UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA – UEPB

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOÃO PAULO DE AGUIAR

UM ESTUDO SOBRE AS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE FUNÇÃO DO 1º GRAU

CAMPINA GRANDE – PB

2016

JOÃO PAULO DE AGUIAR

UM ESTUDO SOBRE AS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE FUNÇÃO DO 1º GRAU

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento à exigência parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof.: Me. José Roberto Costa Júnior.

CAMPINA GRANDE – PB

2016

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

A282u Aguiar, João Paulo de.

Um estudo sobre as estratégias utilizadas por alunos do ensino médio na resolução de problemas de função do 1º grau [manuscrito] / Joao Paulo de Aguiar. - 2016.

61 p. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em MATEMÁTICA) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.

"Orientação: Prof. Me. José Roberto Costa Júnior, Departamento de Matemática".

1. Funções. 2. Resolução de Problemas. 3. Ensino Médio. 4. Representação Semiótica. I. Título.

21. ed. CDD 372.7

JOÃO PAULO DE AGUIAR

UM ESTUDO SOBRE AS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE FUNÇÃO DO 1º GRAU

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento à exigência parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Monografia aprovada em: 12/05/2016.

BANCA EXAMINADORA

José Roberto Costa Júnior

Prof.: Me. José Roberto Costa Júnior
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Orientador

Maria da Conceição Vieira Fernandes

Prof.: Me. Maria da Conceição Vieira Fernandes
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinadora

Maria José Neves de Amorim Moura

Prof.: Me. Maria José Neves de Amorim Moura
Departamento de Matemática – CCT/UEPB
Examinadora

*Dedico esse trabalho primeiramente a **Deus**, por ter me dado a força e a coragem que sempre pedi em minhas orações antes de dormir, principalmente nos momentos mais difíceis.*

*À minha mãe **Luzia Barbosa de Aguiar**, por ser a pessoa mais importante em minha vida, por ter acreditado em mim e sempre estar ao meu lado.*

*À minha tia **Maria José da Silva (Lilia)**, pelo apoio moral e financeiro na hora que eu mais precisei e pela sua preocupação em saber como eu estava sempre que me encontrava.*

*À minha avó **Cecília Maria da Silva** (in memorian) que, mesmo não estando mais entre nós, tenho certeza que está muito feliz e que sempre me apoiaria.*

*E ao meu amigo e orientador **José Roberto Costa Júnior**, pela sua paciência durante dois anos, por acreditar em mim e ser o melhor orientador que eu poderia ter.*

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela força e coragem para vencer.

À minha mãe, que me mostra que é a única pessoa que estará ao meu lado independentemente de qualquer situação.

Ao meu amigo e professor José Roberto, por me orientar perfeitamente e torcer por mim.

Ao meu ex-professor e amigo José Jefferson, pela força e dicas valiosas, por ter me emprestado seus livros, por ser o professor que mais acreditou no meu potencial durante o Ensino Médio e ter acreditado mais do que eu mesmo que eu chegaria aqui.

À minha tia Lilia, por ter me ajudado nas despesas com a moto até Umbuzeiro todas as madrugadas.

À minha avó Cecília *(in memorian)* que, onde quer que esteja, está muito feliz e orgulhosa do seu neto.

Às minhas irmãs Luana e Letícia, porque família é tudo.

À minha namorada Erika Rayane, por se preocupar comigo e sempre me mandar mensagens me perguntando se eu estava estudando.

À minha tia Ana, pelos conselhos que muitas vezes eu mal ouvia e por torcer por mim.

À Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Presidente João Pessoa”, pela experiência vivida durante o ano passado que contribuiu para a escolha do tema e por me deixar trabalhar à vontade com os alunos.

Aos meus alunos do 3° ano “A”, por ter colaborado nas aulas de investigação, fazendo com que meu trabalho funcionasse corretamente.

Ao meu grande amigo Cleanto, que sempre posso confiar e contar com ele.

Àqueles(as) colegas de turma que se tornaram amigos(as) pra toda vida e até hoje compartilhamos recordações e dicas nos concursos realizados por aí afora.

Enfim, a todos os demais amigos e colegas que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização desse sonho.

"Se você quer uma coisa, corre atrás. Ponto."

(À Procura da Felicidade)

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo das estratégias utilizadas por alunos de uma turma do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do estado da Paraíba para resolver problemas de Matemática e de Física envolvendo o conteúdo da função polinomial do 1º grau. O mesmo tem como objetivo descrever e analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das questões propostas. Metodologicamente, aplicamos um questionário, desenvolvemos uma aula e posteriormente aplicamos uma sequência de atividades com seis problemas e dentre eles foram escolhidas algumas respostas dos alunos para análise. Utilizamos como base para a análise a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, do francês Raymond Duval e os métodos para resolução de problemas, de George Polya, os quais foram considerados pertinentes para o estudo. Foi verificada uma grande dificuldade por muitos alunos para resolver as questões, principalmente no que se refere à passagem da representação algébrica para representação gráfica do conceito de Função e da representação em linguagem natural para a representação algébrica, o que evidencia a necessidade de um ensino mais abrangente, trazendo conexões com outras disciplinas e situações cotidianas, fazendo com que os alunos percebam o conteúdo de funções como algo mais genérico e que existem diferentes representações de um mesmo conceito matemático.

