



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA-CCT
LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA**

ALEXSANDRO DE ALMEIDA BARROS

**A PRIMEIRA LEI DE KEPLER E O FIM DO DOGMA CIRCULAR NOS MODELOS
COSMOLÓGICOS**

**CAMPINA GRANDE-PB
2016**

ALEXSANDRO DE ALMEIDA BARROS

**A PRIMEIRA LEI DE KEPLER E O FIM DO DOGMA CIRCULAR NOS MODELOS
COSMOLÓGICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao curso de Licenciatura em Física da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de licenciado em Física.

Área de concentração: Ciências exatas.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antonio Barros Santos.

**CAMPINA GRANDE - PB
2016**

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

B277p Barros, Alexsandro de Almeida.
A primeira Lei de Kepler e o fim do dogma circular nos modelos cosmológicos [manuscrito] / Alexsandro de Almeida Barros. - 2016.
43 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Marcos Antonio Barros Santos, Departamento de Física".

1. Lei de Kepler. 2. Movimento circular. 3. Modelos cosmológicos. 4. Cosmologia. I. Título.

21. ed. CDD 520

ALEXSANDRO DE ALMEIDA BARROS

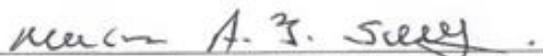
A PRIMEIRA LEI DE KEPLER E O FIM DO DOGMA CIRCULAR NOS MODELOS
COSMOLÓGICOS

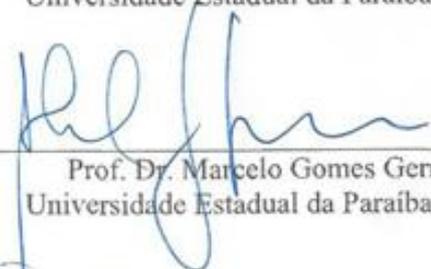
Trabalho de Conclusão de Curso apresentada
ao curso de Licenciatura em Física da
Universidade Estadual da Paraíba, como
requisito parcial à obtenção do título de
licenciado em Física.

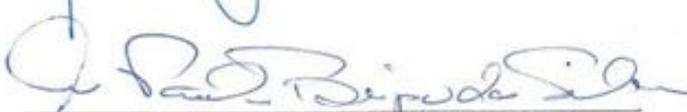
Área de concentração: Ciências exatas.

Aprovado em: 18/03/2016.

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Marcos Antonio Barros Santos (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)


Prof. Dr. Marcelo Gomes Germano
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)


Prof. Dra. Ana Paula Bispo da Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

AGRADECIMENTOS

Este trabalho representa uma vitória frente a diversos problemas e devo justos agradecimentos a muitas pessoas. Minha sincera gratidão a todos os professores do Departamento de Física da UEPB, pelo profissionalismo e humildade ao longo desses anos de graduação. Agradecimento especial ao Prof. Marcos Barros pela orientação do presente trabalho, sempre com muita paciência e atenção, pelos ensinamentos e esforço desde o início.

Ao CNPq e à CAPES, pelo financiamento ao Programa de Iniciação Científica e ao Programa de Monitoria da UEPB, que foram de crucial importância durante esse período.

Aos poucos familiares que me ajudaram e que estavam prontos a auxiliar no que pudessem. Aos amigos, em especial Lidiana Santos, por ser tão prestativa como colega de curso e ter sido importante em alguns momentos de dificuldade pessoal.

RESUMO

No presente trabalho, buscamos responder às questões que nortearam nossa pesquisa: O que levou Kepler a pensar de forma diferente dos modelos clássicos vigentes à sua época? O que tinha de concreto para renunciar ou abandonar esses modelos? No intuito de resposta, objetiva-se, de modo geral, descrever o desenvolvimento da primeira lei de Kepler e os fatos que o levaram a renunciar a visão ortodoxa da uniformidade dos movimentos planetários. De modo específico, discutir o surgimento do dogma relativo ao movimento circular ao longo da astronomia clássica e ressaltar a importância da contribuição de outros estudiosos para a elaboração da Primeira Lei. Para tanto, buscamos na literatura alguns pressupostos históricos que nos proovessem informações significativas e dessem aporte científico confiável. Usamos como ferramenta metodológica, dentro de uma abordagem qualitativa, a pesquisa bibliográfica. Chegamos a resultados satisfatórios dentro de nossas pretensões na consulta a fontes originais, uma vez que estas mostraram os aspectos determinantes que fizeram Kepler rejeitar o uso do movimento circular uniforme na descrição do movimento planetário, apesar de esse tipo de movimento estar presente em todos os modelos cosmológicos anteriores a Kepler, tendo se tornado dogma inabalável por vários séculos. Em perspectiva mais ampla, a presente pesquisa aponta para outras vindouras, já que o processo de reconstrução histórica a que nos propomos é bastante complexo e exige uma maior disponibilidade de tempo para abordar alguns aspectos específicos não contemplados.

Palavras-Chave: Movimento circular. Modelos cosmológicos. Primeira Lei de Kepler.

ABSTRACT

In this study, we seek to answer the questions that guide our research: what Kepler based thought differently from older models? What he was conviction to resign or leave the existing models of his period? The general objective is to describe the development of the Kepler's First Law and the facts that led him to give up orthodox conception of uniformity of planetary motion. Specifically, to trace the begging of the dogma concerning the circular motion in the classical astronomy and highlight the importance of the contribution of other scholars for the preparation of the First Law. Therefore, we seek in the literature some historical assumptions that provide us meaningful information and give reliable scientific basis. We used the qualitative approach with bibliographic search and we have reached satisfactory results within our claims in consultation original sources, as these showed the key aspects that made Kepler reject the use of uniform circular motion in the description of planetary motion, although this type of movement is present in all cosmological models previous Kepler, having become unshakeable for centuries dogma. In broader perspective, this study points to other future, since the process of historical reconstruction we propose is very complex and requires more time available to address specific aspects not addressed in here.

Keywords: Circular motion. Cosmological models. The Kepler's First Law.

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	9
1	METODOLOGIA	11
2	REVISÃO DE LITERATURA.....	13
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	16
3.1	Incorporação do dogma circular aos modelos cosmológicos.....	16
3.2	Kepler e a nova astronomia	23
4	A PRIMEIRA LEI E O FIM DO DOGMA CIRCULAR.....	30
4.1	Resultados preliminares de Kepler.....	30
4.2	Abordagem geométrica de Kepler: Um esboço	33
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	39
	REFERÊNCIAS.....	40
	ANEXO A – Prova do resultado de Kepler (transcrito em notação moderna).....	42

INTRODUÇÃO

O interesse por compreender as concepções antigas acerca do universo surgiu nas aulas do Prof. Dr. Roberto de Andrade Martins, no ano de 2014, quando ministrou a disciplina de História da Física, na Universidade Estadual da Paraíba. Durante este período, percebemos o quanto é valioso e significativo entender um ou vários eventos dentro de um rico aspecto histórico, procurando pormenorizá-lo a partir da leitura de fontes originais ou secundárias de boa qualidade.

Em uma das aulas sobre astronomia antiga, questionamos a respeito do que teria levado os antigos a incorporar especificamente trajetórias circulares e esferas a seus modelos dos movimentos celestes. Consultando fontes de boa qualidade, constatamos que a ideia de um movimento circular para descrever os movimentos planetários esteve atrelada a diversos modelos ao longo da história e só foi efetivamente posta de lado com os trabalhos de Johannes Kepler, no século dezessete.

O que levou Kepler a pensar de forma diferente dos modelos clássicos vigentes à época? O que ele tinha de concreto para renunciar ou abandonar esses modelos? Na tentativa de respostas, buscamos na literatura alguns pressupostos históricos que proovessem de informações significativas, dessem um aporte científico confiável e corroborassem para objetivo geral, do presente trabalho, de descrever o desenvolvimento da primeira lei de Kepler e os fatos que o levaram a renunciar a visão ortodoxa da uniformidade circular nos movimentos planetários, vigentes até então. Além dos objetivos específicos de traçar, através de fontes apropriadas, o surgimento e a incorporação do dogma relativo ao movimento circular, ao longo da astronomia clássica; bem como de ressaltar a importância das medições astronômicas de Tycho Brahe para o desenvolvimento da primeira lei de Kepler.

Fontes consultadas (DREYER, 1906; KOESTLER, 1989; MARTINS, 2012) apontam que o movimento circular esteve fortemente arraigado aos modelos cosmológicos antigos como uma ideia principal, um pré-requisito fundamental para a descrição dos movimentos dos astros. Essa ideia, desde sua concepção, foi aos poucos incorporada à astronomia clássica, mantendo enorme influência sobre essa área ao longo dos séculos que se seguiram e estabelecendo o dogma do movimento circular junto aos modelos cosmológicos.

Em síntese de introdução, esse trabalho segue o seguinte plano organizacional: no primeiro capítulo esclarecemos os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa e as dificuldades encontradas durante o processo. No segundo capítulo, buscamos em alguns artigos uma ideia prévia do que está sendo discutido na literatura sobre Kepler, não somente

do ponto de vista de uma reconstrução histórica confiável dos seus trabalhos científicos, mas também na possível utilização desta reconstrução como material de apoio para intervenção em sala de aula.

No terceiro capítulo, ousamos traçar de forma simplificada a presença do movimento circular nos modelos cosmológicos ao longo da astronomia clássica, desde seu surgimento até sua incorporação nos principais modelos de movimento. Trazemos alguns aspectos da vida de Kepler e alguns dos motivos que o conduziram a seus trabalhos com as medidas de Tycho Brahe - o que culminaria com o estabelecimento de suas leis do movimento planetário e posterior publicação de sua *magnum opus*, a *Astronomia Nova*.

No quarto capítulo, apresentamos uma discussão abrangendo alguns dos aspectos do processo que conduziu Kepler a elaboração da Lei das Órbitas. Para tanto, um esboço simplificado de seu método geométrico, além de alguns fatos determinantes para a efetiva trajetória elíptica do planeta Marte, foram necessários.

Por fim, o último capítulo apresenta nossas impressões finais acerca da exposição de algumas dos principais aspectos dos trabalhos de Kepler, notadamente no que diz respeito às nossas perguntas de pesquisa.

1 METODOLOGIA

1.1 Tipo de pesquisa desenvolvida

Nosso trabalho foi desenvolvido como *pesquisa qualitativa* por esta ser a utilizada em casos, como o nosso, em que se procura descrever, compreender de forma mais aprofundada ou explicar relações entre determinados fenômenos ou aspectos que não podem ser explorados através de um levantamento numérico ou um tratamento estatístico de dados. Nesse contexto, a abordagem qualitativa se vale fundamentalmente da consulta a fontes secundárias de informação, isto é, a materiais já produzidos sobre determinado tema.

