



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

PARTÍCULA QUÂNTICA
NÃO-RELATIVÍSTICA EM UM
ESPAÇO-TEMPO CURVO

FRANKBELSON DOS SANTOS AZEVEDO

CAMPINA GRANDE - PB
2014

FRANKBELSON DOS SANTOS AZEVEDO

PARTÍCULA QUÂNTICA NÃO-RELATIVÍSTICA EM UM
ESPAÇO-TEMPO CURVO

Monografia referente a disciplina Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), como registro de conclusão de curso, requisito à obtenção do título de Licenciatura Plena em Física pela Universidade Estadual da Paraíba, sob a orientação do professor Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva.

UEPB
CAMPINA GRANDE - PB
MARÇO - 2014

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

A994p Azevedo, Frankbelson dos Santos.

Partícula quântica não-relativística em um espaço-tempo curvo
[manuscrito] / Frankbelson dos Santos Azevedo. - 2014.

60 p. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) -
Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia,
2014.

"Orientação: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva,
Departamento de Física".

1. Relatividade Geral. 2. Espaço-tempo. 3. Mecânica
quântica. I. Título.

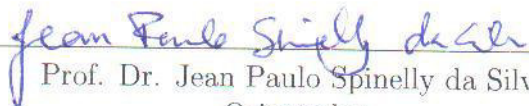
21. ed. CDD 539

PARTÍCULA QUÂNTICA NÃO-RELATIVÍSTICA EM UM ESPAÇO-TEMPO CURVO

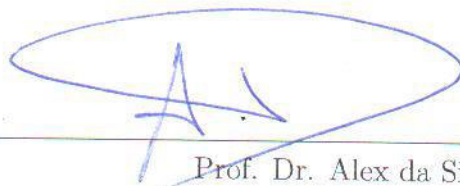
FRANKBELSON DOS SANTOS AZEVEDO

Aprovada em 07/03/2014

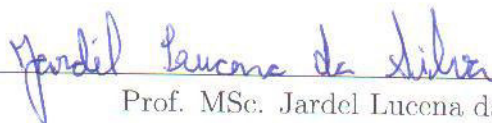
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Orientador



Prof. Dr. Alex da Silva
Examinador



Prof. MSc. Jardel Lucena da Silva
Examinador

À Física.

É como uma luta entre um Tigre e um Tubarão, cada qual é supremo em seu próprio elemento, mas indefeso no elemento do outro.

J. J. Thomson

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Chico e Maria que apesar de suas vidas simples e iletrada sempre me disseram que a educação é a melhor opção para vencer.

Ao meu irmão Franciélio pelo companheirismo.

A todos meus parentes, em especial, ao meu avô Gerssi Calista e ao meu bisavô Manoel Calista.

A todos meus amigos do passado e presente.

Ao meu amigo e professor Dr. Jean Spinelly pelos bons conselhos, ensinamentos e pela forma motivadora e participativa que me orientou neste e em outros trabalhos, tornando-se um exemplo de profissional a seguir, um admirável sujeito.

Aos professores da escola José Galdino de Medeiros, situada no sítio Barra da Canoa onde dei meus primeiro passos... Aos professores da escola Maria Elenita de Vasconcelos Carvalho, em especial, a professora Ivalmíria. Aos professores da escola Graciliano Fontini Lordão, em especial, ao professor Emanuel Cunha pelo incentivo a estudar Física.

Aos professores da Universidade Estadual da Paraíba, em especial, aos professores Ms^a. Maria Angela, Dr^a. Ana Raquel, Dr. Alex da Silva, Dr^a Ana Paula Bispo, Dr. Marcelo Germano, Ms. Elialdo Adriola, Dr. Alessandro Silveira, Ms. Toinho Albuquerque, Dr. Rodrigo Holanda e Ms. Maurício Barbosa pelos ensinamentos e boas conversas.

Aos funcionários da Universidade Estadual da Paraíba, em especial, a João, André e Zoraide pela atenção prestada.

Aos colegas de estudos Alexsandro, Givaldo, Joelson, R. Breaks, J. Breaks, Ildemar, Dennis, Sérgio, Rivelton, Bugley, Gival e Simony.

Ao meu amigo Fabrício e seus familiares pela generosidade. A Felipe Cândido e família, Sebastião e Maria Vasconcelos pelas contribuições. Aos parceiros de apartamentos Fabrício, Danillo, Alexsandro, Marcus e Bruno e as minhas amigas Lane, Meire e Thaise.

A UEPB pela assistência financeira e ótima receptividade, A CAPES e CNPQ pelo apoio financeiro nos trabalhos desenvolvidos.

Enfim, a todos aqueles que das mais diversas formas ajudaram a esse filho de agricultores a realizar um sonho que parecia, por motivos razoáveis, utopia para muitas pessoas.

Resumo

As investigações concernentes à conexão entre a mecânica quântica e a relatividade geral aconteceram ao final dos anos vinte e início dos anos trinta, quando foi discutida a generalização das equações de Schrödinger e Dirac para o espaço curvo. Nesse contexto, sistemas físicos, como, por exemplo, o átomo de hidrogênio, foram estudados em alguns espaços-tempo, onde se verificou a influência da estrutura destes em tais sistemas. Seguindo nesta linha de pesquisa, a nossa proposta, neste trabalho, consiste em investigar a influência da estrutura de um determinado espaço-tempo no movimento quântico de uma partícula não-relativística de massa m . Para tanto, pretendemos estudar o espalhamento sofrido por uma partícula que se move no espaço-tempo, gerado por um tubo de matéria com um campo magnético axial na região interior e nulo na exterior, o qual é solução das equações acopladas de Einstein-Maxwell com simetria cilíndrica, denominado solução de Safko e Witten. Além disso, levando em conta a presença de um potencial de auto-interação gravitacional, do tipo $const./r$, estamos interessados em determinar os estados ligados de uma partícula. Por questão de simplicidade, admitiremos que o tubo de matéria é impenetrável e, portanto, não levaremos em conta o campo gravitacional no interior.

PALAVRAS-CHAVE: Relatividade Geral, Espaço-tempo, Mecânica Quântica

Conteúdo

Introdução	9
Metodologia	12
1 Aspectos da Relatividade Geral	13
1.1 Campo Gravitacional Não-relativístico	13
1.2 Campo Gravitacional Relativístico	14
1.3 Equações de Campo Einstein	15
2 Mecânica Quântica	18
2.1 A origem da Mecânica Quântica	18
2.2 A Função de Onda	22
2.2.1 Equação de Schrödinger em Uma Dimensão	23
2.2.2 Interpretação Estatística	24
2.3 Estados Estacionários	25
2.4 Estados Ligados e Espalhados	26
2.5 Mecânica Quântica em Três Dimensões	28
2.5.1 Equação de Schrödinger em Três Dimensões	28
2.5.2 Equação de Schrödinger em Coordenadas Cilíndricas	29
2.6 Espalhamento	32
2.6.1 Teoria do Espalhamento Clássico	33
2.6.2 Teoria do Espalhamento Quântico	36
2.6.3 Análise de Ondas Parciais	37

2.6.4	Mudança de fase	39
3	Solução da Equação de Schrödinger no Espaço-tempo de Safko-Witten	41
3.1	Métrica de Safko-Witten	41
3.2	Mecânica Quântica no Espaço Curvo	42
3.3	Cálculo do Espalhamento	43
3.4	Cálculo dos Estados Ligados	47
	Considerações Finais	50
A	Função Gamma	51
B	Funções de Bessel	53
C	Equações Hipergeométrica	55
	Bibliografia	56

Introdução

O início do século XX foi um período em que a física foi marcada por profundas modificações conceituais que deram origem a duas novas teorias: a teoria da relatividade restrita (TRR), proposta por Einstein em 1905, e a teoria quântica, que teve seu início com o trabalho de Max Planck, no ano de 1900. A relatividade restrita mostrou que a teoria newtoniana não é válida no estudo de corpos que estejam se movimentando com uma velocidade comparável à da luz. Por sua vez, a mecânica quântica mostrou que a teoria newtoniana é falha na descrição dos fenômenos que ocorrem nos níveis atômicos e subatômicos (FILHO, 2002).

A TRR trata apenas com referenciais inerciais movimentando-se com uma velocidade constante entre si. Segundo esta teoria, dentre outros aspectos, o mundo físico de nossa experiência é representado por um espaço quadridimensional, o espaço-tempo de Minkowski. Cada evento físico é representado por quatro coordenadas (x, y, z, t) . A generalização desta teoria para referenciais não-inerciais proporcionou o desenvolvimento da teoria da relatividade geral (TRG), também conhecida como teoria relativística da gravitação, postulada por Einstein em 1915. Segundo essa teoria, a matéria (energia) curva o espaço e o tempo à sua volta. Isto é, a gravitação é um efeito da geometria do espaço-tempo (WEINBERG, 1972; LANDAU, 1974; BERGMANN, 1975; CARMELI, 1982; FERRARO, 2007).

No que se refere a mecânica quântica, muitos dos seus princípios fundamentais foram desenvolvidos, independentemente, por Erwin Schrödinger e Werner Heisenberg, em trabalhos publicados em 1926. A formulação apresentada por Schrödinger foi elaborada em termos das propriedades ondulatórias da matéria, com base na hipótese

de Louis de Broglie. A teoria de Heisenberg foi formulada em termos de matrizes. Embora essas teorias parecessem completamente diferentes, pouco tempo após serem publicadas, Schrödinger mostrou que eram matematicamente equivalentes. Na formulação de Schrödinger o estado de uma partícula é representado por uma função de onda $\Psi(\vec{r}, t)$, cuja evolução é descrita por uma equação de onda denominada equação de Schrödinger (GASIOROWICZ, 1979). Esta equação de onda é aplicável apenas à partículas não relativísticas. Uma outra equação de onda, que satisfaz os requisitos da TRR foi desenvolvida por Paul Dirac em 1928.

As investigações concernentes à conexão entre a mecânica quântica e a TRG foram feitas no final dos anos vinte e início dos anos trinta, quando foi discutida a generalização das equações de Schrödinger e Dirac para o espaço curvo. Nesse contexto, o átomo de hidrogênio, por exemplo, foi estudado em alguns espaços-tempo curvos específicos (AUDRETSCH e SCHÄFFER, 1978; PARKER e PIMENTEL, 1981). Os resultados mostraram que os níveis de energia de um átomo, na presença de um campo gravitacional, sofrem um deslocamento, como consequência da interação do átomo com a estrutura do espaço-tempo. Nos casos em que os efeitos do campo gravitacional estão associados às características globais do espaço-tempo, podemos citar o espalhamento de partículas não relativísticas em um espaço-tempo cônico (DESER e JACKIW, 1988; SPINELLY *et al*, 2001). Além desses, outros autores também analisaram como a curvatura interfere em um sistema quântico (FISCHBACK *et al*, 1981; BEZERRA, 1991; MARQUES e BEZERRA, 2002). Vale a pena chamar atenção que esses estudos são importantes do ponto de vista teórico bem como da possibilidade de serem observados.

A nossa proposta consiste em investigar a influência da estrutura de um determinado espaço-tempo no movimento quântico de uma partícula. Para tanto, pretendemos estudar o espalhamento sofrido por uma partícula de massa m , num espaço-tempo gerado por um tubo de matéria com um campo magnético axial interior, denominado espaço-tempo de Safko e Witten (1972). Além disso, levando em conta a presença de um potencial atrativo

do tipo $const./r$, estamos interessados em determinar os estados ligados de uma partícula em tal espaço-tempo. Vale salientar que este estudo foi realizado por Spinelly e Bezerra (2008).

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no primeiro capítulo estudaremos o campo gravitacional não-relativístico e relativístico e as equações de campo de Einstein. No segundo capítulo faremos um estudo sobre a mecânica quântica, onde, veremos uma discussão sobre o início da mecânica quântica, a função de onda, os estados estacionários, ligados e espalhados, além, da mecânica quântica em três dimensões e o espalhamento clássico e quântico. No terceiro capítulo veremos a métrica de Saffko-Witten, a mecânica quântica no espaço curvo, o cálculo do espalhamento e dos estados ligados. Em seguida, apresentaremos as considerações finais. Além disso, nos apêndices mostraremos as funções gamma, de Bessel e a equação hipergeométrica.

