left[1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}\right]^{1/2}. \quad (17.b)$$

Substituindo a equação (17.b) na equação  $v = A \cos(\theta) + \frac{\mu k}{l^2}$ , com  $v = \frac{1}{r}$ , tem-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \cos \theta \right], \quad (18.a)$$

$$\text{ou} \quad \frac{r_0}{r} = 1 + \varepsilon \cos \theta, \quad (18.b)$$

onde  $\varepsilon$  é chamada de excentricidade,  $r_0 = \frac{l^2}{\mu k}$  e a equação (18.b) representa uma seção cônica com um foco na origem, ou a equação da órbita do planeta.

### 3.5 O Raio da Órbita e a 3ª Lei de Kepler

No movimento planetário,  $r$  assume um valor mínimo para  $\theta = 0^0$  e um valor máximo para  $\theta = \pi$ . Esses valores são, respectivamente:  $\frac{r_0}{1+\varepsilon}$  e  $\frac{r_0}{1-\varepsilon}$  [Boyce, 2002]. Assumindo a órbita elíptica de um planeta temos que a soma destes valores corresponde a duas vezes o valor do semi-eixo maior da elipse (como vista na Figura 7), isto é:

$$r_{\text{máx}} + r_{\text{mín}} = 2a \rightarrow a = \frac{r_0}{1 - \varepsilon^2}. \quad (19)$$

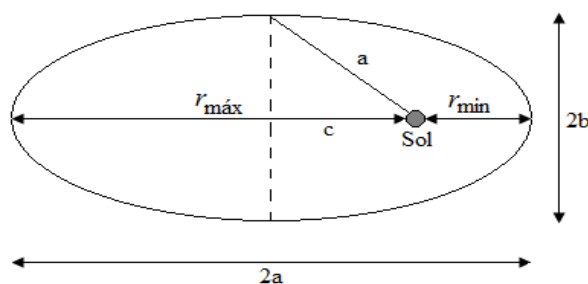


Figura 7: Órbita elíptica de um planeta, onde o Sol ocupa um dos focos da elipse, cuja distância focal é  $c$ .

Da 2ª Lei de Kepler (equação 8), tem-se que:

$$\frac{A}{T} = \frac{l}{2\mu} \rightarrow \pi ab = \frac{lT}{2\mu}, \quad (20)$$

onde  $T$  é o período de um ciclo e a área  $\pi ab$  varrida pelo planeta. Como a excentricidade é

definida por  $\mathcal{E} = \frac{c}{a}$  (onde  $c$  é a distância focal da elipse), usando  $a^2 = b^2 + c^2$  encontramos

o valor de  $b$  como sendo:

$$b = a\sqrt{1 - \mathcal{E}^2}. \quad (21)$$

Usando as equações (19) e (20) na equação (21), chegamos a [Oliveira, 2014]:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3 \mu}{k}, \quad (22)$$

Esta é a 3ª Lei de Kepler, que diz que o período é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da órbita elíptica ( $T^2 \sim a^3$ ).

A equação (18.b) podem resultar outros tipos de órbita além da elíptica a depender do valor de  $\mathcal{E}$ , como visto na Figura 8, que corresponde às energias e posições representadas na Figura 6, a qual nos diz que  $E$  não pode ser menor que o valor mínimo associado à órbita circular (se fosse, a energia cinética seria negativa).

Para finalizar esta seção, toma-se como exemplo a órbita elíptica de nosso planeta ( $\mathcal{E} = 0,016$  e  $E < 1$ ). [Varejão, 2005]. As massas da Terra ( $m_T$ ) e do Sol ( $m_S$ ) valem, respectivamente  $m_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$  e  $m_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$  [Halliday, 1993]; assim, calcula-se a massa reduzida desse sistema de dois corpos como sendo  $\mu \cong 398600,4418$ . Substituindo este valor na 3ª Lei de Kepler (equação 22), juntamente com  $\pi = 3,14152$ , com o semi-eixo maior da elipse valendo  $a \cong 6,378388 \times 10^6 \text{ m}$  [Varejão=Silva, 2005], e com  $k = Gm_S m_T$  ( $G$  é a constante universal da gravitação e vale  $G \cong 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^{-2} \text{ kg}^{-2}$ ) [Halliday,



1993]), encontramos o período de translação da Terra,  $T$ , como sendo  $T \cong 365,25$  dias, o que é coerente com os dados da literatura [Varejão, 2005].

Para...	Então...	E a órbita é
$\mathcal{E} > 1$	$E > 0$	Hiperbólica
$\mathcal{E} = 1$	$E = 0$	Parabólica
$0 < \mathcal{E} < 1$	$E < 0$	Elíptica
$\mathcal{E} = 0$	$E = \frac{-\mu K^2}{2l^2}$	Circular

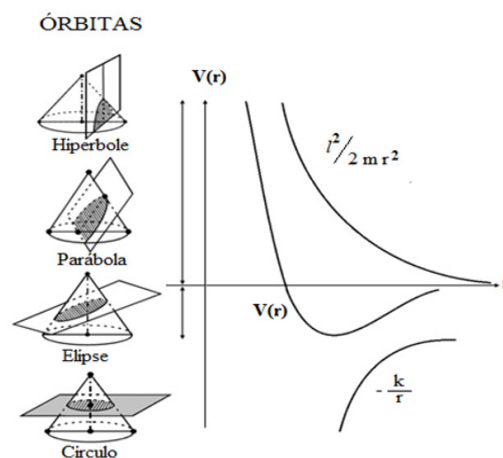


Figura 8: Valores das excentricidades e energias correspondentes representadas no gráfico da Figura 5, aqui repetido. A energia  $E$  não pode ser menor que o valor mínimo, associada à órbita circular. O valor de  $\mathcal{E} < 1$  (em destaque) corresponde à órbita da Terra.

## 4. Os Movimentos da Terra e as Estações do Ano

Embora pareça que o planeta Terra permaneça sempre imóvel ele, assim como os outros planetas do Sistema Solar, realiza vários movimentos. Os dois principais movimentos realizados pela Terra são: rotação e translação, ocorrendo simultaneamente e constituindo-se num dos importantes fatores a condicionar os elementos meteorológicos, fazendo com que estes variem no tempo, tanto na escala diária como na anual [Williams, 2013]. A Terra também executa os movimentos de nutação, revolução e precessão.