A consulta a fontes secundárias, utilizada em trabalhos como o nosso, caracteriza a chamada *pesquisa bibliográfica*, através da qual o pesquisador explora na literatura específica estudos já realizados que se relacionem ao trabalho a ser desenvolvido, ou que forneçam subsídios necessários a um maior domínio e compreensão do tema em questão. Este estágio envolve a consulta a livros, artigos científicos de revistas, enciclopédias, entre outros. O levantamento bibliográfico implica, pois, na utilização de fontes secundárias de informação, por se valer de material elaborado a partir de outros estudos ou elaborados a partir da análise de uma obra original, por exemplo – isso, evidentemente, exige um maior cuidado na utilização das informações. Pois, como enfatiza Gil (2008, p. 51), um trabalho utilizando essas fontes poderá reproduzir ou até aumentar os seus erros, razão esta pela qual o pesquisador deve assegurar-se das condições em que tais materiais foram produzidos, além de utilizar fontes diversas para analisar de forma cuidadosa cada informação a fim de descobrir eventuais contradições ou incoerências entre as fontes consultadas.

1.2 Ferramentas utilizadas

De início, buscamos na literatura obras ligadas à história da astronomia antiga ou que debatessem o método utilizado por Kepler, durante seus trabalhos, que nos proovessem um bom aporte teórico acerca do tema. Dentre as obras encontradas e utilizadas na fundamentação de nosso trabalho, destaca-se o livro *O Homem e o Universo* (1989), uma

versão traduzida da obra mundialmente conhecida *Sleepwalkers: A History of Man's Changing Vision of the Universe* (1959), de Arthur Koestler (1905 - 1983).

Nesta obra, encontramos uma excelente discussão dos aspectos qualitativos dos trabalhos de Copérnico e Kepler, além de uma boa explanação acerca dos modelos cosmológicos na astronomia pré-kepleriana. Além desse, nos fundamentamos em Martins (2012), na tradução da obra *Timeu e Crítias* de Platão por Lopes (2011), artigos abordando as leis de Kepler e em obras clássicas ligadas à história da astronomia, em especial Dreyer (1906), Voelkel (1999) e Stephenson (1987), nas suas versões digitalizadas (esses dois últimos, gentilmente fornecidas pelo prof. Roberto de Andrade Martins).

Encontramos também em acervos digitais na internet as versões digitalizadas das obras *De revolutionibus orbium coelestium* de Copérnico e *Astronomia Nova* de Kepler. O trabalho original de Kepler está escrito em latim medieval, o que terminou por gerar, no início da pesquisa, desânimo e dificuldades na tentativa de utilizá-lo. Neste sentido, mesmo com as dificuldades na leitura deste acervo, encontramos em Davis (2006c), além fornecer de um esboço geral do método geométrico utilizado por Kepler, indicações indiretas sobre informações que facilitaram encontrar, na *Astronomia Nova*, a conclusão kepleriana com respeito à trajetória descrita pelo planeta Marte.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Encontramos na literatura diversos trabalhos voltados para a reconstrução histórica das descobertas e da contribuição de Johannes Kepler para a chamada revolução científica, ocorrida principalmente entre os séculos XVI e XVII (DAMASIO, 2011; PORTO 2015). Além desses, outros artigos estão direcionados para a discussão dos métodos empregados por Kepler e para as possibilidades de utilização em sala de aula de uma abordagem histórica acerca do processo de descoberta das leis de Kepler (MEDEIROS, 2002; MORGADO; SOARES, 2015 PRAXEDES; PEDUZZI, 2009; TOSSATO; MARICONDA, 2010). Notadamente, a análise desses trabalhos nos norteou acerca dos nossos objetivos, mostrando outras possibilidades e estudos bem sucedidos.

Porto (2015) sintetiza os quatro principais trabalhos desenvolvidos por Kepler ao longo de seus estudos astronômicos: *Mysterium Cosmographicum*, *Astronomia Nova*, *Harmonice Mundi* e *Epitome Astronomiae Copernicanae*. A síntese ressalta os traços filosófico-religiosos no pensamento kepleriano, como as concepções físicas para explicação dos fenômenos e a emergência de uma orientação metodológica significativa e típica do rigor da ciência moderna.

Tossato e Mariconda (2010) reconstróem parte dos procedimentos metodológicos empregados por Kepler em sua obra magna *Astronomia Nova*, na qual se evidencia a passagem de uma astronomia descritiva, de caráter mais matemático, para uma nova astronomia mais explicativa e dirigida para a causalidade física dos fenômenos - um traço determinante dos trabalhos keplerianos.

Ainda no âmbito de uma abordagem histórica dos estudos de Kepler, trabalhos põem em discussão alguns equívocos e erros históricos cometidos por textos de divulgação mal fundamentados e sem rigor historiográfico. Dentro dessa perspectiva, Damasio (2011), referindo-se à modificação impelida por Nicolau Copérnico ao sistema ptolomaico no século XVI, enfatiza que diferente do que é normalmente divulgado e erroneamente ensinado em sala de aula, a motivação de Copérnico em modificar o sistema geostático não foi a complexidade dos arranjos de círculos e epiciclos deste último. Do contrário, no desconforto de Copérnico perante o fato de que, no sistema de Ptolomeu, os movimentos só se mostram uniformes quando observados de um ponto específico do sistema, deslocado do centro, chamado *Equante*.

A mesma observação é feita por Praxedes e Peduzzi (2009), quando afirmam:

Em geral, os manuais simplificam a controvérsia entre esses dois modelos, afirmando, inclusive de forma equivocada, que o modelo copernicano era mais simples e de maior capacidade explicativa do que o ptolomaico (PRAXEDES; PEDUZZI, 2009, p. 5).

De acordo com Damasio (2011), a necessidade de utilização do ponto *equante* representava para Copérnico uma violação ao ideal grego de uniformidade, segundo o qual todo movimento celeste deveria se manter regular para o ponto central do arranjo:

Este modelo geostático de Ptolomeu manteve-se desde o século II até o XVI. Veio a ser fortemente contestado por Copérnico, motivado em que o equante violava o antigo ideal grego de que todos os movimentos fossem uniformes em torno do centro (DAMASIO, 2011, p. 3).

Como trataremos posteriormente neste trabalho, e conforme reforça Tossato e Mariconda (2010), o ponto *Equante* seria utilizado como dispositivo matemático nas primeiras tentativas de Kepler em adaptar os movimentos do planeta Marte a uma trajetória circular, embora tenha se tornado obsoleto com os avanços de Kepler, que culminariam na descoberta das três leis do movimento planetário. Muitos equívocos históricos também são cometidos na tentativa de descrição deste processo de elaboração das leis.

Segundo Medeiros (2002), dentre as versões mais comuns de abordagem presentes nos materiais didáticos, algumas empobrecem a influência da filosofia e da mística pitagóricas sobre seus trabalhos; outras, no extremo oposto, exageram a influência do misticismo sobre o pensamento de Kepler. Além disso, a relação entre Kepler e Tycho, durante o curto tempo de convivência, é comumente descrita como sempre amigável e livre de conflitos, divergindo de fontes históricas. Acerca deste complexo processo de reconstrução histórica, o autor conclui:

Diante de tão rico personagem, a tarefa de construir um relato de sua vida e obra impõe-se como um enorme desafio, mais ainda quando se pretende comunicá-lo de forma leve e pretensamente divertida, mas onde não se sacrifique o rigor das informações históricas veiculadas (MEDEIROS, 2002, p. 20).

Assim como outros autores, Medeiros (2002) vai além de um relato histórico confiável e apresenta boas propostas de inserção dos textos históricos em sala de aula, mediante uma transposição didática aplicada sob a forma de atividades alternativas junto ao nível básico de ensino.

Em Medeiros (2001; 2002), o autor reconstrói os principais aspectos da vida e obras de Tycho Brahe e Kepler em uma entrevista, fictícia e bem humorada, entre cada um destes estudiosos e um grupo de professores do ensino médio. Como proposta de atividade

pedagógica em sala de aula, o autor sugere que esse material histórico seja trabalhado na forma de uma peça teatral, em que os alunos reproduzam a troca de diálogo entre as personagens, retratadas pelas entrevistas fictícias.

A utilização desses dois artigos é ainda incentivada por Praxedes e Peduzzi (2009):

A leitura e o estudo dos artigos são particularmente recomendáveis aos professores que consideram a história da ciência relevante para o ensino da física, mas que, em geral, não encontram materiais apropriados para o seu uso em sala de aula. Entretanto, a despeito das virtudes dos textos, há um elemento que nunca se pode perder de vista: a formação do professor (PRAXEDES; PEDUZZI, 2009, p. 3).

A estratégia apresentada pelos autores está voltada, entretanto, para uma atividade de capacitação de professores do nível básico de ensino. Nessa perspectiva, o que se almeja é um melhoramento da prática docente desses profissionais quando da utilização desses novos conhecimentos em sala de aula.

Entendemos com base nos artigos supracitados, que a obra astronômica de Kepler e o seu método de trabalho constitui uma temática bastante presente na literatura, informando-nos que embora se trate de um assunto complexo, possui implicações importantes no que diz respeito a uma reconstrução histórica e possibilidades de utilização em sala de aula. No mais, a análise desses trabalhos nos proporcionou definir claramente os objetivos e o enfoque da presente pesquisa.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Incorporação do dogma circular aos modelos cosmológicos

Entender como os astros se movem no céu sempre foi um objetivo do ser humano desde os tempos mais remotos, quer fosse por mera curiosidade, quer por questões práticas ligadas à própria necessidade de sobrevivência, como compreender com exatidão a mudança das estações e a passagem do tempo, por exemplo. De fato, ao longo da história, diversas foram as tentativas de elaboração de um modelo que descrevesse satisfatoriamente os complexos movimentos dos astros no céu.

Fontes clássicas e recentes (DREYER, 1906; KOESTLER, 1989; MARTINS, 2012) têm nos apontado um fato interessante: o movimento circular e o formato esférico se afiguram há muito tempo como ideia principal, um pré-requisito fundamental utilizado na descrição dos movimentos dos astros e na estrutura do universo. Tais ideias foram aos poucos incorporadas à astronomia clássica e mantiveram enorme influência sobre essa área ao longo dos séculos que se seguiram, aos poucos estabelecendo o dogma do movimento circular junto aos modelos cosmológicos; fossem eles geocêntricos como Ptolomeu, por exemplo; heliocêntricos, a exemplo de Aristarco e Copérnico ou uma combinação de ambos (Heraclides do Ponto e Tycho Brahe). Referindo-se a esse ponto, Koestler (1989) enfatiza:

Não existe, talvez, outro exemplo na história do pensamento de persistência tão obstinada, tão obcecada no erro, como a ilusão do círculo que emperrou a astronomia durante dois milênios (KOESTLER, 1989, p. 31).

Mas, de onde viria tanta fixação pelo círculo? Na obra supracitada encontramos uma possível resposta ao nosso questionamento. Referindo-se à conhecida obra *Timeu* do filósofo **Platão** (427-347 a.C.), Koestler afirma:

Por um processo de raciocínio metafísico e a *priori*, Platão chegou a certas conclusões gerais concernentes à forma e aos movimentos do universo. Tais conclusões, de enorme importância para tudo que se segue, eram que *a forma do mundo devia ser a de uma perfeita esfera, e que todo movimento devia realizar-se em círculos perfeitos e com velocidade uniforme* (KOESTLER, 1989, p. 30, grifos do autor).