Palavras-chave: Funções. Resolução de Problemas. Ensino Médio. Representação Semiótica.

ABSTRACT

This work presents a study of the methods used by students in a class of 3rd year of high school of a public school of the state of Paraiba in order to solve problems of Mathematics and Physics involving the content of the polynomial function of the 1st degree. The same aims to describe and analyze the strategies used by students in solving the raised questions. For this was done a brief explanation of the content and it was applied a list of six exercises and among them were chosen some responses of the students for analysis. It was used as the basis of analysis the Theory of Semiotics Representation Registers, of the french Raymond Duval and the methods for problems solving, George Polya, which were considered relevant for the study. We verified great difficulties by many students to solve the problems, especially with respect to the passage of algebraic representation for graphical representation of the concept of Function and of the representation in natural language to the algebraic representation, which highlights the need of a more comprehensive teaching, bringing connections with other subjects and everyday situations, making the students realize the functions as something more general, and that there are different representations of the same mathematical concept.

Keywords: Functions. Problems Solving. High School. Semiotic Representation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática está presente em toda parte do nosso meio físico, vivemos em um mundo cercado por números, formas e medidas. São inúmeras as relações que podemos verificar no mundo à nossa volta, e que praticamente todas elas são governadas por “leis” onde podemos verificar que certas medidas dependem de outras medidas e que estas variam. Por exemplo, a quantidade de água consumida em uma residência depende do número de pessoas residentes e este pode variar. O tempo gasto por um automóvel para percorrer determinado percurso depende de sua velocidade. A quantidade de farinha de trigo utilizada por uma padaria depende da quantidade de pães produzidos, e assim por diante.

Muitas relações, principalmente aquelas que podemos associar a quantidades em geral, podemos estabelecer uma lei ou modelo matemático que possa descrever essas relações, em que uma situação acarreta, de modo natural, em outra que seja dependente. Essas leis matemáticas que resumem e descrevem essas relações são chamadas de Funções.

O conceito de Função é, sem dúvida, o mais importante dos conteúdos trabalhados em Matemática no Ensino Médio e está presente em diversas áreas do conhecimento, a exemplo da Física, no qual temos a trajetória de um projétil em queda livre, que nos dá uma ideia de parábola, gráfico da função do segundo grau. Outro exemplo é o Movimento Uniformemente Variado (MUV), que é caracterizado pela função quadrática $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c,$ bem como a função horária do Movimento Uniforme (MU) que é dada pela função do primeiro grau $S = S_0 + vt.$

Além de diversas aplicações em outras áreas, o conceito de Função também estabelece ligações de diversos conteúdos dentro da própria Matemática, a trigonometria e as progressões aritméticas (P.A.) são alguns exemplos.

> Devemos observar que uma parte importante da trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções. (BRASIL, 2000, p. 43).

Na primeira temos as funções circulares, que são os principais elementos do estudo da mesma. Já as progressões aritméticas, têm uma imensa relação com a função. Um exemplo muito interessante dessa relação é o de que uma função afim transforma uma P.A. em outra P.A., em que a razão dessa nova P.A. será o valor do coeficiente "a" da função multiplicada pela razão da P.A. inicial. A exemplo disso, Dante (2005) menciona exemplos dessa relação importante entre esses dois conteúdos. Para entendermos melhor, vamos tomar como exemplo a sequência $(3, 9, 15, 21 \ldots)$ que é uma P.A. de razão igual a 6 e a função afim $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$. Agora tomemos esses quatro primeiros elementos desta P.A. e atribuindo-os a "x" na função dada, obtemos assim os valores de $f(x)$, isto é, $f(3) = 7, f(9) = 19$ e assim por diante; que constituem a sequência $(7, 19, 31, 43 \ldots)$ que também é uma P.A. de razão 12, que é a razão da primeira multiplicada pelo coeficiente "a" da função afim, no caso o número 2.

Esta seria uma boa estratégia para o professor mostrar a seus alunos as relações existentes entre os conteúdos, fazendo-os compreender que os conceitos matemáticos não estão isolados, mas sim desenvolvem-se a partir das conexões que se estabelecem. Além disso, é extremamente importante que o professor aborde as diferentes formas dos registros de representações dos conceitos em geral, e em específico do conceito de Função, a exemplo dos gráficos, tabelas, etc.

Outro exemplo muito importante é a relação existente entre a proporcionalidade e a função linear, que seria muito interessante o professor fazer com que os alunos percebam essa relação mesmo antes de iniciar o estudo das funções do modo formal. Por exemplo, podemos escrever uma função linear como $y = ax$, sendo "a" uma constante e "y" diretamente proporcional a "x", pois teremos esse valor de "y" multiplicando "x" por uma constante, o que nos dá a perceber uma proporcionalidade direta. Podemos enxergar isso facilmente pensando, por exemplo, em uma sequência de números onde cada um associado ao seu dobro é uma proporcionalidade direta e uma função linear, cuja lei de formação é $f(x) = 2x$.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), é necessário "estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo". (BRASIL, 2000, p. 42).

Não é por acaso que o conceito de Função é um dos primeiros a serem trabalhados no Ensino Médio, o aluno passa praticamente todo o primeiro ano estudando as funções, devido a inserção nos conteúdos posteriores.