Neste tópico, discutiremos como os movimentos da Terra interferem na escala temporal dos fenômenos atmosféricos.

### 4.1 Movimento de Rotação

É o movimento de  $360^{\circ}$  que a Terra faz em volta de seu próprio eixo, como ilustra a Figura 9. A rotação é feita no sentido anti-horário, ou seja, de leste para oeste. O movimento completo tem a duração de 23 horas e 56 minutos [Williams, 2013].

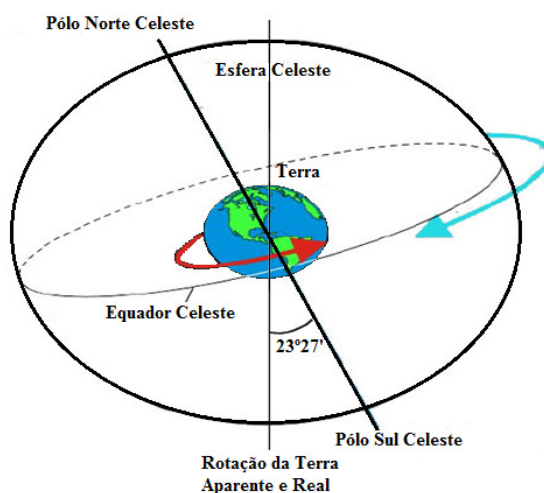


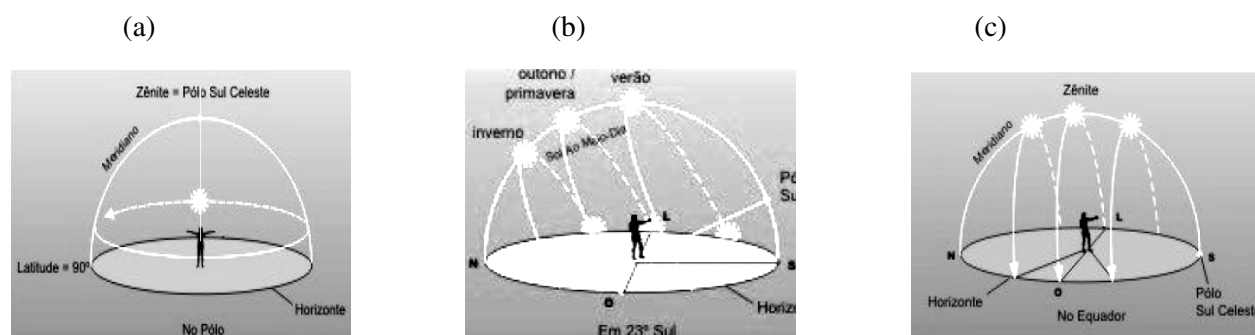
Figura 9: Movimento de Rotação da terra, cujo eixo de inclinação equivale a  $23^{\circ} 27'$

Graças ao movimento de rotação, existe o dia e a noite. Enquanto a superfície de metade do nosso planeta fica voltada para o Sol temos o dia nesta parte (com presença da luz solar). Já a noite ocorre na outra parte do planeta que não recebe a luz solar, ficando no escuro.

## 4.2 Movimento de Translação

É o movimento que o planeta Terra faz ao redor do Sol. Chamado de órbita terrestre, este movimento é elíptico (forma de elipse), como foi visto na seção 3 deste Trabalho de Conclusão de Curso. A translação completa tem a duração de 365 dias, 5 horas e, aproximadamente, 48 minutos [Vladimir, 1989]. Chama-se de ano a volta completa que nosso planeta dá ao redor do Sol. A velocidade da Terra neste movimento é de 107 mil Km/h [Vladimir, 1989]. Embora as estações do ano estejam relacionadas com o movimento de translação, não quer dizer que seja verão numa região porque a Terra está mais próxima do Sol.

Sabemos que numa mesma época do ano é verão num hemisfério e inverno no outro. Na verdade, temos que estar atentos à inclinação da Terra. As estações do ano estão relacionadas com a inclinação do eixo de rotação do planeta em relação à sua órbita. Se observarmos bem, perceberemos que o Sol não "nasce" sempre no mesmo local. Ao longo do ano ele muda ligeiramente de posição. Como visto na Figura 10. No caso do hemisfério Sul, de Leste para o Norte com a proximidade do inverno e de Leste para o Sul com a proximidade do verão. A trajetória descrita pelo Sol na esfera celeste ao longo do ano é chamada de *eclíptica*, ilustrada na Figura 11. A inclinação dessa trajetória em relação ao equador celeste é de aproximadamente  $23^{\circ}27'$



*Figura 10: Em (a), nos polos, durante o verão, o Sol nunca se põe no horizonte ( $N=24h$ ); em (b), no equador, o Sol ora fica ao sul do observador e ora ao norte. Além disso, o Sol passa a pino duas vezes por ano nessa região; em (c), na latitude de  $23^{\circ}27'$  Sul, o Sol passa a pino na região somente uma vez por ano (solstício de verão). Nas demais épocas do ano o observador vê sempre o sol ao norte.*

A distância da Terra ao Sol varia com o tempo e, portanto, a velocidade da Terra em torno do Sol não é sempre a mesma. No entanto, podemos obter a *velocidade média* da Terra

em torno do Sol considerando a distância média  $R$  entre eles e o tempo gasto pela Terra para dar uma volta em torno do Sol.

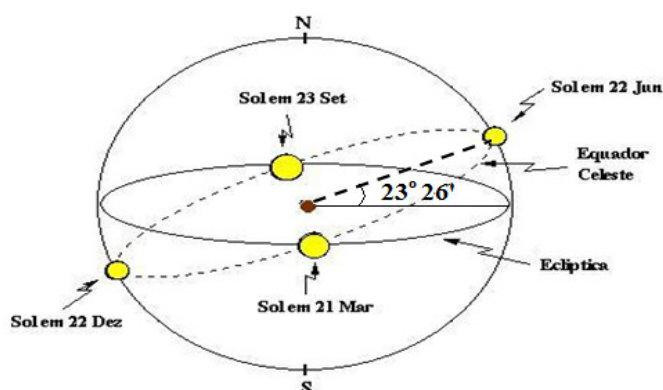


Figura 11: Posições do Sol na eclíptica ao longo do ano.