O autor mostra os trechos do diálogo de *Timeu* em que Platão lança suas concepções cosmológicas no que diz respeito à forma concernente ao universo, bem como ao tipo de

movimento exibido por suas partes. Semelhantemente, buscamos e encontramos (em uma tradução lusitana) os referidos trechos:

Deu-lhe [o deus] a figura adequada e congénere. De facto, a forma adequada ao ser vivo que deve compreender em si mesmo todos os seres vivos será aquela que compreenda em si mesma todas as formas. Por isso, para o arredondar, como que por meio de um torno, deu-lhe uma forma esférica, cujo centro está à mesma distância de todos os pontos do extremo envolvente – e de todas as figuras é essa a mais perfeita e semelhante a si própria –, considerando que o semelhante é infinitamente mais belo do que o dissemelhante [...] Quanto ao movimento, atribuiu-lhe aquele que é característico do corpo: dos sete, aquele [circular] que mais tem que ver com o intelecto e com o pensamento[...] ao pô-lo girar em torno de si mesmo e no mesmo local, fez com que se movimentasse num *círculo*, em rotação, tendo-o despojado de todos os outros seis movimentos e tornado imóvel em relação a eles [...] fez-lhe um corpo liso e totalmente uniforme, em todos os pontos equidistantes do centro e perfeito a *partir de corpos perfeitos*. Constituiu um único céu, solitário e redondo a girar em *círculos*, com capacidade, pela sua própria virtude, de conviver consigo mesmo e sem depender de nenhuma outra coisa, pois conhece-se e estima-se a si mesmo o suficiente. Foi por todos estes motivos que engendrou um deus bem-aventurado (LOPES, 2011, p. 102-104, grifo nosso).

Segundo a interpretação de Koestler (1989, p. 30), Platão se baseia unicamente em raciocínio *metafísico* e, sem nenhuma base observacional ou experimental, por assim dizer, chega à conclusão da real forma para o universo bem como o tipo de movimento exibido por suas partes.

Outra referência à obra de Platão sobre o curso da astronomia pode ser encontrada em Martins (2012), que interpreta a visão platônica e a expressiva influência da obra *Timeo*; entretanto, parece não concordar a respeito da origem das ideias do filósofo:

A ideia de que a forma esférica e o movimento circular são os mais perfeitos e os únicos adequados para a constituição do céu tiveram enorme influência durante muitos séculos. Mas de onde saíram essas ideias? *A partir dos estudos astronômicos da época*. (MARTINS, 2012, p. 67, grifo nosso).

Afinal, seriam essas ideias fundamentadas em observações e concepções da época ou meramente uma linguagem semialgórica utilizada por Platão, baseado em raciocínio metafísico? Em síntese, mesmo no único diálogo especialmente dedicado às questões físicas, o filósofo misturou mito e ciência. Em parte, por esta razão, tem havido considerável diferença de opinião sobre os vários pontos de seu sistema cósmico, como oportunamente lembra Dreyer (1906, p. 54).

Não obstante, a visão do universo no tempo de Platão já possui alto grau de sofisticação, com o pensamento que perdurou da Terra redonda e não achatada. Acreditava-se

que ela estava parada no centro de todas as coisas, cercada pelo Sol, pelas *estrelas errantes* (os planetas Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno, até então os únicos conhecidos) e pelas estrelas fixas, imaginadas como menores em demasia do que a Terra e como formadoras de um universo finito, segundo nos aponta Martins (2012, p. 67).

Nesse modelo de universo fechado, em que as estrelas fixas ainda não ofereciam nenhum problema que comprometesse a harmonia dos céus (como o surgimento de uma nova estrela, por exemplo), o único desafio ao entendimento provinha do movimento desordenado dos cinco planetas por dentre as constelações. A tarefa da cosmologia era, portanto, elaborar um modelo que descrevesse esses corpos em seus movimentos rotineiros. A afirmação de Platão de todos os corpos celestes se moverem em círculos perfeitos parecia reduzir o desafio, e daí em diante a tarefa da astronomia acadêmica era conseguir demonstrar que todos aqueles movimentos irregulares dos astros no céu podiam ser resumidos a um sistema baseado em movimentos simples, circulares e uniformes, segundo aponta Koestler (1989, p. 35). Tendo em vista tal finalidade, diversos sistemas se seguiram com a proposta de satisfazer essas condições.

A primeira tentativa de desenvolver o referido modelo foi iniciada por **Eudoxo de Cnido** (c. 408-355 a.C.) discípulo de Platão, e foi posteriormente aperfeiçoado por **Calipo**, discípulo de Eudoxo, segundo nos aponta Koestler (1989, p. 35). O modelo consistia basicamente num arranjo de várias esferas de cristal invisíveis que giravam todas em torno de um mesmo centro, a Terra. Mediante uma combinação correta de esferas com diferentes inclinações e diferentes velocidades, era possível descrever vários movimentos dos astros sob a esfera celeste. Dentre eles, por exemplo, o movimento diurno do Sol sob a esfera celeste (Fig. 1).

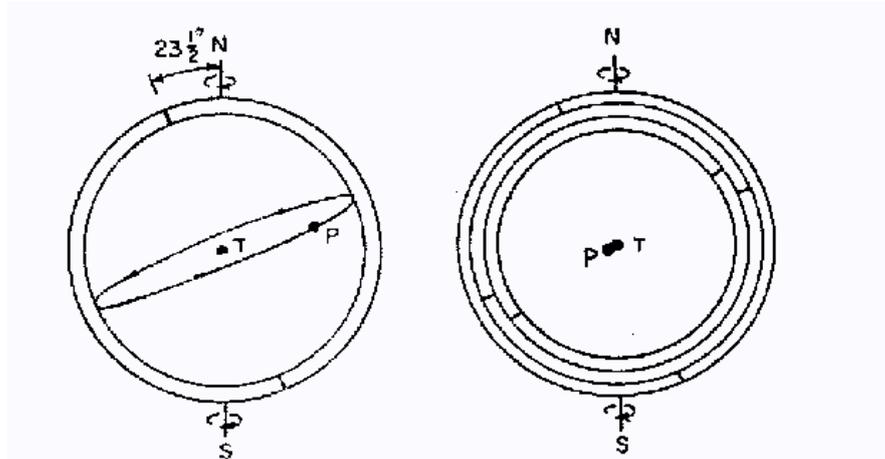


Figura 1: **Modelo das esferas homocêntricas de Eudoxo**¹. Fonte: <http://plato.if.usp.br/1-2003/fmt0405d/apostila/helen8/node12.html>. Acesso em: 22 Dez. 2015.

O sistema de esferas chegou a atingir um número de vinte e sete esferas e, após o aperfeiçoamento de Calipo, de trinta e quatro. Esse modelo foi ainda aprimorado por **Aristóteles** à custa do acréscimo de mais esferas, resultando num sistema governado por um conjunto de 54 delas. No entanto, no que diz respeito à reprodução fiel dos movimentos planetários, nenhum melhoramento acrescentou o novo arranjo de esferas de Aristóteles, segundo esclarece Koestler (1989, p. 36).

Em resumo, esses engenhosos sistemas ainda não conseguiam explicar - exceto grosseiramente - um dos fenômenos mais complexos em termos de movimentos exibidos pelos planetas: O movimento retrógrado. Nesse tipo de movimento, o planeta parece desenhar uma “laçada” no céu (Fig. 2). O astro progride em sua trajetória normalmente por dentre as estrelas durante muitas semanas, em seguida para o movimento, depois parece “andar para trás” e, depois de alguns dias, finalmente retoma a trajetória original. O segundo fenômeno se refere à variação de brilho apresentada pelos planetas em diferentes épocas de observação. Este, por sua vez, não poderia de maneira nenhuma ser explicado pelos sistemas homocêntricos de esferas, uma vez que uma variação de brilho implica em uma variação na distância planeta-Terra, o que se afigura impossível em um sistema como o de esferas concêntricas, em que esferas jamais mudam a distância em relação à Terra ou entre si.

¹ Nessa ilustração, as letras *T* e *P* representam a Terra e o Sol, respectivamente.



Figura 2: **Movimento retrógrado de um planeta no céu**, registrado ao longo de alguns dias. Fonte: <http://brasilecola.uol.com.br/fisica/movimento-retrogrado-um-planeta.htm>. Acesso em: 22. Dez. 2015.

Por volta do fim do sexto século antes de Cristo, havia se estabelecido a ideia da Terra como uma bola flutuante no espaço. Posteriormente, **Filolao**, discípulo de Pitágoras, atribuiu movimento à Terra, ao conceber que esta girava em torno de um ponto no espaço chamado “fogo central”, que não era o Sol. As ideias de Filolao, aliadas à dificuldade de explicar aqueles movimentos anômalos dos planetas, abriram uma nova perspectiva dentro da cosmologia antiga: O heliocentrismo.

Atribui-se a **Heraclides do Ponto** (século IV a. C.) a elaboração do primeiro modelo Heliocêntrico. Em tal sistema, somente os planetas Mercúrio e Vênus orbitavam o Sol. Este, por sua vez, ainda se movimentava ao redor da Terra, que se mantinha fixa em um mesmo lugar e possuía um movimento de rotação sobre seu próprio eixo; os demais planetas continuavam a se mover em torno da Terra. O movimento diurno das estrelas era explicado pela rotação do nosso planeta. O movimento de Vênus e Mercúrio em torno do Sol implicava, pois, em uma variação da distância desses à Terra, porque ora se encontram na frente do Sol (e portanto mais próximos da Terra), ora atrás (mais longe da Terra).

Dessa forma, o modelo de Heraclides podia explicar convincentemente aquela variação de brilho apresentada como uma consequência da variação de suas distâncias à Terra, o que não se afigurava possível no sistema de esferas homocêntricas, como já vimos (KOESTLER 1989, p. 36). Segundo este autor, há controvérsias se Heraclides teria ou não completado o sistema heliocêntrico, assumindo que todos os planetas orbitam em torno do Sol. Por outro lado, seu sucessor, **Aristarco de Samos**, indubitavelmente assumiu o arranjo heliocêntrico completo com a Terra e os demais planetas, descrevendo movimentos circulares em torno do Sol, ponto central do sistema. Essa perspectiva heliocêntrica foi esquecida no mundo antigo e só ressurgiria vários séculos depois.

O modelo que manteve maior influência ao longo da história, entretanto, mantinha a visão geocêntrica, aperfeiçoada pelo grego **Claudio Ptolomeu**, no século II d. C. Esse modelo

descrevia com perfeição os movimentos dos astros no céu mediante uma complexa combinação de círculos, epiciclos e outros artifícios. “O sistema Ptolomaico, com modificações de somenos importância, ficou sendo a última palavra em astronomia até o aparecimento de Copérnico” (KOESTLER, 1989, p. 37). Um maior detalhamento deste modelo não será aqui debatido, entretanto, alguns de seus pontos são cruciais para entender as mudanças que viriam a surgir, a exemplo da velocidade do planeta em sua trajetória geocêntrica.