Ao longo do trabalho usaremos a assinatura $(-, +, +, +)$. Além do mais, por motivos meramente convenientes, no capítulo 3 usaremos o sistema geométrico de unidades, onde $G = c = \hbar = 1$.

Metodologia

A metodologia para o desenvolvimento deste trabalho consistiu no seguinte:

- Inicialmente realizamos uma revisão bibliográfica buscando, em livros, os conceitos prévios necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Nessa etapa, fizemos uma revisão sobre a teoria da relatividade restrita e a álgebra tensorial, uma vez que estas são de suma importância para o entendimento da relatividade geral.
- Posteriormente, efetuamos um estudo sobre a relatividade geral, onde tratamos com os campos gravitacionais newtoniano e einsteniano. Além disso, deduzimos as equações de campo de Einstein.
- Na sequência, fizemos uma revisão sobre a mecânica quântica, onde estudamos desde os problemas que deram origem à mecânica quântica até o espalhamento quântico.
- Finalizamos nossos estudos com a solução da equação de Schrödinger no espaço-tempo de Safford-Witten, onde calculamos os estados espalhados e ligados de uma partícula em tal geometria.

Capítulo 1

Aspectos da Relatividade Geral

A teoria da relatividade geral (TRG) é a teoria relativística da gravitação. Segundo ela, a gravitação é vista como uma deformação na estrutura do espaço-tempo. Em outras palavras, a presença de massa e energia torna o espaço-tempo curvo.

Neste capítulo, estudaremos o campo gravitacional relativístico e não-relativístico. Além disso, construiremos as equações de campo de Einstein e analisaremos suas propriedades.

1.1 Campo Gravitacional Não-relativístico

Todos os corpos que, por ventura, caem na presença de um campo gravitacional, com as mesmas condições iniciais, estão sujeitos a uma mesma aceleração, independentemente de sua massa. Este fato nos permite estabelecer uma analogia entre os movimentos de corpos sobre a influência de um campo gravitacional e associação do mesmo a um sistema de referência não-inercial com aceleração constante. Pois, temos que concordar que os movimentos de corpos de diferentes massas, nessas situações, devem ser iguais, se respeitadas algumas condições. Donde podemos concluir que as qualidades do movimento de um corpo num sistema de referência não-inercial são as mesmas de um sistema de referência inercial sobre influência de um campo de gravitação. Ou seja, um sistema de referência não-inercial é equivalente a um dado campo gravitacional. Este resultado é conhecido como *princípio de equivalência*.

Dessa forma, podemos comparar um sistema de referência uniformemente acelerado a um campo gravitacional constante e um sistema de referência de movimento linear com aceleração não-uniforme a um campo gravitacional uniformemente variável.

No entanto, os campos que tem por equivalentes sistemas de referência não-inerciais não são iguais aos campos gravitacionais reais por eles diferirem no infinito. Enquanto, o primeiro tipo crescem sem limite no infinito ou dependendo do caso permanecem os mesmos. O segundo tipo tende à zero no infinito. Outra diferença deve-se ao fato dos campos associados a sistemas de referência não-inerciais se anularem ao passar a um sistema de referência inercial, enquanto, que os campos gravitacionais reais não podem ser eliminados por meio de escolha de nenhum sistema de referência.

Diante disso, um resultado importante é o fato de ser possível eliminar o efeito causado por um campo gravitacional numa determinada região do espaço escolhendo-se um sistema acelerado, no qual, a aceleração seja a mesma que uma partícula adquiriria ao ser colocada na região de atuação do campo em questão (LANDAU E LIFCHITZ, 1974).

1.2 Campo Gravitacional Relativístico

Em mecânica relativística também é válida a discussão da seção anterior sobre a propriedade fundamental dos campos gravitacionais, em que todos os corpos se movem da mesma maneira sobre a influência de um campo, se tiverem as mesmas condições iniciais. Do mesmo modo, a analogia entre os campos gravitacionais e os sistemas de referência não-inerciais também se mantém. Portanto, nada mais convincente que, no estudo das propriedades dos campos gravitacionais em mecânica relativística, partir dessa analogia.

Sabemos que o intervalo (elemento de linha) entre dois eventos em um sistema de referência inercial no espaço-tempo de Minkowski, é definido por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (dx^2 + dy^2 + dz^2) . \quad (1.2-1)$$

Quando passamos a outro sistema de referência inercial a expressão do intervalo não é afetada. Porém, ao passar a um sistema de referência não-inercial, a diferença dos

quadrados das quatro coordenadas não é mantida. Surgem agora termos que são produtos de coordenadas diferenciais diferentes. Portanto, chegamos a expressão geral para o elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.2-2)$$

sendo $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico e dx^μ o deslocamento infinitesimal com relação a coordenada x^μ , onde $\mu = 0, 1, 2, 3$. Temos $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ (LANDAU E LIFICHITZ, 1974; SPIEGEL, 1979; CARMELI, 1982).

Para um espaço-tempo plano da TRR, o qual é chamado de espaço de Minkowski, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, é definido como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (1.2-3)$$

Na TRG, diferentemente da TRR, assume-se que os campos gravitacionais podem ser equivalentes a “campos de inércia”. Logo, teremos tensores métricos diferentes para descrever campos gravitacionais distintos. Nessa teoria o espaço-tempo que o representa é o espaço Rieminiano ou espaço não-Euclidiano, ou ainda, espaço curvo. Naturalmente, o espaço-tempo minkoswskiano da TRR é um caso particular do espaço rieminiano da TRG para um determinado limite.

É importante salientar que é possível, por meio de uma mudança conveniente de coordenadas, colocarmos o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ sob a forma (1.2-3). Porém, isso só é permitido para uma região limitada do espaço-tempo. Em outras palavras, exceto em uma pequena região, um campo gravitacional real não pode ser eliminado por uma mudança de coordenadas (LANDAU E LIFICHITZ, 1974; CARMELI, 1982).

1.3 Equações de Campo Einstein

A teoria newtoniana da gravitação assume que o campo gravitacional é descrito por um potencial, $\phi(x, y, z)$, denominado potencial gravitacional, o qual é solução da equação

de Poisson

$$\nabla^2 \phi(x, y, z) = 4\pi G \rho(x, y, z) , \quad (1.3-4)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton e $\rho(x, y, z)$ é a densidade de massa da matéria que produz o campo gravitacional. Por sua vez, a relatividade geral admite a existência de 10 potencias, identificados pelas componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Sendo assim, devemos ter 10 equações diferenciais parciais de segunda ordem do tensor métrico que, em um certo limite, devem recair na equação de Poisson.

A partir de derivadas segundas do tensor métrico podemos construir um tensor que determina a curvatura do espaço-tempo. Este é o tensor de Riemann que é definido como (CARMELI, 1982; SPIEGEL, 1979; LANDAU E LIFCHITZ, 1974)

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} \equiv \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\rho_{\nu\beta} \Gamma^\mu_{\alpha\rho} - \Gamma^\rho_{\nu\alpha} \Gamma^\mu_{\beta\rho} , \quad (1.3-5)$$

onde $\Gamma^\mu_{\nu\alpha}$ são os símbolos de Christoffel, dados por

$$\Gamma^\mu_{\nu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} \right) . \quad (1.3-6)$$

Substituindo (1.3-6) em (1.3-5), o tensor de Riemann torna-se

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\nu\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} \right) + g_{\rho\sigma} \left(\Gamma^\rho_{\nu\alpha} \Gamma^\sigma_{\mu\beta} - \Gamma^\rho_{\nu\beta} \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} \right) ,$$

sendo $R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\rho} R^\rho{}_{\nu\alpha\beta}$.

A partir do tensor de curvatura de Riemann podemos obter, por contração, o tensor de Ricci

$$R_{\nu\beta} \equiv R^\alpha{}_{\nu\alpha\beta} \equiv g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta} , \quad (1.3-6)$$

ou ainda

$$R_{\nu\beta} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\rho_{\nu\beta} \Gamma^\alpha_{\alpha\rho} - \Gamma^\rho_{\nu\alpha} \Gamma^\alpha_{\beta\rho} . \quad (1.3-7)$$

Além disso, tomando a contração do tensor de Ricci, obtemos o escalar de Ricci

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} . \quad (1.3-8)$$

Como a Relatividade Geral estabelece que a geometria do espaço-tempo é deformada pela presença de massa e energia, as equações do campo relativístico devem ter, de um lado, a distribuição de massa e energia, e, do outro, a geometria do espaço-tempo deformada por tal distribuição. Como o tensor de Ricci possui derivadas segundas do tensor métrico, um dos lados das equações de campo deve ser construído a partir dele e o outro a partir do tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, o qual representa, segundo a teoria da relatividade, a distribuição de massa e energia.

Levando em conta as considerações acima, após algumas tentativas, Einstein chegou a conclusão que as equações de campo são dadas por:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} , \quad (1.3-9)$$

sendo κ a constante gravitacional de Einstein e $G_{\mu\nu}$ o tensor de Einstein. O valor de κ é obtido quando impomos que, no limite de campo gravitacional fraco, as equações relativísticas devem concordar com as equações da teoria newtoniana (CARMELI, 1982).

• Propriedades das Equações de Campo de Einstein

- As equações de campo de Einstein são não-lineares. Desta forma, não é válido o princípio da superposição, ou seja, a soma de duas soluções não é uma solução (CARMELI, 1982; SPIEGEL, 1979; LANDAU E LIFCHITZ, 1974).

- É visto que a conservação de energia e momento, dada pela equação $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$, está presente na equação de campo de Einstein. Este fato propõe que esta equação contém as equações de movimento da matéria que produz o campo gravitacional. Por isso, o movimento e a distribuição da matéria geradora do campo gravitacional não são determinados arbitrariamente.

- A distribuição e movimento da matéria são determinados pelas funções do campo gravitacional, que são as componentes do tensor métrico. Ao mesmo tempo o tensor métrico é determinado pela distribuição e movimento da matéria (CARMELI, 1982).

Capítulo 2

Mecânica Quântica

As dificuldades no entendimento de alguns resultados experimentais, que surgiram no início do século XX, contribuíram para o surgimento de uma nova teoria chamada de mecânica quântica. A mecânica quântica deve ser vista como uma teoria fundamental de fenômenos atômicos. Os dados experimentais nos quais ela está baseada são derivados de eventos físicos que estão além da percepção humana direta, de modo que não é surpreendente que esta teoria envolva conceitos que não fazem parte de nossa experiência diária.

Neste capítulo, faremos uma discussão sobre as motivações para o surgimento da mecânica quântica, estudaremos a equação de Schrödinger em uma dimensão e em três dimensões em coordenadas cilíndricas, a interpretação estatística, os estados estacionários, ligados e espalhados. Por último, veremos a teoria do espalhamento do ponto de vista clássico e quântico.

2.1 A origem da Mecânica Quântica

Ao final do século XIX muitas áreas da física já haviam sido desenvolvidas. Lord Kelvin, em 1900, chegou a insinuar que a física tinha atingido seu ponto máximo de desenvolvimento e que somente duas “nuvens negras” ameaçavam seu horizonte. As duas nuvens negras de Kelvin, eram: o experimento de Michelson e Morley que procurava determinar a velocidade da Terra em relação ao éter; e a distribuição de energia da

radiação de corpo negro. O experimento de Michelson-Morley teve grande importância para a teoria da relatividade restrita ou especial e a tentativa de explicar a radiação de corpo negro levou ao início da teoria quântica (ROSA, 2004; PEDUZZI, 2008).

