UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

LÚCIA DE FÁTIMA SILVA LIMA

A TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMAS: UM NOVO OLHAR PARA A SALA DE AULA

Campina Grande
2014

LÚCIA DE FÁTIMA SILVA LIMA

A TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMAS: UM NOVO OLHAR PARA A SALA DE AULA

Monografia apresentada ao curso de Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio da Universidade Estadual da Paraíba para a obtenção do título de Especialista em Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

Campina Grande
2014

L732t Lima, Lúcia de Fátima Silva.
A trigonometria na circunferência a partir da resolução de situações- problemas [manuscrito] : um novo olhar para a sala de aula / Lúcia de Fátima Silva Lima. - 2014.
53 p. : il. color.

Digitado.
Monografia (Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento de Matemática".

1. Ensino de trigonometria. 2. Aprendizagem. 3. Resolução de problemas. 4. Trigonometria. I. Título.

21. ed. CDD 516.24

LÚCIA DE FÁTIMA SILVA LIMA

A TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA A PARTIR DA RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMAS: UM NOVO OLHAR PARA A SALA DE AULA

Monografia apresentada ao curso de Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio da Universidade Estadual da Paraíba para a obtenção do título de Especialista em Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

Banca Examinadora

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade - UEPB

(Orientador)

Prof. Dr. José Lamartine da Costa Barbosa – UEPB

Prof. Ms. José Luiz Cavalcante – UEPB

Campina Grande

2014

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade de realizar este trabalho, que me fez crescer como pessoa e como profissional.

Agradeço a Silvanio de Andrade (Orientador) por ter abraçado esta proposta, pela paciência, orientação, dedicação e contribuições, ao longo da construção do mesmo.

Agradeço à escola que me proporcionou o espaço e todo o apoio necessário na realização deste trabalho.

Agradeço aos meus alunos, que de forma significativa foram essenciais na elaboração e desenvolvimento deste trabalho, sem eles nada teria acontecido.

Agradeço à minha família, meus colegas de trabalho pelo apoio e palavras de incentivo em momentos de preocupação e desânimo.

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta fizeram parte deste trabalho, muito obrigada.

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo desenvolver uma proposta de ensino-aprendizagem na prática de sala de aula, com relação ao conteúdo Trigonometria na Circunferência, pautada na metodologia da Resolução de Problemas, desenvolvida mediante uma experiência vivida em nossa própria prática com professora/pesquisadora. A pesquisa inicia-se com uma breve reflexão acerca das contribuições da Resolução de Problemas no ensino de Matemática, alicerçada nas concepções da Teoria de Polya, além de outros autores, como Hilbert, Silva, Martins, Nascimento, que demonstraram grande interesse e diversas contribuições acerca desta metodologia. No decorrer desta pesquisa pretende-se apontar novos caminhos para uma aprendizagem mais eficaz da Trigonometria, visando não à memorização ou a simples aplicações de fórmulas enfadonhas e por vezes desnecessárias, mas buscando na Resolução de Problemas um meio de apreensão dos conceitos envolvidos neste eixo-temático que muitas vezes causa repulsa e medo em alunos recém-chegados ao Ensino Médio. Procurando levar o aluno a observar, registrar e refletir sobre aquilo que está aprendendo. Diante disso, foram apresentadas aos alunos algumas situações-problemas que estimularam os mesmos a pensar e a buscar suas próprias soluções. Diante dos resultados obtidos, podemos destacar que a metodologia da Resolução de Problemas, veio contribuir para a construção de novos conceitos e de novos conteúdos, associados ao ensino da Trigonometria, antes mesmo de sua apresentação em linguagem Matemática formal, como também veio favorecer a autonomia do aluno, como sujeito pensante que detém o poder de decisão diante dos desafios que lhes são apresentados, o empenho dos mesmos na realização de todas as atividades propostas e a cooperação mútua entre alunos e professor, fazendo com que a compreensão da Trigonometria vá além das fórmulas e técnicas, garantindo assim um ensino-aprendizagem satisfatórios dentro dos objetivos propostos.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem. Resolução de Problemas. Trigonometria na Circunferência.

ABSTRACT

The present paper aims to develop a proposal for teaching and learning in classroom practice, related to Trigonometry in Circumference content, based on the methodology of Problem solving, developed through the lived experience in the practice as a teacher / researcher. The research begins with a brief reflection on the contributions of Problem Solving in Mathematics teaching, based on the concepts of Polya's Theory, and other authors, such as Hilbert, Silva, Martins Nascimento, who showed great interest and several contributions on this methodology. During this research we intend to show new ways for more effective learning Trigonometry, aiming not memorization or simple applications of boring and sometimes unnecessary formulas, but in seeking Problem solving as means of apprehension of the concepts involved in spindle theme that often causes revulsion and fear in newcomers of high school students. Seeking to take the student to observe record and reflect on what they are learning. Thus, students were presented some situations-problems that stimulated them to think and to seek their own solutions. Based on the acquired results, we highlight that the methodology of Problem solving, has contributed to the construction of new concepts and new content, associated with the teaching of trigonometry, even before its presentation in formal mathematics, language also came as favors autonomy for the student, as a thinking subject who holds the power of decision on the challenges presented to them, the same commitment in achieving all proposed activities and mutual cooperation between students and teacher, making the understanding of trigonometry beyond formulas and techniques, ensuring a satisfactory learning within the proposed objectives.

Keywords: Teaching-learning. Problem solving. Trigonometry in circumference.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em 2012 iniciei minhas atividades no ensino médio, lecionando para uma turma de 1° ano a disciplina de Matemática II, nela os conteúdos que deveriam ser abordados seriam a Geometria Plana e a Trigonometria. Não tinha até então experiência alguma em lecionar esses conteúdos com a profundidade que lhes era necessária, pois lecionava sempre no ensino fundamental II. Em mim havia uma preocupação, que vejo hoje como exagerada, de cumprir todo o conteúdo do livro didático, o que gerava com isso uma mecanização nos alunos ao "aprender" os conteúdos que por mim eram "transmitidos", como também eu havia me mecanizado ao "transmitir" os mesmos, pois me apegava sempre ao uso das fórmulas e macetes, das imensas listas de exercício, crendo assim que a aprendizagem iria ocorrer de acordo com meus objetivos.

Mas, à medida que os bimestres se passavam fui percebendo que os alunos não conseguiam interiorizar o conteúdo como deveriam e que sempre era necessário retomá-los para dar continuidade ao que estava programado e este fato foi uma constante no decorrer de todo ano.

No ano seguinte (2013), novamente me deparei com uma turma de 1° ano do ensino médio e com a mesma disciplina em minha responsabilidade, neste mesmo período, eu estava cursando a especialização para professores do ensino médio, e sempre nas aulas da especialização eram discutidos temas acerca da compreensão que os alunos deveriam ter da Matemática e de que maneira poderíamos auxiliá-los melhor nessa compreensão. Tomando como base minha experiência em sala de aula, percebi que um dos conteúdos de difícil compreensão por parte dos alunos é a Trigonometria, devido ao uso excessivo de fórmulas e algoritmos desvinculados da realidade dos mesmos. Sendo assim, nossa proposta foi desenvolver um trabalho voltado à compreensão e para isso utilizamos a Resolução de Problemas como metodologia, pois acreditamos ser este um caminho viável para que a aprendizagem aconteça de forma satisfatória, pois o aluno é levado a refletir sobre tudo aquilo que está fazendo, deixando de lado toda a memorização e o uso de fórmulas de maneira exacerbada, valorizando o processo, onde cada passo dado é analisado, discutido. Despertando assim o interesse e o gosto pela matemática.

Nossa proposta de trabalho foi estruturada da seguinte forma: no capítulo I trarei um pouco minha experiência profissional e os motivos pelos quais escolhi esta temática. No capítulo II trataremos um pouco acerca do ensino de Matemática, em especial da

Trigonometria e da metodologia da resolução de problemas, como a mesma se dá em meio ao processo de ensino aprendizagem e seus benefícios em relação à compreensão do conteúdo de Trigonometria. Já no capítulo III trazemos uma breve apresentação da pesquisa de campo, como também a descrição e análise de todas as aulas ministradas no desenvolvimento da proposta. Por fim, o capítulo IV é destinado às considerações finais, onde faremos um apanhado geral de todo o trabalho e possíveis sugestões de aperfeiçoamento do mesmo.

2. O ENSINO DE MATEMÁTICA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O ensino de matemática ao longo dos anos tem se baseado na abordagem tradicional. O professor detentor de todo o conhecimento, transmiti ao educando tudo aquilo que lhe é necessário em cada conteúdo, restando ao mesmo apenas repetir acreditando-se que dessa forma a aprendizagem aconteça. Essa prática frequente, em nenhum momento propicia ao educando a capacidade de raciocínio, de critica e análise tão imprescindíveis para sua formação enquanto cidadão pensante, autônomo e reflexivo.

Com isso, o ensino de matemática vem acarretando um imenso fracasso no que diz respeito a aprendizagem e compreensão desta disciplina, pois o ensino desta importante ciência está voltado apenas para a memorização e aplicação de algoritmos, totalmente desvinculados do mundo real. Diante dessa realidade, tem surgido a preocupação de reverter esse quadro e é nesse momento que a resolução de problemas como metodologia de ensino, ganha, destaque e é defendida por muitos autores, como um meio de quebrar esse ciclo vicioso de repetição e trazer o aluno para a reflexão e apreensão dos significados que está por trás de cada conteúdo. Possibilitando que o mesmo seja problematizador (HIEBERT e colaboradores, 1996).

Silva (2013) destaca que esta metodologia privilegia o aluno, pois o torna sujeito de sua própria aprendizagem. E que como a aprendizagem é proveniente de ações, o próprio aluno é quem pratica a ação e não a sofre ou apenas a recebe, tornando- se ativo neste processo de busca pelo conhecimento, interagindo com outros e com aquilo que está ao seu redor.

A resolução de problemas vem como um veículo eficaz na aprendizagem matemática, nos diversos níveis de escolaridade, pois esse tipo de aprendizagem não significa uma forma de aprender matemática nem aplicá-la, mas um modo de fazê-la. Deixando em segundo plano os exercícios repetitivos e o uso excessivo de fórmulas, valorizando a dimensão conceitual dos conteúdos, desenvolvendo no aluno o pensar matemático. Assim, a resolução de problemas integra toda a aprendizagem matemática, sendo uma fonte de motivação para uma melhor compreensão dos conceitos e procedimentos que envolvem esta ciência.

Seguindo esta linha, Silva (2013) afirma que:

> (...) Dessa forma, as pesquisas têm indicado substituir o ensino pautado em

> exercícios repetitivos e com uso excessivo de fórmulas por metodologias que valorizem a formação conceitual com compreensão. Assim, o problema ganha outra dimensão em sala de aula, saindo do final do planejamento como uma aplicação, e percorrendo todo o processo, durante qual, por meio do problema, o aluno é capaz de operar os conceitos, pela internalização dos princípios abordados na resolução e exploração dos problemas. Tal postura não nega o uso de fórmulas, mas trata como mais uma ferramenta na resolução dos problemas. SILVA (2013, p. 11).

Poderemos iniciar nossa discussão, com um questionamento simples, sobre o que é um problema, pois todos os dias resolvemos problemas, mas o que seria resolver problemas em matemática? Que características envolvem os problemas matemáticos? Como resolvê-los? Sabemos que há grandes divergências e várias interpretações, acerca disto, mas também temos plena consciência de que os educandos devem construir todo o conhecimento matemático através da resolução de problemas.

Segundo Dante (2010, p. 11) “problema é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do individuo para solucioná-lo”.

Para Hilbert et. Al.(1997 apud Van de Walle, 2009, p. 57) “um problema é definido como qualquer tarefa na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados.”

Para Lester (1982 apud Dante, 2010, p. 12) “problema é uma situação que um individuo ou grupo precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução.