As funções são apresentadas aos alunos no primeiro ano do Ensino Médio de modo distante e sem conexão alguma com a geometria analítica e os sistemas lineares, por exemplo, estes aparecendo posteriormente. Pelo fato de existirem essas lacunas entre determinados conteúdos no Ensino Médio, o aluno nem consegue perceber as relações entre eles, mesmo após serem apresentados, e na maioria das vezes nem mesmo o professor estimula-os a perceberem.

Com a intenção de aproximar estas relações entre os conteúdos, alguns autores de livros didáticos procuram abordar o conteúdo de funções estabelecendo ligações com outros, a exemplo de Dante (2005) quando no estudo da função afim, o mesmo apresenta a construção do gráfico por meio da fórmula de distância entre dois pontos e, ainda explicita que na geometria analítica a equação de uma reta na forma reduzida é $y = mx + q$ não havendo diferença de representação da função afim que é dada por $f(x) = ax + b$, a não ser pela questão das letras utilizadas.

De acordo com alguns estudiosos com relação ao ensino de funções no Ensino Médio:

> As funções costumam ser apresentadas num bloco único, logo na primeira série do ensino médio, de maneira desvinculada da geometria analítica, limites e derivadas, que aparecem nos livros da terceira série. É importante que todos esses conceitos sejam ensinados de maneira integrada e não separados em blocos estanques. (ÁVILA, 2007, p. 162).

Segundo Ávila (2007), o ideal seria que essas relações fossem apresentadas aos alunos desde o Ensino Fundamental, não da mesma forma que os conteúdos são apresentados no Ensino Médio, com um despejo de definições e fórmulas, mas sim com exemplos simples e concretos, perto da realidade do aluno, como por exemplo alguns sistemas lineares simples, de duas equações simples e duas incógnitas; o professor ao resolver esses sistemas poderia mostrar que a solução do sistema é o encontro de duas retas cujas equações são representadas no sistema, assim o aluno poderia perceber que a solução do sistema nada mais é que o ponto de encontro das duas retas.

É necessário fazer com que os alunos adquiram habilidades para trabalhar com o conteúdo de funções, não só o conteúdo teórico, mas suas aplicações em situações do cotidiano, para isso o ideal é que nos anos iniciais do Ensino Fundamental II já fossem exploradas inicialmente noções intuitivas desse conteúdo, priorizando as situações que tivessem mais significado do cotidiano das pessoas, até porque o conteúdo de funções faz parte da grade curricular do último ano deste nível de ensino.

O estudo de funções, ao contrário do que nos dá a entender, não está presente apenas no Ensino Médio, mas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio ele é tratado apenas de maneira mais formal. Isto vai de encontro com o que diz alguns estudiosos:

> Nas séries iniciais quando construímos a tabuada de dois em que relacionamos um número ao seu dobro, estamos implicitamente trabalhando a ideia de função, que é relacionar a cada elemento de um conjunto, um único elemento de outro conjunto, que pode ser da mesma natureza de outro conjunto ou não. (FAINGUELERNT; NUNES, 2012, p. 30).

Em consonância com os autores citados anteriormente, podemos citar o ensino da resolução de equações do 1º e 2º graus, geralmente as equações são trabalhadas nos anos finais do Ensino Fundamental, e mesmo com o conteúdo presente no último ano deste nível, o professor muitas vezes não apresenta ao aluno nenhum contato com o ensino formal dessas funções, e ainda muitos professores dos anos citados, após trabalharem com as equações, iniciam o estudo das inequações, contribuindo com que o aluno chegue ao Ensino Médio com conhecimentos prévios e que servem de alicerce para o estudo dessas funções, pelo fato do estudo das equações e inequações estarem imersos no estudo das funções. E mesmo após o seu estudo formal no Ensino Médio, o aluno continua com o conteúdo de funções inserido em conteúdos vistos posteriormente, como por exemplo, o estudo das progressões aritméticas, citado anteriormente e a geometria analítica que é abordada no último ano do Ensino Médio. No estudo da reta, por exemplo, a equação geral de uma reta nada mais é que uma função do 1º grau.

Contudo, o estudo das funções no currículo do Ensino Médio brasileiro ainda segue uma abordagem tradicional, muitas vezes focado apenas nos livros didáticos. Muitos livros trazem esses conteúdos sem conexão alguma entre eles. A função afim, por exemplo, é tratada no primeiro ano do Ensino Médio, já a equação da reta é tratada no último ano, e muitas vezes o aluno nem percebe a enorme relação existente entre ambos os conteúdos devido a grande lacuna existente entre esses dois tópicos, além de poucas as situações em que são citadas as relações das funções com outras áreas. Porém, segundo Barreto (2008), ultimamente essa disposição de conteúdos tem sido questionada e reformulada por muitos educadores, a fim de fazer com que o aluno não se limite apenas ao conceito excessivamente formal e possa perceber as aplicações das funções em diversas situações.

Para o início do estudo das funções, é mais indicado que o professor inicie o conteúdo com contextualizações, sem nenhuma formalidade ou simbolismo algébrico, com o uso de tabelas, por exemplo.

Percebemos que o uso das tabelas juntamente com dados concretos de situações próximas da realidade do aluno é fundamental para o entendimento das funções e auxilia na grande dificuldade que os alunos encontram para escrever a expressão algébrica que generaliza os dados da tabela. Por exemplo:

Ao aluno é proposto completar o quadro abaixo que representa a construção da lei matemática que representa a área de um quadrado:

Figura 1: Quadro da medida dos lados de um quadrado e sua respectiva área.