Quanto à radiação de corpo negro, este fenômeno foi tratado de maneira bastante especial pelos físicos. Alguns cientistas como Kirchhoff, Boltzmann, Wien e Rayleigh tentaram explicá-lo sobre o ponto de vista da física clássica, mas não conseguiram. Os resultados teóricos não combinavam com os experimentais, pelo menos para pequenos comprimentos de ondas (grandes frequências). Porém, na tentativa exacerbada de encontrar uma solução para tal problema Max Planck postulou que os átomos constituintes das paredes da cavidade (corpo negro) se comportavam como pequenos osciladores eletromagnéticos, cada um com uma frequência de oscilação específica. Além disso, admitiu que os osciladores não podiam ter uma energia qualquer, mas apenas valores que satisfizessem à relação $E = h\nu$, onde h é uma constante, denominada constante de Planck e ν é a frequência do oscilador. Essa questão de quantização da energia foi, de um certo modo, repugnada a tal ponto do próprio Planck escrever: “Posso caracterizar todo o processo como um ato de desespero, já que, por natureza, sou pacato e avesso a aventuras duvidosas” (ROSA, 2004; PEDUZZI, 2008; PESSOA, 2010).

Porém, três trabalhos confirmaram a ideia de quantização de Max Planck: a explicação do efeito fotoelétrico, o trabalho sobre a teoria dos calores específicos (ambos publicados por Einstein) e a explicação do efeito gerado pela difração de raios X, por Compton (Efeito Compton).

O efeito fotoelétrico, descoberto experimentalmente por Hertz em 1887, consiste na emissão de elétrons por metais, quando submetidos à ação de luz. O grande mistério deste efeito era a independência do mesmo em relação à intensidade da luz incidente e a existência de uma determinada frequência de corte, abaixo da qual tal efeito não ocorria. No entanto, Albert Einstein conseguiu explicar tal fenômeno. Para isso, ele supôs que a luz consiste em partículas de energia $h\nu$ (fótons) (ROSA, 2004; PEDUZZI, 2008).

De acordo com teoria clássica o calor específico dos sólidos permanece constante independentemente da temperatura T . Porém, quando a temperatura dos sólidos decresce o calor específico também decresce, aproximando-se de zero quando $T \rightarrow 0$. Einstein supôs que a energia de oscilação de qualquer átomo do sólido pode assumir apenas alguns valores discretos $h\nu$ e isso foi o bastante para explicar o problema (PESSOA, 2010).

A natureza corpuscular da radiação foi dramaticamente confirmada em 1923 pelas experiências de Compton. Ele fez com que um feixe de raios X, os quais foram descobertos em 1895 por Röntgen colidissem sobre grafite. Observou-se que o comprimento de onda do raio refletido é maior do que o comprimento de onda do raio incidente. Compton tratou a radiação incidente como um feixe de fótons de energia $h\nu$. Usando as leis de conservação de momento e energia e a teoria da relatividade restrita, ele encontrou um resultado coerente com o experimental para o deslocamento do comprimento de onda do raio incidente (ROSA, 2004; PEDUZZI, 2008; PESSOA, 2010).

A descoberta dos elementos radioativos ao final do século XIX deixa evidente a complexidade do átomo e a necessidade de proposta de um modelo para o mesmo. É neste cenário que surge alguns modelos atômicos, como: o modelo atômico de Thomson, de Rutherford e de Bohr. J. J. Thomson propôs um modelo de átomo no qual os elétrons estariam imersos em cargas positivas (como passas em pudim), garantindo o equilíbrio elétrico entre as cargas positivas e negativas. Ao estudar o espalhamento de partículas alfa por uma folha de metal (ouro), Rutherford concluiu que o átomo seria formado por um núcleo de carga positiva cercado por elétrons (sistema planetário). Porém, este modelo tinha algumas falhas graves. O átomo, assim idealizado, não seria um sistema estável, pois, devido ao elétron está perdendo energia continuamente, ele acabaria se chocando com o núcleo do átomo. Isso de acordo com a teoria do eletromagnetismo clássico. Ou seja, a aceitação desse modelo atômico descarta qualquer possibilidade da teoria clássica do eletromagnetismo servir para descrever o universo atômico. Niels Bohr, baseado no trabalho de Rutherford e nas descobertas de Max Planck sobre a quantização da energia,

propôs um novo modelo atômico. Para isso, Bohr formulou dois postulados. O primeiro dizia que os elétrons se deslocam em órbitas selecionadas pela exigência de que o momento angular seja $n\hbar$ ($n = 1, 2, \dots$), isto é, para órbitas circulares de raio r , a velocidade do elétron tem que ser dada por $v = n\hbar/mr$. Além disso, os elétrons nessas órbitas não irradiam. O outro postulado diz que os elétrons podem efetuar transições descontínuas de uma órbita de energia E para outra de energia E' . Essa variação de energia será $E - E' = h\nu$ (ROSA, 2004; PEDUZZI, 2008; PESSOA, 2010).

Todos estes estudos narrados anteriormente desde a “quantização de Planck” até o átomo de Bohr são conhecidos como antiga teoria quântica. Apesar de ser bem sucedida em vários aspectos esta teoria não se livrou de críticas. As principais delas são: a teoria é aplicável apenas para sistemas periódicos; a teoria é bem sucedida apenas ao tratar de átomos de um elétron; trata-se de uma teoria filosoficamente insatisfatória (EISBERG e RESNICK, 2009).

Em 1924, o físico francês Príncipe Louis de Broglie sugeriu que a matéria deveria ter um caráter dual onda-partícula. Ele admitiu que o movimento de uma partícula apresenta propriedades ondulatórias de certas “ondas pilotos” associadas à partícula e que a energia e o momento da partícula satisfazem às seguintes relações: $E = h\nu = \hbar\omega$ e $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. A confirmação da hipótese de de Broglie veio através do experimento de difração de elétrons realizados por Davisson e Germer, em 1927.

Deve ficar claro que, apesar de estar correto, o postulado de de Broglie não nos fornece uma teoria completa do comportamento de uma partícula, mas somente o primeiro passo na construção da teoria. O postulado afirma que o movimento de uma partícula é governado pela propagação de suas ondas-piloto, sem todavia, nos informar de que maneira essas ondas se propagam. Apenas para o caso mais simples de uma partícula livre somos capazes de entender algumas das características da propagação das ondas-piloto. Para se tratar o caso de uma partícula que se move sob a ação de forças, devemos ter uma equação que nos diga como as ondas piloto se propagam nessa situação mais geral.

Além disso, devemos poder estabelecer uma ligação qualitativa entre elas e a partícula à que estão associadas; isto é, devemos saber exatamente como essas ondas “pilotam” o movimento da partícula. A equação requerida para as ondas-piloto, a chamada equação de Schrödinger, foi elaborado em 1925. Schrödinger seguiu diretamente as idéias de de Broglie, mas não fez uso da expressão “ondas-piloto”. Denotando tanto as ondas, como a função matemática que as representa, pelo termo função de onda. Outra mudança foi que Schrödinger procurou desenvolver uma teoria válida somente no domínio não-relativístico de velocidades.

Ao mesmo tempo Heisenberg desenvolveu outro formalismo para a mecânica quântica, o qual conhecemos hoje por mecânica matricial. No entanto, o próprio Schrödinger mostrou que matematicamente essas duas descrições da mecânica quântica são equivalentes. Estes estudos são chamados de nova teoria quântica (ROSA, 2004; PEDUZZI, 2008; PESSOA, 2010).

A nova teoria quântica é, sob alguns aspectos, muito diferente da antiga teoria quântica. Por exemplo, os modelos da estrutura atômica são completamente opostos. Enquanto na antiga teoria quântica existem orbitas eletrônicas bem definidas, na nova teoria quântica há apenas a probabilidade de encontrar o elétron em uma determinada posição, ou seja, não existe o conceito de órbita (EISBERG e RESNICK, 2009).

2.2 A Função de Onda

Do ponto de vista da mecânica clássica, descrever o movimento de uma partícula consiste em determinar como sua posição depende do tempo, isto é, $\vec{r}(t)$. Com base nessa informação, podemos encontrar a velocidade, a energia cinética, o momento, ou qualquer outra variável dinâmica de interesse. Conforme a formulação Newtoniana, para obtermos $\vec{r}(t)$, devemos aplicar a segunda lei de Newton, juntamente com as condições iniciais apropriadas (geralmente, posição e velocidade em $t = 0$).

Segundo a descrição ondulatória de Schrödinger, o estado de uma partícula é descrito

por uma função de onda $\Psi(\vec{r}, t)$.

2.2.1 Equação de Schrödinger em Uma Dimensão

No caso em que uma partícula de massa m se move sobre o eixo x , sujeita a uma força $F(x, t)$ (ver figura 2.1), encontramos a função de onda associada, $\Psi(x, t)$, ao resolvermos a equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi, \quad (2.2-1)$$

ou ainda

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \Psi + V\Psi, \quad (2.2-2)$$

em que $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ é o operador momento¹, sendo i a raiz quadrada de -1 e \hbar a constante de Planck dividida por 2π :

$$\hbar = h/2\pi = 1,054572 \times 10^{-34} Js.$$

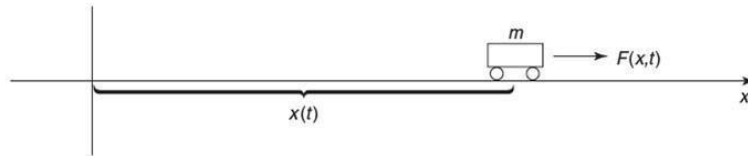


Figura 2.1: “Partícula” compelida a se mover em uma dimensão sob a influência de uma determinada força.

Vale salientar que a equação de Schrödinger desempenha um papel análogo a segunda lei de Newton.

Na teoria quântica, se conhecermos a função de onda no instante inicial, $\Psi(x, 0)$, é possível encontrarmos a função de onda para qualquer instante de tempo t , resolvendo a equação de Schrödinger (GASIOROWICZ, 1979; GRIFFTHS, 2011).

¹Um estudo mais aprofundado das consequências da interpretação estatística da função de onda, a qual será abordada na próxima seção, nos leva a concluir que todas as variáveis dinâmicas são representadas por operadores. No caso específico do momento, o operador, quando atua sobre funções de x , se comporta como $\hat{p}f(x) = -i\hbar\partial f(x)/\partial x$ (GASIOROWICZ, 1979; GRIFFTHS, 2011).

2.2.2 Interpretação Estatística

A presença da quantidade imaginária i na equação de Schrödinger tem como consequência que suas soluções são necessariamente funções complexas de x e t . Isto torna evidente que não devemos atribuir às funções de onda uma existência física. Desta forma, a idéia de onda piloto não pôde ser mantida.

A interpretação que permitiu o pleno desenvolvimento da teoria foi formulada por Max Born. De acordo com ele, a probabilidade que uma partícula, descrita pela função de onda $\Psi(x, t)$, seja localizada no intervalo entre x e $x + dx$, no instante t , é

$$d\mathcal{P} = |\Psi(x, t)|^2 dx . \quad (2.2-2)$$

Naturalmente, a probabilidade de encontrarmos a partícula entre os pontos $x = a$ e $x = b$, no instante t , é

$$\mathcal{P}_{ab} = \int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx .$$

Vejamos a figura abaixo que descreve $|\Psi(x, t)|^2$ em função de x . A partir dela vemos que a probabilidade de encontrarmos a partícula nas proximidades de A é grande, pois o módulo da função de onda ao quadrado nesse ponto também é grande. O contrário acontece com o ponto C , onde $|\Psi(x, t)|^2$ é pequeno, e conseqüentemente também é reduzida probabilidade de encontrar a partícula em torno deste ponto.

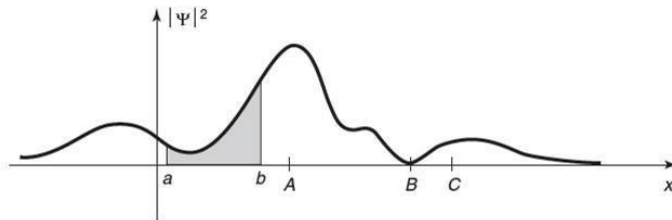


Figura 2.2: A área sombreada representa a probabilidade de encontrarmos a partícula entre a e b . A partícula provavelmente será encontrada próxima de A , e, dificilmente próxima de B .

2.3 Estados Estacionários

No caso, em que o potencial V é independente de t , a equação de Schrödinger pode ser resolvida pelo método de separações de variáveis. Dessa forma, ficamos com soluções que são produtos simples,

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t), \quad (2.3-2)$$

onde ψ é função de x apenas e φ é função somente de t . Ao final, podemos juntar as soluções separáveis de forma a construir uma solução mais geral.

