UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

ILDEMAR BARRETO VELOSO

UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN-MAXWELL EM $(3 + 1)$ DIMENSÕES

CAMPINA GRANDE - PB
2014

ILDEMAR BARRETO VELOSO

UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN-MAXWELL EM (3 + 1) DIMENSÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

CAMPINA GRANDE - PB
2014

V443s Veloso, Ildemar Barreto.
Uma solução das equações de Einstein-Maxwell em (3 + 1) dimensões [manuscrito] / Ildemar Barreto Veloso. - 2014.
24 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva, Departamento de Física".

1. Relatividade geral. 2. Espaço-Tempo. 3. Solução de Reissner-Nordström. I. Título.

21. ed. CDD 530.11

ILDEMAR BARRETO VELOSO

UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN-MAXWELL EM (3 + 1) DIMENSÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Aprovado em 21/07/2014.

Jean Paulo Spinelly da Silva

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva / UEPB
Orientador

Jardel Lucena da Silva

Prof. Msc. Jardel Lucena da Silva / UEPB
Examinador

Elialdo Andriola Machado

Prof. Msc. Elialdo Andriola Machado / UEPB
Examinador

RESUMO

A Relatividade Restrita é fundamentada por dois postulados: a covariância das leis físicas e a constância da velocidade da luz. Porém, esta teoria não se aplica quando tratamos de referenciais não inerciais. Para este caso, necessitamos de uma teoria que a generalize. Nesse contexto, uma teoria mais poderosa que a substitui, é a Relatividade Geral. Esta, foi construída baseada nos princípios da equivalência e covariância geral, e é a teoria da gravitação que permite um espaço-tempo que se modifica mediante a presença de matéria e energia, isto é, um espaço-tempo curvo. Essa nova concepção de espaço-tempo requer que o campo gravitacional seja descrito pelo tensor métrico, que é solução das equações de campo de Einstein. Logo, nossa proposta consiste em investigar o campo gravitacional de um corpo carregado com simetria esférica, também chamado de solução de Reissner-Nordström. Como veremos, esta será uma solução das equações de Einstein-Maxwell acopladas.

PALAVRAS-CHAVE: Relatividade Geral, Espaço-Tempo, Solução de Reissner-Nordström.

1 Introdução

A relatividade estuda a relação entre os valores medidos em referenciais que estão se movendo um em relação ao outro. Esta relação, era algo discutido rotineiramente pelos físicos em 1905, ano em que Albert Einstein propôs a *Teoria da Relatividade Restrita*.

A Relatividade Restrita trata do estudo de medidas realizadas em diferentes referenciais inerciais, isto é, referenciais em que as leis de Newton são válidas. Einstein propôs esta teoria partindo de dois postulados; que as leis da física são as mesmas em todos os referenciais, não existindo assim um referencial absoluto; e que a velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor em todos os referenciais inerciais (HALLIDAY, D., RESNICK, R. e WALKER, J., 2009). Porém, quando se trata de referenciais não inerciais, precisamos de uma teoria mais geral.

Numa série de artigos, Einstein formulou a *Teoria da Relatividade Geral*, que generaliza a Relatividade Restrita para referenciais não inerciais. Dentre alguns aspectos dessa teoria, está o fato que o campo gravitacional é representado pela geometria de um espaço-tempo não-euclidiano. Isto quer dizer que a presença de matéria ocasiona que o espaço-tempo se curve na sua vizinhança, tal que este se torne não-euclidiano (RESNICK, 1971). Na relatividade geral, um objeto chamado tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, contém toda a informação geométrica do espaço-tempo, e, para determinarmos este tensor, devemos resolver o conjunto de equações, denominado equações de Einstein. Tais equações são uma generalização da equação do campo gravitacional newtoniano, e possuem algumas particularidades que veremos com mais detalhes posteriormente.

Um fato bastante interessante, é que podemos generalizar as equações de Maxwell de modo que elas sejam válidas na presença de um campo gravitacional, isto é, em um espaço-tempo curvo. Em outras palavras, podemos reescrevê-las de maneira que elas se tornem invariantes por transformações gerais de coordenadas. A resolução dessas equações, em um determinado espaço-tempo, nos mostrará as modificações induzidas pela geometria no campo eletromagnético. Contudo, se as distribuições de cargas e correntes forem muito intensas, estas também contribuirão para modificar a geometria do espaço-tempo. Neste caso, o campo eletromagnético e a métrica serão determinados a partir da solução das equações acopladas de Einstein-Maxwell.

Nossa tarefa consiste em analisar o campo gravitacional de um corpo carregado com simetria esférica. Esta é uma solução das equações de Einstein-Maxwell, conhecida como solução de Reissner-Nordström.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: primeiro estudaremos o campo gravitacional relativístico e as equações de campo de Einstein. Depois, iremos mostrar que podemos encontrar as equações de Einstein a partir do princípio variacional. Posteriormente faremos um estudo sobre como serão as equações de Maxwell na presença de gravitação. Logo após, apresentaremos a solução de Reissner-Nordström. Finalizaremos com as conclusões sobre o trabalho.