O sistema Ptolomaico conseguia, mediante seus intrincados mecanismos, demonstrar a uniformidade da velocidade do planeta em sua trajetória – e parte do dogma de uniformidade se mantinha salva. Todavia, a velocidade do astro só aparentava manter-se uniforme para um observador situado em um local específico do sistema e não no seu *centro*. Esse ponto do sistema se chama *Equante* ou *igualante*, conforme representação na Fig. 3.

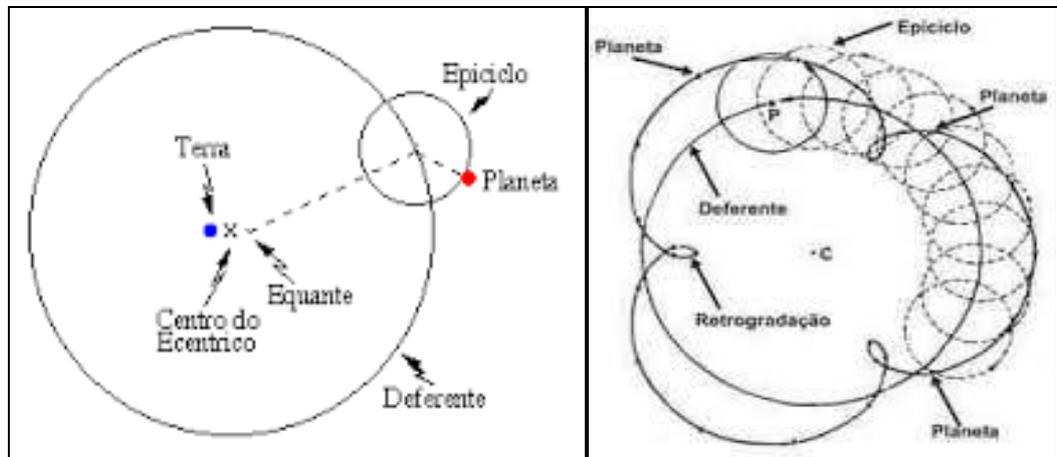


Figura 3: **Representação simplificada do modelo ptolomaico**². Fonte: <http://astro.if.ufrgs.br/p1/p1.htm>. Acesso em: 15 Nov. 2015.

Além da limitação sobre a não uniformidade da velocidade para todos os observadores, tal modelo exigia ainda o acréscimo de mais elementos para explicar com perfeição o movimento dos planetas no céu. Segundo Pilling e Dias (2007), a versão final do modelo possui os seguintes elementos (Fig. 4): a *Eclíptica* com centro na Terra (T); o *deferente*, com centro em D; o *círculo regular*, com centro em E (ponto equante); o *epicyclo*, com centro no *deferente*. O planeta está em P, movendo-se uniformemente sobre o *epicyclo*; mas o *centro do deferente* se move uniformemente em relação ao *equante* e não à Terra.

² A primeira figura mostra como o sistema descreve o movimento retrógrado de um planeta no céu: o planeta gira em torno da roda menor, denominado Epicyclo, que, por sua vez, gira em outra roda maior, chamada Deferente. Essa combinação resulta na trajetória exibida pelo astro no céu, representada na segunda figura.

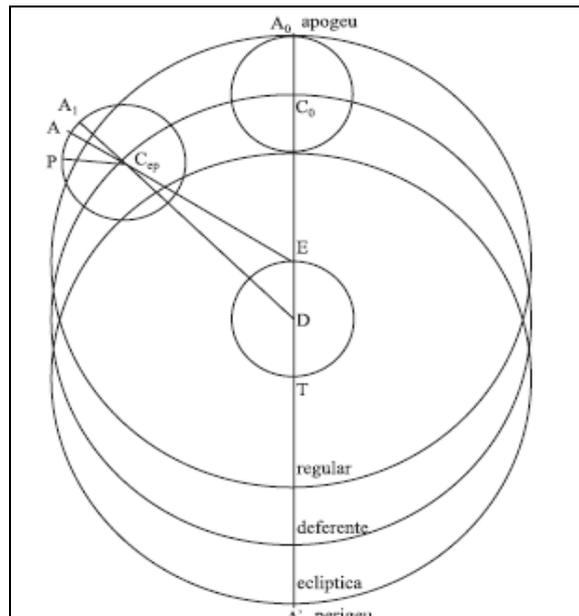


Figura 4: Sistema ptolomaico completo para um planeta exterior. Fonte: Pilling e Dias (2007)

Somente no século XVI, uma nova modificação no modelo de movimento planetário é elaborada e publicada por **Nicolau Copérnico**, um cônego polonês. A visão Copernicana da estrutura do universo não diferia totalmente da antiga, ainda acreditava em esferas transparentes, encaixadas e girando umas dentro das outras, segundo aponta Martins (2012, p. 95). Não obstante, Copérnico propôs uma nova disposição para os planetas pondo-os a girar, juntos com a Terra, em *torno do Sol*. Isso permitia explicar de forma mais elegante aquele movimento retrógrado dos planetas. Assim, quando a Terra em certo ponto de seu movimento orbital se move mais rapidamente que um planeta vizinho, alinha-se com o planeta, e este aparenta ficar parado no céu por algum tempo. À medida que a Terra avança, o planeta parece *andar para trás*, quando observado da Terra. Logo, o problema do movimento retrógrado estava resolvido.

Com esse modelo, Copérnico se livrara de outro fato que o incomodava: a uniformidade na velocidade do planeta se verifica no ponto *equante* ou *igualante* do sistema ptolomaico. Haja vista que Copérnico desejava um sistema com constância na velocidade verificada efetivamente para o seu ponto central, qualquer outra configuração representaria para o cônego uma fuga à ordem do movimento uniforme. Seu objetivo foi alcançado abolindo os igualantes de Ptolomeu e os substituindo por outros epiciclos. No novo arranjo, os planetas giram em *epiciclos de epiciclos* não centralizados no Sol, mas sim no *centro da órbita terrestre*. Com isso, o estudioso conseguira um sistema em que a velocidade dos planetas se mantém de fato constante em relação ao seu centro, como era sua pretensão, segundo explica Koestler (1989, p. 130).

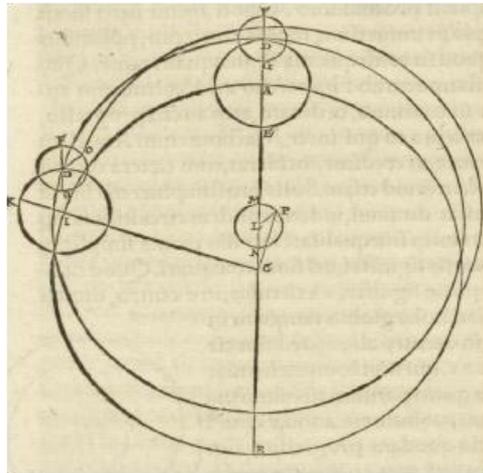


Figura 5: **Desenho da obra de Copérnico**³. Fonte: *Copérnico*, 1543, p. 91.

No entanto, como lembra esse autor, os planetas no sistema copernicano não giram exatamente em torno do Sol, mas sim de um ponto no espaço vazio (definido pela órbita da Terra). Exceto por não possuir um centro físico, esse sistema ainda mantinha o dogma do movimento circular uniforme forçado por círculos e epíclis⁴. Comparando os sistemas de Copérnico e Ptolomeu, Koestler (1989) conclui:

Foi enorme lucro em simplicidade e elegância. Por outro lado, o deslocamento do centro do universo para um ponto na periferia do sol acarretou uma perda quase igual de plausibilidade (KOESTLER, 1989, p. 130).

Este cenário sofre uma grande reviravolta com os trabalhos de Johannes Kepler no século XVII.

3.2 Kepler e a nova astronomia

Kepler nasceu em 1571, na cidade alemã de Wief, ainda adolescente iniciou seus estudos teológicos no seminário protestante inferior de Aldelberg e, posteriormente, aos dezessete anos, concluiu o seminário superior em Maulbronn. Nesse ambiente, além de estudar teologia, estudou grego, latim, música e matemática, entrando em contato com os clássicos pagãos da antiguidade que, por mais de mil anos, tinham sido silenciados e

³ Representação do movimento de um planeta, mediante o uso de epíclis de epíclis (círculos menores) em torno do centro da órbita da Terra.

⁴ Copérnico empregou em seu sistema um total de 48 epíclis, o que supera os do sistema ptolomaico, com somente 40 (KOESTLER, 1989, p. 129).

começavam a ressurgir no currículo educacional europeu. Contudo, foi na geometria antiga que Kepler viu a imagem e obra da perfeição. Escreveu anos depois:

A geometria existia antes da Criação, é co-eterna com o espírito de Deus, é o próprio Deus [...] a geometria deu a Deus um modelo para a criação e foi implantada no homem com a própria semelhança de Deus, e não meramente levada ao espírito dele através dos olhos (HARMONICE MUNDI *apud* KOESTLER, 1989, p. 179).

Kepler deixou Maulbronn em 1589 para estudar para o clero na grande Universidade Luterana de Tübingen, onde se diplomou pela Faculdade de Artes aos 20 anos de idade. Segundo nos aponta Sagan (1980, p. 56), nesse ambiente encontrou-se com as principais correntes intelectuais da época e sua genialidade foi prontamente reconhecida pelos seus professores, um dos quais lhe apresentou as ideias da hipótese copernicana.

Continuando a vocação religiosa, matriculou-se na Faculdade Teológica, onde estudou por quase quatro anos, mas antes de realizar os exames finais aceitou uma oferta para lecionar matemática e astronomia em uma escola secundária em Gratz, capital da Estíria - uma província austríaca. Kepler relutou a princípio devido à simplicidade do cargo e por ter pouco conhecimento e interesse pela astronomia. O interesse que antes despertara pela teoria copernicana fora um dentre muitos outros e não era provocado pelo interesse na astronomia, mas pelas implicações místicas e religiosas de um universo heliocêntrico. Para Kepler, o universo nessa perspectiva parecia exibir naturalmente uma assinatura da Santíssima Trindade, de forma que todas as forças e atributos místicos deveriam naturalmente estar centralizados no Sol (que representaria a imagem mística do Pai criador), que estaria cercado pela esfera das estrelas fixas (o Filho); por sua vez, o Espírito Santo seria representado pelas forças invisíveis e não materiais que emanam do sol e agem através do espaço (KOESTLER, 1989, p. 29).