Aplicando (2.3-2) em (2.2-1) chegamos, após alguns manipulações matemáticas simples, a

$$i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} \frac{1}{\psi} + V. \quad (2.3-3)$$

Na equação acima, o lado esquerdo depende apenas de t , enquanto que o lado direito depende unicamente de x . Isso só é possível se ambos os lados forem iguais a uma constante. Chamando de E a constante de separação, a qual é a energia total da partícula, encontramos:

$$i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = E \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{iE}{\hbar} \varphi \quad (2.3-4)$$

e

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi. \quad (2.3-5)$$

A separação de variáveis transformou a equação diferencial parcial em duas equações diferenciais ordinárias (2.3-4) e (2.3-5). A equação (2.3-4) tem solução dada por

$$\varphi(t) = e^{-iEt/\hbar}. \quad (2.3-6)$$

Por outro lado, para resolvermos a equação (2.3-5), denominada equação de Schrödinger independente do tempo, precisamos especificar o $V(x)$.

A equação de Schrödinger independente do tempo (2.3-5) possui uma variedade de soluções ($\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x) \dots$), sendo cada uma associada a um valor de constante de separação (E_1, E_2, E_3, \dots). Portanto, há uma função diferente para cada energia permitida:

$$\Psi_1(x, t) = \psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}, \Psi_2(x, t) = \psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}, \dots \quad (2.3-7)$$

Como a equação dependente do tempo é linear, uma vez encontradas as soluções separáveis, podemos escrever a solução geral como

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (2.3-8)$$

O que fica faltando é encontrar as constantes corretas (c_1, c_2, \dots) para que elas se encaixem as condições iniciais do problema que se tem.

2.4 Estados Ligados e Espalhados

Em mecânica clássica, um potencial unidimensional independente do tempo pode produzir dois diferentes tipos de movimento. Se o potencial $V(x)$ aumentar mais do que a energia total da partícula E em ambos os lados, então a partícula estará presa no poço potencial; ela oscilará para a frente e para a trás entre os pontos de retorno, mas não consegue escapar. Este é o chamado estado ligado (figura 2.3).

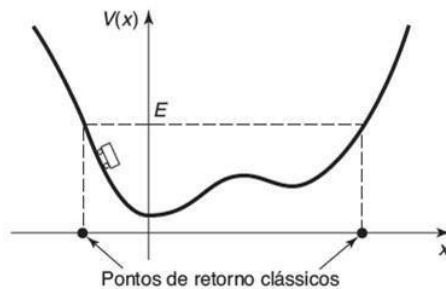


Figura 2.3: Estado ligado.

Se a energia da partícula E exceder o potencial $V(x)$ por um lado ou ambos, então a partícula vem do infinito, desacelera ou acelera sobre a influência do potencial e volta ao infinito. Este é o estado espalhado (figura. 2.4).

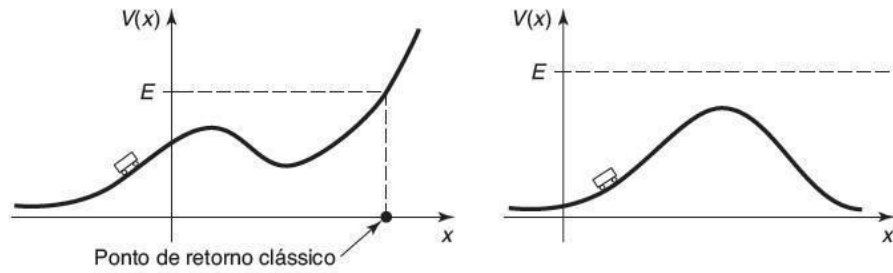


Figura 2.4: Estado espalhado.

Alguns potenciais admitem apenas estados ligados, por exemplo, o oscilador harmônico. Outros permitem somente estados de espalhamento, por exemplo, uma colina sem depressões. Porém, existem aqueles que permitem ambos os tipos, dependendo da energia da partícula (figura 2.5).

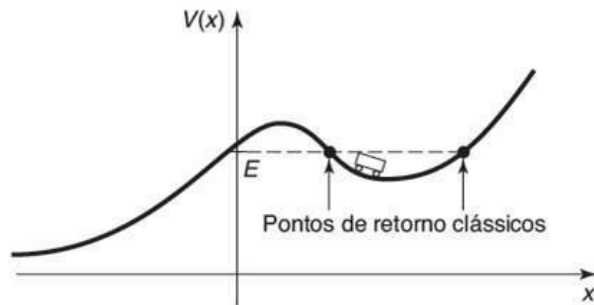


Figura 2.5: Dependendo do valor da energia, os estados podem ser ligados ou espalhados.

As soluções da equação de Schrödinger correspondem exatamente aos estados ligados e espalhados. No domínio quântico a distinção ainda é mais clara, pois o fenômeno de tunelamento permite que a partícula “vaze” sobre qualquer barreira de potencial que seja finita, dessa forma a única coisa relevante é o potencial no infinito.

Vejam os:

$$E < [V(-\infty) \text{ e } V(+\infty)] \Rightarrow \text{estado ligado ,}$$

$$E > [V(-\infty) \text{ ou } V(+\infty)] \Rightarrow \text{estado espalhado .}$$

Para simplificar, no caso em que $V(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$, podemos escrever:

$$E < 0 \Rightarrow \text{estado ligado} ,$$

$$E > 0 \Rightarrow \text{estado espalhado} .$$

Sabemos que os potenciais do oscilador harmônico e do poço quadrado infinito vão ao infinito quando $x \rightarrow \pm\infty$, concluímos que eles admitem apenas estados ligados. Por outro lado, o potencial da partícula livre é zero sempre, permitindo assim somente estados de espalhamento (GRIFFITHS, 2011).

2.5 Mecânica Quântica em Três Dimensões

Com o intuito de discutirmos o movimento de uma partícula que se move em três dimensões, iremos generalizar a equação de Schrödinger do movimento unidimensional. Além disso, devido ao nosso propósito, vamos escrever a equação generalizada em coordenadas cilíndricas.

2.5.1 Equação de Schrödinger em Três Dimensões

Para tornarmos a generalização mais simples, podemos escrever a equação de Schrödinger como

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi , \quad (2.5-5)$$

onde \hat{H} é o chamado operador hamiltoniano (operador energia mecânica).

Levando em conta que o hamiltoniano clássico é dado por:

$$H = \frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V ,$$

o operador hamiltoniano assume a forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2) + V \quad (2.5-5)$$

em que as componentes do momento são:

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} , \quad \hat{p}_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{e} \quad \hat{p}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} . \quad (2.5-6)$$

ou, simplificando,

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}. \quad (2.5-7)$$

Dessa forma, podemos escrever a equação (2.5-5) como

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi, \quad (2.5-8)$$

onde

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.5-9)$$

é o operador Laplaciano em coordenadas cartesianas.

Agora o potencial V e a função de onda Ψ são funções de $\vec{r} = (x, y, z)$ e t . Mas, se o potencial for independente do tempo há um conjunto de estados estacionários,

$$\Psi_n(\vec{r}, t) = \psi_n(\vec{r})e^{-iE_n t/\hbar}, \quad (2.5-10)$$

em que a função de onda espacial $\psi_n(\vec{r})$ é solução da equação de Schrödinger independente do tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi. \quad (2.5-11)$$

De forma que a solução geral para a equação de Schrödinger dependente do tempo é

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum c_n \psi_n(\vec{r})e^{-iE_n t/\hbar}, \quad (2.5-12)$$

onde as constantes c_n são determinadas pela função de onda inicial, $\Psi(\vec{r}, 0)$ (GRIFFITHS, 2011).

2.5.2 Equação de Schrödinger em Coordenadas Cilíndricas

• Separação de Variáveis

Na situação em que o problema apresenta uma simetria cilíndrica, isto é, em que $V = V(\rho)$, sendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, é natural o uso de coordenadas cilíndricas [Ver Fig. 2.6].

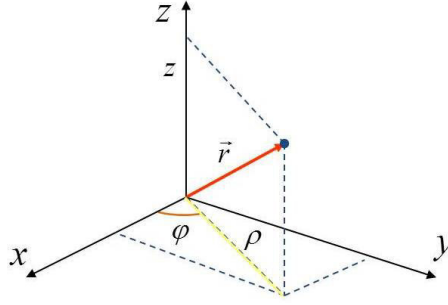


Figura 2.6: Representação de coordenadas cilíndricas.

Nesse caso, o laplaciano toma a forma

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \quad (2.5-13)$$

Com isso, a equação (2.5-11) torna-se:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] + V\psi = E\psi . \quad (2.5-14)$$

Utilizaremos o método de separação de variáveis, ou seja,

$$\psi(\rho, \phi, z) = R(\rho) \Phi(\phi) f(z) . \quad (2.5-15)$$

Substituindo (2.5-15) em (2.5-14), encontramos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\Phi f}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{Rf}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + R\Phi \frac{d^2 f}{dz^2} \right] + VR\Phi f = ER\Phi f . \quad (2.5-16)$$

Dividindo (2.5-16) por $R\Phi f$ e multiplicando por $-2m/\hbar^2$, temos:

$$\left\{ \frac{1}{R\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{2m}{\hbar^2} [V - E] + \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \right\} + \left\{ \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dz^2} \right\} = 0 . \quad (2.5-17)$$

Podemos observar que na primeira chave o termo depende de ρ e ϕ , enquanto na segunda o termo depende apenas de z ; conseqüentemente, cada um deve ser uma constante.

Escrevendo esta constante de separação como β^2 , obtemos:

$$\frac{1}{R\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{2m}{\hbar^2} [V - E] + \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = +\beta^2 \quad (2.5-18)$$

e

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dz^2} = -\beta^2 . \quad (2.5-19)$$

A solução da equação (2.5-19) é dada por

$$f = e^{i\beta z} \quad (2.5-20)$$

Na verdade, há duas soluções: $e^{i\beta z}$ e $e^{-i\beta z}$; contudo, cobriremos a última, permitindo que β seja negativo.

Por sua vez, a equação (2.5-18) pode ser escrita como

$$\left\{ \frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{2m}{\hbar^2} \rho^2 [V - E] - \beta^2 \rho^2 \right\} + \left\{ \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \right\} = 0 .$$

Logo, seguindo o raciocínio descrito anteriormente, sendo n^2 a constante de separação, chegamos às equações

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{2m}{\hbar^2} \rho^2 [V - E] R - \beta^2 \rho^2 R = n^2 R \quad (2.5-20)$$

e

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + n^2 \Phi = 0 . \quad (2.5-21)$$

A solução da equação (2.5-21) é

$$\Phi = e^{in\phi} .$$

Exigindo que $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$, obtemos

$$e^{i2\pi n} = 1, \quad \text{onde } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.5-21)$$

Então diante dos resultados, chegamos a conclusão que

$$\Phi(\rho, \phi, z) = R(\rho) e^{in\phi} e^{i\beta z} , \quad (2.5-22)$$

sendo $R(\rho)$ solução da equação (2.5-20). Naturalmente, podemos observar que $R(\rho)$ depende da forma do potencial $V(\rho)$.

• **Equação Radial e o Potencial Efetivo**

De (2.5-20), temos que:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) \right] + \rho^2 V R + \frac{\hbar^2}{2m} [\beta^2 \rho^2 + n^2] R = \rho^2 E R . \quad (2.5-23)$$

Esta equação ficará mais simples se fizermos a mudança de variáveis

$$R = \frac{u}{\sqrt{\rho}} , \quad (2.5-24)$$

tal que

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = \rho^{1/2} \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{4} \rho^{-3/2} u . \quad (2.5-25)$$

De fato, substituindo estes resultados em (2.5-23), chegamos a

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \left[V + \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \left(n^2 - \frac{1}{4} + \beta^2 \rho^2 \right) \right] u = E u \quad (2.5-26)$$

ou ainda

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{d\rho^2} + V_{eff} u = E u \quad (\text{equação radial}) , \quad (2.5-27)$$

sendo V_{eff} , o potencial efetivo, dado por

$$V_{eff} = V(\rho) + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n^2 - \frac{1}{4}}{\rho^2} + \beta^2 \right) . \quad (2.5-28)$$

Vale salientar que a equação radial tem a forma semelhante a equação de Schrödinger independente do tempo, para o movimento unidimensional. Na verdade, a única diferença é que aqui temos o potencial efetivo no lugar de $V(x)$. Isto significa que as análises qualitativas feitas no potencial $V(x)$ são válidas para $V_{eff}(\rho)$. Por exemplo, se V_{eff} tende a zero quando $\rho \rightarrow \infty$, teremos estados ligados e espalhados nos casos em que $E < 0$ e $E > 0$, respectivamente (Ver figura 2.7).