Lado (L)	1	2	3	4	...	...	...	...	L
Área (A)	1	4	9	16	...	...	...	...	A

Fonte: Produção do autor.

Muitas vezes o aluno que não teve um bom aprendizado das expressões algébricas no Ensino Fundamental consegue perceber que a área do quadrado é dada $em\ função$ da medida do seu lado, mas não consegue escrever a lei da função que generaliza todos os dados da tabela, que é $A = L^2$, mesmo teoricamente sabendo que o valor da área é dado $em\ função$ da medida do seu lado.

É necessário que o professor faça com que os alunos compreendam que o conceito de Função pode assumir diferentes representações, bem como a articulação entre elas, pois dependendo da situação ou problema que o aluno encontra, a utilização dos diferentes registros de representações sejam elas algébricas, gráficas ou por tabelas potencializarão na compreensão desse conceito. Nesse sentido, os PCN (BRASIL, 2000, p. 42) afirmam que o aluno deve “reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações”.

Com relação ao que foi mencionado até agora, podemos pensar na problemática existente no que diz respeito a aprendizagem do conceito de Função, pois em paralelo com a graduação, tivemos a experiência de lecionar Matemática em diversas turmas de diversas escolas como professor substituto, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio e também a disciplina de Física durante o ano letivo de 2015. Esta experiência de ensino, principalmente no Ensino Médio, foi o ponto de partida para a decisão na escolha do tema para este estudo, no caso o ensino de funções.

A escolha por esse tema se deu após um período de três anos em outra experiência de ensino (trabalho voluntário) de um curso pré vestibular denominado Umbu Pré-Vest, na cidade de Umbuzeiro – PB, principalmente no ano de 2013, pois nesse ano o curso ainda era inteiramente voltado ao vestibular da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), e foi escolhido definitivamente durante o ano letivo em que lecionamos a disciplina de Física, pois a deficiência dos alunos com o conteúdo de funções influenciava bastante na aprendizagem desta disciplina; em todos os anos do Ensino Médio e principalmente no 1º ano, no qual os alunos tinham muita dificuldade na compreensão do estudo dos movimentos com relação às suas funções horárias. Eles não conseguiam perceber, por exemplo, que a função horária do Movimento Uniforme (MU) era uma função do primeiro grau, que só diferenciava daquela genérica vista em Matemática pela questão das letras utilizadas.

O curso Umbu Pré-Vest, por ser voltado inicialmente para os vestibulares das universidades das regiões vizinhas, todas as aulas eram baseadas nessas provas, principalmente nas provas da UEPB, que era o principal foco do curso. Como professores de Matemática, sabemos que o conteúdo de funções é o principal e mais importante do Ensino Médio como dito anteriormente, e a disciplina de Matemática durante o curso Umbu Pré-Vest no seu primeiro ano era, na maioria do ano letivo, voltado a esse conteúdo, não só pela sua importância, mas por ser cobrado nas provas dos vestibulares e também por ser requisito básico para iniciar vários cursos em que o cálculo esteja presente, pois como o vestibular era feito por áreas de escolha de curso, então o aluno que desejava um curso na área de exatas, o conteúdo de funções visto no Umbu Pré-Vest era de fundamental importância no futuro curso desejado, e geralmente os alunos que desejavam outras áreas não demonstravam muito interesse pela Matemática.

Durante esse período, no qual lecionamos o conteúdo de funções e avaliados os alunos, principalmente por meio de simulados, pudemos notar a imensa dificuldade que os alunos tinham para resolver problemas relativamente simples e que o resultado dos simulados aplicados eram insuficientes ou abaixo do esperado pelo professor; a Matemática era considerada pela maioria deles como o grande peso dentre as disciplinas e temida no vestibular por quase todos. Esses resultados muito abaixo do esperado nos fez refletir sobre o que pensava o aluno quando ele se deparava com um problema envolvendo funções e qual o caminho que eles seguiam para chegar a resposta? Como os simulados eram elaborados com questões de múltiplas escolhas, era impossível para o professor compreender o pensamento do aluno na busca pela resposta ou qual caminho ele seguiu até a alternativa por ele considerada a correta.

Com relação ao outro ponto relevante na escolha do tema, o ponto principal foi o alto índice de notas baixas relativo aos pontos necessários para aprovação na disciplina de Física por parte dos alunos do 1º ano com o estudo dos movimentos e suas funções horárias, o qual despertou nosso desejo de investigação, pois era evidente as dificuldades encontradas pelos alunos para entender o conteúdo, e muitos não possuíam a base matemática necessária para o entendimento do mesmo, no caso as funções.

Dessa forma, sentimos a necessidade de conhecer e compreender essa problemática, realizando um estudo que contemple os aspectos mais qualitativos no que se refere à resolução dos problemas que envolvem a função polinomial do 1º grau. Para este fim, resolvemos estudar, mesmo que não de forma aprofundada, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, do francês Raymond Duval, que consideramos apropriada para atingirmos os nossos objetivos de estudo.