Aproximando a órbita da Terra de um círculo (o que é muito razoável, pois a elipticidade da órbita da Terra é muito pequena), podemos obter o módulo da velocidade linear da Terra em função do seu movimento de translação pela equação [Halliday, 1993]

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad , \quad (23)$$

onde a Terra está mais próxima do Sol à distância  $R = 147.100.000$  km, isto é, na posição de periélio (em torno de 04 de julho) [Filho, 2010]; encontra-se que, neste caso, a sua velocidade devido ao movimento de translação é 108.720,7 km/h. Na posição de afélio (em torno de 03 de janeiro) [Filho, 2010], quando a Terra está mais distante do Sol, temos  $R = 152.100.000$  km, e a velocidade obtida é de aproximadamente 109.040 km/h.

### 4.3 Outros Tipos de Movimentos

**Nutação:** oscilação pequena e periódica no eixo de rotação da Terra representado na Figura 12. É gerada pela força de atração gravitacional entre a Lua e o Sol com a Terra. Este movimento tem um ciclo de 18,6 anos [Chun, 1992].

**Revolução:** deslocamento no nosso planeta em relação ao centro da Via Láctea [Chun, 1992].

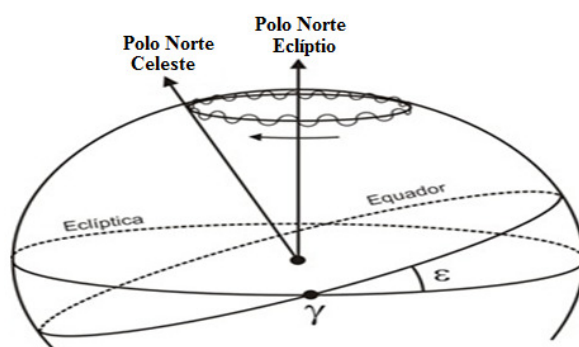


Figura 12: Nutação da Terra [Chun, 1992].

**Precensão dos Equinócios:** ilustrado na Figura 13, representa uma lenta mudança na direção do eixo de rotação da Terra. É exercida pelas forças da maré da Lua e Sol sobre a protuberância equatorial da Terra que não é perfeitamente esférica, mas sim achatada nos polos e bojuda no equador, cujo diâmetro é cerca de 40 km maior do que o diâmetro polar [Chun,1992]. Além disso, o plano do equador terrestre e, portanto, o plano do bojo equatorial, está inclinado  $23^{\circ} 27'$  em relação ao plano da eclíptica que, por sua vez, está inclinado  $5^{\circ} 8'$  em relação ao plano da órbita da Lua [Chun, 1992]. Por causa disso, as forças diferenciais (que ficam mais importantes nos dois bojos da Terra) tendem não apenas a achatá-la ainda mais, como também a "endireitar" o seu eixo.

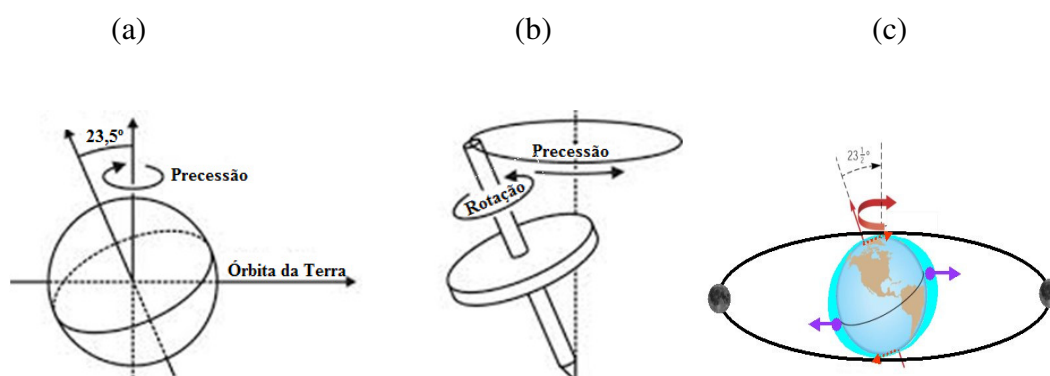


Figura 13: Precensão da Terra (a), e comparação com o movimento de um pião(b). O efeito de achatamento dos polos é representado em (c).

Como a Terra está girando, o eixo da Terra não se alinha perfeitamente com o eixo da eclíptica, mas *precessiona* em torno dele, da mesma forma que um pião posto a girar precessiona em torno do eixo vertical ao solo. No caso do pião, o seu peso gera um

torque  $\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g}$ , onde  $\vec{r}$  é o vetor posição do centro de massa do pião em relação ao ponto de contato com o solo, e  $m\vec{g}$  é a força peso. Portanto o torque  $\vec{\tau}$  é paralelo ao solo, perpendicular à força peso, e perpendicular ao momento angular de rotação do pião, como mostra a Figura 14. Em módulo, seu valor é  $\tau = mg \sin\theta$ , sendo  $\theta$  o ângulo de inclinação do eixo do pião em relação à vertical ao solo. Como o torque é dado por  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ , o seu efeito é variar o momento angular do pião. Essa variação é expressa por  $d\vec{L} = \vec{\tau} dt$ , ou seja, tem a mesma direção de  $\vec{\tau}$ . Como  $L$  e  $d\vec{L}$  são perpendiculares, o torque não altera o módulo de  $\vec{L}$ , mas apenas sua direção, fazendo-o precessionar em torno do eixo perpendicular ao solo.



Figura 14: Precessão de um pião e representação de seu momento angular  $\vec{L}$  (a) e variação da direção da direção de  $\vec{L}$  (b).

#### 4.4 As características das Estações do Ano

Agora que os movimentos da Terra foram abordados, vamos destacar uma das principais consequências para planeta: as estações do ano.

O movimento de translação, juntamente com a inclinação do eixo terrestre em  $23^{\circ}27'$  em relação ao plano da eclíptica, é responsável pela variação de radiação solar que atinge a superfície terrestre durante uma época do ano. Portanto, durante a translação, cada época do ano apresentará uma estação diferente: outono, inverno, primavera ou verão [Williams, 2013].