Como mencionamos, durante seus estudos em Tübingen, Kepler tomou conhecimento da teoria heliocêntrica de Copérnico através de um de seus mestres. Nessa época, questionara-se do porquê da existência de justamente seis planetas ao invés de vinte ou cem, por exemplo. Escreveu mais tarde: “Acima de tudo havia três coisas das quais eu diligentemente gostaria de saber as razões de serem ou não serem: do número, tamanho e movimento das esferas”⁵. Pouco depois de sua chegada à Gratz, Kepler se dedicou com mais afinco às suas especulações cosmológicas, examinando-as através de um caráter mais matemático, buscando encontrar a ordem correta entre as proporções numéricas e os

⁵ K. G. W. *apud* STEPHENSON, 1987, p. 8. Tradução nossa.

afastamentos das órbitas planetárias, porém não obteve êxito. Em 1595, no entanto, se deparou de maneira inusitada com o que pensou ser a solução, segundo nos aponta Koestler (1989, p. 178).

Durante uma de suas aulas, Kepler havia traçado no quadro (para outros propósitos) um diagrama de um triângulo equilátero inscrito dentro de um círculo, de modo que os vértices do triângulo apenas tocavam o círculo envolvente. Ele notou que dentro do triângulo se inscreveu outro círculo, que só tocou os pontos médios dos lados do triângulo envolvente; observou que a *relação* entre a dimensão do círculo grande e o pequeno era aproximadamente a mesma que o *tamanho relativo* entre a órbita de Saturno e a de Júpiter (Fig. 5). Tentou, imediatamente, desenhar um quadrado que fosse envolvido por este segundo círculo e que, ao mesmo tempo, envolvesse um novo círculo menor, cujo tamanho, em relação aos outros círculos, parecia estar de acordo com a proporção entre as órbitas de Marte, Júpiter e Saturno.

Kepler começou a suspeitar que os tamanhos relativos entre as órbitas dos planetas tinham alguma base geométrica, que Deus usou a geometria como um arquétipo durante a criação do universo (VOELKEL, 1999, p. 29). Posteriormente, tentou inscrever entre Marte e a Terra um pentágono, entre a Terra e Vênus um hexágono, e assim por diante. Grosso modo, imaginou o seguinte: Saturno e Júpiter são os dois planetas mais externos⁶ ao Sol (os *primeiros* em distância) e na geometria, a primeira figura (considerando o número de lados) é o triângulo. O quadrado é a segunda figura na geometria plana, então, deve ter relação com os planetas imediatamente mais externos, Marte e Júpiter; seguindo essa ordem, entre Marte e a Terra deveria ser inserido um pentágono, e dessa maneira por diante. Todavia, a sequência não funcionou.

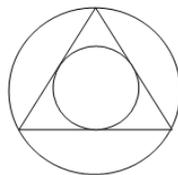


Figura 6: **Desenho traçado por Kepler**⁷. Fonte: Reprodução, Koestler (1989, p. 169)

Kepler sentiu que estava no caminho certo, entretanto, devia está errando em considerar figuras da geometria plana para adaptar órbitas no espaço. Segundo pensou, o indicado seria procurar formas tridimensionais que correspondessem àquela situação. Diferentemente do que ocorre com os polígonos regulares num plano *bidimensional*, o

⁶ Lembremo-nos que nesta época eram conhecidos somente seis planetas (incluindo a Terra); Júpiter e Saturno eram os mais distantes ao Sol, dentre os conhecidos.

⁷ O desenho foi feito por Kepler durante sua aula, com objetivo distinto do que hoje é comumente estudado: o círculo maior envolve o triângulo e, este por sua vez, envolve um círculo menor.

número de formas *tridimensionais* regulares (ou seja, de faces idênticas) é limitado a apenas cinco (Fig. 7). Essa simetria com relação às faces desses polígonos possibilita que cada um deles possa ser *circunscrito* (envolvido) por uma esfera e também ser *inscrito* (envolver) em uma esfera, como explica Koestler (1989, p. 170).

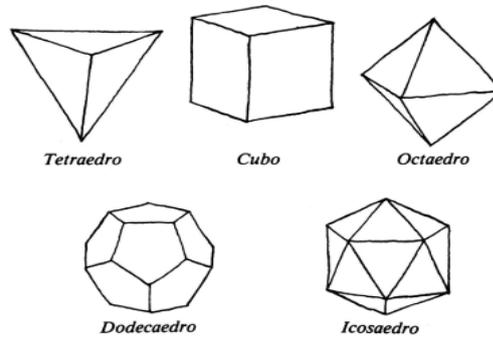


Figura 7: Sólidos regulares ou Platônicos: o Tetraedro, Octaedro, Icosaedro, Cubo e o Dodecaedro. Fonte: http://www.ccvvalg.pt/astrologia/historia/johannes_kepler.htm. Acesso em: 10 Jan. 2016.

Esse fato peculiar com relação à esfera e o número limitado de sólidos regulares no espaço tridimensional fizeram Kepler acreditar que deveria haver somente cinco sólidos perfeitos, já que apenas seis planetas existiam. Nesta concepção, o motivo de haver cinco *espaçamentos* entre as trajetórias dos planetas é a existência de cinco sólidos perfeitos, que fornecem os *apoios invisíveis* sobre os quais as esferas dos planetas no sistema copernicano se sustentam. A hipótese parecia explicar o porquê daquelas distâncias entre suas órbitas.

O seu modelo de sólidos, alicerçando as esferas dos astros, as circunstâncias de sua “descoberta” e as tentativas de adequar o modelo aos dados disponíveis, está descrito no seu primeiro livro, publicado em 1596, intitulado *Prodromus dissertationum cosmographicarum, continent mysterium cosmographicum, de admirabili proportione orbium coelestium, deque causis coelorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis & proprijs, demonstratum per quinque regularia corpora geometrica*⁸, ou simplesmente, *Mysterium Cosmographicum*, como ficou conhecido.

⁸ Precursor (Prodromus) dos Tratados Cosmográficos, contendo o Mistério Cósmico das admiráveis proporções entre as Órbitas Celestes e as verdadeiras e corretas razões dos seus Números, Grandezas e Movimentos Periódicos (KOESTLER, 1989, p. 168).

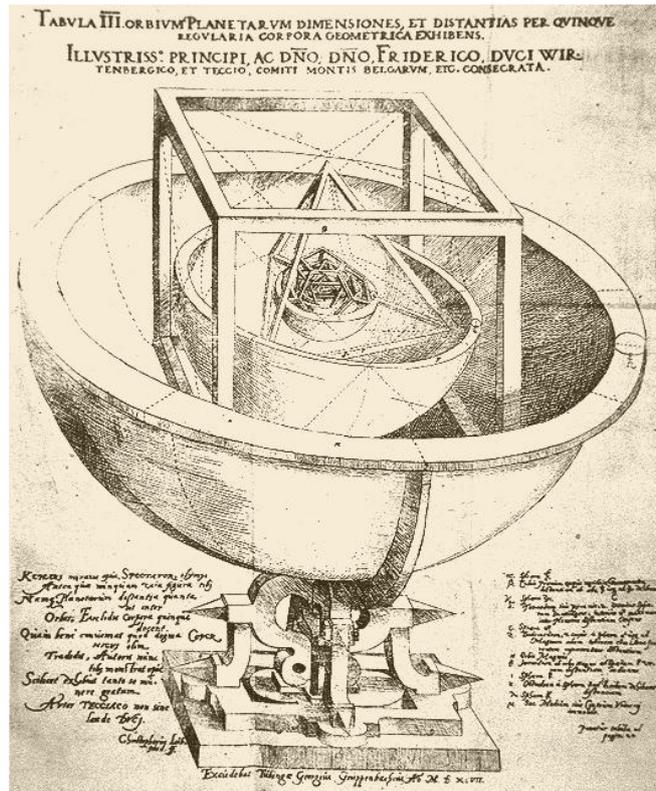


Figura 8: **Hipótese cosmológica de Kepler descrita no *Mysterium Cosmographicum* (1596)**⁹. Fonte: Voelkel (1999, p. 24).

Em alguns momentos, o *Mysterium Cosmographicum* possui um caráter místico, medieval, em outros, empírico e moderno. Em meio a esta estranha dualidade se encontravam as sementes de algumas das principais contribuições de Kepler à ciência. Um exemplo representativo do quão surpreendente se afigura essa dualidade é a objeção de Kepler à visão de Copérnico de colocar o centro da órbita terrestre como ponto central daquele sistema. Para Kepler, o Sol deveria ser considerado o centro do sistema, não só no sentido geométrico, mas também na ótica física. Para ele, seria fisicamente absurdo que de um ponto *não material* possa surgir uma *força* que move os planetas. Como enfatiza Koestler (1989, p. 221), essa preocupação com uma *causalidade física* para descrever os fenômenos representa um ponto central dos trabalhos keplerianos e seria o fator chave do seu êxito em desvendar as verdadeiras leis por trás dos movimentos celestes.

Com respeito à adequação de seu modelo dos sólidos aos dados disponíveis, concordava com os dados de distâncias fornecidos por Copérnico somente para alguns planetas e outros não. Kepler decidiu que as medidas fornecidas pelo sistema copernicano (que também se fundamentava em dados e conceitos de antigos estudiosos) deveriam ser

⁹ A esfera mais externa é a de Saturno e está apoiada pelo cubo; a seguinte é a de Júpiter, apoiada pelo Tetraedro, e assim por diante.

imprecisas. Sua busca por medidas mais exatas, e sua fixação pela ideia de um cosmo geométrico baseado em seu modelo, determinaria o rumo de seus trabalhos futuros e modificaria radicalmente as concepções há muito aceitas na astronomia clássica, como esclarece Dreyer (1906):

Embora a ideia principal do *Mysterium Cosmographicum* estivesse errada, nós temos uma grande dívida de gratidão para com esse trabalho, uma vez que representa o primeiro passo na limpeza do sistema copernicano dos restos da teoria de Ptolomeu, que ainda se apegavam a ele. O maior desejo de Kepler era obter valores mais corretos das distâncias médias e excentricidades, a fim de provar a sua teoria, e o único lugar no mundo onde esta informação poderia ser obtida era no observatório de Tycho Brahe (DREYER, 1906, p. 379, tradução nossa).

Tycho Brahe (1546-1601) apresentava uma posição de destaque, de observação e registro das posições dos astros no céu, entre os astrônomos observadores da época. Seus dados eram obtidos com instrumentos muito sofisticados e precisos, se comparados aos normalmente utilizados até aquele período. Com isso,

[Tycho] amontoara um tesouro de dados como ninguém antes; mas estava velho e faltava-lhe a ousadia da imaginação para construir com aquela riqueza de matéria-prima o novo modelo do universo. As leis do universo estavam lá, nas suas colunas de números, mas “por demais profundamente ocultas” para que ele as decifrasse (KOESTLER, 1989, p. 208).

De acordo com o autor, Kepler já havia recebido um convite de Tycho para auxiliá-lo nos seus trabalhos no seu observatório situado em Praga, de onde Tycho realizou grande parte de suas observações sistemáticas com seus assistentes. A decisão de trabalhar com Tycho - um marco para os seus futuros trabalhos - foi motivada pelo interesse pessoal de Kepler em função das acuradas observações realizadas por Tycho e pela influência de outros acontecimentos de ordem social, política e religiosa que permeavam aquele momento específico. Esse contexto externalista, entretanto, será omitido neste trabalho.