2.6 Espalhamento

Nesta seção, faremos um estudo sobre o espalhamento quântico gerado por um potencial com simetria cilíndrica.

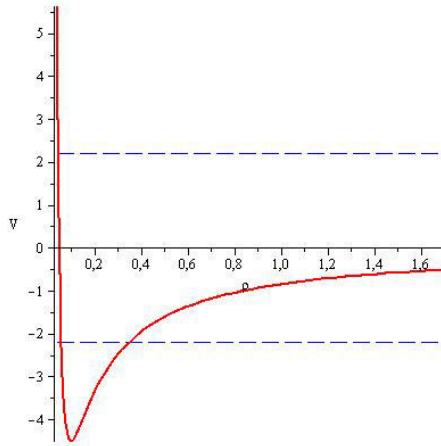


Figura 2.7: Gráfico do potencial efetivo, V_{eff} , para o caso em que $V(\rho) = -k/\rho$. Nesta situação, teremos estados ligados e espalhados quando $E < 0$ e $E > 0$, respectivamente

2.6.1 Teoria do Espalhamento Clássico

Consideremos uma partícula, com energia E e parâmetro de impacto b , incidindo sobre um alvo situado ao longo do eixo z (figura 2.8), como, por exemplo, um próton se deslocando na direção de um fio infinitamente longo e eletricamente carregado. Naturalmente, em situações como esta, o potencial espalhador possuirá simetria cilíndrica, deixando claro a necessidade de adaptarmos a teoria do espalhamento para o tratamento de problemas que envolvam essa simetria.

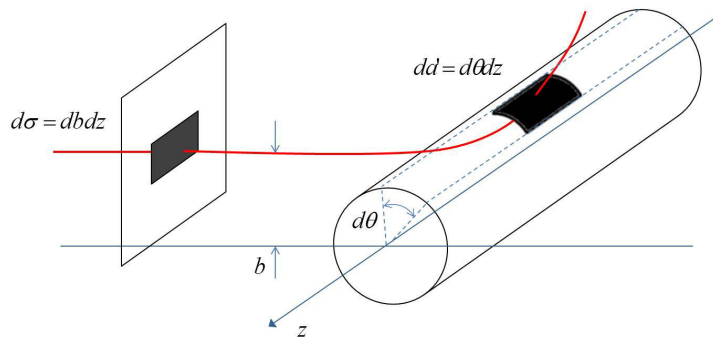


Figura 2.8: Partículas incidentes na área $d\sigma$, são espalhadas na área da' .

Em geral, as partículas que incidem sobre a área infinitesimal $d\sigma$ se espalharão na área infinitesimal da' . Podemos afirmar que quanto maior $d\sigma$, maior será da' . O fator

de proporcionalidade entre essas duas grandezas, $D(\theta) \equiv d\sigma/da'$, é chamado de seção de choque diferencial de espalhamento:

$$d\sigma = D(\theta)da'. \quad (2.6-29)$$

De acordo com a figura 2.9, temos que $d\sigma = dzdb$ e $da' = d\theta dz$. Assim, podemos escrever

$$D(\theta) = \left| \frac{db}{d\theta} \right|. \quad (2.6-30)$$

(Como b é, tipicamente, uma função decrescente de θ , a derivada é, na verdade, negativa - por isso o valor absoluto.)

Para ilustrarmos o que discutimos até agora vamos a um exemplo: espalhamento por um cilindro compacto (figura 2.9). Suponha que o alvo seja um cilindro compacto e que

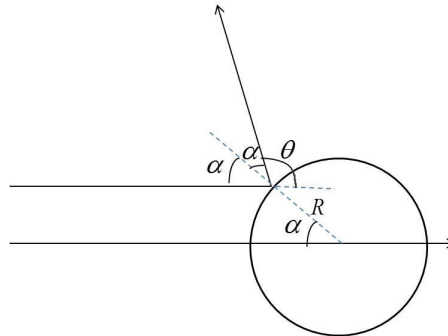


Figura 2.9: Espalhamento elástico por cilindro compacto.

uma partícula colida elasticamente sobre ele. Em termos de α , o parâmetro de impacto é $b = R\text{sen}\alpha$. Por outro lado, o ângulo de espalhamento é $\theta = \pi - 2\alpha$. Portanto,

$$b = R\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = R\text{cos} \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (2.6-31)$$

Derivando a equação anterior em relação a θ , temos

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{R}{2}\text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right), \quad (2.6-32)$$

e a seção de choque diferencial será

$$D(\theta) = \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{R}{2}\text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (2.6-33)$$

Obviamente a seção de choque é a integral de $D(\theta)$ varrendo todos os ângulos

$$\sigma = \int D(\theta) da' . \quad (2.6-34)$$

Então, no caso do espalhamento por cilindro compacto, temos que

$$\sigma = 2RL , \quad (2.6-35)$$

que é a área da seção de choque do cilindro (figura 2.10). Isso quer dizer que uma partícula incidente dentro dessa área acertará o alvo, e as que estiverem fora dessa região não o acertarão. É importante deixar claro que não necessariamente o alvo deve ser material mas pode ser, por exemplo, um campo de Coulomb de um núcleo atômico.

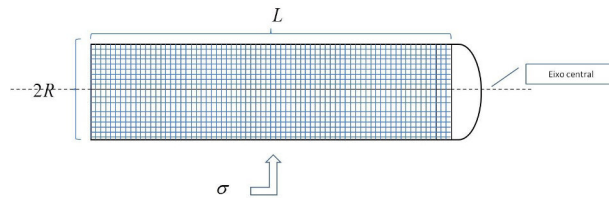


Figura 2.10: Área da seção de choque do cilindro.

Imaginemos que ao invés de uma partícula seja um feixe de partículas, dessa forma

$$dN = \lambda d\sigma , \quad (2.6-36)$$

onde dN é o número de partículas que entram na área $d\sigma$ e se espalham na área da' , por unidade de tempo; λ é o número de partículas incidentes na unidade de área, por unidade de tempo.

Substituindo (2.6-29) em (2.6-36), encontramos

$$dN = \lambda D(\theta) da' \Rightarrow D(\theta) = \frac{1}{\lambda} \frac{dN}{da'} . \quad (2.6-37)$$

Esse resultado é muitas vezes considerado a definição de seção de choque diferencial (GRIFFITHS, 2011).

2.6.2 Teoria do Espalhamento Quântico

Na teoria quântica do espalhamento temos uma onda incidente plana de entrada, $\psi(x) = Ae^{-ikx}$, movendo-se para da direita ao longo do eixo x , encontrando um potencial de espalhamento que produz uma onda de saída. Admitindo isso, vamos supor que as soluções para a equação de Schrödinger, na forma geral, é do tipo

$$\psi(\rho, z) \approx A \left\{ e^{-ikx} + f(\theta) \sqrt{\frac{i}{\rho}} e^{ik\rho} \right\}, \text{ para grandes valores de } \rho, \quad (2.6-38)$$

onde o número de onda k está relacionado a energia da partícula, na forma,

$$k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (2.6-39)$$

Neste caso, a probabilidade de uma partícula, que se move com uma velocidade v , atravesse a área $d\sigma$, em um tempo dt , é

$$dP_{inc} = |\psi_{inc}|^2 dV \Rightarrow dP_{inc} = |A|^2 v dt db dz$$

e a probabilidade que passe por da' , é

$$dP_{ref} = |\psi_{ref}|^2 dV' \Rightarrow dP_{ref} = |A|^2 \frac{|f|^2}{\rho} \rho d\rho d\theta dz \Rightarrow dP_{ref} = |A|^2 |f|^2 v dt d\theta dz.$$

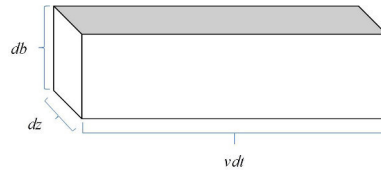


Figura 2.11: O volume dV em que as partículas incidentes atravessam a uma velocidade v por uma área $d\sigma$ em um tempo dt .

Portanto, levando em conta a conservação de probabilidade

$$dP_{inc} = dP_{ref} \Rightarrow db = |f|^2 d\theta \Rightarrow |f|^2 = \frac{db}{d\theta}.$$

Por outro lado,

$$D(\theta) = \left| \frac{db}{d\theta} \right|.$$

Assim,

$$D(\theta) = |f(\theta)|^2, \quad (2.6-36)$$

ou seja, a seção de choque diferencial é igual ao módulo quadrado da amplitude de espalhamento. Este resultado é idêntico ao obtido no espalhamento gerado por um alvo com simetria esférica (GRIFFITHS, 2011).

2.6.3 Análise de Ondas Parciais

Estamos interessados em analisar o espalhamento produzido por uma fonte com simetria cilíndrica, localizada ao longo do eixo z . Admitindo que o efeito gerado independe da coordenada z , trataremos o problema como um espalhamento bidimensional. Com efeito, a equação de Schrödinger toma a seguinte forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right] + V\psi = E\psi. \quad (2.6-37)$$

Como vimos na seção anterior, a equação admite solução do tipo

$$\psi(\rho, \theta) = R(\rho)e^{in\theta}, \quad (2.6-38)$$

e $u(\rho) = \sqrt{\rho}R(\rho)$ satisfaz à equação diferencial

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \left[V + \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) \right] u = Eu. \quad (2.6-39)$$

Para um ρ muito amplo, o potencial vai a zero e o termo centrífugo é descartável, de modo que

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} \approx -k^2 u, \quad (2.6-40)$$

sendo $k^2 = 2mE/\hbar^2$.

A solução geral é

$$u(\rho) = Ae^{ik\rho} + Be^{-ik\rho}; \quad (2.6-41)$$

o primeiro termo representa uma onda de saída, o segundo, uma onda de entrada; para onda espalhada, obviamente, queremos $B = 0$. Então, na região em que ρ é muito amplo, temos:

$$R(\rho) \propto \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{\rho}}, \quad (2.6-42)$$

conforme deduzimos, através de suposições físicas, na seção anterior.