Ainda segundo Silva (2013),

> (...) a resolução de problemas compreende uma situação ou tarefa para a qual não sabemos de imediato como atacá-las, mas que nos deixam sempre desejosos para fazer isso. Dessa forma, mobilizamos outros conhecimentos: a elaboração de estratégias ou procedimentos, a organização da informação, o teste da validade da resposta e mesmo a formulação de outras situações-problema. Na resolução de problemas, o aluno não tem de imediato um caminho a ser seguido, mas cria novos caminhos. SILVA (2013, p. 21).

Entendemos assim, que toda situação que requer uma reflexão e/ou tomada de decisão por parte do aluno, onde o mesmo sente-se motivado a resolvê-lo é considerado um problema.

De acordo com as orientações curriculares para o ensino médio,

> A aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se–ia pela apresentação de uma situação problema ao aluno, ficando a formalização do conceito como a última etapa do processo de aprendizagem. Nesse caso, caberia ao aluno à construção do conhecimento matemático que permiti resolver o problema, tendo o professor como um mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem, responsável pela sistematização do conteúdo. (ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO, 2006, p. 81).

De acordo com Hilbert e colaboradores (1996), um bom problema deve comtemplar algumas características:

- *O problema deve começar onde os alunos estão*. Devemos sempre levar em consideração os conhecimentos prévios dos alunos em relação ao conteúdo em questão, para que o problema escolhido não venha ser simples demais ou complexo demais em sua solução. Ele deve acima de tudo instigar e desafiar quem se propõe a resolvê-lo.
- *O aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado à matemática que os alunos vão aprender*. Ao resolver um problema o foco principal dos alunos deve ser a matemática envolvida ali, dando assim um significado a mesma. A pesar de que, para que o problema tenha sentido para o aluno, deve haver uma contextualização, mas essa contextualização não deve ser o ponto chave do problema, nem motivo de distração por parte dos mesmos, apenas uma motivação a mais e um auxilio para se chegar a devida compreensão do conhecimento matemático.
- *A aprendizagem matemática deve requerer justificativa e explicações para as respostas e os métodos*. O aluno deve estar ciente por parte do professor, que ele também é responsável em validar suas respostas e justificá-las, a fim de que a aprendizagem ocorra de maneira satisfatória.

Sendo assim, a resolução de problemas, não é uma tarefa fácil para o professor, pois diferentemente do ensino tradicional, o centro é o aluno, as atividades necessitam ser bem planejadas/selecionadas, que auxiliem os mesmos na aprendizagem do conteúdo, levando sempre em consideração a compreensão dos alunos, o ritmo de cada um e as necessidades curriculares.

De acordo com Dante (2010, p. 29), resolver um problema seria seguir algumas etapas segundo o esquema de Polya:

- Compreender o problema;
- Elaborar um plano;
- Executar o plano;
- Verificar e validar a solução.

- *Compreender o problema.* Para compreender o problema se faz necessário verificar se há alguma palavra em que não se conhece o significado, o que se procura no problema, o que se quer resolver e que meios podem ser utilizados (fórmulas/algoritmos) para se chegar a sua solução.

- *Elaborar um plano.* É essencial estimular nos educandos a busca por um plano de resolução, fazendo pontes entre os dados disponíveis no problema e o que está sendo solicitado no mesmo, como também verificando se há a necessidade de buscar informações que complementem a resolução do mesmo.

- *Executar o plano.* Esta etapa considera-se decisiva, pois é aqui que os educandos devem executar o plano de resolução que escolheram e estarem atentos a cada passo, mostrando sempre o porquê de estarem no caminho certo através de esquemas e anotações de cada procedimento feito na busca pela solução, possibilitando assim uma confirmação de seu aprendizado.

- *Verificar e validar a solução.* A verificação e validação da solução é um dos momentos mais importantes de todo o processo de resolução de problemas, pois é aqui que o conhecimento é consolidado com a revisão da solução e a reflexão sobre cada decisão tomada ao longo do processo, podendo assim utilizar esse novo conhecimento adquirido, em outras situações semelhantes.

Isso não significa que resolver um problema seria como seguir uma "receita de bolo" onde fazendo todos os passos corretamente se chegue a uma solução, mas pode ser um guia de orientação ao longo de todo o processo de resolução.

Nosso trabalho vem adotar a metodologia da Resolução de Problemas como referência e um ponto de partida na construção de todo processo de ensino-aprendizagem, tendo o intuito de explorar todo o conhecimento prévio dos alunos, estimulá-los a investigar, usar a criatividade, verificar possíveis respostas, traçar toda uma estratégia que possa auxiliá-los a chegar à solução, mas que essa solução não seja um fim em si mesmo, o único objetivo, mas um meio de compreender o desenrolar de todo esse processo na busca pelo conhecimento, garantindo assim uma compreensão adequada de conceitos, métodos, ou seja, de tudo o que permeia o ensino-aprendizagem da Matemática.

Aprender matemática pela resolução de problemas faz com que o aluno, deixe de valorizar apenas as respostas e passe a valorizar o processo, garantindo assim, o gosto do aprender matemática com compreensão, não mais valorizando a reprodução ou imitação, mas desenvolvendo em cada, um pensar matemático capaz de explicar tudo aquilo que os cerca dentro e fora da sala de aula.

3. JORNADA DA PESQUISA: Desenvolvimento metodológico, descrições e análises

3.1 A Aplicação do Projeto

O trabalho de campo se deu em uma escola particular de ensino fundamental e médio, localizada no bairro do Monte Santo, na cidade de Campina Grande – PB. Escola de porte mediano, com aproximadamente 200 alunos no turno da manhã, período no qual funcionava o ensino fundamental II e médio.

A equipe de matemática era composta de três professores, sendo apenas dois deles responsáveis pelo ensino médio, com a disciplina dividida em duas partes: Matemática I focando a Àlgebra, e Matemática II com Geometria Plana e Trigonometria. A turma escolhida para a realização do mesmo foi, como já dito anteriormente, um 1° ano médio composto de 17 alunos na faixa etária de 15 a 17 anos de idade, que estudavam na escola desde o ensino fundamental I. Escola esta, caracterizada por sua rigidez quanto à disciplina e extremamente tradicional na abordagem dos conteúdos em todos os níveis.

Entendendo a abordagem tradicional como um caminho não viável a uma aprendizagem com compreensão, pois o professor nesse tipo de prática não leva em consideração as diferenças existentes entre o público que ele deseja atingir, sendo ele o centro das atenções e detentor de todo o conhecimento. Atribuindo ao aluno um papel insignificante nesse processo de aprendizagem apenas como um mero receptor de informações prontas e acabadas que não vem acompanhada de nenhuma referência à história de sua construção, informações estas que devem ser armazenadas e aplicadas quanto lhes for solicitado.

Tendo esta concepção, como professora da parte de Matemática II e sendo de meu interesse fugir dessa metodologia tradicional, escolhi a temática Trigonometria, por perceber a complexidade de aprendizagem e ensino do mesmo, procurando proporcionar aos alunos uma compreensão maior e mais significativa acerca dos conceitos que envolvem a Trigonometria

Para alcançar este objetivo, assumi a responsabilidade de pesquisar minha própria sala de aula, tomando como base as contribuições de Knobel quando diz que esse tipo de pesquisa pode contribuir para um ensino e uma aprendizagem de melhor qualidade nas salas de aulas. Sendo assim foi utilizada a metodologia da Resolução de Problemas como um meio eficaz de desenvolver todo o conteúdo em questão, sendo este trabalho associado a pesquisas envolvendo temas do cotidiano relacionados ao conteúdo, por considerarmos que não pode haver uma aprendizagem desconectada da realidade, como também o uso de materiais didáticos manipuláveis, pois tenho a concepção de que a Resolução de Problemas não se restringi apenas a resolução em si de problemas, mas sim uma postura frente a aprendizagem de qualquer conteúdo, que pode lançar mão de diversas situações que vai muito além, por isso utilizamos diversas situações como o futebol, e os materiais manipuláveis. Desta forma todas as atividades realizadas foram planejadas com o intuito de que os alunos tivessem uma sequência simples, envolvente e de fácil compreensão, que despertassem nos alunos a motivação necessária para a aprendizagem deste conteúdo. A experiência se deu em 18 encontros compostos de duas aulas, sendo cada aula composta de 50 minutos, sempre às Segundas – Feiras de acordo com os horários de aula, estipulados pela coordenação pedagógica da escola.

3.2. O Ensino da Trigonometria

A Trigonometria tem sido um desafio para alunos e professores, no que diz respeito ao seu ensino e aprendizagem. Podemos perceber isto ao longo de nossa trajetória como estudante, como também em nossa formação acadêmica e atuação profissional, devido o fato de termos nos “acostumado” a aprender e a ensinar a Trigonometria desconectada das aplicações no cotidiano e pouco explorada no dia a dia dos mesmos, abordando os conceitos de forma superficial, com um uso exagerado de regras e fórmulas, resoluções de questões com procedimentos padronizados, que não transmitem motivação alguma para aquele que aprende ou que ensina.

Essa postura adotada favorece um fracasso no ensino e na aprendizagem desta disciplina, gerando uma aversão ao conteúdo, pois os alunos não conseguem compreender conceitos básicos da Trigonometria, sendo praticamente impossível avançar no conteúdo de forma efetiva e atingir os objetivos propostos para a aprendizagem do mesmo.

Todas essas questões são confirmadas através do que as pesquisas apontam e também ao nos depararmos nas escolas com alunos desmotivados e desacreditados em relação à Matemática, em especial ao conteúdo de Trigonometria, apresentando dificuldades de interpretação, acomodados muitas vezes diante de métodos inadequados de ensino, que em nada contribuem para que a aprendizagem seja consolidada, pelo contrário, impõe-se um ensino mecanizado, através de uma algebrização excessiva do conteúdo e sem significado algum, que muitas vezes ou na maioria das vezes é proveniente da má formação de professores, que detém um conhecimento limitado sobre aquilo que está ensinando. Também poderíamos citar a falta de tempo suficiente para compreender os conceitos que permeiam a Trigonometria de forma adequada, e a extrema preocupação em cumprir o currículo escolar.

Diante disso, faz-se necessário uma reflexão e uma busca de como esse quadro pode ser modificado e de que maneiras isto é possível. Pois, existe a necessidade de se levar em consideração a forma como o aluno aprende, observar suas dificuldades, atender as suas necessidades, procurando sempre associar o conteúdo com a prática.

Muito se fala atualmente em um ensino voltado para a compreensão, onde as repetições e memorizações sem significado são deixadas de lado e é dado espaço para o verdadeiro sentido da aprendizagem que é desenvolver no aluno o pensar matemático, preparando-o para o pleno exercício da cidadania.

> (...) Aprender Matemática de forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (PCN_+ EM, 2002, p. 108)

E é nesse contexto que se apresenta a Resolução de Problemas, como uma alternativa metodológica eficaz, que pode proporcionar essa aprendizagem contextualizada, integradora, por compreensão, que tanto nós professores desejamos proporcionar aos nossos alunos, mas que em contrapartida exige de nós um empenho maior, uma preparação adequada e uma dedicação, para que ela realmente aconteça.

> (...) Realizar o ensino de matemática através da Resolução e Exploração de Problemas refere-se à necessidade do professor não preparar a aula que irá lecionar, mas preparar-se para a aula que irá ministrar. Pois a exploração de problemas favorece a um desfecho de aula que a princípio poderíamos não ter imaginado quando a pensamos. (...) (NASCIMENTO, 2014, p. 36).

Portanto, justifica-se o uso da Resolução de Problemas para o ensino de Trigonometria, como uma forma de desmistificar toda a complexidade que envolve o ensino e a aprendizagem deste conteúdo e mostrar a grande importância e a imensa aplicabilidade do mesmo na prática. Pois vem possibilitar ao aluno colocar-se diante de questionamentos, levando-o a pensar por si próprio, condicionando-o a gerenciar informações que estão ao seu alcance dentro e fora da sala de aula, ampliando tanto os conhecimentos matemáticos, como também da realidade em geral que o cerca.