O modo e a intensidade com que os raios solares atingem a Terra durante a translação marcam o início das estações do ano. São os chamados equinócios e solstícios [Coffey, 2010], esquematizados na Figura 15.

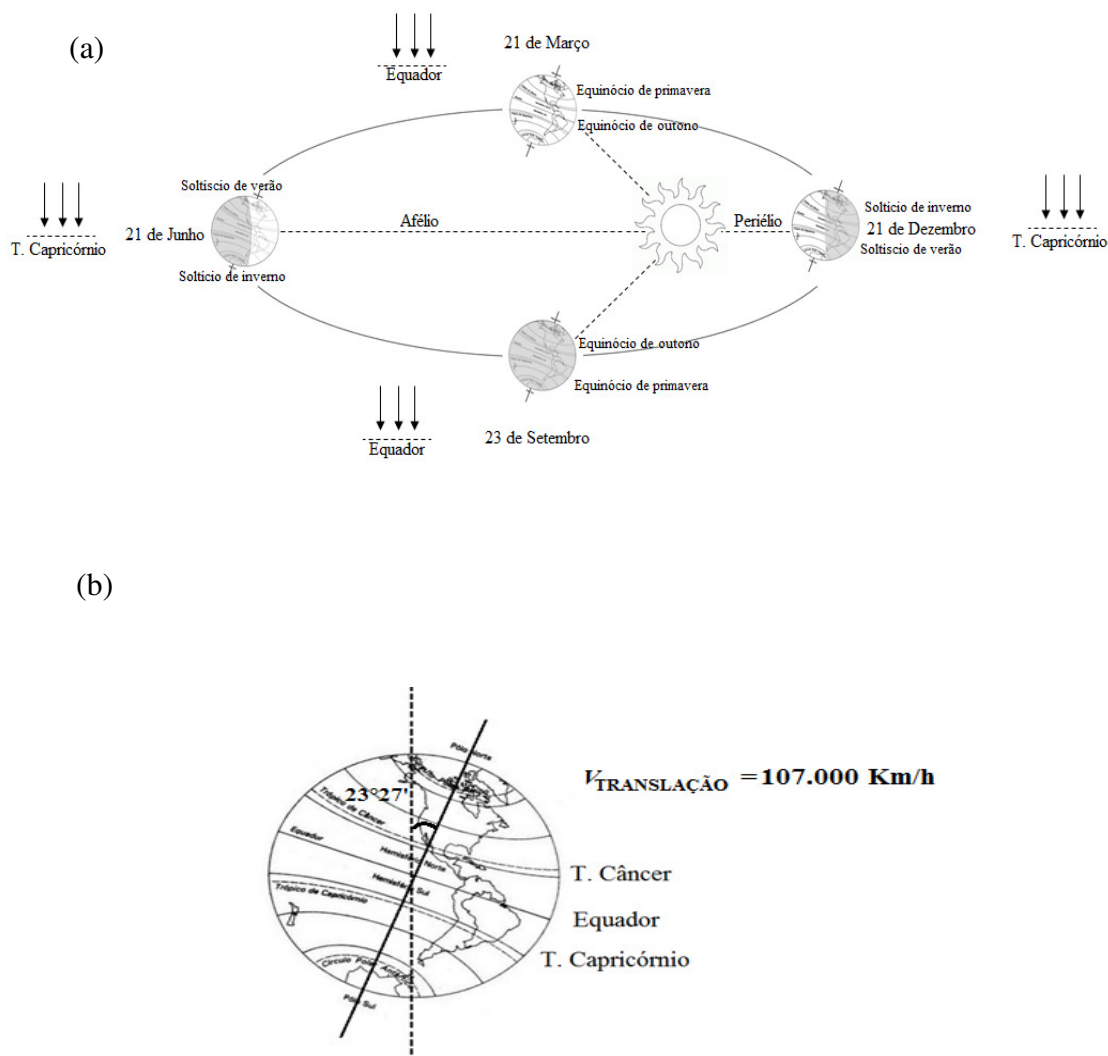


Figura 15: Movimento de rotação da Terra e suas posições durante a trajetória ao redor do Sol, onde percebemos as datas em que se iniciam os Equinócios e Solstícios, bem como as mudanças de estações do ano (a). Em (b), temos a velocidade de translação da Terra e o detalhe da inclinação do seu eixo.

Próximo a 21 de março, a radiação solar incide perpendicularmente à linha do Equador, tendo o dia e a noite a mesma duração na maior parte das regiões do planeta. Esse dia marca os inícios da primavera no hemisfério Norte (equinócio de primavera) e do outono no hemisfério Sul (equinócio de outono), respectivamente.

Próximo a 21 de junho, os raios solares incidem perpendicularmente à linha do trópico de Câncer, fazendo com que o hemisfério Norte receba uma radiação muito mais intensa que o Sul. Este dia, sendo o mais longo do ano (Solstício de verão), marca o início do verão no Norte; já no hemisfério Sul é o início do inverno, com a noite mais longa do ano (Solstício de inverno).

Próximo a 23 de setembro, novamente os dois hemisférios recebem a mesma intensidade de radiação solar, e o dia e noite voltam a ter a mesma duração nos dois hemisférios. Este dia que marca os inícios do outono no Norte e da primavera no sul, respectivamente.

Finalmente, próximo a 21 de dezembro, é no hemisfério Sul que os raios solares incidem com maior intensidade (a radiação incide perpendicularmente ao trópico de Capricórnio). Este dia é o mais longo do ano no Sul e marca o início do verão neste hemisfério. No Norte, é a noite mais longa e o início do inverno.

Os dias que marcam o início de cada estação do ano podem variar um pouco pois cada uma se inicia, literalmente, quando a Terra e o Sol estão numa posição em que os raios solares incidem perpendicularmente à linha do Equador ou a um dos trópicos. Na Figura 16 observa-se o início das estações nos últimos anos e a previsão para 2014.