A chegada de Kepler ao castelo de Benatek levou a uma reorganização nos trabalhos de medição. Kepler foi incumbido da tarefa, anteriormente entregue a um assistente de Tycho, Longomontanus, de estudar Marte. Este era o planeta exterior cuja órbita apresentava maior desvio do círculo, segundo Koestler (1989):

Foi exatamente por essa razão que Marte desanimara Tycho e o assistente. Uma vez que ambos esperavam que os planetas se movessem em círculos, era impossível conciliar teoria e observação (KOESTLER, 1989, p. 215).

Após a morte de Tycho Brahe, Kepler foi nomeado Matemático Imperial, posição até então ocupada por Tycho, entre os anos de 1601 a 1612. Durante os primeiros anos desse período, realizou um trabalho matemático intenso com os dados das posições do planeta Marte, acumulados ao longo de muitos anos nas acuradas observações de Tycho e, em número menor, do próprio Kepler. Vale ressaltar que o direito de utilização desses dados não foi uma conquista simples, contudo não nos cabe discutir aqui. Como nos sugere Koestler (1989),

Foram as primeiras “leis naturais” no sentido moderno: Afirmções precisas, verificáveis, sobre relações universais governando fenômenos particulares, expressas em termos matemáticos. Separavam a astronomia da teologia e casaram a astronomia com a física. Finalmente puseram cobro ao pesadelo que havia perseguido a cosmologia nos dois últimos milênios (KOESTLER, 1989, p. 215).

O laborioso trabalho de Kepler foi publicado em 1609, com o título: *Astronomia nova AITILOGHTO, seu physica coelestis, tradita commentariis de motibus stellae Martis*¹⁰. Entendemos que essa grandiosa obra demonstrava não somente a forma correta que a velocidade do planeta Marte varia à medida que segue sua trajetória em torno do Sol, mas também a forma verdadeira daquela trajetória.

¹⁰ *Astronomia nova baseada nas causas ou física do céu derivada das investigações dos movimentos do astro Marte* (KOESTLER, 1989, p. 214).

4 A PRIMEIRA LEI E O FIM DO DOGMA CIRCULAR

Neste capítulo, apresentamos, de forma bastante simplificada, um resumo do processo que permeia a descoberta das leis de Kepler - em particular da primeira lei, nosso principal interesse. Levando em consideração a complexidade do processo e as limitações do presente trabalho, buscamos modestamente fornecer uma visão geral dos processos desenvolvidos por esse pesquisador, sem nos ater a maiores detalhes.

4.1 Resultados preliminares de Kepler

Marte apresenta o movimento mais irregular dentre os planetas exteriores observados no céu. Apesar disso, sua trajetória real pouco difere de um círculo, de modo que a grande precisão dos dados que utilizava e o uso de métodos geométricos e matemáticos para a análise dos valores de posição do planeta determinou o sucesso de Kepler em provar que o planeta não se move em uma trajetória circular perfeita.

Inicialmente, Kepler abordou o problema de forma tradicional, isto é, considerava a órbita do planeta como um círculo. Entretanto, guiado por considerações físicas (como já havia sugerido no *Mysterium*), insistiu em tratar o Sol como centro geométrico de suas medidas, passando a usá-lo como *referencial* para o cálculo das posições e distâncias dos planetas, e não o centro da órbita da Terra, conforme fizera Copérnico. Mesmo com isso, observou que para obter resultados aproximadamente corretos para uma trajetória circular, o Sol não deveria ser o centro do círculo (C), mas deveria se encontrar deslocado dele, na posição (S), segundo aponta Koestler (1989, p. 216).

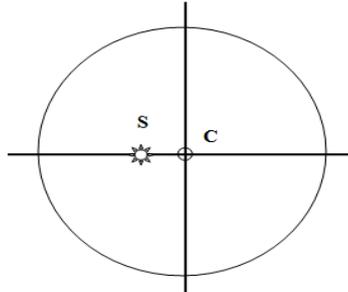


Figura 9: A órbita de Marte como um círculo com o Sol deslocado do seu centro¹¹. Fonte: Reprodução, Koestler (1989, p. 216).

¹¹ Inicialmente, Kepler considerou a órbita de Marte como um círculo com o Sol (S) deslocado do seu centro (C).

Além de calcular as posições e distâncias relativamente ao Sol, Kepler provou - baseando-se nos dados de Tycho e por diferentes métodos - que as órbitas dos planetas possuem *inclinações fixas* umas em relação às outras. Copérnico postulava em seu modelo que a órbita de Marte oscilava no espaço e que tal oscilação dependia da posição da Terra.

A terceira *inovação* de Kepler foi mais uma vez motivada por considerações físicas. Concluiu que se os planetas são governados pelo Sol¹², como estava supondo, a sua força deveria agir mais fortemente ou mais fracamente dependendo da distância do planeta ao Sol. Isso significa que a velocidade do planeta deve, de alguma maneira, ter relação com essa mudança de distância e *não* se manter constante. Kepler “provisoriamente, deixou que ficasse o movimento circular, mas eliminou a velocidade uniforme” (KOESTLER, 1989, p. 217). Como explica esse autor, apesar de Kepler abolir o movimento com velocidade constante e dispensar os epiciclos do sistema copernicano, adotou de início o ponto *igualante (E)* como um dispositivo de cálculo, que posteriormente se mostrou improdutivo.

No sistema Copernicano, Marte necessita de *cinco círculos* para ter seu movimento descrito. Tratando o problema do ponto de vista descrito anteriormente, Kepler observou que bastava um *único círculo excêntrico* para adequar a maioria (mas não todas, como descobriria) das medidas a uma trajetória circular, segundo Koestler (1989, p. 218). O autor resume:

Com esses três movimentos preliminares (a) o deslocamento do centro do sistema para o Sol, (b) a prova de que os planos orbitais não “oscilam” no espaço, e (c) a abolição do movimento uniforme, havia Kepler eliminado uma porção das inutilidades que tinham obstruído o progresso desde Ptolomeu e feito do sistema copernicano uma coisa desajeitada e não convincente (KOESTLER, 1989, p. 218).

O problema que tinha pela frente era usar os dados para definir a órbita de Marte, determinando o raio do círculo, a direção do eixo que liga às posições de afélio e periélio¹³ do planeta, a posição do Sol (S) e do centro da órbita (C). Essa era uma tarefa que não podia ser resolvida por matemática rigorosa, mas por aproximação, através de um processo de acerto e erro, até que se obtivessem resultados satisfatórios. O enorme trabalho desenvolvido nesse processo está preservado em manuscrito e cobre novecentas páginas de cálculo. Após realizar setenta tentativas de determinação do raio da órbita, da posição de (S), (C) e demais pontos, Kepler chegou a valores que se adequavam as posições do planeta para as quatro observações

¹² Um arranjo tendo por centro o Sol parecia mais coerente tanto do ponto de vista físico como de uma concepção religiosa, por exemplo (seria mais concernente com a Santíssima Trindade, como já mencionado).

¹³ Posições da órbita em que um planeta se encontra mais distante e mais próximo do Sol, respectivamente.

utilizadas nos cálculos e também se ajustavam a outras dez registradas por Tycho, com uma margem de erro permissível de 2' (dois minutos¹⁴ de arco) (KOESTLER, 1989, p. 220). A órbita de Marte parecia ser realmente circular.

O drama seguinte nos trabalhos de Kepler seria determinado pela não concordância de duas posições de Marte registradas pelas observações de Tycho. Essas duas medidas representavam uma catástrofe para a hipótese do círculo, visto que diferiam das que sua teoria exigia em valores que chegavam a *oito minutos de arco*. Era uma discordância entre teoria e observação não permitida, já que todas as medidas utilizadas foram compiladas nas acuradas observações de Tycho e seus instrumentos de alto grau de precisão. Esse momento crítico é expresso pelas ansiosas palavras de Kepler: “Visto, porém, não ser possível ignorá-los, esses oito minutos apontam o caminho para uma completa reforma na astronomia [...]”¹⁵.

O desafio seguinte consistia em construir a órbita de Marte sem dispor de nenhuma ideia prévia quanto a sua forma. Como explica Koestler (1989, p. 222), de início Kepler atacou de forma diferente o problema, reexaminando dessa vez o movimento da própria Terra, calculando o movimento terrestre do ponto de vista de um observador situado em Marte. Após uma longa jornada, partindo da revisão do movimento terrestre, e de considerações físicas quanto à dependência da velocidade do planeta com a distância ao Sol, Kepler chegou à sua primeira conclusão, não do formato da órbita ainda, mas demonstrou matematicamente que a velocidade do planeta Marte não se mantém constante ao longo da órbita, de modo que *“the time [taken by Mars as it moves in its orbit] is measured by the area”* (DONAHUE, p.593 *apud* DAVIS, 2006b). Isto é, o tempo gasto por Marte para percorrer um trecho de sua órbita é medido pela área descrita por ele neste intervalo de tempo. Essa conclusão é conhecida como “Segunda lei de Kepler” que, portanto, foi descoberta antes da lei das órbitas.

Após demonstrar, de fato, que a velocidade do planeta não se mantém uniforme, Kepler se torna mais cético com relação aos dogmas ortodoxos de movimento aos quais se prendera até então. Além disso, como enfatiza Koestler (1989, p. 225), já havia se passado quatro anos de árduo trabalho e tentativas em vão de conciliar todas as posições de Marte à ideia do círculo. Durante esse período, Kepler adquiriu uma grande habilidade em geometria e inventou inclusive métodos em geometria inteiramente seus.

Após uma última tentativa fracassada de atribuir uma órbita circular a Marte, chega à simples conclusão de não ser um círculo a órbita do planeta, mas parece ser um tipo de trajetória estranha, exótica, no formato *oval*. Curiosamente, como lembra Tossato e

¹⁴ Um minuto de arco corresponde a 1/60 de um grau.

¹⁵ *Astronomia Nova*, Liv. II, cap. 19 *apud* Koestler (1989).

Mariconda (2010), é nesse cenário que surge a primeira utilização da elipse como um instrumento de trabalho para adequar uma órbita oval às irregularidades observadas entre as posições de afélio e periélio.

Segundo Koestler (1989, p. 226), os trabalhos com a hipótese do formato oval, ocuparam um ano da vida de Kepler. Nesse ínterim, lançou-se na tarefa de encontrar a área dessa suposta trajetória calculando uma série de cento e oitenta distâncias entre Marte e o Sol para diversas posições do planeta, não conseguindo efetivamente provar o tipo real daquela trajetória. No entanto, percebeu que “se o formato fosse o de uma elipse perfeita, todas as respostas seriam encontradas nas obras de **Arquimedes** e **Apolônio**”¹⁶. Além disso, conclui que a trajetória correta para Marte com certeza se encontrava a meio caminho entre um círculo e uma oval. Como reforça Tossato e Mariconda (2010),

Negada a órbita circular e livre das restrições impostas pelo axioma da circularidade, Kepler considera a forma oval mediante a investigação do movimento em epiciclo. Postulando a elipse auxiliar como forma da órbita, chega ao resultado de que a órbita circular erra por excesso, enquanto que a órbita oval (elipse auxiliar) erra por falta. Cabe lembrar que esta é a primeira utilização da forma elíptica por Kepler (TOSSATO & MARICONDA, 2010, p. 354).