3.3. Descrições das Aulas

1ª Encontro: aulas 1 e 2 (12/08/2013)

Conteúdos:

- Arcos de Circunferência e ângulo central
- Unidades de medida de arcos – grau e radiano
- Relação entre grau e radiano

Objetivos:

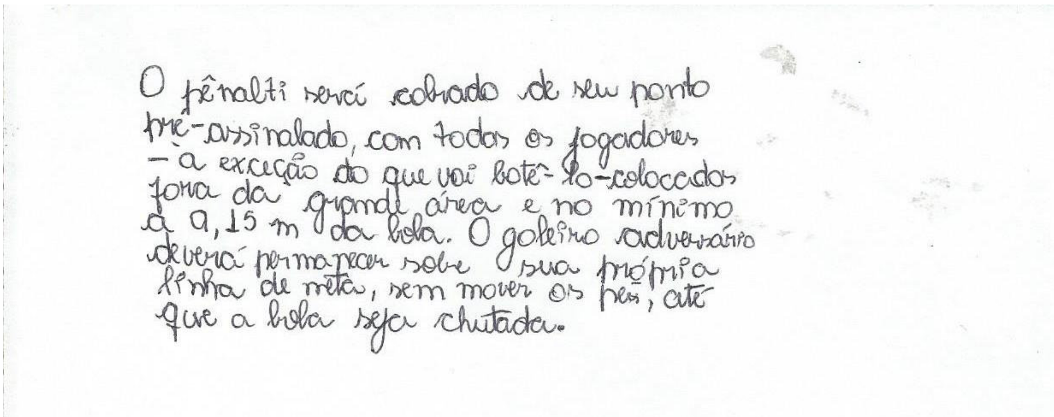
- Retomar o conceito de arco de circunferência e ângulo central
- Reconhecer o radiano como outra medida para arcos
- Transformar a medida de um arco de grau para radiano e vice-versa.
- Propor problemas que relacionem as medidas grau e radiano

Nessa primeira semana, nossa preocupação como professora/orientadora da turma, foi de preparar os mesmos para a metodologia que seria aplicada no decorrer das aulas, pois até então, a resolução de problemas como metodologia, seria algo novo e talvez até desconhecido para eles. Metodologia esta, que os tiraria de uma zona de "conforto" e os colocaria em situações onde eles por si só sem maiores intervenções do professor, teriam que traçar estratégias para chegar à resposta procurada em cada situação proposta.

Logo no início da primeira aula, falamos um pouco o que significava trabalhar um conteúdo através da resolução de problemas, e a necessidade de que todos estivessem empenhados em realizar tudo aquilo que seria proposto para a turma no decorrer das aulas. Deixamos também a turma consciente de que a grande parte das atividades seria realizada em grupos, e que esses grupos seriam fixos, onde a escolha dos componentes ficaria a critério da turma, e uma vez escolhido os componentes, a formação dos grupos não poderia ser alterada.

Também foi colocada para a turma, a forma que seria avaliada. A avaliação seria de forma continua, acompanhada de duas avaliações formais, em acordo com o calendário da escola, e que apesar de estar realizando as atividades em grupos a avaliação contínua seria feita de forma individual.

Dois dias antes dessa primeira aula, foi solicitada a turma que pesquisassem termos relacionados ao futebol, como cobrança de pênalti, escanteio, etc, sem que fosse mencionado nada relacionado ao conteúdo a ser trabalhado na aula. Com a turma de posse da pesquisa, e já divididos em grupos, iniciamos a discussão mediante as regras que os grupos tinham pesquisado.



O pênalti será cobrado de seu ponto
pré-assinalado, com todos os jogadores
– a exceção do que vai batê-lo – colocados
fora da grande área e no mínimo
a 9,15 m da bola. O goleiro adversário
deverá permanecer sobre sua própria
linha de meta, sem mover os pés, até
que a bola seja chutada.

Exemplo de resposta acerca do pênalti, pelo grupo V

Diante das respostas obtidas na pesquisa foi colocada à imagem de um campo de futebol, à medida que os grupos observavam a imagem, questionamos os mesmos especificamente sobre a cobrança de pênalti, a intenção aqui seria chamar a atenção deles acerca da “meia – lua” situada fora da grande área.

Ao mesmo tempo em que observavam essa “meia – lua” eram questionados acerca da sua função e de como ela é traçada no campo. De forma quase que imediata a maior parte dos grupos já responderam que a “meia – lua” limitava a distância de qualquer jogador a marca do pênalti e que a mesma tinha o formato de um arco de circunferência. Percebi que não tiveram dificuldades em visualizar a “meia – lua” como um arco de circunferência, pois já tinham visto esse conteúdo no ano anterior. Para finalizar essa primeira etapa, apenas formalizamos o conceito de arco de uma circunferência e ângulo central, com o objetivo de retomar conceitos já vistos anteriormente.

A segunda aula foi iniciada com uma discussão acerca de medidas de um arco de circunferência, também não demonstraram dificuldades em participar das discussões, pois foi conteúdos vistos na série anterior, estando claro para mim, que eles estavam bastante presos a unidade de medida grau, quando se falava em medir arcos de circunferência. Com o intuito de introduzir uma nova unidade de medida para arcos $(o\ radiano)$ e como calcular a medida de um arco nessa nova unidade, foi entregue a cada grupo uma cópia de dois problemas relacionados a grau, radiano e suas medidas.

PROBLEMA 1

A medida de um ângulo é 225°. Qual é a medida do mesmo ângulo em radianos?

PROBLEMA 2

Em que quadrante se localiza o arco $\frac{4\pi}{3}$ rad ?

Essas duas questões se constituem como problemas para os grupos, pelo fato de que eles desconhecem a palavra radiano e o conceito envolvido ali. O problema 1 foi colocado para causar dúvida acerca da palavra radiano. O objetivo é que os mesmo respondam as questões sem grandes intervenções e tentem resolvê-los com os conhecimentos já adquiridos.

No momento em que se depararam com o problema 1, questionaram sobre o significado da palavra radiano. Um dos alunos de imediato perguntou, se a palavra radiano estava associada à palavra raio, respondi que sim, há uma ligação com a palavra raio, mas não cheguei a me aprofundar nessa discussão, pois o objetivo principal no momento seria a resolução dos problemas propostos.

Ao iniciar o trabalho com os grupos, percebi que eles sentiam dificuldades em iniciar a resolução do problema 1, apesar de compreenderem que teriam que transformar um ângulo que estava em grau para radiano, não conseguiam executar, pois não havia um método imediato para faze-lo. Por isso minha intervenção foi necessária e decisiva para que eles conseguissem executar a atividade proposta. Para auxiliá-los nessa tarefa, sugeri que eles pensassem na posição dos ângulos em um transferidor, citei alguns como: 0°, 90°, 180°, 270°, 360°, feito isso coloquei na lousa duas circunferências orientadas, com essas mesmas medidas, uma em graus e outra em radianos. Solicitei que eles associassem as medidas conforme a posição nas circunferências, a fim de que chegassem a relação $\boldsymbol{\pi} \rightarrow \mathbf{180°}$. No momento que os grupos perceberam essa relação, induzi os mesmos à utilizá-la para resolver o problema **1.** Levaram todo o restante de tempo da aula para executar o problema **1**, mas conseguiram todos chegar a resposta esperada:$\mathbf{5\pi/_4}$ rad. O problema **2** ficou como atividade para casa e seria discutido na aula seguinte.

2ª Encontro: aulas 3 e 4 (19/08/2013)

Conteúdos:

- Unidade de medida de arco – o radiano
- Introdução à circunferência trigonométrica

Objetivos:

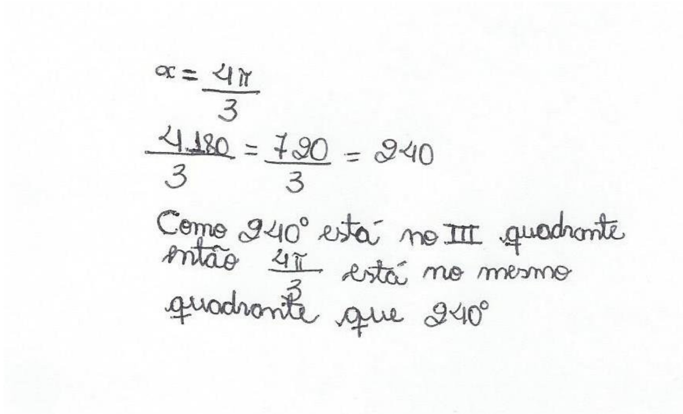
- Trabalhar um arco de circunferência na unidade de medida radiano
- Relacionar as unidades de medida – grau e radiano.
- Reconhecer os quadrantes e localização dos arcos na circunferência trigonométrica.
- Aplicar atividade prática, a fim de que os alunos entendam o conceito de radiano.
- Verificar o conceito de radiano pela relação entre o comprimento do arco e seu raio.

Ao iniciar a terceira aula, retomamos as duas aulas anteriores através do problema **2** que tinha ficado para os grupos resolverem em casa.

Problema **2:**

Em que quadrante se localiza o arco $\frac{4\pi}{3}$ rad ?

Ao iniciar as discussões acerca das respostas que os grupos tinham encontrado apenas um grupo apresentou uma possível solução para o problema. Mediante isso, solicitei que o grupo apresentasse na lousa a resposta que haviam encontrado.



$\alpha = \frac{4\pi}{3}$

$\frac{4.180}{3} = \frac{720}{3} = 240$

Como 240° está no III quadrante então $\frac{4\pi}{3}$ está no mesmo quadrante que 240°

Exemplo de solução apresentado pelo grupo I

Observando o grupo expor sua solução para toda a turma, como a resposta foi dada na medida grau e o problema estava na unidade de radiano, perguntei ao aluno que escrevera a solução na lousa, porque ele tinha colocado a resposta em grau, o aluno respondeu que observar os quadrantes em grau era mais fácil, pois trabalhar com esta unidade ele já estava acostumado.

Diante da resposta do aluno, indaguei os grupos, porque eles não tinham conseguido resolver o problema, um dos alunos falou que não havia pensado em transformar o valor dado do arco em grau, outro grupo disse que não tinha nenhuma relação para utilizar na resolução como a de $\boldsymbol{\pi \rightarrow 180°}$, e por isso não sabiam iniciar a solução do problema. Com as dificuldades apresentadas pelos grupos, ficou claro para mim que seria necessário trabalhar mais o conceito de radiano, pois o mesmo ainda não estava totalmente entendido para todos como era o esperado.

Dando continuidade a aula, pedi para que a turma se dividisse novamente em grupos, solicitei aos mesmos que desenhassem em folhas de papel A4 circunferências de vários tamanhos, com o auxilio de um compasso e em seguida recortasse as mesmas. Feito isso entreguei para cada grupo pedaços de barbante, para os mesmos medirem o raio e o comprimento dessas circunferências construídas. De posse dos valores do raio e do comprimento, orientei os grupos a dividirem essas medidas e compararem os resultados em todas as circunferências que haviam sido construídas, perceberam que os resultados eram bastante parecidos, apesar das circunferências terem tamanhos diferentes, chamando a atenção dos mesmos ainda para o fato de que os ângulos relativos a essas medidas serem os mesmos, e que essa é outra forma de medir ângulos: pela razão entre o comprimento do arco e seu raio. E que essa outra forma resulta em um numero real denominado radiano (atividade retirada do planos de aula da uol – "o que é radiano").

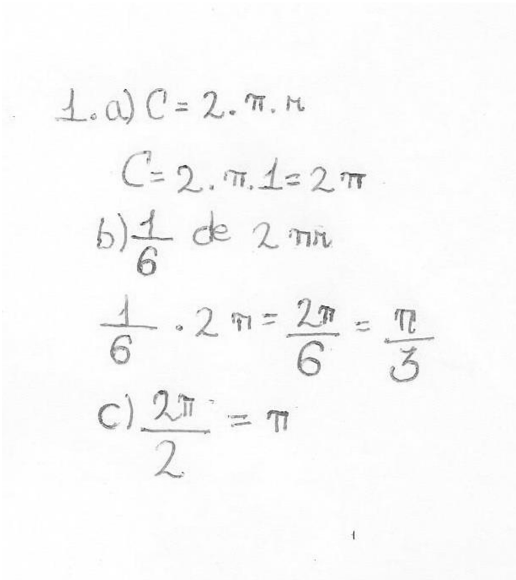
Para concluir, mostrar ainda que para um ângulo de 360° em radianos equivale a 2π ou aproximadamente 6,28 radianos. E que essa medida é um número real.