ESTAÇÃO	2011		2012		2013		2014	
	Data	orário de Brasília	Data	orário de Brasília	Data	orário de Brasília	Data	orário de Brasília
<b>OUTONO</b>	20/03	20:21	20/03	02:14	20/06	08:02	20/03	13:57
<b>INVERNO</b>	21/06	14:16	20/06	20:09	21/06	02:04	21/06	7:51
<b>PRIMAVERA</b>	23/09	06:05	22/09	11:49	22/09	17:44	22/09	23:29
<b>VERÃO (*)</b>	22/12	02:30	21/12	08:12	21/12	14:11	21/12	20:03

Figura 16: Datas e horários do início das estações do ano nos últimos três anos e a previsão para 2014

(Fonte: INMET- Instituto Nacional de Meteorologia).



## 5. Medidindo a Velocidade Angular da Terra: Uma Aplicação no Ensino Médio

Nesta seção mostraremos como, usando materiais de baixo custo, podemos medir a velocidade angular da Terra, uma ideia buscada nos conceitos de declinação solar e movimento circular uniforme (também aqui abordados) e que pode ser levada à sala de aula no Ensino Médio.

### 5.1 Declinação Solar

Chama-se declinação solar ( $\delta$ ) a distância angular do Equador ao paralelo do Sol, ou seja, é o ângulo formado entre a linha imaginária que une o centro do planeta Terra (na linha do Equador) ao centro do Sol. Ela varia de  $23^\circ 27'$  a  $-23^\circ 27'$ , como visto na Figura 17.

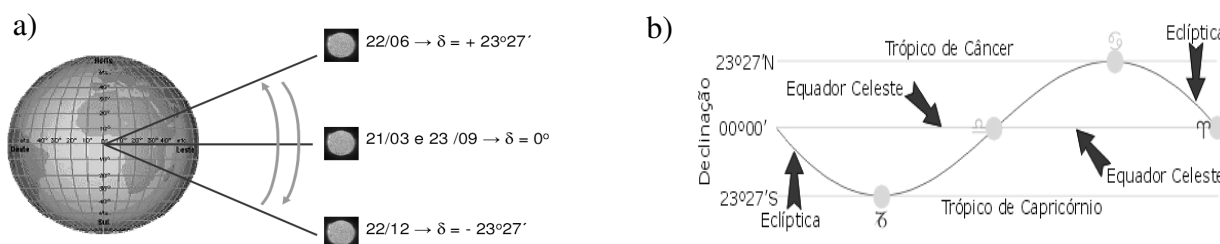


Figura 17: Valores das declinações solares em datas específicas do ano (a) e representação didática da intersecção entre as linhas imaginárias da Terra e da eclíptica Solar (b). O valor  $\delta = 0^\circ$  correspondente ao instante em que a Terra atinge uma posição em sua órbita onde o Sol parece estar situado exatamente na intersecção da linha do Equador com a eclíptica, ou seja, é o instante em que o Sol, no seu movimento anual aparente pela eclíptica, corta o Equador celeste (equinócio).

Sabemos que a equação que é usada para medir essa declinação é

$$\delta = 23,45 \operatorname{sen} \left[ \frac{360}{365} (284 + n) \right]$$

onde  $n$  é o número de dias [Varejão-Silva, 2005].

A Figura 18 representa a declinação solar, medida a cada quinze dias dos referidos meses do ano, Analisando as Figuras 17 e 18 podemos obter as seguintes informações:

- Quando a declinação atinge os valores máximo e mínimo, recebe o nome de solstício: solstício de inverno no hemisfério sul e de verão no hemisfério norte, com  $\delta_{máx} = 23^\circ 27'$ , ocorrendo

próximo a 22 de junho, e solstício de inverno no hemisfério norte e verão no hemisfério sul, com  $\delta_{\text{mín}} = -23^{\circ}27'$ , ocorrendo próximo a 22 de dezembro.

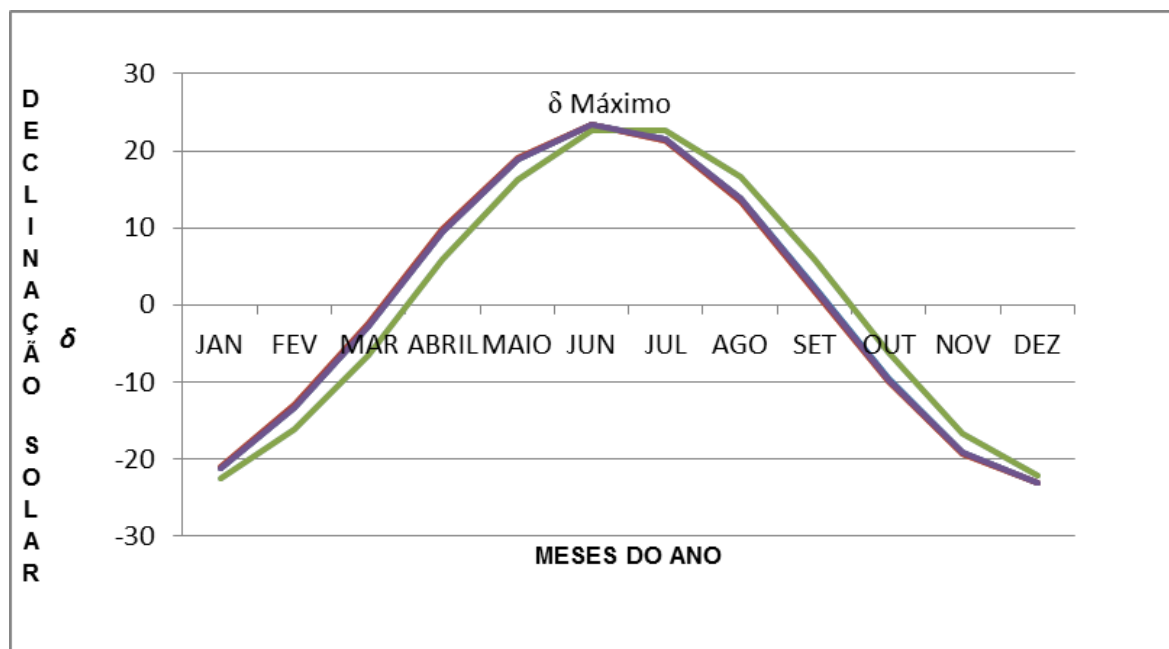
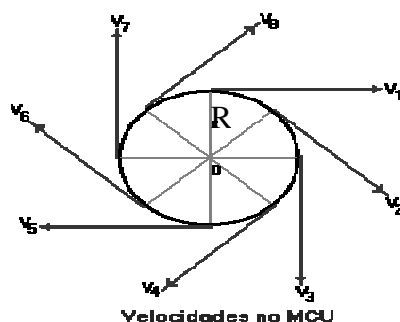


Figura 18 – Gráfico da declinação solar ( $\delta$ ) em graus em função do 15º dia de cada mês.