No tópico seguinte, objetivamos apresentar um esboço do método de construção geométrica, desenvolvido por Kepler, que culminou com a descoberta de uma relação matemática simples, na qual denotava corretamente uma trajetória elíptica para o planeta Marte. Essa fórmula simples descreve a maneira pela qual a distância do planeta ao Sol varia com a posição dele em sua órbita. Curiosamente, como lembra Koestler (1989), Kepler inicialmente, não associou prontamente sua fórmula empírica a uma elipse, sendo que ao fim do árduo processo que desenvolvera “tinha descoberto [...] a mágica equação, mas [...] não podia identificá-la ao símbolo taquigráfico da elipse [...] atingira o alvo, mas não sabia o que atingira” (KOESTLER, 1989, p. 228).

4.2 Abordagem geométrica de Kepler: Um esboço

Apesar da herança magnífica vinda de Tycho, Kepler sabia que nenhuma quantidade de observações empíricas, embora numerosas, poderia dar-lhe a estrutura teórica que

¹⁶ G. W., Vol. XIV. *Apud* Koestler, 1989, p. 226, grifo nosso.

necessitava. Por conseguinte, quando compensou a incerteza nas medições o máximo possível, voltou-se para uma investigação geométrica, segundo Davis (2006a).

Num primeiro momento, Kepler se interessa apenas por uma descrição cinemática, considerando as hipóteses sob um ponto de vista meramente instrumentalista - como Ptolomeu - e sem considerar ainda a ação física do Sol sobre os movimentos. É nesta fase que recorre ao *Equante* de Ptolomeu para adaptar as irregularidades na trajetória de Marte e mudanças de velocidade ao axioma platônico da uniformidade, segundo aponta Tossato e Mariconda (2010). Essa fase inicial, conhecida normalmente como *hipótese vicária* ou *hipótese suplementar*, tem por objetivo conjugar os dados observacionais a uma descrição correta de uma forma orbital para Marte. Ainda segundo os autores,

Kepler adota inicialmente [...] o axioma platônico de que os movimentos planetários são circulares e uniformes ou compostos de movimentos circulares e uniformes, considerando que é suficiente a adequação da representação geométrica desses movimentos dos planetas. A hipótese é tomada, assim, como mera *hipótese matemática*, sem a consideração de causas físicas. A perspectiva é, assim, explicitamente descritiva (TOSSATO; MARICONDA, 2010, p. 345, grifo dos autores).

Como já foi discutido, Kepler adotou a teoria dos movimentos planetários centralizados no Sol de Copérnico e a aplicou vigorosamente, insistindo que todas as distâncias planetárias devem ser medidas a partir do próprio Sol. Depois de muita investigação preliminar, que começou por volta de 1601, Kepler partiu do quadro que tinha derivado de Ptolomeu, adaptando para uma visão heliocêntrica a visão geocêntrica.

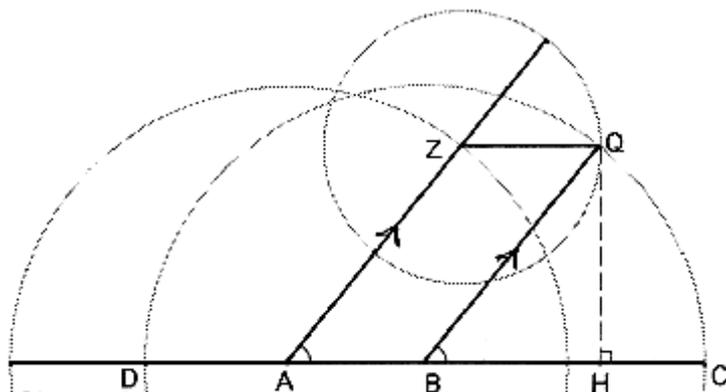


Figura 10: **Abordagem geométrica de Kepler utilizando de círculos e epiciclos.** Fonte: Davis (2006a)

Kepler iniciou a partir do primeiro quadro ilustrado na Figura 10, descrito como padrão Ptolomaico, que ele adaptou automaticamente para o modo heliocêntrico, como

veremos. De acordo com Davis (2006a), Kepler adotou o mecanismo tradicional de deferente, epiciclo e excêntrico; consciente de que o movimento no círculo com centro situado em A , quando combinado com o movimento no epiciclo de raio $ZQ = AB$ (cujo centro Z se encontra no deferente), produz um movimento de Q , equivalente a um simples movimento de Q ao longo do círculo de centro B . Como sempre foi tradição na astronomia antiga, podemos identificar um ponto formado pela combinação dessas três órbitas sucessivas usando um ângulo β , como fez Kepler (esse uso foi autenticado pela tradição, uma vez que, na astronomia antiga, os movimentos consistiam de combinações de rotações, medidos pelos ângulos nos centros de seus respectivos círculos). Do paralelismo entre AZ e BQ , pode-se escrever $\angle QBC = \angle ZAB = \beta$. Este ângulo chama-se “anomalia excêntrica”.

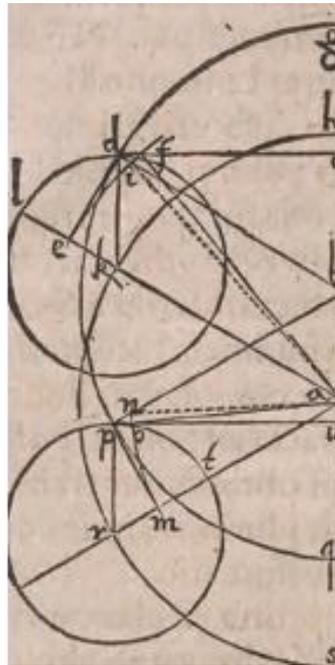


Figura 11: **Abordagem geométrica de Kepler utilizando os recursos do sistema ptolomaico.** Fonte: Kepler (1609, p. 284).

Em primeiro momento, Kepler tomou Q como um ponto típico no círculo excêntrico e testou o excêntrico como um caminho proposto. No entanto, descobriu que este fornecia distâncias do planeta ao Sol exageradas em quase todas as posições. Assim, finalmente, rejeitou a ideia e partiu para encontrar a curva real, a saber, o caminho do planeta - naturalmente, que teve de ser construído a partir de uma combinação de (arcos de) círculos pela geometria de Euclides.

Pontos típicos dos três caminhos propostos são todos nomeados e as construções separadas, como mostra a Figura 12. A estrutura necessária para produzir estes pontos, existe na Figura 10 em termos de um valor $QBC = \beta$ escolhido.

O procedimento em três fases que Kepler adotara foi a de tirar pontos geometricamente definidos (K' , K'' , K) ao longo AZ , um por vez; em seguida, traçou arcos de círculos correspondentes (de raios AK' , AK'' , AK), de modo que cada arco iria terminar num ponto geometricamente definido.

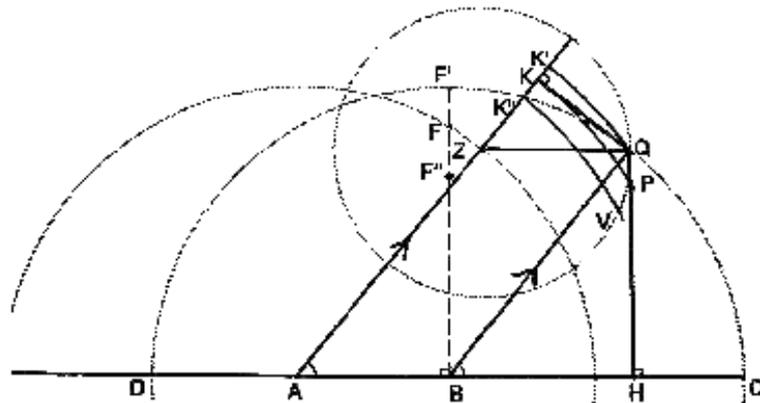


Figura 12: Método de construção de distâncias característico do método de Kepler. Fonte: Davis (2006)

A Figura 13 representa a maneira como Kepler, a partir de seu método, encontrou uma fórmula (geométrica) para a distância do planeta ao Sol.

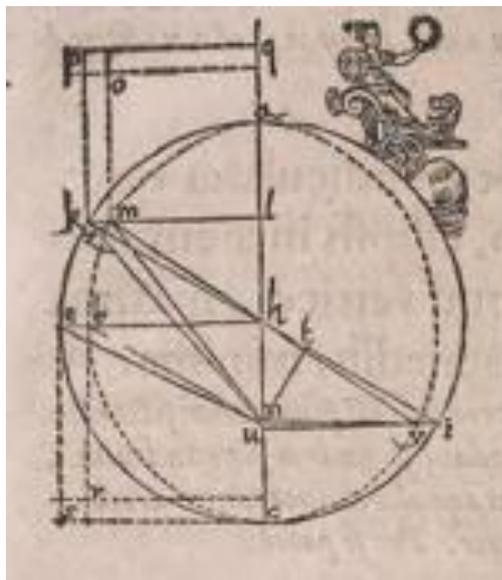


Figura 13: Estágio final da construção característica de Kepler¹⁷. Fonte: Kepler (1609, p. 289)

¹⁷ Alguns elementos geométricos desta construção estão detalhados na Figura 14.

A Figura 14 mostra o planeta numa posição P na sua trajetória CFD de diâmetro (maior) CD , circunscrita pelo círculo de diâmetro CD , cujo centro está em B ; Q é um ponto típico desse círculo, determinado pelo ângulo $\angle QBC$ no centro, com a ordenada QPH ligando os pontos Q e P . AB continua sendo a distância excêntrica.

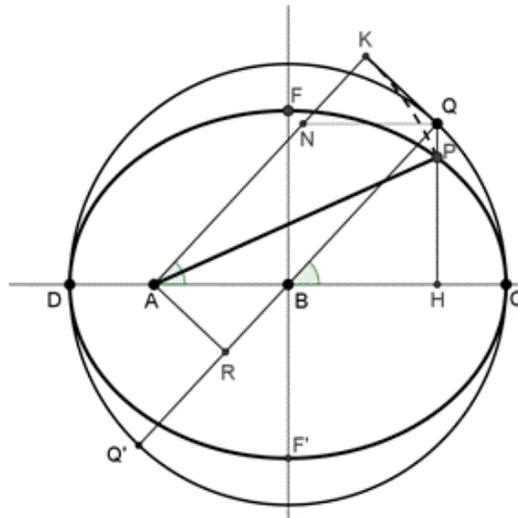


Figura 14: Estágio final da construção de Kepler utilizando o método de construção de distâncias. Fonte: Davis (2006c), adaptada.