Com o objetivo de relacionar essas duas medidas grau e radiano, foi pedido para os alunos representar na circunferência com o auxilio do transferidor outros arcos em grau como 180, 90, 60, 30, medir novamente o comprimento de cada e o respectivo raio, dividi-los e comparar os resultados encontrados com a divisão do 360° por 2, 6 e 4, fazendo assim a relação entre as duas unidades de medida, alcançando o objetivo proposto para a aula, tornando mais claro o conceito de radiano.

Já na quarta aula, foi proposta para os grupos uma sequência de atividades com a intenção de iniciar o trabalho com a circunferência trigonométrica.

ATIVIDADES PROPOSTAS:

- .**1**. Com a circunferência de raio 1 cm, calcule em função de π.
- **a**) o seu comprimento
- **b**) o comprimento de um arco cuja medida corresponde a $\frac{1}{6}$ do comprimento total da circunferência.
- **c**) o comprimento de um arco cuja medida corresponde a metade do comprimento total da circunferência.
- **2**. Faça os mesmos cálculos para circunferências de 3 cm e 5cm.
- Baseando-se nos cálculos anteriores, qual a vantagem de se utilizar o raio de 1 cm?


1. a) $C = 2 . \pi . r$

$C = 2 . \pi . 1 = 2\pi$

b) $\frac{1}{6}$ de $2\pi r$

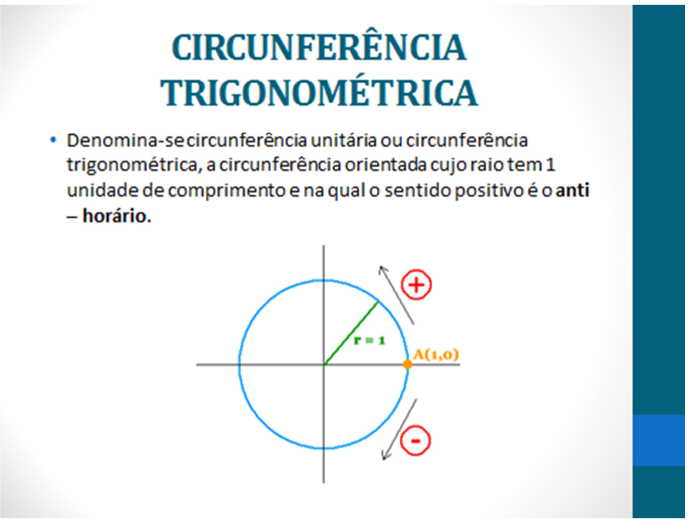
$\frac{1}{6} . 2\pi = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

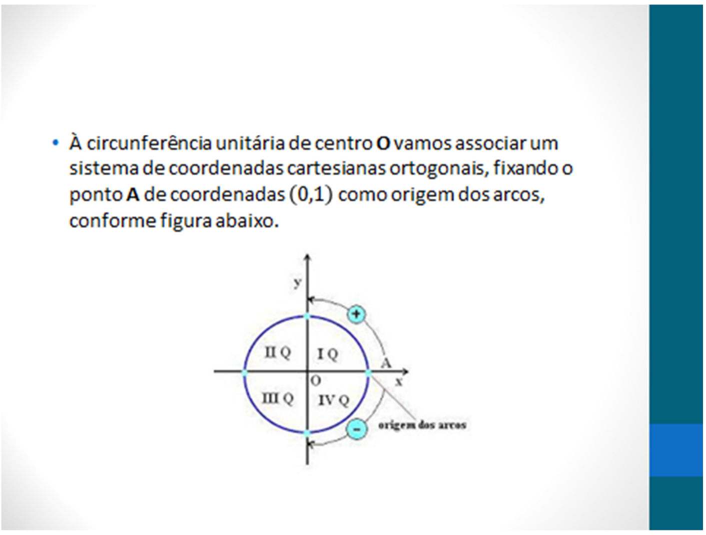
c) $\frac{2\pi}{2} = \pi$

Exemplo de resolução da questão 1 pelo grupo III

O objetivo dessas atividades, nesse momento foi de que ao realizar cada item proposto com o raio de 1 cm e em seguida com os demais raios de 3 e 5cm; perceberem que o raio de 1cm é mais conveniente, e que por isso o raio igual a 1cm seria adotado na circunferência trigonométrica.

Observando os grupos realizarem a sequência de atividades, não notei grandes dificuldades, todos os grupos compreendiam o que deveria ser executado na atividade. As únicas dificuldades que surgiram no decorrer da atividade envolviam a própria execução dos cálculos, como por exemplo, no item **b** da questão **1,** três dos cinco grupos não reconheceram que 1/6 seria o comprimento total da circunferência dividido por 6. Sendo necessário intervir para retomar o conceito de fração como parte de um todo, elucidando assim todas as dúvidas e dando prosseguimento a atividade. Encerrando a aula apresentei para a turma a definição de circunferência trigonométrica:





3º Encontro: aulas 5 e 6 (26/08/2013)

Conteúdo:

- Arcos côngruos

Objetivos:

- Reconhecer que arcos côngruos são arcos de mesma extremidade
- Determinar as medidas dos arcos côngruos a outro arco
- Escrever a expressão correspondente a arcos côngruos.

Para trabalhar arcos côngruos, exibimos para a turma um vídeo relacionado ao campeonato de Skate X – Games 2004, onde o atleta Sandro Dias (o mineirinho) realiza uma manobra denominada 900. Ao término do vídeo lançamos a turma a seguinte pergunta:

"Qual a relação do nome da manobra 900 com a quantidade de voltas que o atleta dá em volta de si mesmo na manobra?"

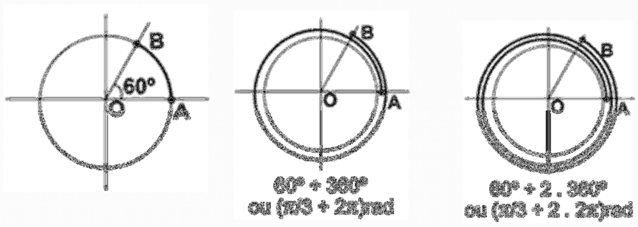
De imediato responderam que o 900 seria pelo fato de que ele é composto dos 360 duas vezes mais o 180, logo como 360 correspondem a uma volta completa, 900 estava representando as duas voltas e meio executadas na manobra.

Para confirmar suas respostas e verificar que 900° terá a mesma extremidade que 180°, solicitei que cada grupo construísse uma circunferência de raio 10 cm e marcasse o arco correspondente a 900° sobre a circunferência.

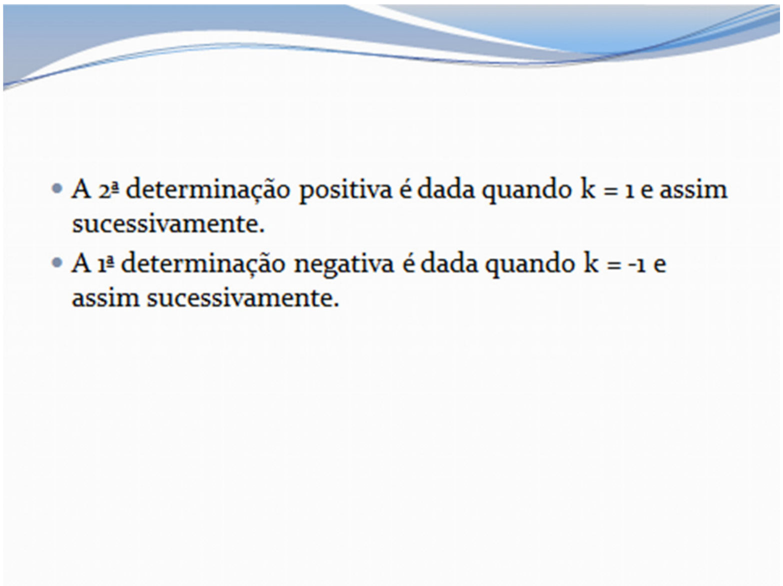
Ao iniciar a atividade, logo surgiu o questionamento por parte da turma acerca de como representar na circunferência um ângulo que tem medida maior que uma volta completa (360°) se não daria para utilizar o transferidor. Indiquei que utilizassem o compasso, pois assim ficaria mais fácil percorrer as duas voltas e meia. Feita esta etapa confirmaram que o arco de 900° coincidiu exatamente com o arco de 180°. Prosseguindo com as discussões, falei para turma que o que eles tinham acabado de fazer era representar na circunferência arcos maiores que uma volta completa(360°), e que pelo fato do arco de 900° sua extremidade coincidir com a extremidade do arco de 180°, esses dois arcos são denominados **arcos côngruos.** E que o arco de 180° seria a menor determinação positiva do arco de 900°, ou seja, 180° seria a redução do arco de 900° a primeira volta positiva. Após isso, apresentamos a definição formal de arcos côngruos, estendendo também sua definição para as voltas negativas:

Arcos Côngruos

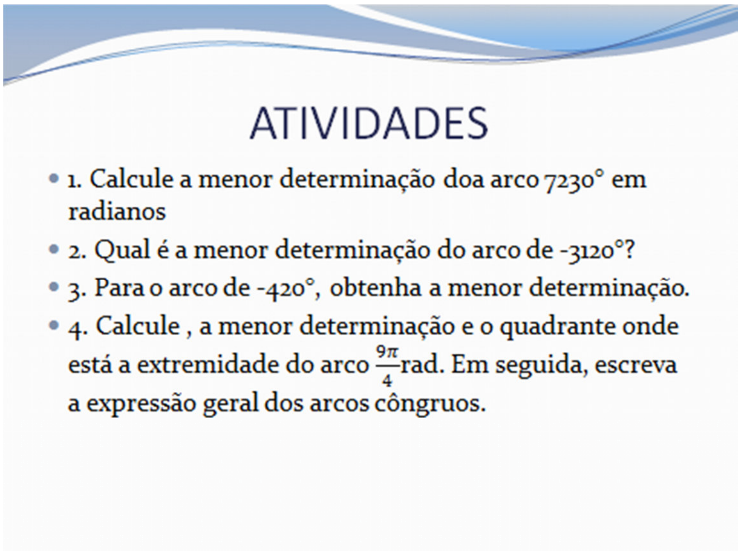
- Quando dois ou mais arcos possuem a mesma origem ($ponto\ \boldsymbol{A}$) e a mesma extremidade ($ponto\ \boldsymbol{P}$), são medidos no mesmo sentido e diferem apenas quanto à quantidade de voltas na circunferência trigonométrica. São, nesse caso denominados **arcos côngruos**.



- Assim, para um ângulo α qualquer, a expressão geral dos arcos côngruos é a seguinte:
- Para α medido em graus: α + 360 . K, sendo K$\in Z$
- Para α medido em radianos: $\alpha + 2k\pi$, sendo K $\in Z$.
- O arco α é denominado menor determinação positiva ou 1ª determinação positiva quando $0 \leq \alpha \leq 360°$, ou seja K = 0



Como o tempo da aula, já estava esgotado deixamos uma sequência de atividades para os grupos copiarem do slide, serem realizadas em casa, e entregues na próxima aula:



4º Encontro: aulas 7 e 8 (02/09/2013)

Conteúdo:

- Arcos côngruos
- Revisão: arcos trigonométricos, unidades de medida de arcos e circunferência trigonométrica.