Visando a importância do conceito de Função no currículo escolar e as dificuldades encontradas pelos alunos no que se refere a esse conceito e ao mesmo aplicado em outras áreas, principalmente na cinemática, um importante ramo da Física e um dos nossos focos que gerou essa problemática, decidimos fazer um estudo a respeito desse conceito aplicado na resolução de problemas por alunos de uma turma de 3º ano do Ensino Médio. Para isso, escolhemos a função polinomial do 1º grau dentre os outros tipos de funções por esta ter uma vasta aplicabilidade em situações-problema.

Assim, inicialmente abordamos alguns aspectos a respeito do ensino de funções, bem como sua importância no currículo escolar, algumas dificuldades no que se refere ao ensino-aprendizagem e suas conexões com outros conceitos matemáticos e outras disciplinas, como a Física por exemplo.

No primeiro capítulo, faremos um breve estudo a respeito de alguns aspectos históricos sobre o conceito de Função. Veremos que esse conceito passou por diversas modificações e que sua forma atual foi resultado de um longo período construção de ideias, refutações e novas elaborações contando com a contribuição de diversos estudiosos ao longo desse tempo. Definiremos o conceito de Função polinomial do 1º grau assim como consta em alguns livros didáticos, buscando exemplificá-la. Expomos também os casos particulares da função afim e alguns gráficos de alguns exemplos citados. Abordaremos também um pouco sobre a Resolução de Problemas, principalmente a mesma como método de ensino para a aprendizagem da Matemática, baseando-nos na perspectiva de Polya (1995), relatando segundo ele, os quatro passos para resolver um problema. Destacamos também o papel do professor como mediador do conhecimento e a importância de se aprender através da Resolução de Problemas e exibimos um pouco da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, a qual será utilizada como base para análise dos processos utilizados pelos alunos na resolução dos problemas propostos.

No segundo capítulo apresentamos a metodologia do nosso trabalho, explicamos as etapas do nosso estudo e descrevemos o local onde foi desenvolvido.

No terceiro capítulo apresentamos os resultados dos dados por meio de descrições e algumas análises tomando como base o que foi relatado em nosso referencial teórico. Por fim, algumas considerações acerca do trabalho realizado, as referências bibliográficas, bibliografia e os apêndices.

Para a realização desse estudo no que diz respeito a essa problemática, foram definidos os seguintes objetivos:

OBJETIVO GERAL

Descrever e analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas envolvendo a função polinomial do 1º grau.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Propor situações de resolução de problemas envolvendo o pensamento funcional;
- ✓ Observar como os alunos lidam com situações matemáticas que envolvem relações funcionais;
- ✓ Verificar o conhecimento de diferentes representações de resolução de problemas de função do 1º grau por partes dos alunos;
- ✓ Identificar as dificuldades encontradas pelos alunos no que se refere ao uso do conhecimento da função polinomial do 1º grau e suas representações aplicadas na resolução de problemas.

CAPÍTULO II
ASPECTOS TEÓRICOS

2.1 ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS DO DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

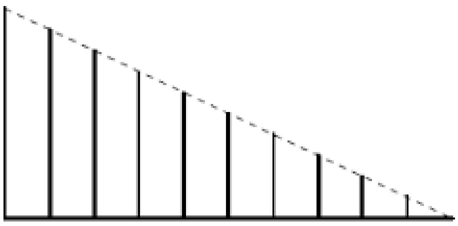
Segundo Botelho e Rezende (2011), o conceito de Função teve início na Grécia Clássica com a tentativa de filósofos e cientistas em explicar e prever os fenômenos naturais que os cercavam e demorou um longo tempo com várias contribuições de estudiosos que convergiram para a forma atual, apesar de já existirem indícios do instinto funcional nas tabletas elaboradas por astrônomos babilônicos e tabletas de multiplicação, as quais associavam um número ao seu dobro.

Nessa época, as explicações para os fenômenos naturais eram baseadas na observação e em mitos. Somente por volta de 600 a.C com a escola filosófica de Tales de Mileto, os filósofos e cientistas vinham tentando dar explicações mais compreensíveis sobre os fenômenos naturais no mundo que os cercavam. Os cientistas juntamente com os filósofos tentavam explicar os fenômenos físicos, principalmente o movimento e a queda dos corpos. Assim, "Uma pedra cai, não por esta ser a vontade dos Deuses, mas por possuir uma propriedade chamada peso". (BOTELHO; REZENDE, 2011, p.3). Platão (427-347 a.C.) acreditava que esses fenômenos deveriam ser estudados e explicados através da Matemática.

Ainda de acordo com Botelho e Rezende (2011), os estudos das mudanças físicas tiveram como figura principal a pessoa de Aristóteles (384-322 a.C.). Sua Física era qualitativa e isso perduraria ainda por muito tempo. Somente quando os escolásticos trataram a Física de forma quantitativa, o conceito de Função começou a se desenvolver.

Por volta do século XI os europeus tiveram contato com os pensadores do oriente e suas obras foram traduzidas e a Física qualitativa aristotélica foi adotada pelos estudiosos. Segundo Botelho e Rezende (2011), esse modelo aristotélico foi questionado por vários estudiosos que acreditavam que os fenômenos naturais deveriam ser explicados através da experiência. O Bispo Nicolau de Oresme (1323–1382), ao estudar o Movimento Uniformemente Variado (MUV), representou num gráfico a velocidade de um corpo no decorrer do tempo, semelhante à geometria analítica, surgindo assim as primeiras ideias de Função.

Figura 2: Gráfico desenhado por Oresme.