- O equinócio de primavera no hemisfério norte e de outono no hemisfério sul, ocorrendo próximo a 22 de março, e o equinócio de primavera no hemisfério norte, próximo a 22 de setembro, correspondem a  $\delta = 0^{\circ}$ .
- A declinação do sol varia mais rapidamente com o tempo nas épocas próximas aos equinócios.
- A mudança de declinação solar com o tempo está associada ao movimento de translação da Terra e é causada pela inclinação do eixo da Terra.

## 5.2 Movimento Circular Uniforme

O movimento circular uniforme (MCU), representado na Figura 19, é o movimento no qual o corpo descreve trajetória circular, podendo ser uma circunferência ou um arco de circunferência. A velocidade escalar permanece constante durante todo o trajeto e a velocidade vetorial apresenta módulo constante, no entanto sua direção é variável [Alvarenga, 2010].



*Figura 19: Movimento circular uniforme, cujos vetores representam as velocidades vetoriais em cada ponto da trajetória circular e  $R$  é o raio da circunferência.*

Um corpo que descreve um movimento circular uniforme passa de tempo em tempo no mesmo ponto da trajetória, sempre com a mesma velocidade. Assim, podemos dizer que esse movimento é repetitivo, isto é, é um movimento periódico, o qual se relaciona a dois conceitos muito importantes que são [Alvarenga, 2010]:

**Frequência:** é uma grandeza física que indica o número de ocorrências de um evento (ciclos, voltas, oscilações, etc.) em um determinado intervalo de tempo.

**Período:** é o tempo necessário para que um movimento realizado por um corpo volte a se repetir. As equações que determinam o MCU são [Tipler, 2000]:

$$S = \theta \cdot R, \quad (24)$$

onde  $S$  representa a posição angular do corpo em função do ângulo  $\theta$  e o raio  $R$  da circunferência;

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad (25)$$

onde  $\omega$  corresponde à velocidade angular média e

$$a_c = \frac{v^2}{R}, \quad (26)$$

em que  $a_c$  é a aceleração centrípeta e  $v$  a velocidade escalar.

### 5.3 Medindo a Velocidade Angular da Terra

A finalidade deste experimento é utilizar uma prática simples para medir a velocidade angular da Terra. Para isto utilizou-se materiais de baixo custo. O experimento contou com a participação de uma turma de 1º ano do Ensino Médio da escola Major Veneziano do Rego, no Bairro da Catingueira, Campina Grande-PB. Tal prática poderá servir para uso de professores como melhora do processo de ensino/aprendizagem em relação ao conteúdo de cinemática no tópico que aborda o movimento circular. Os materiais utilizados foram um cabo de vassoura; uma trena; um cronômetro.

Primeiramente tomou-se alguns cuidados para que a experiência fosse realizada em um período fora dos equinócios, pois neste período a declinação é  $\delta = 0^\circ$ , portanto inviável para realização do experimento. Sendo assim, o experimento foi realizado no mês de junho, após 21 dias decorridos. Outro cuidado que deve-se ter é procurar um local plano para melhor visualizar a sombra que será formada.

Em seguida mediu-se o comprimento  $h$  do cabo de vassoura como sendo  $h = 1,14$  metros (utilizou-se este comprimento). Então fixa-se o mesmo no solo e, de posse de uma trena e um cronômetro, iniciamos o experimento (usamos o cronômetro do telefone celular marcando o instante inicial no em  $t_I = 0$ ). Mediu-se a sombra formada pelo cabo de vassoura, devido aos raios solares incidentes nele, de acordo com a Figura 20. Esta medida tem que ser realizada a cada 10 minutos e pelo menos três vezes, totalizando um tempo de 30 minutos. A sombra está associada a um ângulo  $\square$ . A partir do cálculo da tangente do ângulo, somos capazes de encontrar a direção da sombra e em seguida transformar  $\square$  em radianos. Assim, substituímos o valor de  $\square$  (em radianos), juntamente com o valor do intervalo do tempo ( $\Delta t$  correspondendo ao intervalo entre 2 medições consecutivas) na equação  $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ , e comparamos o resultado com a literatura.

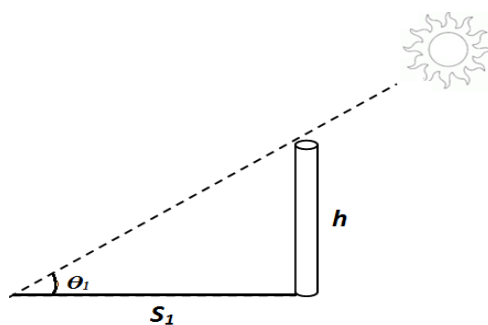


Figura 20: Desenho do aparato experimental onde  $h =$  altura do cabo de vassoura,  $S$  é a sombra dos raios incidentes sobre o cabo,  $r$  é a direção dos raios incidentes,  $\theta$  é o ângulo formado entre o cabo de vassoura e os raios incidentes. Com esta configuração encontra-se  $\text{tg } \theta = \frac{h}{S}$ .

A tabela na Figura 21 mostra o instante em que foi medido o comprimento  $S$  da sombra e a relação deste como a posição do Sol e, conseqüentemente, com o ângulo  $\theta$ .