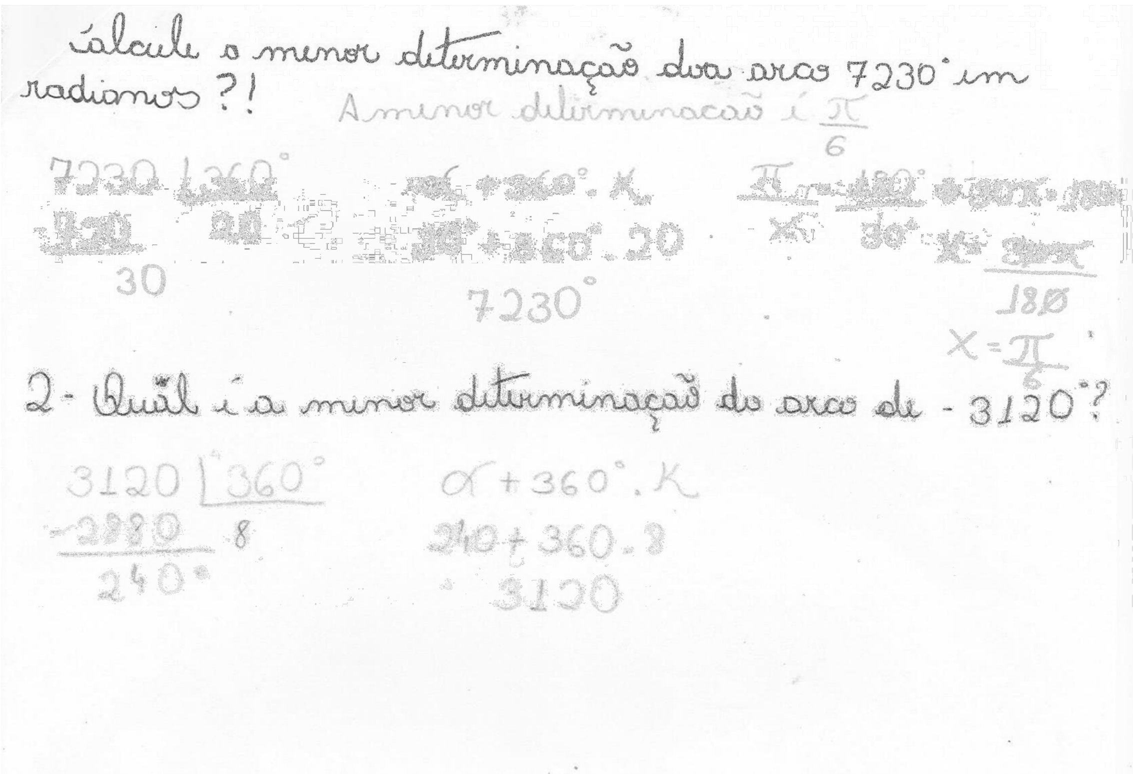
Objetivos:

- Corrigir a atividade proposta deixada na aula anterior

- Resolver na lousa uma lista de questões de livros didáticos, para revisão.

Iniciando a sétima aula, solicitamos aos grupos que entregassem as questões que foram deixadas no último encontro, para corrigi-las e solucionar possíveis duvidas acerca de arcos côngruos. Perguntei se algum grupo gostaria de expor suas soluções na lousa, para o restante da turma, a fim de que os outros grupos analisassem as respostas encontradas e todos pudessem se envolver na correção e na participação mais efetiva na aula e acerca do conteúdo trabalhado. Logo, o primeiro grupo se propôs a escrever suas soluções no quadro.

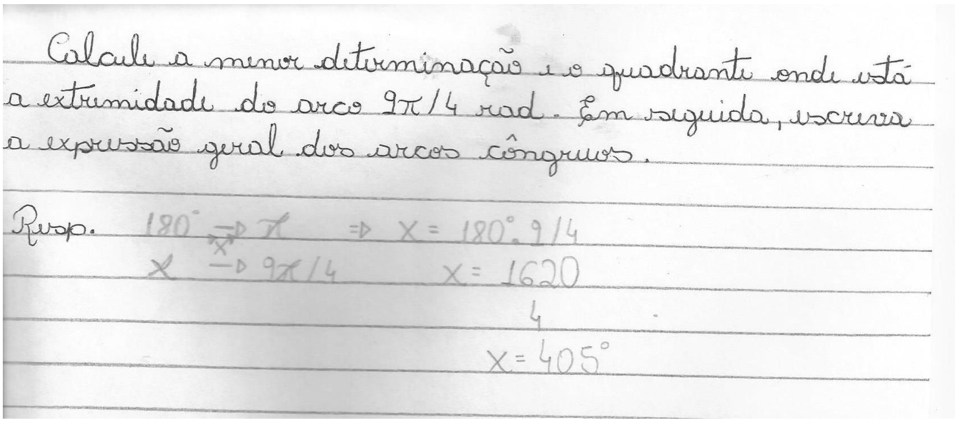
Observando a resolução da primeira questão, o grupo I encontrou corretamente a menor determinação positiva. Já nas questões 2 e 3, o grupo encontrou a menor determinação positiva:



Exemplo de resolução das questões 1 e 2 do grupo I

Diante da solução apresentada, indaguei se os outros grupos concordavam com a resposta, todos disseram que sim. Em seguida perguntei qual seria o sinal do arco considerado na questão, todos responderam: negativo. Fiz novamente a pergunta: “todos concordam que a menor determinação do arco é 240°?” Dois grupos continuaram dizendo que sim e os outros dois não opinaram, mediante este fato, percebi que eles não observaram que se o arco em questão é negativo, o resto encontrado seria a menor determinação negativa e que na realidade a questão se refere a menor determinação positiva, logo 240 seria negativo e para achar a sua menor determinação positiva a resposta teria que ser um arco da primeira volta positiva, sendo assim teria que somar -240° com 360°.

Dando sequência a exposição das soluções na lousa, esperei o grupo terminar de colocar na lousa a solução da questão 4:

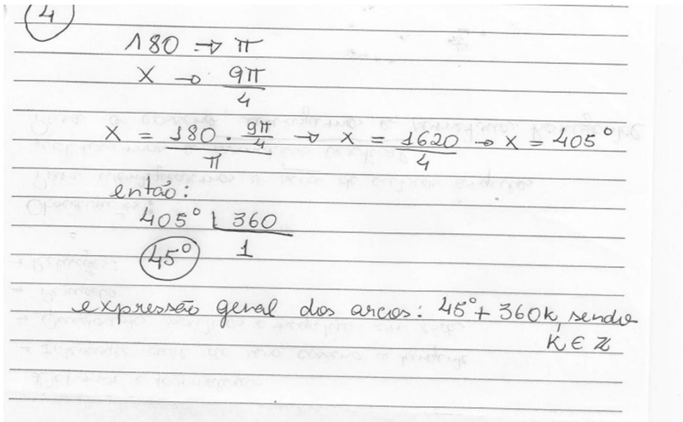

Calcule a menor determinação e o quadrante onde está a extremidade do arco $9\pi/4$ rad. Em seguida, escreva a expressão geral dos arcos côngruos.

Resp. $180° \Rightarrow \pi$ $\Rightarrow x = 180° . 9/4$
$x \rightarrow 9\pi/4$ $x = \frac{1620}{4}$
$x = 405°$

Exemplo de resolução da questão 4 do grupo I

Fiz novamente pergunta aos grupos: “todos concordam com a solução apresentada, alguém achou outra resposta, diferente da apresentada?”.

O grupo III apresentou uma solução parcialmente diferente do grupo I como podemos observar:


(4)
$180 \rightarrow \pi$
$x \rightarrow \frac{9\pi}{4}$
$x = \frac{180 . \frac{9\pi}{4}}{\pi} \rightarrow x = \frac{1620}{4} \rightarrow x = 405°$
então:
$405° \lfloor 360$
$45°$ 1
expressão geral dos arcos: $45° + 360k$, sendo $k \in \mathbb{Z}$

Exemplo de resolução da questão 4 pelo grupo II

Analisando a solução, chamei a atenção dos grupos, no sentido de que nenhuma das duas soluções estava completamente correta, a primeira, devido o fato de que eles apenas transformaram o arco dado em radiano para grau, demonstrando que não entenderam o que tinha sido solicitado na questão. Já a segunda solução não estaria totalmente correta, porque o grupo trabalhou todo o desenvolvimento na unidade de grau e o mais conveniente seria ter dado a solução na mesma unidade de medida apresentada na questão que foi o radiano. Quanto à construção da expressão geral dos arcos, percebi que o grupo III não teve dúvidas acerca de quando usá-la na unidade de grau ou radiano, pois como tinham trabalhado o arco em grau escreveram corretamente a expressão geral dos arcos em grau. O objetivo desta primeira parte foi procurar solucionar ao máximo as dúvidas diante do conteúdo arcos côngruos.

Em seguida a oitava aula, foi totalmente voltada para a resolução de uma lista (**em anexo 1**) com questões retiradas de alguns livros didáticos, envolvendo todo o conteúdo trabalhado nos encontros anteriores, a fim de prepará-los para a primeira avaliação formal, que seria aplicada nas duas aulas seguintes.

5° Encontro: aulas 9 e 10 (09/09/2013)

As duas aulas foram apenas a aplicação da primeira avaliação formal, em conformidade com o calendário da escola.

6° Encontro: aulas 11 e 12 (16/09/2013)

Conteúdo:

- Circunferência trigonométrica

Objetivos:

- Construir o ciclo trigonométrico com material concreto

Materiais Utilizados:

- Cartolina de cores variadas
- Pinos coloridos
- Canudos
- Compasso
- Régua
- Transferidor
- Cola

- Lápis

Na décima aula, foi lançada aos grupos a proposta de construírem o ciclo trigonométrico, a intenção nesse momento seria que todos se envolvessem de forma mais ativa na construção do conhecimento, já que estariam manipulando materiais, experimentando, tirando suas próprias conclusões e refletindo sobre aquilo que estava sendo produzido. Para isso foi orientado que cada grupo deveria estar de posse de todo o material para a confecção do ciclo e que seria de responsabilidade de cada grupo providenciar os devidos materiais, seguindo a construção do mesmo mediante o seguinte roteiro (adaptado de um material da Sbem trabalhado nas aulas da disciplina de Trigonometria, do curso de especialização para professores do ensino médio).

Roteiro:

1- Desenhe uma circunferência de 10 cm de raio. Iremos convencionar que a medida do raio é de 1 unidade. (10 cm = 1 unidade)

2- Agora, tendo o centro da circunferência como ponto em comum, desenhe duas retas perpendiculares.

3- Com o auxilio de uma régua divida os eixos da seguinte forma:

A partir do centro em 10 partes iguais até a circunferência, ou seja, cada eixo ficará dividido em 20 partes iguais.

Como convencionamos que o raio mede 1 unidade, a partir do centro numere essas partes como numa reta numérica onde o zero é o ponto de encontro dos eixos.