2 Fundamentação Teórica

2.1 O Campo Gravitacional Relativístico

Em 1916, buscando estender a Relatividade Restrita para referenciais não-inerciais, Einstein publicou a Teoria da Relatividade Geral. A elaboração dessa teoria foi baseada nos princípios da *covariância* e da *equivalência*. O primeiro princípio estabelece que as leis da física devem ser as mesmas em todos os referenciais; já o segundo afirma que, localmente, o campo gravitacional equivale a um referencial não-inercial.

Apoiado no princípio da equivalência, Einstein concluiu que a geometria do espaço-tempo é modificada pela presença de matéria e energia (BERGMANN, 1975; LANDAU e LIFCHITZ, 1974). Assim, diferentemente da teoria newtoniana, onde a gravidade é vista como uma força, a relatividade geral assume que a gravitação é uma propriedade geométrica do espaço (CRAWFORD, 1994).

A teoria newtoniana descreve a gravitação a partir de um potencial escalar, Φ, o qual é solução da equação de Poisson

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \ , \tag{2-1}$$

onde G é a constante gravitacional de Newton e ρ é densidade de massa da matéria que produz o campo gravitacional. Por sua vez, na descrição da gravitação, a relatividade geral admite a existência de 10 potenciais, que são representados pelas componentes do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$. Naturalmente, as equações satisfeitas pelas componentes do tensor métrico devem, num certo limite, concordar com a equação de Poisson.

Como a relatividade geral assume que matéria e energia deformam a geometria do espaço-tempo, as equações relativísticas do campo devem ter, de um lado, a distribuição de massa e energia e, do outro, a geometria que descreve esse espaço deformado.

Uma vez que a equação satisfeita pelo potencial Φ é uma equação diferencial de segunda ordem, as equações da relatividade geral devem conter derivadas de segunda ordem do tensor métrico. Diante disto, concluímos que um dos lados das equações deve ser construído a partir do tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, visto que este é um tensor que contém derivadas de segunda ordem do tensor métrico. Além disso, como a componente 00 do tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, é proporcional a densidade de massa, ρ, podemos concluir que o outro lado das equações de campo deve depender linearmente do tensor $T_{\mu\nu}$.

Baseado nestes argumentos, após alguns anos de diversas tentativas, até o final de 1915, Einstein propôs que as equações, que expressam a relação entre a geometria e matéria, são (FERRARO, 2007):

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \ , \tag{2-2}$$

em que c é a velocidade da luz e $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, sendo, respectivamente, $R_{\mu\nu}$ e R o tensor e o escalar de Ricci. Tais quantidades são definidas por:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\alpha\rho}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}_{\rho\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\sigma}. \tag{2-3}$$

e

$$R = R^{\alpha}_{\alpha} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \ , \tag{2-4}$$

sendo

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right) \tag{2-5}$$

os símbolos de Christoffel.

Em consequência da estrutura do tensor de Ricci, as equações de Einstein são não-lineares. Isto esboça o fato de que o princípio da superposição não é válido nesta teoria. Logo, a soma das soluções das equações de campo de Einstein não é uma solução.

A conservação da energia e momento, dada por $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$, também está contida nas equações de campo de Einstein. Isto é verdade, pois contém as equações do movimento da distribuição da matéria que são descritas pelo tensor energia-momento considerado. Por isso, a distribuição e o movimento da matéria que produz o campo gravitacional não podem ser determinados arbitrariamente (LANDAU E LIFCHITZ, 1974; CARMELI, 1982).

2.2 Equações de Einstein a partir de uma Ação Integral

Depois de termos apresentado e discutido as equações de campo de Einstein na última seção, iremos obter estas equações de um modo diferente, utilizando o princípio da mínima ação.

A ação do campo gravitacional é dada por:

$$I_G = \int \sqrt{-g} L_G d^4x \tag{2-6}$$

em que a integração é feita sobre todo espaço e entre dois valores da coordenada x^0, sendo L_G a lagrangiana do campo gravitacional e g o determinante de $g_{\mu\nu}$.