Fonte: (CHAURAIS, 2014, p.10).

Por volta do século XV, com novas traduções das obras gregas, o pensamento da filosofia platônica foi adotado e combinadas com as da igreja, de que Deus governa o mundo através da Matemática.

Com essa adoção da Física platônica pelos estudiosos, houve diversas mudanças e contribuições para a evolução do conceito de Função. Assim, surgiram vários estudiosos dentre eles o astrônomo Johannes Kepler (1571-1630), que influenciado pela nova filosofia, enunciou leis matemáticas que descreviam o movimento dos planetas e adotou uma Física quantitativa. Segundo Ávila (2007), em sua terceira lei "Os quadrados dos tempos gastos pelos planetas em suas revoluções em torno do sol são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores de suas órbitas." traz a ideia de Função, mesmo que de forma implícita. Seu grande feito foi a nova Física do movimento substituindo a antiga e muito arraigada Física de Aristóteles.

Porém, o rompimento de vez com a Física aristotélica se deu com Galileu Galilei (1564-1642), que segundo Botelho e Rezende (2011), ele questionou os dois grandes pilares da filosofia cristã que eram o homem como centro do universo e a Física de Aristóteles como modelo para a ciência, ele acreditava que os fenômenos deveriam ser estudados em condições determinadas e utilizando a Matemática. Para ele um objeto caindo, por exemplo, deveria ser estudado levando em conta as condições na qual a situação ocorre, como por exemplo, a influência do ar, ele acreditava que os fenômenos deveriam ser baseados em experiências repetitivas. Ele procurava repetir suas análises várias vezes com objetivo de chegar às conclusões mais verdadeiras possíveis, isso contribuiu para o desenvolvimento do conceito de Função.

Galileu constatou que objetos abandonados de certa altura caem com mesma velocidade independente de sua massa, contrariando a Física de Aristóteles que antes parecia sólida e afirmava que corpos mais pesados cairiam com mais velocidade. Ele tentava descrever os fenômenos algebricamente para, de posse das condições iniciais, prever o comportamento de diversos acontecimentos.

De acordo com Botelho e Rezende (2011), essas novas concepções disseminadas por Galileu não foram bem aceitas, o que o levou a um isolamento. Durante esse tempo, ele enunciou a lei da queda dos corpos: *o espaço percorrido por um corpo em queda livre é diretamente proporcional ao quadrado do tempo levado para percorrer este espaço.* Podemos observar que essa lei traz claramente o conceito de Função. Iniciou-se uma nova era para a ciência que a partir de Galileu e Kepler agora era fundamentada na Matemática.

A partir daí houve vários avanços no conceito de Função, com a simbolização da álgebra e as contribuições de Diofanto e a álgebra hindu.

> François Viète (1540-1603) chamou sua álgebra simbólica de *logística speciosa* em oposição à *logistica numerosa*, e esta distinção, traçou uma linha divisória entre a álgebra e a aritmética. René Descartes (1596-1650), mais tarde, usou as primeiras letras do alfabeto para quantidades conhecidas e as últimas letras para as desconhecidas, como fazemos até hoje. (KLINE, 1990 apud BOTELHO; REZENDE, 2011, p. 5).

Descartes (1596-1650) também utilizou a álgebra na resolução de problemas geométricos e o uso de coordenadas e equações em x e y dando origem assim ao que hoje conhecemos como geometria analítica.

Segundo Botelho e Rezende (2011), a definição mais precisa do conceito de Função foi dada por James Gregory (1596-1650) tendo a definido como “uma quantidade obtida de outras quantidades pela sucessão de operações algébricas ou por qualquer operação imaginável.”

Já a palavra Função foi utilizada pela primeira vez por Leibniz (1646-1716). Nessa época surgiram vários nomes como Boaventura Cavalieri, Jhon Wallis, Evangelista Torricelli, dentre outros contribuindo para que Leibniz e Newton fundamentassem o cálculo.

De acordo com alguns estudiosos, as verdadeiras contribuições para a evolução do conceito de Função foram dadas por Newton e Leibniz. Newton (1642-1727), ao se referir a função utilizava a expressão “fluentes” para representar relações entre variáveis descrevendo a noção de curva e se referindo às “taxas de mudanças” que variavam continuadamente.

Jean Bernoulli (1667-1748) também contribuiu para o desenvolvimento do conceito de Função, ele utilizou a notação mais próxima da que utilizamos hoje que era “fx” para representar uma função.

Outro importante nome foi Leonard Euler (1707-1783), que apresentou fundamentais conceitos de Função e aplicou a ideia de Newton para a Análise, outro ramo da Matemática fundado pelo próprio Euler. Ele foi quem formalizou a representação $y = f(x)$ que é utilizada atualmente. Nessa época Lagrange (1736-1813) introduziu as funções de várias variáveis ao conceito de Função, para ele uma função é uma combinação de operações.

Outro nome importante nessa evolução foi Jean Batist Fourier (1768-1830) que, para ele qualquer função $y = f(x)$ poderia ser escrita por uma série que hoje é conhecida como Série de Fourier.