Na região intermediária, o potencial pode ser ignorado em (2.6-39), mas o termo centrífugo, não, a equação (2.6-39) assume a forma

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \left[k^2 - \frac{1}{\rho^2} \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) \right] u \approx 0. \quad (2.6-43)$$

e a solução geral é uma combinação das funções de Bessel, multiplicada por $\sqrt{\rho}$, isto é,

$$u(\rho) = c_1\sqrt{\rho}J_n(k\rho) + c_2\sqrt{\rho}N_n(k\rho). \quad (2.6-44)$$

Porém, as funções de Bessel não representam uma onda de saída ou entrada. As funções que desempenham esse papel são as funções de Hankel. Na verdade, para grandes valores de ρ , $H_n^{(1)}(k\rho)$ (função de Hankel de primeira espécie) comporta-se como $e^{ik\rho}/\sqrt{\rho}$, enquanto que $H_n^{(2)}(k\rho)$ (função de Hankel de segunda espécie) comporta-se como $e^{-ik\rho}/\sqrt{\rho}$. Logo, para ondas de saída, precisamos de funções de Hankel da primeira espécie:

$$R(\rho) \propto H_n^{(1)}(k\rho). \quad (2.6-45)$$

Assim, a solução exata, fora da região de espalhamento (em que $V(\rho) = 0$), é

$$\psi(\rho, \theta) = A \left[e^{-ikx} + \sum_n c_n H_n^{(1)}(k\rho) e^{in\theta} \right]. \quad (2.6-46)$$

Para um ρ muito amplo, a função de Hankel torna-se

$$H_n^{(1)}(k\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{k\pi\rho}} e^{-i\pi/4} (-i)^n e^{ik\rho}. \quad (2.6-47)$$

Com isso, nessa região,

$$\psi(\rho, \theta) \approx A \left[e^{-ikx} + \sum_n c_n \sqrt{\frac{2}{k\pi\rho}} (-i)^n e^{-i\pi/4} e^{ik\rho} e^{in\theta} \right]. \quad (2.6-48)$$

Fazendo,

$$c_n \sqrt{\frac{2}{k\pi}} (-i)^n e^{-i\pi/4} = \sqrt{i} a_n , \quad (2.6-49)$$

encontramos,

$$\psi(\rho, \theta) \approx A \left[e^{-ikx} + f(\theta) \sqrt{\frac{i}{\rho}} e^{ik\rho} \right] , \quad (2.6-50)$$

onde,

$$f(\theta) = \sum_n a_n e^{in\theta} . \quad (2.6-51)$$

Agora, podemos calcular a amplitude de espalhamento em termos de amplitudes de “ondas parciais”. Consequentemente, a seção de choque diferencial pode ser escrita como

$$D(\theta) = |f(\theta)|^2 = \sum_n \sum_{n'} a_n^* a_n e^{i(n'-n)\theta} . \quad (2.6-52)$$

Então, o que nos resta a fazer é determinarmos as amplitudes, a_n , para o potencial em questão. Podemos fazer isso a partir da resolução da equação de Schrödinger na região *interior* (em que $V(\rho)$ é diferente de zero) e desse resultado com a solução exterior [Equação (2.6-50)], utilizando as condições de contorno apropriadas. O único problema aqui é que utilizamos uma notação “misturada”: utilizamos coordenadas *polares* para a onda espalhada e coordenadas *cartesianas* para onda incidente. Precisamos reescrever a onda incidente em uma notação mais adequada. Para tanto, devemos escrever

$$e^{-ikx} = \sum_n (-i)^n J_n(k\rho) e^{in\theta} \quad (2.6-53)$$

2.6.4 Mudança de fase

Se não houver potencial, $V = 0$, a solução é $\psi_0(\rho, \theta) = Ae^{-ikx}$, e a n -ésima onda, de acordo com (2.6-53), é

$$\psi_0^{(n)} = A (-i)^n J_n(k\rho) e^{in\theta} . \quad (2.6-54)$$

Mas, para um z amplo (ARFKEN, 1995)

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (z \gg 1) . \quad (2.6-55)$$

Assim, para um ρ amplo, temos

$$\psi_0^{(n)} = \frac{A(-i)^n}{\sqrt{2\pi\rho k}} [e^{ik\rho} e^{-i(n\pi/2+\pi/4)} + e^{-ik\rho} e^{i(n\pi/2+\pi/4)}] e^{in\theta} \quad (2.6-56)$$

O segundo termo entre colchetes, o qual representa uma onda de entrada, é imutável quando introduzimos a presença do potencial $V(\rho)$. Contudo, o primeiro termo, o qual representa uma onda de saída, sofre uma mudança de fase δ_n (GRIFFITHS, 2011)². Levando isso em conta, podemos escrever a n -ésima onda como

$$\psi^{(n)} = \frac{A(-i)^n}{\sqrt{2\pi\rho k}} [e^{ik\rho} e^{-i(n\pi/2+\pi/4)} e^{i2\delta_l} + e^{-ik\rho} e^{i(n\pi/2+\pi/4)}] e^{in\theta} . \quad (2.6-57)$$

Na seção anterior, a teoria foi expressa em termos das amplitudes a_n . Agora, a estamos formulando em termos de mudanças de fase δ_n . Naturalmente, deve haver uma relação entre elas. De fato, comparando a forma assintótica (ρ grande) da n -ésima onda da equação (2.6-50), isto é,

$$\psi^{(n)} = A \left\{ \frac{(-i)^n}{\sqrt{2\pi\rho k}} [e^{ik\rho} e^{-i(n\pi/2+\pi/4)} + e^{-ik\rho} e^{i(n\pi/2+\pi/4)}] + \sqrt{\frac{i}{\rho}} a_n e^{ik\rho} \right\} e^{in\theta} , \quad (2.6-58)$$

com (2.6-57), encontramos

$$a_n = \frac{e^{-in\pi}}{\sqrt{-2k\pi}} [e^{i2\delta_l} - 1] . \quad (2.6-59)$$

Vale salientar que, embora tenhamos usado a forma assintótica da função de onda para estabelecer a relação entre a_n e δ_n , o resultado não é aproximado.

Substituindo (2.6-59) em (2.6-51), conseguimos expressar a amplitude de espalhamento em termos das diferenças de fase. Fazendo isto, obtemos:

$$f(\theta) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{-2k\pi}} [e^{i2\delta_l} - 1] e^{in(\theta-\pi)} . \quad (2.6-60)$$

²O 2 na frente é convencional. Na verdade, estamos considerando que a onda incidente sofra uma mudança de fase δ_n ao entrar e, novamente, ao sair.

Capítulo 3

Solução da Equação de Schrödinger no Espaço-tempo de Safko-Witten

A solução da equação de Schrödinger no espaço-tempo de Safko-Witten, trata-se da resolução desta equação de onda levando-se em consideração a métrica de Safko e Witten.

Neste capítulo, resolveremos a equação de Schrödinger para uma partícula que se move no espaço-tempo de Safko-Witten. Além disso, faremos o cálculo do espalhamento, onde levaremos em conta apenas o efeito da estrutura do espaço-tempo. Em seguida, considerando o potencial de autointeração gravitacional, estudaremos os estados ligados.

3.1 Métrica de Safko-Witten

Os físicos Safko e Witten obtiveram as soluções das equações acopladas de Einstein-Maxwell¹ para uma fonte estática e de simetria cilíndrica (SAFKO e WITTEN, 1971; SAFKO e WITTEN, 1972). Com este trabalho, eles mostraram que existe três soluções independentes para as equações de Einstein-Maxwell, que são:

1. uma corrente elétrica axial que produz um campo magnético em que as linhas se encontram em um plano perpendicular ao eixo de simetria;
2. um campo magnético paralelo ao eixo de simetria produzido por uma corrente elétrica circular;
3. um campo elétrico radial produzido por uma distribuição axial de cargas.

¹Para maiores detalhes sobre as equações de Maxwell no espaço curvo, o leitor pode consultar a seção 3.3 do Carmeli (1982).

Em suma, Safko e Witten obtiveram soluções para os casos 1 e 2. Com isso, consideraram alguns modelos físicos envolvendo estes casos. Um deles, trata-se de um tubo de matéria cilíndrico de campo magnético exterior axial (solução do tipo 1) e de campo magnético interior axial (solução do tipo 2). Podemos particularizar para o caso em que o campo exterior é nulo. Nesta situação, o elemento de linha usado para descrever o espaço-tempo exterior ao tubo de matéria usando as coordenadas (t, ρ, θ, z) é

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2a}d\rho^2 + \rho^2d\theta^2 + dz^2 \quad (3.1-1)$$

onde a , é dado por

$$a = -\ln \left[\rho_2^{c^2+1} (1 + 2\lambda c)^{c^2+c} \right] + \epsilon_0 + \frac{\epsilon_1}{q+1} (\rho_2 - \rho_1)$$

sendo $\lambda \equiv \frac{n+1}{n+2}$; ρ_1 e ρ_2 os raios do tubo cilíndrico de matéria; c é uma constante que está relacionada com a massa gravitacional; ϵ_0 e ϵ_1 são parâmetros que caracterizam a métrica na região que contém matéria; q e n são constantes (SAFKO e WITTEN, 1972).

O espaço-tempo é Minkowskiano e, apenas globalmente, difere de Minkowski por uma deficiência angular de $2\pi(1 - e^{-a})$. Devido a essa deficiência angular(planar) em torno do tubo, seu espaço é cônico.

3.2 Mecânica Quântica no Espaço Curvo

O espaço-tempo exterior ao tubo de matéria é descrito pelo elemento de linha dado pela equação (3.1-1). Assim, podemos escrever o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ na seguinte forma

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, e^{2a}, \rho^2, 1), \quad (3.2-1)$$

onde o determinante referente a parte espacial é dado por

$$\bar{g} = \frac{\rho^2}{e^{-2a}} = \frac{\rho^2}{\alpha^2}, \quad (3.2-2)$$

sendo $\alpha = e^{-a}$.

Usando o fato que $g_{\alpha\beta}g^{\beta\lambda} = \delta_{\alpha}^{\lambda}$ e a equação (3.2-1), encontramos as constantes não nulas de $g^{\mu\nu}$ dadas por

$$g^{00} = -1; g^{11} = \alpha^2; g^{22} = \rho^{-2}; g^{33} = 1. \quad (3.2-3)$$

Desde os primórdios da mecânica quântica a equação de Schrödinger para o movimento de uma partícula num espaço curvo tem sido motivo de discussão. No caso de ausência de potenciais externos, é consensual que a equação de Schrödinger para a situação descrita anteriormente seja dada por (DOWKER, 1974)

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\Psi, \quad (3.2-4)$$

onde $\nabla^2 \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_j(\sqrt{g}g^{jm}\partial_m)$ é o conhecido operador de Laplace-Beltrami.

Para o caso estacionário, a função de onda é $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{-iEt}$ e a equação de Schrödinger torna-se

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (3.2-5)$$

Utilizando o operador de Laplace-Beltrami e as equações (3.2-2) e (3.2-3), obtemos

$$-\frac{1}{2m}\left(\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \alpha^2\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (3.2-6)$$

Esta é a equação de Schrödinger para o espaço-tempo de Safko-Witten.

3.3 Cálculo do Espalhamento

Vamos estudar agora o espalhamento sofrido por uma partícula de massa m , num espaço-tempo gerado por um tubo de matéria de raio ρ que possui um campo magnético axial interior, com o objetivo principal de encontrarmos a amplitude de espalhamento. O estudo será feito do ponto de vista da equação de Schrödinger na qual a parte cinética é modificada pela estrutura cônica do espaço-tempo e não por um potencial espalhador como é convencional.

Podemos separar a solução da equação de Schrödinger (3.2-6), nas coordenadas (r, θ, z) .

Daí,

$$\psi(\rho, \theta, z) = u(\rho)P(\theta)Z(z). \quad (3.3-7)$$

Devido z e θ não aparecerem explicitamente na equação (3.2-6), podemos propor as seguintes soluções

$$Z(z) = e^{i\beta z} \quad (3.3-8)$$

e

$$P(\theta) = e^{in\theta}, \quad (3.3-9)$$

onde $\beta \in R$ e $n \in z$. Substituindo as equações (3.3-8 e 3.3-9) na equação (3.2-6), encontramos a equação radial

$$\left[\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} + \rho \frac{d}{d\rho} + \left(\xi^2 \rho^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) \right] u(\rho) = 0, \quad (3.3-10)$$

sendo $\xi = \frac{2mE}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{k^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha^2}$. A equação (3.3-10) é a chamada equação de Bessel, e sua solução é dada por

$$u(\rho) = A_n J_{\frac{|n|}{\alpha}}(\xi\rho) + B_n N_{\frac{|n|}{\alpha}}(\xi\rho), \quad (3.3-11)$$

onde J e N são as funções de Bessel de 1º e 2º tipos, respectivamente.