Para determinarmos L_G, devemos levar em conta que as equações de Einstein não contêm derivadas de ordem superior a dois do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$. Assim, a lagrangiana L_G deve ser escrita em termos dos símbolos de Cristofflel, do tensor métrico e de suas derivadas primeiras (CARMELI, 1982; LANDAU E LIFCHITZ, 1974). Por outro lado, sabemos que a lagrangiana deve ser uma função escalar, isto é, um invariante (NETO, 2004). Mas, o único invariante que satisfaz esses critérios é o escalar de Ricci. Desse modo, temos que $L_G = R$ e, consequentemente, a equação (2-6) torna-se

$$I_G = \int \sqrt{-g} R d^4x. \tag{2-7}$$

Contudo, na descrição de um sistema físico, existem outros campos além do campo gravitacional. Então, para obtermos as equações de campo, temos que adicionar, à ação do campo gravitacional, a lagrangiana de outros campos (CARMELI, 1982). Levando isto em conta, devemos escrever a ação do sistema como

$$I = I_G + I_F \Rightarrow I = \int \sqrt{-g}(R - 2\kappa L_F) d^4x \ , \tag{2-8}$$

onde L_F é a lagrangiana dos campos não-gravitacionais e $k = 8\pi G/c^4$ é a constante gravitacional de Einstein, e exigir, de acordo com o princípio da mínima ação, que a sua variação seja zero,

$$\delta I = 0 \ . \tag{2-9}$$

Usando o fato que $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, e variando a primeira parte da integral (2-8), temos:

$$\delta \int \sqrt{-g} R d^4x = \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} d^4x + \int R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) d^4x \ . \tag{2-10}$$

A variação do tensor de Ricci é

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta \left(\frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\rho\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\sigma} \right) \ . \tag{2-11}$$

Mas, num sistema de coordenadas geodésico, os símbolos de Christoffel são sempre zero. Então escolhendo esse sistema de coordenadas, chegamos à seguinte relação:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta \left(\frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} \right) = \nabla_\rho(\delta \Gamma^\rho_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta \Gamma^\rho_{\mu\rho}). \tag{2-12}$$

Logo

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g} \left\{ \nabla_\alpha(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \nabla_\alpha(g^{\mu\alpha} \delta \Gamma^\rho_{\mu\rho}) \right\} \tag{2-13}$$

ou

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\nabla_\alpha V^\alpha \tag{2-14}$$

onde $V^\alpha = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}$ é um vetor contravariante.

Utilizando o fato que:

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}V^\mu)}{\partial x^\mu} \ , \tag{2-15}$$

a primeira integral do lado direito de (2-10) torna-se:

$$\int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}d^4x = \int \frac{\partial(\sqrt{-g}V^\alpha)}{\partial x^\alpha}d^4x \ . \tag{2-16}$$

Utilizando o teorema de Gauss na última equação, podemos mostrar que ela será igual a zero, pois a variação dos símbolos de Christoffel, sobre os limites de integração, é nula. Com isso, a primeira integral do lado direito de (2-10) desaparece.

Desenvolvendo a segunda integral do lado direito de (2-10), chegamos a:

$$\int R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})d^4x = \int \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}d^4x + \int R\delta\sqrt{-g}d^4x \ . \tag{2-17}$$

Usando a relação $\delta g = -g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, obtemos:

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \ . \tag{2-18}$$

Então, substituindo (2-18) em (2-17), encontramos que a variação da ação do campo gravitacional é

$$\delta\int \sqrt{-g}Rd^4x = \int R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})d^4x = \int \sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\delta g^{\mu\nu}d^4x \ . \tag{2-19}$$

Aplicando as técnicas do cálculo variacional, vemos que a variação da parte da ação integral, que descreve os outros campos, é

$$\delta\int \sqrt{-g}L_F d^4x = \int \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})}\delta(\partial_\alpha g^{\mu\nu})\right]d^4x \tag{2-20}$$

O segundo termo do lado direito da última equação pode ser escrita como segue:

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})}\partial_\alpha(\delta g^{\mu\nu}) = \partial_\alpha\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})}\delta g^{\mu\nu}\right] - \partial_\alpha\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_F)}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})}\right]\delta g^{\mu\nu}. \tag{2-21}$$

Daí, substituindo (2-21) em (2-20), obtemos:

$$\delta \int \sqrt{-g} L_F d^4x = \int \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x \ . \tag{2-22}$$

O segundo termo, que apareceria do lado direito da equação acima, não contribui em nada por causa da variação dos limites de integração.

Vamos agora definir o tensor energia-momento, que veremos com mais detalhes posteriormente, pela seguinte expressão:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} L_F)}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \right] \right\} \ . \tag{2-23}$$

Consequentemente, se substituirmos em (2-22), encontramos:

$$\delta \int \sqrt{-g} L_F d^4x = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x \ . \tag{2-24}$$

Se agora substituirmos as equações (2-19) e (2-24) nas equações (2-8) e (2-9), obtemos

$$\delta I = \int \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \kappa T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0. \tag{2-25}$$

Uma vez que esta equação deve ser válida para uma variação arbitrária $\delta g^{\mu\nu}$, concluimos que o integrando da equação acima deve ser igual a zero, ou seja

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \ , \tag{2-26}$$

que, como já vimos, são as equações de campo de Einstein (LANDAU E LIFCHITZ, 1974; CARMELI, 1982).