Segundo Botelho e Rezende (2011), G.H. Hardy (1877-1947) enumerou três características que devem ser satisfeitas por uma função determinada pela relação entre duas quantidades variáveis x e y:

(1) y é sempre determinado por um valor de x;

(2) para cada valor de x para o qual y é dado, corresponde um e somente um valor de y;

(3) a relação entre x e y expressa através de uma fórmula analítica, na qual o valor de y que corresponde a um dado valor de x pode ser calculado por substituição direta de x. (SILVA 1999 apud BOTELHO; REZENDE, 2011, p.73).

Outras grandes contribuições vieram moldar o conteúdo das funções até a forma atual como as de Weierstrass (1815-1897), Dedekind (1831-1916), Cauchy (1789-1857), dentre outros.

Vimos nesse breve histórico que o conceito de Função não surgiu em um momento único, já que passou por um longo processo de evolução com contribuições de diferentes estudiosos em diferentes épocas; de forma lenta e passou por diferentes tipos de representações até chegar a representação atual. Cabe ressaltar que a Matemática não é uma ciência finalizada, ela está em constante construção e todo conhecimento adquirido serve como base para novas descobertas nesta constante construção do conhecimento matemático. Isto não se limita apenas às funções, mas a praticamente todos os conceitos.

2.2 FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU[1]

A seguir apresentamos a definição de função polinomial do 1º grau, conteúdo matemático abordado como objeto de estudo.

2.2.1 Definição

Uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se $função\ afim$ quando existem dois números reais $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ tal que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

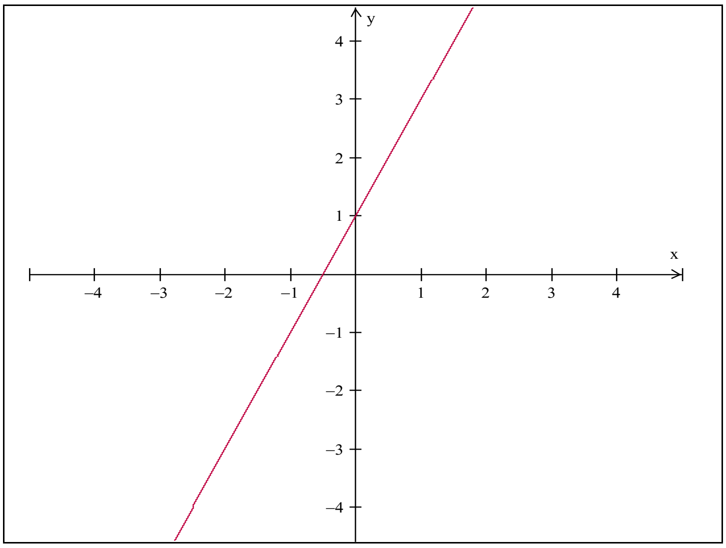
Alguns exemplos de função afim:

---

[1]Definições adaptadas de DANTE, L. R. **Matemática.** Volume único. São Paulo: Ática, 2005. p. 54 – 71.

- $f(x) = 2x + 1$ onde $(a = 2, b = 1)$
- $f(x) = -x + 4$ onde $(a = -1, b = 4)$
- $f(x) = 4x$ onde $(a = 4, b = 0)$

Gráfico 1: Exemplo de gráfico da função afim $f(x) = 2x + 1$.



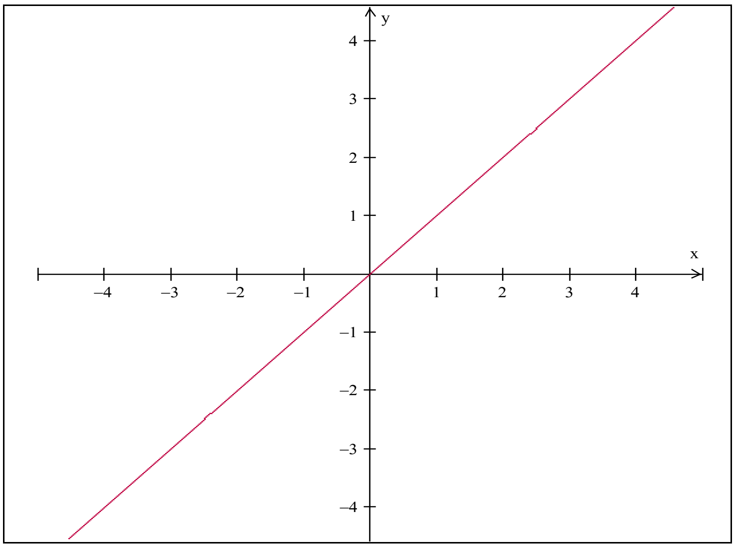
Fonte: Produção do autor.

2.2.2 Casos particulares da função afim $f(x) = ax + b$

1) Função identidade

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, $a = 1$ e $b = 0$.

Gráfico 1: Exemplo de gráfico da função identidade $f(x) = x$.