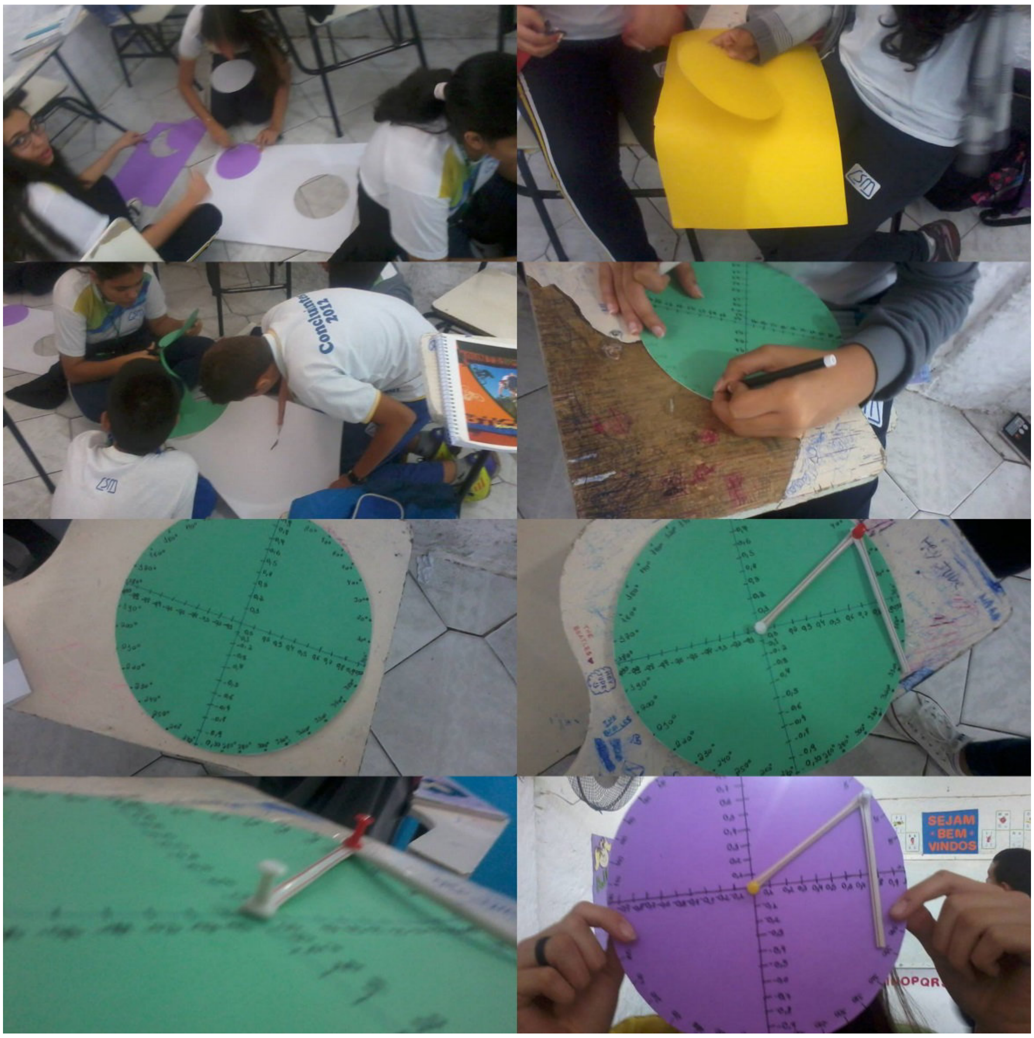
Ou seja: 1 cm na régua corresponde 0,1 unidade

4. Com o auxilio de um transferidor divida a circunferência de 10º em 10º. Marque esses pontos e anote a medida dos ângulos no sentido anti-horário

5. Agora, corte dois canudos de 11 cm de comprimento. Prenda-os com um pino colorido. Pegue uma extremidade e prenda no centro da circunferência.

De posse dos materiais e do roteiro, os grupos tiveram à disposição o tempo de duas aulas para confeccionarem o mesmo. Sendo gratificante para nós essa experiência, devido o empenho e o entusiasmo dos grupos em fazê-lo. Vimos assim, nosso objetivo ser alcançado, pois é de nosso conhecimento que o material didático não deve ser de uso ilustrativo, mas um material em ação, em que cada aluno possa explorá-lo.

Em todo o momento, sempre estávamos acompanhando os grupos, não sendo necessárias muitas intervenções, pois os mesmos acompanharam com facilidade o passo a passo contido no roteiro, como também percebemos uma colaboração entre os próprios grupos que se ajudavam sempre que surgia alguma dificuldade na construção do material. Uma aula dinâmica, descontraída e prazerosa para todos.



7° Encontro: aulas 13, 14, 15 e 16 (23/09/2013 e 30/09/2013)

Conteúdo:

- Circunferência trigonométrica
- Razões trigonométricas na circunferência – seno, cosseno e tangente.

Objetivos:

- Finalizar a construção do ciclo trigonométrico (construção da tangente)
- Explorar o ciclo trigonométrico

Materiais Utilizados:

- Cartolina de cor vermelha
- Régua
- Transferidor
- Cola
- Lápis
- Ficha de trabalho

Iniciamos, finalizando a construção do ciclo trigonométrico com a tangente. Disponibilizamos para os grupos, uma ficha de trabalho (**anexo 2**) contendo itens para a construção da tangente e atividades para a exploração das razões trigonométricas, utilizando o ciclo trigonométrico construído.

A execução dos primeiros três itens da ficha de trabalho, foi feita pelos grupos sem dificuldades, observando os grupos realizarem essa primeira etapa, apenas o grupo V não conseguiu perceber a partir do item 1 da ficha de trabalho, a formação de um triangulo retângulo, com isso na execução do item 3 desenharam apenas a posição dos canudos no ciclo:

Exemplo de resolução do item 2 pelo grupo V

Neste momento, solicitei que repetissem o item 1 e 2 da lista e observasse com atenção qual figura plana, já conhecida deles era formada com os canudos e o eixo horizontal, a partir desta intervenção conseguiram visualizar e fazer o esboço correto do triangulo retângulo no item 3.

Já no item 4 todos os grupos pediam muitas explicações sobre como encontrar o seno e o cosseno dos ângulos pedidos, um dos grupos pediu para usar a calculadora, pois não sabia encontrar o seno e o cosseno utilizando o ciclo construído. Mediante as dúvidas percebi que eles não tinham conhecimento suficiente sobre projeção ortogonal. Então parei a execução da lista de trabalho e na lousa relembrei com eles o que seria projeção ortogonal e que necessitariam deste conceito ao manipular o ciclo trigonométrico e assim determinar corretamente o seno e o cosseno dos ângulos considerados. Feito isto perceberam que para determinar o seno seria necessário projetar um dos canudos sobre o eixo vertical e o outro canudo sobre o eixo horizontal, assim conseguiram ver onde estava localizado o seno e o cosseno de cada ângulo. Chamou-nos a atenção que à medida que encontravam os senos e cossenos pedidos sempre recorriam à calculadora para verificar as respostas encontradas, alguns questionavam que não estava totalmente igual calculadora e ciclo trigonométrico, então falamos para eles que seria questões de aproximação de valores.

Os itens 5 e 6 da ficha foram bem desenvolvidos por todos os grupos e verifiquei que compreenderam bem o conceito de tangente envolvido no ciclo trigonométrico, apenas foi necessária nossa intervenção na manipulação do ciclo para determinarem o valor das tangentes, pois tiveram dúvidas de como posicionar corretamente os canudos e verificar o valor das tangentes, pedi para que usassem a régua como prolongamento do canudo preso no centro do ciclo trigonométrico e verificassem o valor da tangente dos ângulos dados, feito isto conseguiram verificar corretamente a tangente dos ângulos, sempre recorrendo a calculadora para tirar qualquer dúvida acerca do valor encontrado no material.

Apenas com os ângulos de 90 e 270, alguns grupos acharam estranhos não conseguirem encontrar as respectivas tangentes, sendo explicado para todos que o fato de 90 e 270 não ter valor para a tangente se dá pelo fato do paralelismo entre o eixo vertical e o eixo das tangentes.

O item 8 da ficha, teve por objetivo que os grupos refletissem sobre tudo que havia sido executado anteriormente, nesse momento foi falado para eles sobre os intervalos de seno, cosseno e tangente, o sinal dos quadrantes para cada razão trigonométrica, e mais uma vez deixei claro o motivo que 90 e 270 não tem valor para a tangente.

8° Encontro: aulas 17 e 18 (07/10/2013)

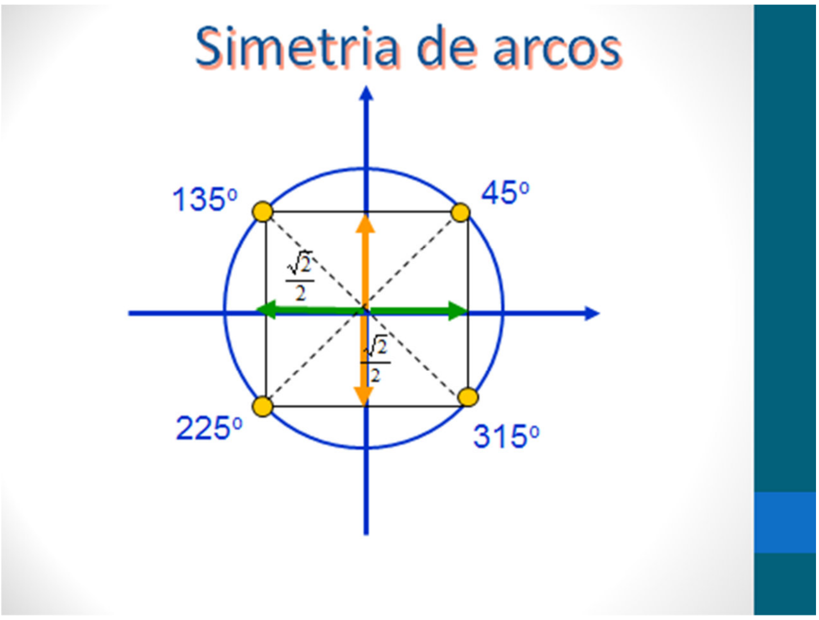
Conteúdo:

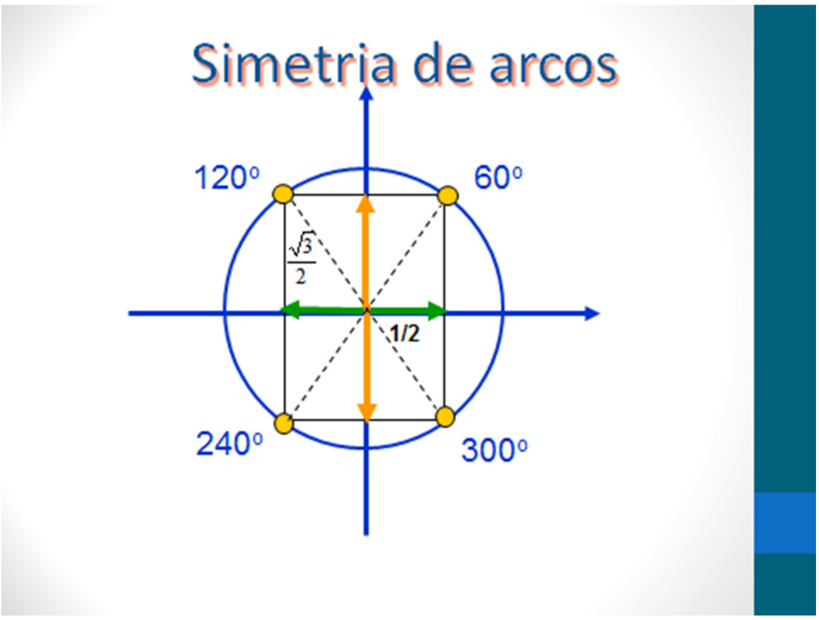
- Simetria
- Redução de arcos ao 1° quadrante

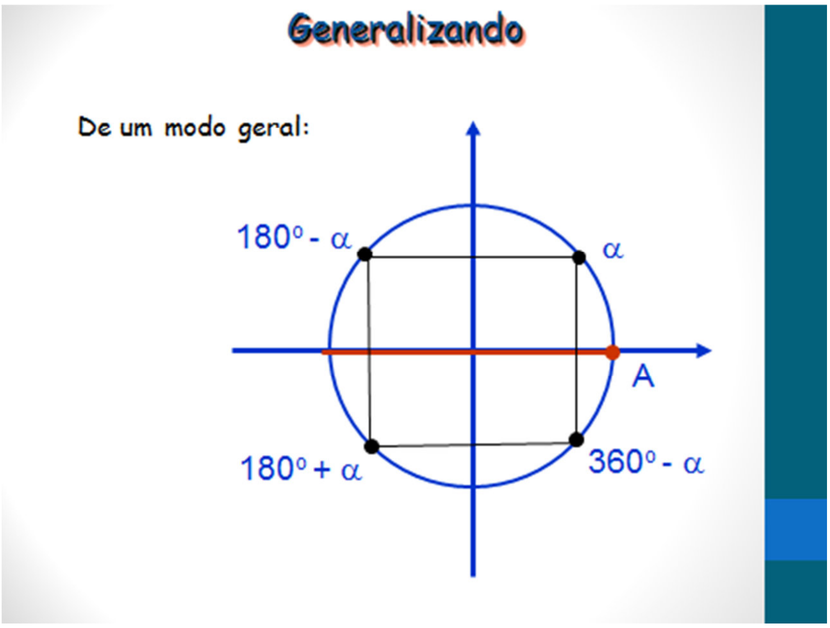
Objetivos:

- Determinar os pontos simétricos de um ponto dado, na circunferência trigonométrica.
- Reduzir um arco dado ao 1° quadrante

Num primeiro momento, de forma expositiva, trabalhamos com toda a turma o conceito de simetria na circunferência trigonométrica, nosso propósito seria prepará-los para relacionar um arco dado, a arcos do primeiro quadrante, utilizando a simetria de arcos. Primeiramente, falamos que é de grande utilidade saber relacionar medidas de arcos trigonométricos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano, pois isso ajudará a determinar senos, cossenos e tangentes desses arcos. Em seguida trabalhamos com esquemas para um melhor entendimento das simetrias em relação aos eixos coordenados e a origem do sistema cartesiano, nomeando estes arcos como suplementares, explementares e replementares, complementando os slides a seguir:







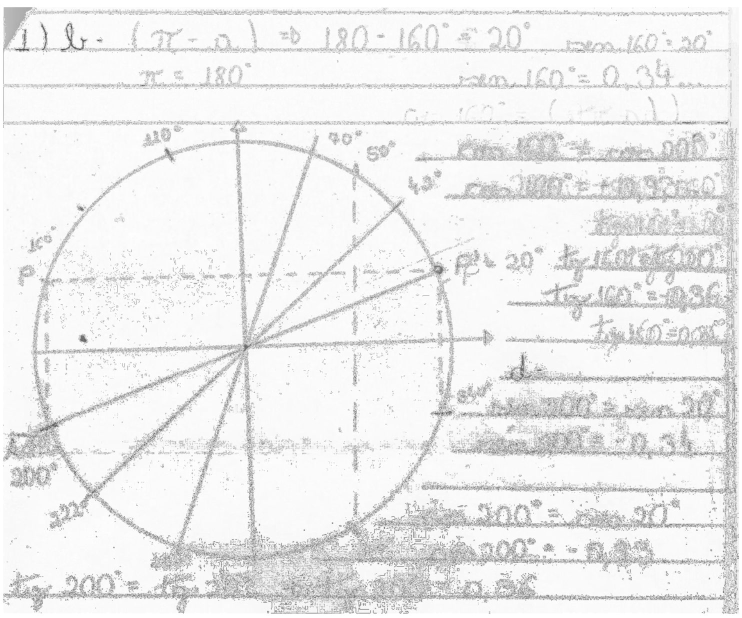
Finalizamos esse primeiro momento, pedindo que a turma determinasse o simétrico de alguns arcos como: 120°, 160°, 290°, e também os mesmos arcos em radianos.

No segundo momento da aula, solicitamos que a turma voltasse a se dividir em grupos e foi entregue para cada grupo uma ficha de trabalho **(anexo 3)**, como também uma tabela trigonométrica com os valores de seno, cosseno e tangente de arcos do 1° quadrante.

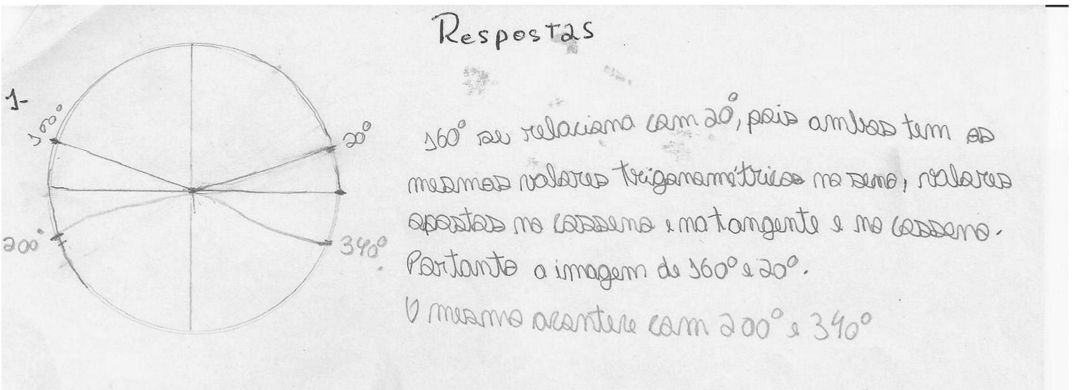
O item 1, letra **a** que seria representar o arco de 160 na circunferência trigonométrica, todos conseguiram desenvolver bem, até mesmo aqueles que demonstravam nas aulas anteriores, dificuldades em localizar com o auxilio do transferidor um arco qualquer.

A partir do momento que representaram de forma correta o arco de 160, se envolveram nas demais alternativas do item 1, enquanto íamos percorrendo a sala, ficávamos observando os grupos, e todos eles solicitavam muitas explicações com relação a alternativa **b**, pois não conseguiam compreender o que teriam que fazer para relacionar o seno, cosseno e tangente do arco de 160 com arcos do 1° quadrante. Mediante as dúvidas que surgiram procurei saná-las, levando os grupos a refletirem sobre tudo que tínhamos discutido no primeiro momento e que eles necessitariam utilizar o conceito de simetria para relacionar o arco de 160 com arcos do primeiro quadrante. Pedi para que os mesmos pensassem em que quadrante estava localizado o arco de 160° e que mediante esse quadrante, qual simetria eles teriam que aplicar na circunferência, se seria em relação ao eixo vertical, horizontal ou a origem do sistema.

De acordo com esta explicação dada aos grupos, os mesmos conseguiram descobrir que o arco simétrico a 160° no primeiro quadrante seria o arco de 20° e utilizando a tabela trigonométrica dada a cada grupo determinaram os valores para seno, cosseno e tangente do arco de 160°, usando o arco de 20°.



Exemplo de resolução do Grupo I



Exemplo de resolução do grupo IV

Devido à alternativa **b** ter sido motivo de grande dúvida na execução da ficha de trabalho, combinamos com os grupos que retornaríamos a trabalhar os demais itens (2, 3 e 4) no próximo encontro.

9° encontro: aulas 19 e 20 (14/10/2013)

Conteúdo:

- Redução de arcos ao 1° quadrante

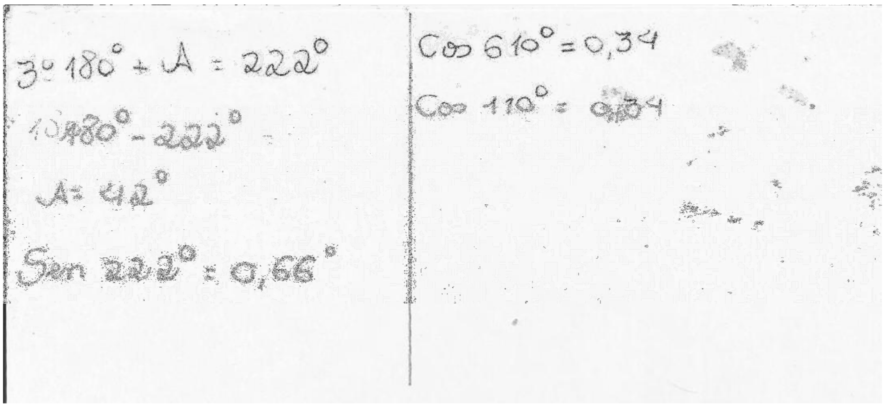
Objetivos:

- Reduzir um arco dado ao 1° quadrante

Retomando a ficha de trabalho do encontro anterior, a turma novamente dividida em grupos, deu continuidade à resolução dos itens, de modo a finalizar o conteúdo de redução de arcos ao primeiro quadrante.

O que nos chamou atenção foi o fato de sempre termos que intervir para relembrá-los acerca do sinal dos quadrantes, e de que os sinais das razões trigonométricas dos arcos variam de acordo com o quadrante que ocupam. Diante dessa intervenção, não tiveram dificuldades em finalizar o item **2,** determinando corretamente a relação existente entre as razões trigonométricas dos arcos considerados. Apenas no item **3,** demonstraram dificuldades em interpretar o enunciado da questão, pois ficaram em dúvida se deveriam usar as informações existentes no enunciado para determinar o que estava sendo pedido. Esse fato mostrou que ainda havia dúvidas em relação à redução de arcos. Com isso acompanhamos de perto os grupos trabalharem neste item, e esclarecendo todas as dúvidas que surgiam, tanto neste item

3 como no **4** conseguimos alcançar o objetivo principal da aula, que seria fixar o conceito de redução ao primeiro quadrante.



Exemplo de resolução do item 3 pelo grupo III

3.4. Análise das Aulas

No desenvolvimento das atividades propostas ao longo dos encontros, percebi de início que os mesmo sentiam-se inseguros com a nova metodologia que lhes era apresentada. Não sabiam como proceder de imediato, quando solicitávamos a execução de alguma tarefa na aula. Seus comportamentos demonstravam medo e imaturidade na tomada de decisões, mediante o que estavam produzindo, pois sempre havia certa resistência em expor suas resoluções para o professor e para os demais em sala.

Sempre que me aproximava de alguns grupos para observar o modo como desenvolviam as atividades propostas, via nos mesmos o receio de que suas respostas estivessem erradas, ou que suas justificativas nas soluções não fossem aceitas por mim. Então, para que os mesmos progredissem nas atividades, era quase uma obrigação falar para os mesmos que eles estavam no caminho certo, demostrando assim, que ainda não haviam compreendido o trabalho com a resolução de problemas, devido se preocuparem demasiadamente com o produto de suas respostas e a confirmação por parte do professor, sem refletir em nenhum momento sobre o que estavam executando.

Mediante as observações feitas por mim, no decorrer das aulas e em todo material escrito produzido por cada grupo, alguns aspectos me chamaram a atenção e estão elencados a seguir:

- *Compreensão em relação à linguagem da situação- problema apresentada*. Em todas as atividades propostas, sempre me certificava, se todos haviam compreendido bem o enunciado de cada situação- problema, pois ao iniciar a execução da mesma, solicitava que os mesmos explicassem para mim o que o problema estava pedindo. E ao surgir qualquer dúvida, procurava sempre fazê-los ler mais de uma vez os enunciados, afim de que eles por si só pudessem perceber o que não haviam compreendido ainda e caso não conseguissem, então eu me dirigia para toda a turma e explicava o que não estavam compreendendo. No decorrer das atividades, quase não surgiam dúvidas acerca do que estava descrito nas atividades, em sua grande maioria, todos conseguiam identificar o que estava sendo solicitado.

> A releitura de um problema não melhora muito, mas fazer os estudantes recontarem o problema em suas próprias palavras lhes obriga a pensar exatamente sobre o que o problema está perguntando. *(*Van de Walle, 2009, p. 62)

- *Metacognição.* Um dos aspectos que me chamou mais a atenção, foi a ausência de autonomia por parte dos mesmos no que diz respeito a compreensão e a avaliação das soluções produzidas, ou seja até o presente momento, nunca havia sido feita com eles nenhuma atividade que privilegiasse estratégias cognitivas de aprendizagem, pois os mesmos executam prontamente tudo o que lhes era solicitado na atividade, mas não se sentiam responsáveis pela sua própria aprendizagem, não estando familiarizados com essa aprendizagem proveniente de processos, realizavam as atividades propostas, esperando sempre respostas prontas e acabadas.

Nesse sentido, as situações – problemas vieram com o intuito de mudar essa perspectiva e de trazer uma nova forma de alcançar a aprendizagem de maneira mais dinâmica e satisfatória, através das estratégias metacognitivas, levando os mesmos a refletir sobre suas ações e ter a consciência necessária de que o caminho que estão tomando para chegar a determinada solução é o mais adequado ou não, procedimentos estes que devem sempre permear as aulas de matemática.