2.3 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell representam o estado da teoria eletromagnética há mais de um século. Quando Maxwell começou seu trabalho, elas não eram escritas da forma compacta com a qual temos hoje, mas seu conteúdo, em termos físicos, era familiar (GRIFFITHS, 1999).

Iniciaremos este capítulo, com um breve histórico de como Maxwell as deduziu, mostrando-as a sua estrutura na forma diferencial. Além disso, faremos um estudo de como são estas equações na formulação covariante, que como o próprio nome indica, será uma equação tensorial. Encerrando o capítulo, nossa tarefa será generalizar estas equações para o espaço-tempo curvo.

2.3.1 Equações de Maxwell na forma Diferencial

James Clerk Maxwell (1831-1879), em sua investigação teórica, fortemente inspirada na pesquisa de cunho mais experimental de Faraday, realizou o desenvolvimento da eletrodinâmica. A sua teoria está representada por uma série de trabalhos que se inicia em 1856, com o artigo *"On Faraday's lines of force"*, prossegue com *"On physical lines of force"*, de 1861/1862, chega a *"A dynamical theory of the electromagnetic field"*, de 1864, e culmina com o monumental *"A treatise on electricity and magnetism"*, de 1873 (que teve também edições em 1881 e 1891). A teoria de Maxwell é celebrada, muito justamente, pela façanha de unificar os domínios da eletricidade, do magnetismo e da óptica.

É na Parte III do artigo *"A dynamical theory of the electromagnetic field"* que, pela primeira vez, Maxwell formula por extenso todas as suas equações do eletromagnetismo, as quais serão reapresentadas nos Caps. VIII e IX da Parte IV, Vol. 2 do *Treatise.* Em *"A dynamical theory of the electromagnetic field"*, Maxwell não utiliza a notação vetorial costumeira hoje em dia, mas escreve todas as equações em termos de componentes. O potencial vetor não é utilizado meramente como um expediente matemático conveniente, mas desempenha um papel fundamental na formulação da teoria. Já no *Treatise*, Maxwell utiliza a notação de componentes, mas também utiliza ocasionalmente a notação vetorial e a notação de quaternions.

Também importante é o fato de o campo eletromagnético de Maxwell possuir energia, como viria a se demonstrar. Muito embora ele ainda afirmasse que essa energia é uma energia mecânica. Desse modo, o campo já não é mais apenas uma propriedade disposicional (isto é, se uma partícula fosse colocada em tal ponto do espaço, então ela sentiria tal força), mas sim uma entidade física com existência real.

Tanto em *"A dynamical theory of the electromagnetic field"* como no *Treatise*, Maxwell adota o formalismo lagrangiano já consagrado em mecânica. No formalismo lagrangiano, como se sabe, o conceito de energia ocupa um lugar fundamental, em vez do conceito de força. Além disso, o formalismo lagrangiano dispensa o conhecimento detalhado dos vínculos mecânicos internos do sistema e das forças devidas a esses vínculos. É preciso lidar apenas com as forças externas aplicadas ao sistema. Finalmente, diferentemente do método tradicional da mecânica, onde é necessário trabalhar com várias forças e acelerações vetoriais, no método lagrangiano é preciso trabalhar apenas com uma única função escalar $L = T - V$, onde T é a energia cinética e V a energia potencial (BEZERRA, 2006).

Atualmente, as equações de Maxwell são escritas numa formulação matemática moderna, diferente da que o próprio Maxwell usava. São equações que governam os fenômenos eletromagnéticos, que têm a seguinte forma diferencial para as fontes no vácuo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \ , \tag{2-27}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \ , \tag{2-28}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \ , \tag{2-29}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \ . \tag{2-30}$$

Nas equações acima, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são os campos elétrico e magnético, sendo ρ e $\vec{J}$ as densidades de carga e corrente, respectivamente.

A lei de Gauss (2-27), estabelece a geração de campos eletrostáticos por cargas elétricas, e ela indica que é possível encontrar cargas elétricas isoladas na natureza (monopólos elétricos), ao contrário do que ocorre em (2-30), pois esta indica a inexistência de monopólos magnéticos. Campos magnéticos são gerados por correntes elétricas e campos elétricos variáveis com o tempo, conforme expressa (2-28). Além disso, se os campos magnéticos forem variáveis no tempo, então, pela equação (2-29), vemos que eles dão origem a campos elétricos induzidos, os quais, nesse caso, não são produzidos diretamente por cargas elétricas (MACHADO, 2002; JACKSON, 1983).

2.3.2 Formulação Covariante

Nosso objetivo, agora, é generalizarmos as equações de Maxwell de modo que elas sejam válidas na presença de um campo gravitacional, isto é, em um espaço-tempo curvo. Contudo, para efetuarmos tal generalização, precisamos conhecer a forma covariante dessas equações no espaço-tempo plano.