O tubo de matéria que gera o espaço-tempo a ser analisado é infinito. Desta forma, o efeito produzido sobre a partícula é o mesmo para quaisquer z . Portanto, o problema se reduz a uma análise bidimensional do espalhamento. Neste caso, a solução completa da equação de Schrödinger é

$$\psi(\rho, \theta) = \sum_n \left[A_n J_{\frac{|n|}{\alpha}}(k\rho) + B_n N_{\frac{|n|}{\alpha}}(k\rho) \right] e^{in\theta}. \quad (3.3-12)$$

Podemos reescrever a equação (3.3-12) sem nenhum prejuízo da seguinte forma

$$\psi(\rho, \theta) = \sum_n \left[a_n \cos(b_n) J_{\frac{|n|}{\alpha}}(k\rho) + a_n \sin(b_n) N_{\frac{|n|}{\alpha}}(k\rho) \right] e^{in\theta}. \quad (3.3-13)$$

O comportamento assintótico da função de onda descrita pela equação anterior é

$$\psi \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \sum_n a_n \sqrt{\frac{2}{\pi k \rho}} \cos \left(k \rho - \frac{|n| \pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{4} + b_n \right) e^{in\theta}. \quad (3.3-14)$$

Seguindo a decomposição padrão podemos escrever a função de onda composta de uma parte incidente vindo da direita e de uma parte refletida ou espalhada. Isto é, para o caso do espaço-tempo exterior ao tubo de matéria cônico e localmente plano, temos

$$\psi \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} e^{-ik\rho \cos\theta} + \sqrt{\frac{i}{\rho}} f(\theta) e^{ik\rho}, \quad (3.3-15)$$

onde $f(\theta)$ é a amplitude de espalhamento.

A equação (3.3-15) pode ser reescrita como

$$\psi \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \sum_n (-i)^n \sqrt{\frac{2}{\pi k \rho}} \cos \left(k \rho - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) e^{in\theta} + \sqrt{\frac{i}{\rho}} f(\theta) e^{ik\rho}. \quad (3.3-16)$$

Igualando as equações (3.3-14) e (3.3-16) e comparando os coeficientes de $e^{ik\rho}$ e $e^{-ik\rho}$, encontramos

$$a_n = e^{i(b_n - \frac{|n|\pi}{2\alpha})} \quad (3.3-17)$$

e

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi k}} \sum_n e^{in(\theta-\pi)} [e^{i2\delta_n} - 1], \quad (3.3-18)$$

onde

$$\delta_n = b_n - \frac{|n|\omega}{2}, \quad (3.3-19)$$

sendo $\omega = (\alpha^{-1} - 1)\pi$.

No intuito de encontrarmos b_n podemos admitir o tubo de matéria como sendo impenetrável, ou seja, $\psi(\rho, \theta) = 0$. Portanto, aplicando isso a equação (3.3-13) temos

$$\tan b_n = \frac{J_{\frac{|n|}{\alpha}}(k\rho)}{N_{\frac{|n|}{\alpha}}(k\rho)}. \quad (3.3-20)$$

No limite de baixas energias, ou seja, $k\rho \ll 1$, a equação (3.3-20) passa a ser para $n = 0$

$$\tan b_0 \approx \frac{\pi}{2 \ln(k\rho)}, \quad (3.3-21)$$

e para $n \neq 0$

$$\tan b_n \approx \frac{\pi}{n! \Gamma(n)} \left(\frac{k\rho}{2} \right)^{2n}. \quad (3.3-22)$$

Analisando a equação (3.3-22), percebemos que $\tan b_n$ decresce rapidamente quando n aumenta. Dessa forma, ficaremos apenas com b_0 . Sabendo disso, o primeiro termo da soma na relação (3.3-18) torna-se

$$S_1 \equiv \sum_n e^{i[2b_n - |n|\omega + n(\theta - \pi)]} = e^{i2b_0} + \sum_n' e^{-i[|n|\omega + n(\theta - \pi)]}, \quad (3.3-23)$$

onde a linha na somatória significa que a soma abrange todos os valores de n com exceção de $n = 0$. Dessa forma, a expressão (3.3-23) fica

$$S_1 = e^{i2b_0} + \frac{\cos(\theta - \pi) - e^{-i\omega}}{\cos\omega - \cos(\theta - \pi)}. \quad (3.3-24)$$

Por outro lado, o segundo termo da relação (3.3-18) é

$$S_2 = \sum_n e^{in(\theta - \pi)} = 2\pi \sum_n \delta(\theta - \pi - 2\pi n). \quad (3.3-25)$$

Para encontrarmos a amplitude de espalhamento devemos substituir as equações (3.3-24) e (3.3-25) em (3.3-18). Feito isso, obtemos

$$f(\theta) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi k}} \left[e^{i2b_0} + \frac{\cos(\theta - \pi) - e^{-i\omega}}{\cos\omega - \cos(\theta - \pi)} - 2\pi \sum_n \delta(\theta - \pi - 2\pi n) \right]. \quad (3.3-26)$$

Como a separação de ψ em ψ_{in} e ψ_{sc} , de acordo com a expressão (3.3-15), é de certa forma arbitrária, podemos considerar que a parte de ψ_{sc} que resulta nas funções deltas em $f(\theta)$ pertence a função de onda incidente e, deste modo, eliminamos os termos que contém a função delta na relação acima. Portanto, podemos reescrever a amplitude de espalhamento como

$$\tilde{f}(\theta) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi k}} \left[e^{i2b_0} + \frac{\cos(\theta - \pi) - e^{-i\omega}}{\cos\omega - \cos(\theta - \pi)} \right]. \quad (3.3-27)$$

Esta é a amplitude de espalhamento devido ao espalhamento sofrido por uma partícula de massa m , num espaço-tempo gerado por um tubo de matéria de raio ρ que possui um campo magnético axial interior (SPINELLY e BEZERRA, 2008).

3.4 Cálculo dos Estados Ligados

Vamos agora encontrar os estados ligados de uma partícula localizada em um espaço-tempo descrito pela métrica (3.1-1). Para isso, é preciso resolver a equação de auto-valores $H\psi = E\psi$, ou seja,

$$\left[-\frac{1}{2m} \left(\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \alpha^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (3.4-28)$$

onde V é um potencial atrativo do tipo $\frac{cLe}{\rho}$. Neste caso,

$$V = -\frac{\alpha K}{\rho}, \quad (3.4-29)$$

sendo α e K constantes positivas ².

Afim de resolvermos a equação (3.4-28), admitiremos uma separação de variáveis em ψ da seguinte forma:

$$\psi(\vec{r}) = R(\rho) e^{i\beta z} e^{in\theta}, \quad (3.4-30)$$

onde $\beta \in R$ e $n \in Z$.

Substituindo (3.4-30) em (3.4-28), encontramos a seguinte equação radial

$$\left[\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} + \rho \frac{d}{d\rho} - \left(\frac{n^2}{\alpha^2} + \gamma\rho + \xi^2 \rho^2 \right) \right] R(\rho) = 0, \quad (3.4-31)$$

onde $\gamma = \frac{2mK}{\alpha}$ e $\xi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{2mE}{\alpha^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{k^2}{\alpha^2}$. Fazendo $R(\rho) = \frac{u}{\sqrt{\rho}}$, obtemos:

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{4} \frac{u}{\rho^2} - \left(\frac{n^2}{\alpha^2} \frac{1}{\rho^2} + \gamma \frac{1}{\rho} + \xi^2 \rho \right) u = 0. \quad (3.4-32)$$

Analisando o comportamento assintótico da equação anterior em $\rho \rightarrow \infty$ e $\rho \rightarrow 0$, encontramos

$$R(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-\xi\rho} \rho^{\frac{|n|}{\alpha}} W(\rho), \quad (3.4-33)$$

²Quando uma partícula é colocada em um espaço-tempo curvo, as linhas do campo gravitacional gerado por ela sofre distorções, fazendo com que esta partícula sinta uma auto-força finita. No caso do espaço-tempo de Safko-Witten, o potencial de auto-interação gravitacional é “atrativo” e inversamente proporcional a distância.

ou ainda

$$R(\rho) = e^{-\xi\rho} \rho^{\frac{|n|}{\alpha}} F(\rho) . \quad (3.4-34)$$

Substituindo (3.4-34) em (3.4-31) e fazendo a mudança de variável $r = 2\xi\rho$, encontramos a equação hipergeométrica confluyente

$$r \frac{d^2 F}{dr^2} + (B - r) \frac{dF}{dr} - AF = 0, \quad (3.4-35)$$

onde $A = \frac{|n|}{\alpha} + \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2\xi}$ e $B = \frac{2|n|}{\alpha} + 1$.

A equação acima tem como solução a função hipergeométrica confluyente $F(A, B, r)$.

Essa função é dada por

$$F(A, B, r) = 1 + \frac{A}{B} r + \frac{A(A+1)}{B(B+1)} \frac{r^2}{2!} + \dots \quad (3.4-36)$$

Dessa forma, a solução radial é

$$R(\rho) = e^{-\xi\rho} (2\xi\rho)^{\frac{|n|}{\alpha}} F(A, B, 2\xi\rho) . \quad (3.4-37)$$

O comportamento assintótico de $R(\rho)$ para $\rho \rightarrow \infty$ é

$$R(\rho) \rightarrow e^{-\xi\rho} (2\xi\rho)^{\frac{|n|}{\alpha}} \frac{\Gamma(B)}{\Gamma(A)} e^{2\xi\rho} (2\xi\rho)^{(A-B)} \propto \rho^c e^{\xi\rho} , \quad (3.4-38)$$

onde c é uma constante. Para obtermos os estados ligados, devemos impor que $R(\rho) \rightarrow 0$ quando $\rho \rightarrow \infty$. Isso acontece quando $\Gamma(A) = \pm\infty$. Consequentemente $A = -l$, onde $l = 0, 1, 2, \dots$. Dessa forma, os auto-valores de energia são

$$E_{n,l} = -\frac{mK^2}{2} \frac{1}{\left(\frac{|n|}{\alpha} + \frac{1}{2} + l\right)} + \frac{\beta^2}{2m} . \quad (3.4-39)$$

De acordo com as equações (3.4-30) e (3.4-37), as auto-funções para este problema são

$$\psi_{n,l} = c_{n,l} e^{i\beta z} e^{in\varphi} e^{-\xi\rho} \rho^{\frac{|n|}{\alpha}} F(A, B, 2\xi\rho) \quad (3.4-40)$$

Quando não há deficiência angular, $a = 0$ na métrica de Safko-Witten, os auto-valores de energia são dados pela equação (3.4-39) com $\alpha = 1$. É importante dizer que esta

configuração não significa necessariamente a ausência de matéria e campo magnético. Pode ocorrer dos efeitos gravitacionais causados pelo tubo de matéria ser compensado pelo campo magnético, resultando em um espaço-tempo plano. Desta forma, os auto-valores de energia não são afetados. Para a pequeno, podemos encontrar uma expressão para os auto-valores de energia expandindo a equação (3.4-39) em séries de potências de a , ou seja,

$$E_{n,l} = -\frac{mK^2}{2(N + \frac{1}{2})^2} \left[1 - \frac{2|n|}{(N + \frac{1}{2})}a + 0(a^2) + \frac{\beta^2}{2m} \right], \quad (3.4-41)$$

onde $N = |n| + l = 0, 1, 2, \dots$ e $n = -N, -N + 1, \dots, N$.

O potencial que consideramos e para o qual o sistema que tratamos apresenta estados ligados é o auto-potencial gravitacional a que uma partícula de massa m fica submetida quando posta em um espaço-tempo de estrutura cônica (SPINELLY e BEZERRA, 2008).

Como consequência da interpretação estatística da função de onda, temos que $\rho |R(\rho)|^2 d\rho$ representa a probabilidade de encontrarmos a partícula entre ρ e $\rho + d\rho$. Então, analisando o gráfico da função $\rho |R(\rho)|^2$, vemos que, para um l fixo, a medida que aumentamos o valor de n , a probabilidade de encontrarmos a partícula próxima ao tubo é cada vez menor. Isso acontece devido ao fato que a energia fica cada vez menos negativa com o aumento do número quântico n , resultando em estados cada vez menos ligados.

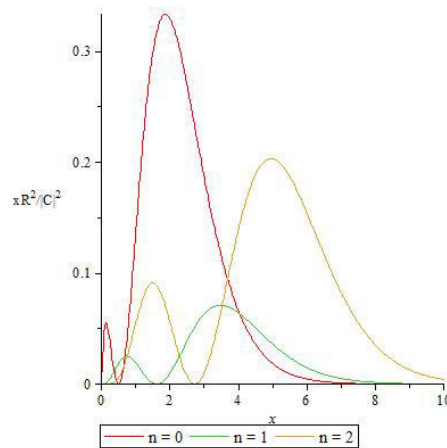


Figura 3.1: Gráficos da função $x |R(x)|^2 / |C|^2$, em que C é uma constante e $x = \xi\rho$, para $l = 1$ e $n = 0, 1, 2$.

Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos o movimento de uma partícula quântica não relativística em um espaço-tempo gerado por um tubo de matéria com um campo magnético axial interior e nulo na região exterior (métrica de Safko-Witten).

Como o referido espaço-tempo possui simetria cilíndrica e é equivalente a um plano, a menos de um déficit angular, antes de tratarmos o espalhamento gerado pela geometria, fizemos um estudo detalhado sobre o espalhamento quântico produzido por um potencial que apresenta tal simetria, no espaço-tempo plano. Particularmente, nosso interesse foi encontrar qual deve ser, nesse caso, a forma geral da onda espalhada para pontos distantes do “alvo” e, conseqüentemente, a amplitude de espalhamento.

A partir da equação de Schrödinger no espaço-tempo curvo, examinamos o espalhamento quântico de uma partícula de massa m , e mostramos a influência do espaço-tempo de Safko-Witten na amplitude de espalhamento. Consideramos também a presença de um potencial atrativo do tipo $const./r$ (potencial de autointeração) e estudamos os estados ligados devido a esta configuração. Vimos que o sistema apresenta estados ligados devido ao auto-potencial gravitacional a que uma partícula de massa m fica submetida quando posta em uma região de estrutura cônica. Vale salientar que quando $a = 0$ na métrica de Safko-Witten, o que resulta em um espaço-tempo plano, não significa necessariamente ausência de campo gravitacional e magnético. Na verdade, pode acontecer que o efeito causado por um compense o outro.

Apêndice A

Função Gamma

- Definição da Função Gama

A função gama está presente em alguns problemas físicos. Mas, sua principal utilidade deve-se ao desenvolvimento de novas funções que tem aplicação física direta.

Podemos definir a função gama como

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1.2.3 \dots n}{p(p+1)(p+2) \dots (p+n)} n^p, \quad p \neq 0, -1, -2, -3 \quad (\text{A.0-1})$$

que é equivalente a

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p > 0. \quad (\text{A.0-2})$$

Essas duas equações são iguais a $(n-1)!$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1.2.3 \dots n}{p(p+1)(p+2) \dots (p+n)} n^p = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = (n-1)!$$

onde, é preciso atender as condições acima para p, nas equações (A.0-1) e (A.0-2). Sendo assim, encontramos

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = \Gamma(3) = \Gamma(4), \dots$$

Não vamos fazer aqui, mas a partir das equação (A.0-1) ou (A.0-2), podemos mostrar que

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \quad (\text{A.0-1})$$

Essa é a relação funcional básica para a função gama (ARFKEN e WEBER, 2007).

• **A Função Gama dos Números Negativos**

Vamos definir agora $\Gamma(p)$ para $p \leq 0$. Para isso, usaremos a equação (A.0-1).

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p} \Gamma(p+1) \tag{A.0-2}$$

Fazendo $\Gamma(p)$ para $p < 0$. Por exemplo,

$$\Gamma(-0,5) = \frac{1}{-0,5} \Gamma(0,5), \quad \Gamma(-1,5) = \frac{1}{-1,5} \frac{1}{-1,5} \Gamma(0,5).$$

Sendo $\Gamma(1) = 1$, vemos que

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \rightarrow \infty \quad \text{com } p \rightarrow 0.$$

A partir da utilização de (A.0-2), vimos que $\Gamma(p)$ torna-se infinito, não somente em zero, mas para todos os números inteiros negativos. Sendo, a função gama descontínua para $p < 0$, sendo p números inteiros. Quando, p são números inteiros positivos, $\Gamma(p)$ é uma função contínua que passa pelos pontos $p = n$, $\Gamma(p) = (n - 1)!$ (BOAS, 1983).

• **Algumas Relações Importantes**

Fazendo $p = 1/2$ na equação (A.0-2), encontramos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{A.0-1}$$

Outra relação importante é

$$\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\text{sen}\pi p}. \tag{A.0-2}$$

Fazendo $p = 1/2$ na equação (A.0-2), obtemos a relação (A.0-1). Para finalizar, vamos escrever a seguinte expressão

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{para } n \text{ um inteiro positivo.} \tag{A.0-3}$$

Essas são algumas relações importantes envolvendo a função gama (BOAS, 1983; ARFKEN e WEBER, 2007).

Apêndice B

Funções de Bessel

A equação de Bessel na sua forma usual é

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \rho^2)y = 0, \quad (\text{B.0-1})$$

onde ρ é uma constante chamada de ordem da função de Bessel.

A equação (B.0-1) tem como uma de suas soluções a chamada função de Bessel de primeiro tipo,

$$J_\rho(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\rho+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\rho}. \quad (\text{B.0-2})$$

Outra solução é a chamada função de Bessel de segundo tipo ou função de Neumann,

$$N_\rho(x) = \frac{\cos(\pi\rho) J_{\rho(x)} - J_{-\rho(x)}}{\text{sen}\pi\rho}. \quad (\text{B.0-3})$$

Dessa forma, podemos escrever a solução geral da equação de Bessel (B.0-1) como

$$y = AJ_{\rho(x)} + BN_\rho(x), \quad (\text{B.0-4})$$

onde A e B são constantes arbitrárias.

Além das funções de Bessel de primeiro e segundo tipo, ainda temos, as funções de Bessel de terceiro tipo ou funções de Hankel. Essas funções se assemelham a forma,

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \text{sen} x \quad (\text{B.0-5})$$

e são dadas por:

$$H_p^1(x) = J_p(x) + iN_p(x) \quad (\text{B.0-6})$$

e

$$H_p^2(x) = J_p(x) - iN_p(x). \quad (\text{B.0-7})$$

Podemos escrever a fórmula das funções de Bessel para x próximo de zero e para x grande. Veja a tabela na (figura B.1).

<i>Function</i>	<i>Small x</i>	<i>Large x (asymptotic formulas)</i>
$J_p(x)$	$\frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^p + O(x^{p+2})$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right) + O(x^{-3/2})$
$N_p(x) \begin{cases} p=0 \\ p>0 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{2}{\pi} \ln x + O(1) \\ -\frac{\Gamma(p)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^p + O\left(\frac{1}{x^{p-2}}\right) \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right) + O(x^{-3/2})$
$H_p^{(1) \text{ or } (2)}(x)$	$\pm iN_p(x) + O(x^p)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\pm i[x - (2p+1)\pi/4]} + O(x^{-3/2})$

Figura B.1: Fórmula das funções de Bessel em x próximo de zero e em x grande.

Note que $\rho \geq 0$ (BOAS, 1983).

Apêndice C

Equações Hipergeométrica

A equação hipergeométrica confluyente

$$xy''(x) + (c - x)y'(x) - ay(x) = 0 \quad (\text{C.0-1})$$

tem como uma de suas soluções a função hipergeométrica confluyente,

$$y(x) = M(a, c, x) = 1 + \frac{a}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \quad c \neq 0, -1, -2, \dots \quad (\text{C.0-2})$$

Outra solução da equação (C.0-1) é

$$U(a, c, x) = \frac{\pi}{\text{sen}\pi c} \left[\frac{M(a, c, x)}{(a-c)!(c-1)!} - \frac{x^{1-c} M(a+1-c, 2-c, x)}{(a-1)!(1-c)!} \right]. \quad (\text{C.0-3})$$

Várias funções podem ser representadas pela função hipergeométrica confluyente.

Desenvolvendo as expansões assintóticas de (C.0-2) e (C.0-3), encontramos

$$M(a, c, x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-c} \left\{ 1 + \frac{(1-a)(c-a)}{1!x} + \frac{(1-a)(2-a)(c-a)(c-a+1)}{2!x^2} + \dots \right\} \quad (\text{C.0-3})$$

e

$$U(a, c, x) = x^{-a} \left\{ 1 + \frac{a(1+a-c)}{1!(-x)} + \frac{a(a+1)(1+a-c)(2+a-c)}{2!(-x)} + \dots \right\}, \quad (\text{C.0-4})$$

respectivamente (ARFKEN E WEBER, 2007).

Bibliografia

- [1] ARFKEN, G.B. e WEBER, H.J. **Física Matemática**. New York: Academic Press, 1995.
- [2] AUDRETSCH, J. e SCHÄFFER, G., **Quantum Mechanics of Electromagnetically Bounded Spin 1/2 Particles in an Expanding Universe. Influence of the Expansion**. General Relativity and Gravitation. Estados Unidos: Plenum Publishing Corporation, vol. 9, 1978, p. 243-255.
- [3] BERGMANN, P. G., **Introduction to the Theory of the Relativity**. New York: Dover Publicações, 1975.
- [4] BEZERRA, V. B., **Gravitational Aharonov-Bohm effect in a locally flat space-time**. Classical and Quantum Gravity. Bristol: IOP Publishing Ltd, vol. 8, 1991, p. 1939.
- [5] CARMELI, M., **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. New York: John Wiley and Sons, 1982.
- [6] DESER, S. e JACKIW, R., **Classical and Quantum Scattering on a Cone**. Communications in Mathematical Physics. New York: Springer, vol. 118, no 3, 1988, p. 495-509.
- [7] DOWKER, J. S. **Covariant Feynman Derivation of Schrodinger's Equation in a Riemannian Space**. J. Phys, 1256 (1974).

- [8] EISBERG, R. e RESNICK, R., **Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas**. Rio de Janeiro: Campus, 2009.
- [9] FERRARO, Rafael., **Einstein's Space-Time: An Introduction to Special and General Relativity**. Buenos Aires: Springer Science, 2007.
- [10] FILHO, W.W., **Mecânica Quântica**. Goiana: Editora UFG., 2002.
- [11] FISCHBACK, E., FREEMAN, B.S. e Wen-Kwei Cheng., **General Relativistic Effects in Hydrogenic Systems**.
- [12] GASIOROWICZ, Stephen., **Física Quântica**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois S.A.,1979.
- [13] GRIFFITHS, J. D., **Mecânica Quântica**. São Paulo: Pearson, 2011.
- [14] LANDAU, L. e LIFCHITZ, E., **Teoria de Campo**. São Paulo: HEMUS - Livraria Editora Ltda, 1974.
- [15] MARQUES. G. e BEZERRA, V. B., **Hydrogen atom in the gravitational fields of topological defects**. Physical Review D. Estados Unidos: The American Physical Society, vol. 66, 2002, p. 105011.
- [16] PARKER, L. e PIMENTEL, L.O., **Gravitational Perturbation of The Hydrogen Spectrum**. Physical Review D. Estados Unidos: The American Physical Society, vol. 25, 1982, p. 3180-3190.
- [17] PEDUZZI, L., **Do Átomo Grego ao Átomo de Bohr**. Florianópolis, 2008.
- [18] PESSOA, O., **História da Teoria Quântica**. USP, 2010.
- [19] ROSA. P., **Louis de Broglie e as Ondas de Matéria**. UNICAMP-IFGW. Campinas, 2004.

- [20] SAFKO, J. L. e WITTEN, L., **Models of Static, Cylindrically Symmetric Solutions of the Einstein-Maxwell Field**. Physical Review D. Estados Unidos: The American Physical Society, vol. 5, 1972, p. 293.
- [21] SAFKO, J. L. e WITTEN, L., **Some properties of cylindrically symmetric Einstein- Maxwell fields**, J. Math. Phys. 12, 257 (1971).
- [22] SPIEGEL, Murray R. **Análise Vetorial**. Rio de Janeiro: Editora Mc Graw Hill, 1979.
- [23] SPINELLY, J. e BEZERRA, V. B., **Some remarks on non-relativistic quantum mechanics in the Safko-Witten spacetime**. Classical and Quantum Gravity. Bristol: IOP Publishing Ltd, vol. 25, 2008, p. 205016.
- [24] SPINELLY, J., BEZERRA DE MELLO, E. R. e BEZERRA, V. B., **Relativistic Quantum Scattering on a Cone**. Classical and Quantum Gravity. Bristol: IOP Publishing Ltd, vol. 18, 2001, p. 1555-1566.
- [25] WEINBERG, Steven., **Gravitation and Cosmology**. New York: John Wiley and Sons, 1972.