Para o cálculo dos ângulos da Figura 21, usamos a relação

$\text{tg } \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{h}{S}$ . Assim, obtivemos (com  $h = 1,14\text{m}$ ):

$$\text{tg } \theta_1 = \frac{1,14}{0,792} = 1,43 \quad \text{arctg}_1(1,43) = 55,21^\circ = \theta_1, \quad (27.a)$$

$$\text{tg } \theta_2 = \frac{1,14}{0,870} = 1,31 \quad \text{arctg}_1(1,31) = 52,94^\circ = \theta_2, \quad (27.b)$$

$$\text{tg } \theta_3 = \frac{1,14}{0,952} = 1,19 \quad \text{arctg}_2(1,19) = 50,13^\circ = \theta_3, \quad (27.c)$$

$$\text{tg } \theta_4 = \frac{1,14}{1,032} = 1,10 \quad \text{arctg}_3(1,10) = 47,84^\circ = \theta_4. \quad (27.d)$$

Sabendo que  $1 \text{ rad} = 57,3^\circ$  [Tipler, 2000], usamos este conceito nas equações (27.a),(27.b),(27.c) e 27.d) e encontramos os valores de  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  e  $\theta_4$  em radianos, vistos na tabela da Figura 22.

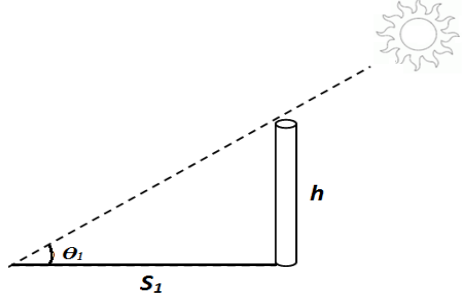
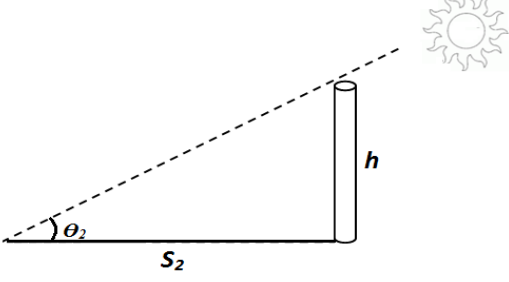
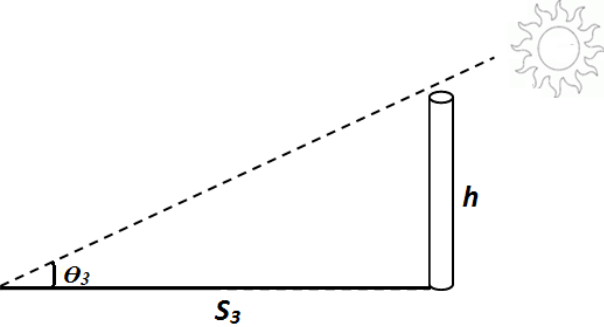
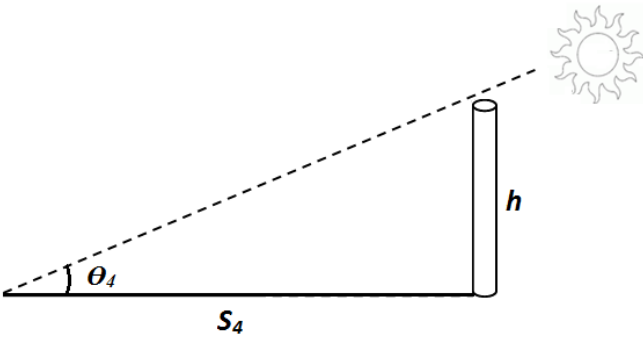
Tempo (minutos)	Ângulo $\alpha$ ( $^{\circ}$ )	Comprimento $S$ da sombra (m)	Figura Correspondente à Situação
0	$\alpha_1$	0,792	
10	$\alpha_2$	0,870	
20	$\alpha_3$	0,952	
30	$\alpha_4$	1,032	

Figura 21: Esquema experimental. As medidas foram iniciadas às 14:00 hs do dia 21 do mês de junho de 2013; observa-se, à medida que o tempo passa, que a sombra  $S$  vai aumentando. Cada  $\alpha$  corresponde ao um tamanho  $S$ , em um instante de tempo medido em minutos.

Tempo (s)	Comprimento da Sombra (m)	$\theta$ (°)	$\theta$ (rad)	Velocidade Angular (rad/s)
0	0,792	55,21	0,963	
600	0,870	52,94	0,919	$7,33 \times 10^{-5}$
1200	0,952	50,13	0,875	$7,33 \times 10^{-5}$
1800	1,032	47,84	0,833	$7,00 \times 10^{-5}$
				$\omega_m = 7,22 \times 10^{-5}$

Figura 22: Valores medidos no experimento do cálculo da velocidade angular média da Terra, com erro menor que 1%.

Finalmente, para o cálculo da velocidade angular média, Utiliza-se a equação

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \text{ e chegamos a:}$$

$$\omega_A = \frac{\theta_1 - \theta_2}{t_2 - t_1} \rightarrow \omega_A = \frac{0,963 - 0,919}{600 - 0} \rightarrow \omega_A = 7,22 \times 10^{-5} \text{ rad / s,} \quad (28.a)$$

$$\omega_B = \frac{\theta_1 - \theta_2}{t_2 - t_1} \rightarrow \omega_B = \frac{0,919 - 0,875}{1200 - 600} \rightarrow \omega_B = 7,00 \times 10^{-5} \text{ rad / s,} \quad (28.b)$$

$$\omega_C = \frac{\theta_1 - \theta_2}{t_2 - t_1} \rightarrow \omega_C = \frac{0,875 - 0,833}{1800 - 1200} \rightarrow \omega_C = 7,22 \times 10^{-5} \text{ rad / s,} \quad (28.c)$$

$$\omega_m = \sum_{i=A}^C \frac{\omega_i}{3} = 7,22 \times 10^{-5} \text{ rad / s,} \quad (28.d)$$

onde os valores obtidos para  $\omega_A$ ,  $\omega_B$  e  $\omega_C$ , bem como a velocidade angular média  $\omega_m$ , também estão expostos na Figura 22. O erro na determinação de  $\omega_m$  foi de  $\pm 0,69\%$  (tomando como valor de referência a velocidade angular da Terra [Soares, 2003] como sendo  $\omega_{ref} = 7,27 \times 10^{-5} \text{ rad / s}$ ). Quanto à precisão dos resultados desde experimento, nosso caso apresentou um erro menor que 1%, muito bom em termos de aceitabilidade (um erro de até  $\pm 15\%$  é razoável). Quanto à parte didática, este experimento é considerado uma boa prática pois, com materiais simples a exemplo dos utilizados aqui, é possível verificar uma aplicação muito interessante, em sala de aula, do conteúdo de movimento circular.