Na forma covariante as equações (2-27) - (2-30) são escritas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial f^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{4\pi}{c} J^{\mu} \tag{2-31}$$

$$\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial f_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial f_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} = 0. \tag{2-32}$$

onde

$$f_{\mu\nu} \equiv \partial_{\nu} A_{\mu} - \partial_{\mu} A_{\nu} \ , \tag{2-33}$$

em que $\partial_{\mu} \equiv \partial/\partial x^{\mu}$, $j^{\alpha} = (c\rho, J_x, J_y, J_z)$ é o quadrivetor densidade de corrente, $A_{\alpha} = (\phi, -A_x, -A_y, -A_z)$ é o quadrivetor potencial eletromagnético e $f_{\mu\nu}$ é o tensor de campo de Maxwell, o qual, em termos dos campos elétrico e magnético, é dado por

$$f_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{2-34}$$

Podemos obter as equações de Maxwell na forma covariante através da equação de Euler-Lagrange. Para isto, necessitamos apenas da lagrangiana ou, mais precisamente, da densidade lagrangiana, que, na ausência de gravitação, é dada por

$$L = -\frac{1}{16\pi} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^{\alpha} A_{\alpha} + L_e \ , \tag{2-35}$$

onde L_e é a densidade de lagrangiana das partículas carregadas.

As expressões (2-31) e (2-32) são equações tensoriais e são válidas em qualquer referencial inercial. Isto significa que elas são covariantes por transformações de Lorentz. Contudo, estas equações não são covariantes por transformações gerais de coordenadas. A razão disto é que, para uma transformação que não seja a de Lorentz, a derivada parcial de um tensor não se transforma como um tensor. Então, para tornarmos as equações (2-31) e (2-32) covariantes por transformações gerais de coordenadas, devemos trocar as derivadas parciais, ∂_μ, que aparecem nas mesmas por derivadas covariantes, ∇_μ. Seguindo este procedimento, as equações de Maxwell no espaço curvo devem ser escritas como segue:

$$\nabla_\nu f^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu \tag{2-36}$$

$$\nabla_\alpha f_{\mu\nu} + \nabla_\mu f_{\nu\alpha} + \nabla_\nu f_{\alpha\mu} = 0. \tag{2-37}$$

Do mesmo modo, o tensor do campo eletromagnético $f_{\mu\nu}$ se relaciona com o quadripotencial por

$$f_{\mu\nu} \equiv \nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu \ . \tag{2-38}$$

Admitindo que estamos numa variedade Riemaniana, podemos ver que esta equação é idêntica a expressão (2-33). Logo, a relação entre o campo de Maxwell, $f_{\mu\nu}$, e o quadripotencial , A_μ, não muda no espaço-tempo curvo.

A interação com o campo gravitacional aparece, nas equações acima, através dos símbolos de Christoffel, que estão contidos nas derivadas covariantes. Naturalmente, para resolvermos as equações de Maxwell generalizadas faz-se necessário que conheçamos a métrica do espaço-tempo. Assim, podemos concluir que o campo gravitacional afeta o campo eletromagnético.

Assim como na ausência da gravitação, podemos obter as equações generalizadas a partir do formalismo lagrangiano. Mas, na presença do campo gravitacional, isto é, no espaço curvo, a densidade lagrangiana (2-35) deve ser reescrita por

$$\mathcal{L} \equiv \sqrt{-g} L = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} - \frac{1}{c}\sqrt{-g} j^\alpha A_\alpha + \sqrt{-g}\mathcal{L}_e \ , \tag{2-39}$$

onde g é o determinante da matriz que representa o tensor métrico.

Até este ponto, escrevemos as equações de campo de Maxwell na presença da gravitação, o que é suficiente na situação em que os efeitos do campo eletromagnético, produzido pelas cargas e correntes, são desprezíveis. Porém, este campo também pode modificar a geometria do espaço-tempo. Neste caso, a métrica e o campo eletromagnético serão soluções das equações acopladas de Einstein-Maxwell, as quais são constituídas por (2-2), (2-36) e (2-37), sendo $T_{\mu\nu}$ o tensor energia-momento do campo eletromagnético.

3 Metodologia

Com a finalidade de obter a solução do nosso problema específico, realizamos uma revisão bibliográfica em livros e artigos que abordam os conceitos prévios necessários para o desenvolvimento desta pesquisa. Durante esta fase, estudamos a Teoria da Relatividade Restrita e a álgebra tensorial, pois elas são de extrema importância para a compreensão da Relatividade Geral, representada pelas equações de campo de Einstein, sendo uma generalização do campo gravitacional newtoniano.

Além disso, efetuamos um estudo sobre as equações de Maxwell, analisando a sua forma no espaço-tempo plano e a generalização das mesmas, para acomodar o campo gravitacional.

Com a obtenção destes conceitos, finalizamos nossa pesquisa ao encontrar o campo gravitacional de um corpo carregado esfericamente simétrico, que é solução das equações de Einstein-Maxwell acopladas.