> Assim, a metacognição pode ser utilizada como um mecanismo de aprendizagem na matemática, pois ela estimula o aluno a refletir e a raciocinar sobre os modos pelos quais executa uma atividade ou quando resolve uma dada situação – problema. Desse modo há uma interação entre o individuo e o problema, e entre seus processos mentais. Essa autonomia intelectual irá ajuda-lo na praticidade do dia–a–dia, nas decisões a serem tomadas no cotidiano. (LEITE, 2011).

- *Método de rever o problema e suas soluções.* Uma das grandes dificuldades que encontrei ao iniciar o trabalho com a metodologia da resolução de problemas foi o fato de sempre me procurarem ao término de alguma atividade feita em sala, para me mostrar a resposta que haviam encontrado sempre esperando uma confirmação da minha parte se tinham chegado à solução esperada ou não, não vi na maioria das vezes alguma preocupação em rever o enunciado do problema e as soluções encontradas, não conseguiam por si próprios verificar se tinham chegado a resposta adequada para o problema. Só tomavam consciência se estavam corretos ou não, quando debatíamos com toda a turma as soluções encontradas pelos grupos, apontando falhas e acertos.

Assim à medida que íamos avançando nos encontros, sempre reforçava com os mesmos a observação sobre o que estavam executando, se o caminho seguido era o mais conveniente, se com a estratégia de resolução escolhida, seria mais eficiente a busca pela solução e mais ainda, se a solução encontrada estava em acordo com a situação – problema em questão.

Com isto, nos encontros subsequentes, eles me questionavam acerca das soluções encontradas por eles com uma frequência menor, chegando até em alguns momentos um grupo auxiliar outro no desenrolar das atividades, sem necessitar de nenhuma intervenção da minha parte. Observei que nos últimos encontros, eles já estavam mais atentos ao processo de resolução, retomando pontos da atividade que não tinham compreendido bem, usando formas diferenciadas de confirmar suas respostas (uso de calculadora, ciclo trigonométrico construído com material concreto, para verificar razões trigonométricas encontradas). Se antecipando em muitas conclusões, no momento de validação e formalização dos conceitos envolvidos nas atividades propostas, atingindo não por completo, mas de forma significativa o objetivo proposto para esta metodologia, que é permitir ao aluno ser um agente ativo e participante no processo de ensino – aprendizagem.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao término desta pesquisa, podemos constatar que em nossa prática diária como educadores preocupados com o ensino aprendizagem da Matemática, em especial da Trigonometria, deve haver sempre o empenho por trabalhar este conteúdo através de situações novas, desafiadoras, pertinentes à realidade dos mesmos que os levem a sentirem-se instigados a buscar resposta para estas situações e que as fórmulas e os algoritmos possam ficar em segundo plano e que o primordial seja o processo e o modo como estão conduzindo seus métodos e soluções.

Todo o problema deve conduzir o aluno a utilizar seus conhecimentos prévios, seu cotidiano, que é de extrema importância na formação dos conceitos matemáticos, e ao mesmo tempo exigir que se busquem novas alternativas para solucioná-lo.

> Os conceitos cotidianos são trazidos pelos alunos para a escola por meio das suas experiências pessoais e coletivas e por eles adquiridos na sua realidade social e cultural. Por essa razão é que os problemas do cotidiano servem de elemento de mediação na formação de conceitos científicos. O conhecimento matemático é de fato um sistema de conceitos científicos. Mas os indivíduos desenvolvem no dia a dia muitos conceitos espontâneos que poderão ser aproveitados na sala de aula. (MARTINS, 2013, p. 109)

Portanto, na exploração de um conteúdo via Resolução de Problemas, torna-se essencial valorizar toda visão de mundo que o aluno traz para a sala de aula, pois é a partir desta percepção aliada a um conjunto de ações em sala de aula, que o aluno é levado a enfrentar situações novas, a ser motivado a pensar de forma autônoma e a conhecer, tendo por consequência uma aprendizagem satisfatória e significativa.

Dessa forma, a aprendizagem através da Resolução de Problemas tem extrema importância no desenvolvimento intelectual do aluno, e o professor torna-se peça – chave neste processo, não mais como centro, mas como mediador de todo o processo, propondo atividades que despertem o gosto pelo aprender, a cooperação mútua, valorizando o esforço de cada um.

Mas, essa aprendizagem só será possível, se o professor desempenhar seu papel de forma adequada, apresentando situações- problemas que favoreçam desafios e um pensar matemático crítico e independente, pois o que temos visto no ensino tradicional é que a

Resolução de Problemas é apenas uma maneira de fixar o que foi aprendido, uma mera repetição de procedimentos já trabalhados e não um meio para aprender.

> A resolução de problemas é a peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o individuo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (PCN+EM, 2002, p.109).

Sendo assim, percebemos a importância de se trabalhar a Trigonometria através da Resolução de Problemas, tendo a consciência de que não é uma tarefa fácil, que requer tempo, paciência, um preparo a mais daquilo que estamos acostumados a trabalhar em sala de aula. Fugir, um pouco do "trivial" explicação – exemplos – exercícios de aplicação, e nos debruçarmos neste processo de aprendizagem de forma mais responsável, tendo o entendimento de que não podemos atingir os objetivos que traçamos com perfeição, mas que podemos transmitir de forma mais eficiente e compreensível o conhecimento matemático para os nossos alunos, preparando-os para serem cidadãos críticos, ativos, conscientes de seu papel na sociedade como nos orienta os documentos oficiais.

Sabemos também que essa pesquisa não para por aqui, ainda temos muito o que aprender e o que aperfeiçoar ao trabalharmos com esta metodologia, e também com o conteúdo de Trigonometria, deixando a ansiedade de lado, e esperar que o aluno por si só realmente entenda a intenção que há por trás de cada situação-problema que lhe é apresentada, de não interferirmos tanto à medida que o mesmo avança na busca pela solução de cada problema, mas que sejamos apenas mediador, facilitador, e que o aluno venha ser efetivamente responsável e participante na construção do conhecimento.

Consideramos toda essa experiência extremamente positiva, pois vimos alunos que estavam acostumados apenas a reproduzir métodos, avançarem e irem mais além do óbvio, das explicações do professor e conseguirem desenvolver sua própria forma de resolver problemas, buscando o melhor caminho, investigando, buscando respostas para suas indagações e assim alcançando um propósito maior, que é uma aprendizagem matemática significativa.

E esperamos que este trabalho venha a contribuir na prática de outros educadores que também almejam essa aprendizagem dinâmica, envolvente e prazerosa que é o fazer matemático.

REFERÊNCIAS

BRIGHENTI, Maria José Lourenção. **Representações: atividades para o ensino e a aprendizagem de conceitos trigonométricos**. 2003. 150p. Bauru, SP: EDUSC, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2008.

_______. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio**: matemática: MEC/SEB, 2000.

_______. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio** +: matemática: MEC/SEB, 2002.

DANTE, L.R. **Matemática contextos e aplicações**. V. 2. São Paulo: Ática, 2010.

DANTE, L.R. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática**. 2009.192p. 1. Ed. São Paulo: Ática, 2009.

FARAGO, Jorge Luiz. **Matemática: ensino médio**, 1ª série. Curitiba: Positivo, 2010.

FRANÇA, Michelle. **Planos de aula. Ensino médio. Radiano- o que é isso?** Acesso em: 16.ago.2013. Disponível em: http://educacao.uol.com.br/planos-de-aula/medio/matematica-radiano---o-que-e-isso.htm.

IEZZI, G. et. al. **Matemática**: Volume único. 5ª ed. São Paulo: Atual, 2011.

NASCIMENTO, Maurício Alves. **Ensino-aprendizagem de Trigonometria através da resolução e exploração de problemas e cotidiano da sala de aula**. 2014. 218f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

PONTE, João Pedro da. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

RIBEIRO, Ericka da Costa. **Material concreto para o ensino de Trigonometria.** 2011. 28f. Monografia (Especialização). Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Belo Horizonte, 2011.

SILVA, Adeilson P.: **Ensino-aprendizagem de Análise Combinatória através da resolução de problemas: um olhar para a sala de aula.** 2013. 91f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2013.

SILVA, L.M. **Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas**. 2013. 306f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba-UEPB, Campina Grande, 2013.

VAN DE WALLE, Jonh A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ANEXOS

Colégio Santa Mônica

Disciplina: Matemática II

Professora: Lúcia Lima

Grupo:____

____

____

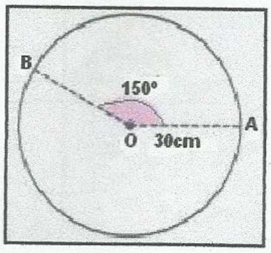
Série: 1° ano médio

Lista de Exercício – ANEXO 1

1. Expresse em graus e radianos a medida do arco correspondente a $\frac{2}{5}$ da medida da circunferência.
2. Quantas voltas completas um móvel dá e em que quadrante para, partindo da origem dos arcos, na circunferência trigonométrica, percorrendo um arco de:

   a) 1810°? b) 2350°? c) – 1200°? d) $\frac{17\pi}{8} rad$?
3. Determine a menor determinação positive dos arcos:

   a) 1440° b) $\frac{11\pi}{2} rad$
4. Encontre a medida do comprimento do arco AB, indicado na figura(use $\pi = 3{,}14$).



Colégio Santa Mônica

Disciplina: Matemática II

Professora: Lúcia Lima

Grupo:____

____

____

Série: 1° ano médio

Ficha de Trabalho – ANEXO 2

1) Prenda o percevejo que une os dois canudos na circunferência onde está indicado o ângulo de 30°.
2) Que figura ficou determinada pelos canudos e o eixo horizontal da circunferência?
3) Faça um esboço da figura em uma folha de papel A4 e aplique a definição de seno que você conhece. Em seguida faça o mesmo para a definição do cosseno.
4) Encontre os valores de seno e cosseno para os ângulos de: 40°, 45°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330° e 360°.
5) Utilizando cartolina, construa uma tira de 50 cm de comprimento e 3 cm de largura, marque sua metade, associando a mesma o zero. Em seguida marque os valores de 0 a 1 a direita e 0 a -1 na esquerda como no eixo vertical do ciclo construído. Fixe a tira perpendicularmente ao eixo horizontal, fazendo o zero da tira coincidir com o 1 do eixo.
6) Utilizando o esboço construído no item 2 e com o auxilio de uma régua prolongue o raio, até o mesmo tocar a tira que você construiu.
7) Agora encontre valores para a tangente dos ângulos: 40°, 45°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330° e 360°.
8) Responda:
   a) Quais possíveis valores para o seno e o cosseno de um ângulo?
   b) Para quais ângulos o seno é positivo? E negativo?
   c) Para quais ângulos o cosseno é positivo? E negativo?
   d) Quais os possíveis valores para a tangente de um ângulo?
   e) Para quais valores a tangente é positiva? E negativa?
   f) O que acontece com a tangente doa ângulos de 90° e 270°?

Colégio Santa Mônica

Disciplina: Matemática II

Professora: Lúcia Lima

Grupo:____

____

____

Série: 1° ano médio

Ficha de Trabalho – ANEXO 3

1) Faça o que se pede:

a) Construa um ciclo trigonométrico de raio qualquer e marque com o transferidor, um arco AM = 160°.
b) Utilizando-se de uma tabela trigonométrica, determine sen160°, cos160° e tg160°, sempre relacionando com valores trigonométricos dos arcos do 1° quadrante.
c) Marque no mesmo ciclo trigonométrico um arco AM_1 = 200°
d) Utilizando –se da tabela trigonométrica, determine sen200°, cos200° e tg200°.
e) Faça o mesmo para o arco AM= 340°.

2. Complete as igualdades utilizando arcos do 1° quadrante:

a) sen160° = sen_____ sen200° = sen______

b) cos160° = - cos____ sen200° = sem____= cos_____

c) tg160° = -tg______ sen340° = - sen_______

3. Sabendo que sen42° = 0,6691, determine o valor de sen22°; sabendo que cos70° = 0,3420, determine cos 610° e cos 110°.

4. Reduza ao 1° quadrante:

a) sen300° b) $cos\,\frac{7\pi}{4}$ c) $tg\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ d) $cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$