Existem outras maneiras igualmente didáticas de se medir a velocidade angular da Terra [Schappo,2009], [Valadares, 2002], mas que o método usado neste trabalho não foi encontrado na literatura à época da realização do experimento.

## 6. Conclusões

Neste trabalho comentou-se sobre diferentes personagens que contribuíram para o desenvolvimento da Mecânica Celeste desde o notável filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C). Segundo ele, a Terra era o centro do universo e os demais planetas giravam ao seu redor. Sua teoria sobre a Mecânica Celeste foi aceita por mais de 2000 anos. Relatou-se também a grande contribuição de Issac Newton no século XXVII, com o fechamento da revolução Copernicana que colocou o Sol no centro do universo (heliocentrismo). As três leis de Kepler são apresentadas nesta parte do trabalho com um formalismo que as relaciona com a órbita dos planetas e o período de translação da terra, usada como exemplo de aplicação (tomando como referência o sistema de dois corpos no problema das forças centrais).

Em seguida abordaram-se os movimentos de rotação e translação da Terra e suas implicações nas estações do ano. A constatação é que a inclinação do eixo da Terra em relação à eclíptica do Sol é que é a responsável pela mudança de estações do ano.

Como destaque do trabalho, descreveu-se o experimento que possibilitou-nos medir a velocidade angular média da Terra usando materiais de baixo custo. A velocidade medida,  $\omega_m = 7,22 \times 10^{-5} \text{ rad / s}$ , com erro de  $\pm 0,69\%$ , vem confirmar que o método utilizado oferece precisão e se mostra uma ferramenta interessante do tópico de MCU abordado no Ensino Médio.



## 7. Referências Bibliográficas

[Alvarenga, 2010] Antônio Máximo e Beatriz Alvarenga, *Curso de Física*, vol. 1, São Paulo Scipione (2010).

[Azeredo, 2001] Abel D. Azeredo, *Teoria do Campo Gravitacional na Mecânica Newtoniana* (2001).

[Boyce, 2002] Richard C. Boyce e William E. Diprima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 7ª edição, Rio de Janeiro LTC (2002).

[Bombassaro, 2007] Luiz Carlos Bombassaro, *Giordano Bruno e a Filosofia na Renascença*, 1ª edição, Educs (2007).

[Caniato, 1981] Rodolpho Caniato, *O Céu*, vol. 1 do Projeto brasileiro para o ensino de física, 3ª edição, São Paulo: Fundação Tropical de pesquisas e tecnologia (1978).

[Chun, 1992] W. I. Chun, *Estudo da Precessão e Nutação*, IAG, São Paulo: Universidade de São Paulo (1992).

[Coffey, 2010] Jerry Coffey, *Earth's Orbit Around The Sun*, Universe Today, em <http://www.universetoday.com/61202/earths-orbit-around-the-sun/> (2010).

[Filho, 2010] José Fideles Filho, *Radiação Solar – Estações do Ano Notas de Aula*, UEPB, Campina Grande (2010).

[Gleiser, 2006] Marcelo Gleiser, *A harmonia do mundo: aventuras e desventuras de Johannes Kepler, sua astronomia mística e a solução do mistério cósmico, conforme reminiscências de seu mestre Michael Maestlin*, São Paulo, Cia. das Letras (2006).

[Halliday, 1993] David Halliday, Robert Resnick e Jearl Walker, *Fundamentos da Física*, vol 1 , 2ª edição, Rio de Janeiro, LTC (1993).

[King, 2003] Henry C. King, *The History of the Telescope*, Dover Publications, Inc. (2003)

[Llwellyn, 2006] Paul A. Tipler e Ralph A. Llwellyn, *Física Moderna*, vol. 3. 3ª edição, Rio de Janeiro, LTC (2006).

[Marion, 2004] J.B. Marion e S.T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and System*, 5a edição, Saunders College Publishing (2004).

[Martins, 1997] Roberto de Andrade Martins, *O Universo: Teoria sobre sua origem e evolução*, São Paulo, Editora Moderna (1997).

[Martins, 2008] Roberto de Andrade Martins e Walmir Thomazi, *O Trattato della Sfera ovvero Cosmografia de Galileo Galilei e algumas Cosmografias e Tratados da Esfera do Século XVI*, em <http://www.ghc.usp.br/server/pdf/ram-Sfera-Galileo.pdf> (2008).

[Nussenzveig, 2002] H. Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, vol. 1, 4ª edição, São Paulo: Edgard Blücher (2002).

[Oliveira, 2014] Tâmara R. Oliveira, *Movimento de Ação de uma Força Central e Movimento em Referenciais Inerciais*, Notas de aula, UEPB, Campina Grande (2014).

[Santos, 2013] Reginaldo J. Santos, *Introdução à Equações Diferenciais Ordinárias*, Belo Horizonte, Imprensa Universitária da UFMG (2013).

[Schappo, 2009] Marcelo Girardi Schappo, *Medindo a velocidade de rotação da Terra em casa*, Física na Escola, vol. 10, n. 2 (2009).

[Symon, 1982] Keith R. Symon, *Mecânica*, Rio de Janeiro, Editora Campus (1982).

[Soares, 2003] Francisco Ramalho Júnior, Nicolau Gilberto Ferreira e Paulo Antônio de Toledo Soares, *Os fundamentos da física*, 8ª edição, São Paulo, Editora Moderna (2003).

[Tipler, 2000] Paul A. Tipler, *Física para cientistas e engenheiros*, vol. 1, 4ª edição, Rio de Janeiro, LTC (2000).

[Varejão-Silva, 2005] Mario Adelmo Varejão, *Meteorologia e Climatologia*, versão digital, Recife (2005).

[Vladimir, 1989] Vladimir Igorević Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2ª edição, Springer (1989).

[Valadares, 2002] Eduardo de Campos Valadares, *Física Mais que Divertida*, Belo Horizonte, Editora UFMG (2002).

[Volchan, 2007] Sérgio B. Volchan, *Uma Introdução a Mecânica Celeste*, em 26º Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, IMPA (2007).

[Williams,2013] David R. Williams, *Earth Fact Sheet*, NASA, em  
<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html> (2013).