4 Solução de Reissner-Nordström

Nesta seção, encontraremos a métrica induzida por um corpo carregado esfericamente simétrico, também conhecida como solução de Reissner-Nordström. Antes, porém, determinaremos o tensor energia-momento do campo eletromagnético.

4.1 O Tensor Energia-Momento do Campo Eletromagnético

De acordo com o que discutimos na seção 2.2, o tensor energia-momento do campo eletromagnético, no espaço curvo, é dado pela equação (2-23), sendo L_F descrito pela expressão (2-35).

Então, usando (2-35), o primeiro termo de (2-23) torna-se:

$$\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_F\right)}{\partial g^{\rho\sigma}} = -\frac{1}{16\pi}f_{\alpha\beta}f_{\mu\nu}\left[g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\rho\sigma}} + \sqrt{-g}(g^{\alpha\mu}\delta^{\beta}_{\rho}\delta^{\nu}_{\sigma} + g^{\beta\nu}\delta^{\alpha}_{\rho}\delta^{\mu}_{\sigma})\right] \ , \tag{4-40}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_F\right)}{\partial g^{\rho\sigma}} = -\frac{1}{16\pi}\left(f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\rho\sigma}} + 2\sqrt{-g}f_{\rho\alpha}f^{\alpha}_{\sigma}\right) \ . \tag{4-41}$$

Se agora utilizarmos, em (4-41), o fato que

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\rho\sigma}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g^{\rho\sigma}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\rho\sigma} \ , \tag{4-42}$$

obtemos:

$$\frac{\partial\left(\sqrt{-g}L_F\right)}{\partial g^{\rho\sigma}} = \frac{1}{8\pi}\sqrt{-g}\left(\frac{1}{4}g_{\rho\sigma}f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta} - f_{\rho\alpha}f^{\alpha}_{\sigma}\right). \tag{4-43}$$

A densidade lagrangiana, no entanto, não depende de derivadas do tensor métrico. Por isso, o segundo termo da expressão (2-23) desaparece. Finalmente, se substituirmos o termo dado por (4-43) no tensor (2-23), encontramos

$$T_{\rho\sigma} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}g_{\rho\sigma}f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta} - f_{\rho\alpha}f^{\alpha}_{\sigma}\right) \ , \tag{4-44}$$

para o tensor energia-momento do campo eletromagnético na presença de gravitação. Podemos, então, perceber que, essencialmente, ele depende da forma da densidade lagrangiana.

Na ausência da gravitação, a mesma expressão dada por (4-44) ainda é válida para o tensor de energia-momento do campo eletromagnético. Basta substituirmos o tensor métrico do espaço curvo $g^{\mu\nu}$ pelo tensor métrico do espaço plano de Minkowisk $\eta^{\mu\nu}$ (CARMELI, 1982).

4.2 O Campo Gravitacional de uma Carga Puntiforme

Devido à simetria do problema, podemos escrever o elemento de linha como (CARROLL, 2004):

$$ds^2 = e^{\nu}c^2dt^2 - e^{\lambda}dr^2 - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2), \tag{4-45}$$

onde ν e λ são funções das coordenadas r e t.

Usando as coordenadas, $x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$, temos:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}\left(e^{\nu}, -e^{\lambda}, -r^2, -r^2 sen^2\theta\right) \tag{4-46}$$

e

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}\left(e^{-\nu}, -e^{-\lambda}, -r^{-2}, -r^{-2} sen^{-2}\theta\right) \ . \tag{4-47}$$

Para encontrarmos as funções ν, λ e o campo eletromagnético, precisamos resolver as equações acopladas de Einstein-Maxwell. No caso das equações de Maxwell, devemos conhecer a distribuição de cargas e correntes, bem como forma do tensor $f_{\mu\nu}$ na métrica (4-45). Por sua vez, para escrevermos as equações de campo de Einstein, necessitamos dos tensores de Einstein e do campo eletromagnético, escritos na métrica (4-45).

As componentes não nulas do tensor de Einstein, nessa métrica, são dadas por:

$$G_0{}^0 = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} \ , \tag{4-48}$$

$$G_0{}^1 = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r} \ , \tag{4-49}$$

$$G_1{}^1 = -e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} \ , \tag{4-50}$$

$$G_2^2 = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\upsilon'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\dot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2}\right) \ , \tag{4-51}$$

$$G_3{}^3 = G_2{}^2 \ . \tag{4-52}$$

onde o "ponto"denota derivada com respeito a coordenada x_0 e a"linha"representa a derivada com respeito a r.