Embora Kepler tenha percebido que, usando o seu método de construção de distância, (descrito na Figura 12) produzia distâncias de A muito grandes (o círculo erra por excesso), continuou a trabalhar a partir deste quadro tradicional, com uso de régua e compasso. Depois de uma segunda tentativa, encontrou distâncias pequenas em demasia (hipótese da oval); conseguiu, porém, aplicar o seu método característico para a construção de distâncias, que forneceu distâncias mais aproximadas, ao traçar uma perpendicular a partir de Q ao encontro de AN prolongado até K , como mostrado na Figura 14. Isso produziu uma distância típica AK de comprimento correto, traçando um arco de círculo (linha pontilhada, na figura), Kepler pôde obter o comprimento que procurava na *direção certa* AP . A construção característica de Kepler produziu $AP = AK$ e, devido ao retângulo $ARQK$, temos também que $AK = QR$. Portanto, a distância AP do planeta pode ser precisamente expressa pela relação:

$$AP = AK = QR = QB + BR \quad (1)$$

No entanto, conforme Davis (2006a), tal relação não tinha sido construída antes. Kepler não tinha a menor ideia da curva que a relação acima representa. Se a curva fosse uma

elipse, o ponto típico P iria (como perceberia mais tarde) satisfazer uma condição vital contida em uma obra de **Arquimedes**, chamada *On Conoids e Spheroids*¹⁸. Segundo a *proposição 4* dessa obra, uma elipse pode ser expressa (para os parâmetros da figura acima, claro) pela relação:

$$\frac{PH}{QH} = \frac{BF}{BC} \quad (2)$$

Como enfatiza Koestler (1989, p. 228), Kepler rejeita a relação (1) - que denota corretamente uma órbita elíptica - por aparentemente não possuir sentido geométrico. A esta altura, entretanto, Kepler se lançou no desafio de construir a trajetória por outro método geométrico e recaiu na relação (2), bem conhecida na geometria antiga. “E então, afinal, viu que os dois métodos produziam o mesmo resultado” (KOESTLER, 1989, p. 228).

A conclusão obtida por Kepler, de que a *órbita de Marte é uma elipse*, está expressa no capítulo 58 da *Astronomia Nova*: “*Ergo ellipfis est planetae inter*” (p. 285, primeira linha); ou na tradução inglesa da obra, “an ellipse is the path of the planet [Mars]” (DONAHUE, p. 575 *apud* DAVIS, 2006c). Após ter obtido uma trajetória elíptica para Marte por dois métodos geométricos distintos, Kepler partiu para a demonstração matemática de que as órbitas são elípticas. Esta prova está descrita no capítulo 59 da *Astronomia Nova* e contém uma quantidade enorme de detalhes e de demonstrações geométricas. Ao todo, são 15 proposições voltadas para a prova geométrica de que a elipse é a forma do movimento de Marte e dos outros planetas (TOSSATO; MARICONDA, 2010).¹⁹

Segundo afirma Koestler (1989, p. 229), essas leis não possuíam muito sentido para Kepler, uma vez que não via sentido para serem as trajetórias dos planetas uma elipse e não uma oval. No mais, orgulhava-se mais de sua ideia de universo fundamentado nos cinco sólidos que nas leis de movimento planetário.

¹⁸ Uma versão (em inglês) digitalizada desta obra está disponível em <https://www.stmarys-ca.edu/sites/default/files/attachments/files/On_Conoids_and_Spheroids.pdf>.

¹⁹ Em anexo, disponibilizamos uma prova matemática (adaptada a partir de Davis, 2006c, utiliza elementos da geometria analítica) de que a relação (2) - e, portanto, uma trajetória elíptica - pode ser obtida a partir dos elementos geométricos mostrados na Figura 14.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, fizemos uma exposição de alguns dos principais aspectos acerca dos trabalhos de Johannes Kepler, utilizando os dados do astrônomo Tycho Brahe e do surgimento e uso da trajetória circular nos modelos antigos dos movimentos celestes, ao longo da astronomia clássica. Dentro desse contexto, as referências aqui usadas deram o suporte necessário para que pudéssemos chegar a uma resposta satisfatória aos nossos objetivos, apontando-nos que a trajetória circular e a velocidade uniforme foram por dois milênios considerados pré-requisitos para a descrição dos movimentos celestes. Dessa forma, a tarefa dos antigos filósofos era elaborar um modelo efetivo de movimento planetário que, empregando aquelas condições, descrevesse satisfatoriamente os deslocamentos dos astros no céu.

Como nos ficou claro, este cenário baseado na simetria de círculos e esferas estava em total acordo com a concepção antiga de um universo harmonioso e perfeito, bem como nada parecia mais natural do que todos os movimentos celestes venerarem esta simetria. Essas características foram, portanto, incorporadas aos modelos de movimento e perpetuaram uma ideia de uniformidade, que séculos mais tarde se mostraria equivocada com os trabalhos de Kepler - e posterior conclusão de que os planetas se movem em trajetórias elípticas.

Conforme apontaram as fontes utilizadas, a referida conclusão, conhecida normalmente como *Primeira Lei de Kepler* ou *Lei das órbitas*, foi obtida a partir do estudo e da modificação de ideias anteriores a Kepler. Este, fundamentando-se nos registros precisos de Tycho Brahe e os aliando a considerações de ordem física próprias de seu método, abriu uma nova perspectiva dentro da astronomia, modificando concepções e pondo fim a um dogma há muito tido como inabalável. Infelizmente, a descrição da elaboração da Primeira Lei, principal objetivo do nosso trabalho, pôde ser feita aqui apenas em linhas gerais, pois se trata de um processo matemático muito complexo e permeado de detalhes, cuja exposição está além de nossas condições e das possibilidades do presente trabalho.

Além disso, entendemos que o contexto histórico que permeia essa descrição contém ricos aspectos, que não foram aqui mencionados, a exemplo do contexto social, político e religioso em que os autores supracitados viviam. Acreditamos que esse contexto histórico externalista deva ser melhor explorado no âmbito de uma dissertação de mestrado, por proporcionar um tempo maior de pesquisa.

REFERÊNCIAS

COPÉRNICO, N. *De revolutionibus orbium coelestium*. Nuremberg, 1543 (obra digitalizada).

DAVIS, A. E. L. **Kepler's Planetary Laws**, 2006a. Disponível em: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Keplers_laws.html. Acesso em: 02 Nov. 2015.

_____**Law II: the area law (1609 and 1621)**, 2006b. Disponível em: www.iac.es/proyecto/johanneskepler/secondlaw.pdf. Acesso em: 02 Nov. 2015.

_____**Law I: the ellipse law (1609)**, 2006c. Disponível em: <http://www.iac.es/proyecto/johanneskepler/firstlaw.htm>. Acesso em: 02 Nov. 2015.

DREYER, J. L. E. **A history of the planetary systems from Thales to Kepler**. Cambridge: Cambridge University Press, 1906.

DAMASIO, F. O início da revolução científica: questões acerca de Copérnico e os epiciclos, Kepler e as órbitas elípticas. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 33, n. 3, p. 3602-7, 2011.

GIL, A.C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6 ed. São Paulo: Atlas, 2008.

KEPLER, J. **Astronomia Nova**, 1609. Disponível em: <https://archive.org/stream/Astronomianovaa00Kepl#page01/mode/2up>. Acesso em: 02 Nov. 2015.

KOESTLER, A. **O homem e o universo**: como a concepção do universo se modificou através dos tempos. 2. ed. São Paulo: Ibrasa, 1989. Tradução de Alberto Denis.

LOPES, R. **Platão. Timeu-Crítias**. Coimbra: CECH, 2011. Tradução do grego, introdução, notas e índices.

MORGADO, B. E. ; SOARES, V. Construção geométrica da orbita de Marte pelo método de Kepler. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, n. 1, p. 1305-11, 2015.

MEDEIROS, A. Entrevista com Tycho Brahe. **Física na Escola**, v.2, n. 2, 2001.

_____**Entrevista com Kepler. Física na Escola**, v.3, n.2, 2002.

MARTINS, R. A. **O universo**: teorias sobre sua origem e evolução. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.

PORTO, C. M. Panorama geral da obra astronômica de Kepler. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, n. 3, p. 3601-13, 2015.

PRAXEDES, G.; PEDUZZI, L. O. Q. Tycho Brahe e Kepler na escola: uma contribuição à inserção de dois artigos em sala de aula. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 31, n. 3, p. 3601-10, 2009.

PILING, D. P. A.; DIAS, P. M. C. A hipótese heliocêntrica na Antigüidade. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, n. 4, p. 613-23, 2007.

SAGAN, C. **Cosmos**. São Paulo: Editora Francisco Alves, 1980.

STEPHENSON, B. **Kepler's physical astronomy**. New York: Springer-Verlag, 1987.

TOSSATO, C. R.; MARICONDA, P. R. O método da astronomia segundo Kepler. **Scientiæ Studia**, São Paulo, v. 8, n. 3, p. 339-66, 2010.

VOELKEL, J. R. **Johannes Kepler and the New Astronomy**. New York: Oxford University Press, 1999.

$$AB^2 = AF^2 - BF^2 = a^2e^2 = a^2 - b^2 \quad (3)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras também ao triângulo PHA e usando $AP = r = a + ae \cos \beta$, temos:

$$\begin{aligned} PH^2 &= AP^2 - AH^2 = AP^2 - (AB + BH)^2 \\ &= (a + ae \cos \beta)^2 - (ae + a \cos \beta)^2 \\ &= a^2(1 + 2e \cos \beta + e^2 \cos^2 \beta) - a^2(e^2 + 2e \cos \beta + \cos^2 \beta) \\ &= a^2(1 - e^2 + e^2 \cos^2 \beta - \cos^2 \beta) \\ &= a^2(1 - e^2)(1 - \cos^2 \beta) = a^2(1 - e^2)(\text{sen}^2 \beta) \\ &= (a^2 - a^2e^2)\text{sen}^2 \beta \end{aligned}$$

Usando $a^2e^2 = a^2 - b^2$, temos:

$$PH^2 = a^2 - (a^2 - b^2) \text{sen}^2 \beta$$

$$PH^2 = (a^2 - a^2 + b^2)\text{sen}^2 \beta$$

$$PH^2 = \sqrt{b^2 \text{sen}^2 \beta}$$

$$PH = b \text{sen} \beta \quad (4)$$

Pelo triângulo ΔQHA , temos também que:

$$QH = a \text{sen} \beta \quad (5)$$

Portanto,

$$\frac{PH}{QH} = \frac{b \operatorname{sen} \beta}{a \operatorname{sen} \beta} \Rightarrow \frac{PH}{QH} = \frac{a}{b} \Rightarrow \boxed{\frac{PH}{QH} = \frac{BF}{BC}}$$

Essa expressão, como vimos, representa uma elipse.