Como estamos considerando um corpo estático, não existem correntes. Por outro lado, a simetria do problema é esférica. Sendo assim, devemos ter

$$A_0 = A_0\left(r, t\right); \ A_1 = A_1\left(r, t\right); \ A_2 = A_3 = 0 \ . \tag{4-53}$$

Vale salientar que as componentes do quadrivetor potencial eletromagnético podem sofrer uma transformação do tipo

$$\bar{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \ , \tag{4-54}$$

onde Λ é uma função das coordenadas r e t (CARMELI, 1982). Esta transformação, a qual é denominada *transformação de calibre*, pode ser realizada de modo a deixar os campos elétrico e magnético invariantes. Dessa maneira, podemos escolher uma função arbitrária $\Lambda(r, t)$ de modo a ter, para as condições de um certo problema, a transformação de calibre que seja mais adequada para a sua resolução (MACHADO, 2006). Sendo assim, vamos admitir que $\bar{A}_1 = A_1 + \partial\Lambda/\partial r = 0$. Com isso, a única componente não nula do potencial vetor eletromagnético é, por conseguinte, A_0. Neste caso, as únicas componentes covariantes não nulas, do tensor de Maxwell, são:

$$f_{10} = A_0' = -f_{01} \ . \tag{4-55}$$

Além disso, para esta escolha de calibre, as componentes contravariantes do tensor de Maxwell, $f^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} f_{\alpha\beta}$, não nulas, são dadas por:

$$f^{01} = -e^{-(\nu+\lambda)} A_0' = -f^{10} \ . \tag{4-56}$$

Utilizando a equação (4-44), temos que:

$$T_\mu^\nu = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{4} g_\mu^\nu f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} - f_{\mu\alpha} f^{\nu\alpha} \right) \ . \tag{4-57}$$

Logo, substituindo (4-55) e (4-56) na equação acima, obtemos:

$$T_\mu^\nu = \frac{1}{8\pi} e^{-(\nu+\lambda)} \left(A_0'\right)^2 \mathrm{diag}(1, 1, -1, -1) \ . \tag{4-58}$$

Como estamos interessados em resolver o problema na região em que não existem cargas, devemos resolver as equações de Maxwell sem fontes, ou seja,

$$\nabla_\beta f^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} f^{\alpha\beta})}{\partial x^\beta} = 0 \ . \tag{4-59}$$

Daí, fazendo $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, e usando o fato que $\sqrt{-g} = r^2 e^{(\nu+\lambda)/2}\text{sen}\theta$, as equações de Maxwell são reduzidas a

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}f^{01})}{\partial r} = -\frac{\partial\left[r^2 e^{-(\nu+\lambda)/2}A_0'\right]}{\partial r}\text{sen}\theta = 0 \tag{4-60}$$

e

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}f^{10})}{\partial t} = \frac{\partial\left[r^2 e^{-(\nu+\lambda)/2}A_0'\right]}{\partial t}\text{sen}\theta = 0 \ . \tag{4-61}$$

Das equações (4-60) e (4-61), vemos que

$$r^2 e^{-(\nu+\lambda)/2}A_0' = \text{constante} \ . \tag{4-62}$$

Para pontos muito distantes da fonte, o campo gravitacional é nulo e o espaço-tempo é plano. Isto significa que, nessa região, devemos ter $e^{\nu} = e^{\lambda} = 1$, e, consequentemente, $A_0' = \text{constante}/r^2$. Como, na ausência da gravitação, a componente zero do quadrivetor potencial é $A_0 = q/r$, podemos concluir que a constante é igual a $-q$. Daí, (4-62) pode ser escrita como

$$A_0' = -\frac{q}{r^2}e^{(\nu+\lambda)/2} \ . \tag{4-63}$$

Logo, utilizando este resultado em (4-58), chegamos a

$$T_\mu^\nu = \frac{q^2}{8\pi r^4}\text{diag}(1, 1, -1, -1) \ . \tag{4-64}$$

Devemos agora, resolver as equações de campo de Einstein. Usando (4-48) - (4-52) e o fato que T_μ^ν é dado por (4-64), obtemos, de (2-2):

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{Gq^2}{c^4 r^4} \ , \tag{4-65}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = -\frac{Gq^2}{c^4 r^4} \tag{4-66}$$

e

$$\dot{\lambda} = 0 \ . \tag{4-67}$$

Ao adicionarmos as equações (4-65) e (4-66), encontramos

$$\nu' + \lambda' = 0 \ , \tag{4-68}$$

ou ainda,

$$\nu + \lambda = f(x^0) \ , \tag{4-69}$$

onde $f(x^0)$ é uma função de x^0.

Podemos transformar x^0 em uma nova função x'^0, tal que $\nu + \lambda = 0$ no novo sistema de coordenadas. De acordo com (4-67), concluimos que tanto ν e λ podem ser funções de r, e independentes da coordenada temporal x^0 (CARMELI, 1982).

Multiplicando (4-66) por r^2 e usando o fato que $\nu = -\lambda$, obtemos:

$$\frac{d}{dr}\left(re^{\nu} - r\right) = -\frac{Gq^2}{c^4r^2} \Rightarrow e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{Gq^2}{c^4r^2} \ , \tag{4-70}$$

onde r_s é uma constante de integração.

A métrica, que descreve o espaço-tempo gerado por um corpo carregado esfericamente simétrico, deve concordar com a que foi obtida por Schwarzschild, quando tomarmos $q = 0$. Diante disso, concluímos que $r_s = 2Gm/c^2$. Logo,

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2Gm}{c^2r} + \frac{Gq^2}{c^4r^2} \ , \tag{4-71}$$

e, consequentemente, o elemento de linha que descreve o espaço-tempo de Reissner-Nordström toma a seguinte forma:

$$ds^2 = c^2\Delta dt^2 - \Delta^{-1}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta d\varphi^2\right), \tag{4-72}$$

onde $\Delta = 1 - \frac{2Gm}{c^2r} + \frac{Gq^2}{c^4r^2}$.

No espaço-tempo plano, o campo elétrico é o negativo do gradiente do potencial e pode ser descrito, de maneira indiferente, por $E = f^{01}$ ou $E = f_{01}$. Contudo, em geral, na presença da gravitação, isto é, no espaço-tempo curvo, as componentes f^{01} e f_{01}, nem sempre são iguais. Dessa maneira, a relação entre o campo elétrico e o tensor do campo eletromagnético não é evidente. No entanto, no caso da solução de Reissner-Nordström, devido a forma da métrica [Eq. (4-72)], as componentes f^{01} e f_{01} são iguais e podemos interpretar uma ou outra como sendo o campo elétrico. Portanto, de acordo com as equações (4-55), (4-56) e (4-63), o campo elétrico externo ao corpo é

$$E\,(r) = \frac{q}{r^2}\ . \qquad (4\text{-}73)$$

As constantes m e q, que aparecem nas equações (4-72) e (4-73), devem ser interpretadas, respectivamente, como sendo a massa Newtoniana medida por um observador no infinito e a carga elétrica do corpo. Esta interpretação surge naturalmente, quando comparamos a expressão (4-72) com a solução de Schwarzschild, e quando comparamos a equação (4-73) com o resultado usual do campo elétrico de uma distribuição esférica de carga no espaço-tempo plano.

5 Conclusões

Neste trabalho, estudamos uma das soluções exatas das equações acopladas de Einstein-Maxwell, denominada solução de Reissner-Nordström. Esta solução representa o campo elétrico e a geometria do espaço-tempo externo a uma distribuição de matéria carregada esfericamente simétrica.

Devido a natureza do problema, assumimos que a métrica deve ter simetria esférica. Além disso, como a densidade de corrente é nula, fizemos uma escolha de Gauge na qual apenas a componente temporal do quadrivetor potencial é diferente de zero. A partir disso, calculamos os tensores energia-momento e o de Einstein e, por conseguinte, escrevemos e resolvemos as equações de Einstein-Maxwell.

Ao obtermos as soluções dessas equações, verificamos que a métrica fora da distribuição depende da massa, m, e da carga da distribuição, q. Além disso, vimos que a métrica corresponde a de Minkowski na região em que $r \longrightarrow \infty$, e que, no caso particular em que $q = 0$, recuperamos a solução de Schwarzschild. No que se refere ao campo elétrico, observamos que, assim como no espaço-tempo plano, ele é inversamente porporcional ao quadrado da distância.

Referências

BERGMANN, P. G., **Introduction to the Theory of the Relativity**. New York: Dover Publicações, 1975.

BEZERRA, V. A., **Maxwell, a teoria do campo e a desmecanização da física**. Sci. Stud. vol. 4. no. 2. São Paulo. 2006.

CARMELI, M., **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. New York: John Wiley and Sons, 1982.

CARROL, S., **Spacetime and Geometry An Introduction to General Relativity**. San Francisco: Adison Wesley, 2004.

CRAWFORD, P., **O Significado da Relatividade no Final do Século**. Colóquio Ciência, 1994.

FERRARO, R., **Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity**. Buenos Aires: Springer Science, 2007.

HALLIDAY, D., RESNICK, R. e WALKER, J. **Fundamentos de Física vol. 4: Óptica e Física Moderna**. Editora LTC, 8ª edição, 2009.

JACKSON, J. D., **Eletrodinamica Clássica**. Rio de Janeiro: Guanabara, 1983.

LANDAU, L. e LIFCHITZ, E., **Teoria de Campo**. São Paulo: HEMUS - Livraria Editora Ltda, 1974.

MACHADO, K. D., **Teoria do Eletromagnetismo Vol. 2**. Ponta Grossa. Editora UEPG. 2002.

MACHADO, K. D., **Teoria do Eletromagnetismo Vol. 3**. Ponta Grossa. Editora UEPG. 2006.

NETO. J. B. **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana Hamiltoniana**. 1.ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.

RESNICK. R., **Introdução à Relatividade Especial**. Universidade de São Paulo.

Editora Polígono. 1971.