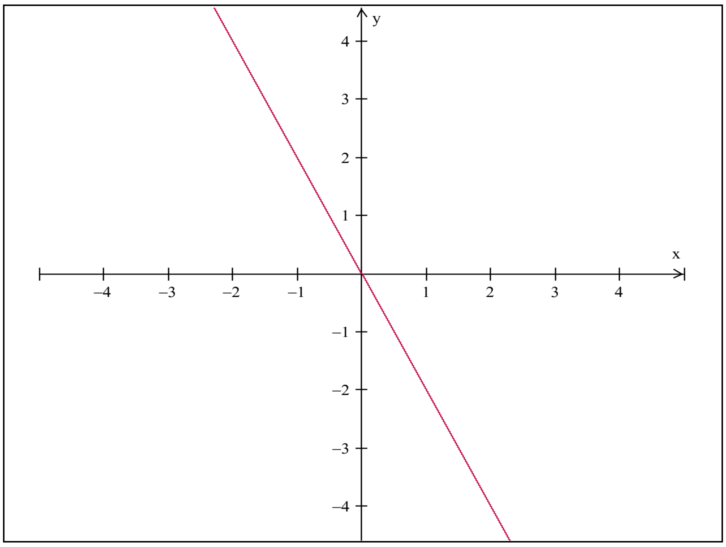
Fonte: Produção do autor.

2) Função linear

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso, $b = 0$. Alguns exemplos:

- $f(x) = -2x$ $(a = -2)$
- $f(x) = \frac{1}{5}x$ $(a = \frac{1}{5})$

Gráfico 2: Exemplo de gráfico da função linear $f(x) = -2x$.



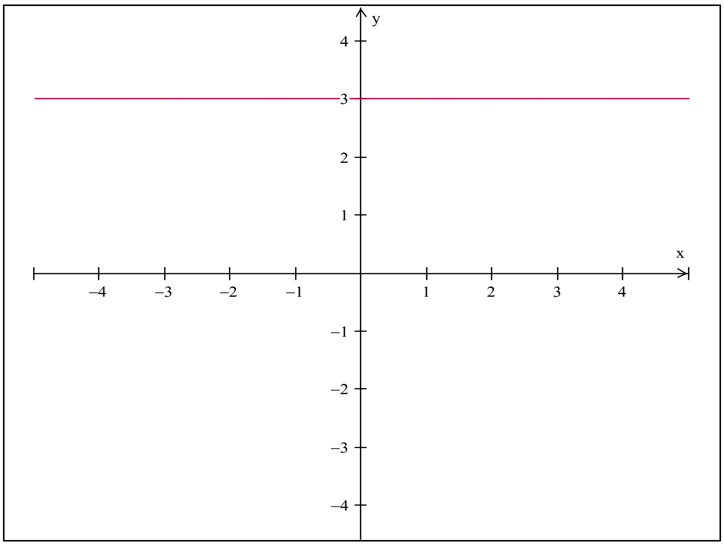
Fonte: Produção do autor.

3) Função constante

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Nesse caso $a = 0$.

- $f(x) = 3$
- $f(x) = \frac{3}{4}$
- $f(x) = -2$

Gráfico 3: Exemplo de gráfico da função constante $f(x) = 3$.



Fonte: Produção do autor.

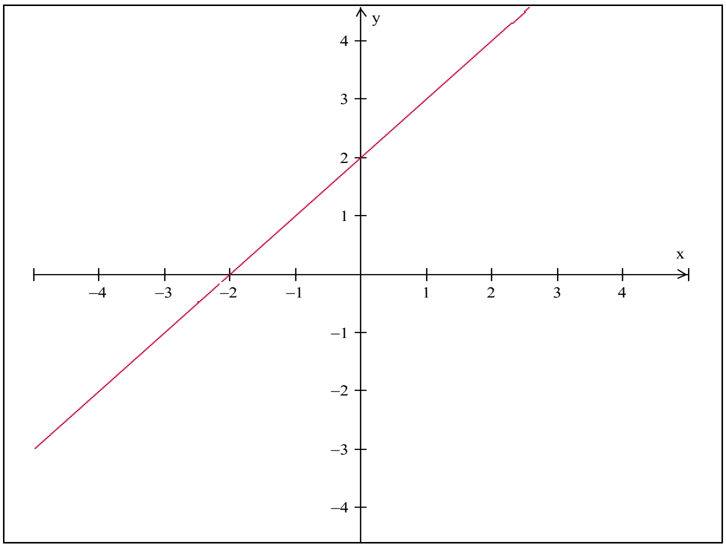
4) Translação (da função identidade)

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$. Nesse caso, $a = 1$. Seu gráfico é uma translação da função identidade.

Alguns exemplos:

- $f(x) = x + 2$
- $f(x) = x + \frac{1}{2}$
- $f(x) = x - 3$

Gráfico 4: Exemplo de gráfico da função translação $f(x) = x + 2$.



Fonte: Produção do autor.

2.2.3 Valor numérico de uma função afim

O valor de uma função afim $f(x) = ax + b$ para x_0 é dado por $f(x_0) = ax_0 + b$. Por exemplo, na função afim $f(x) = 5x + 1$, podemos determinar:

- $f(1) = 5 \times 1 + 1 = 5 + 1 = 6$. Logo, $f(1) = 6$.
- $f(-3) = 5(-3) + 1 = -15 + 1 = -14$. Logo, $f(-3) = -14$

2.2.4 Valor inicial

Na função afim $f(x) = ax + b$, o número $b = f(0)$ chama-se *valor inicial* da função $\boldsymbol{f}$. Por exemplo, o valor inicial da função $f(x) = -2x + 3$ é 3, pois $f(0) = -2 \times 0 + 3 = 3$.

2.2.5 Zero da função afim

O valor de x para o qual a função $f(x) = ax + b$ se anula, ou seja, para o qual $f(x) = 0$, denomina-se *zero* da função afim.

Para determinar o zero da função afim basta resolver a equação $ax + b = 0$.

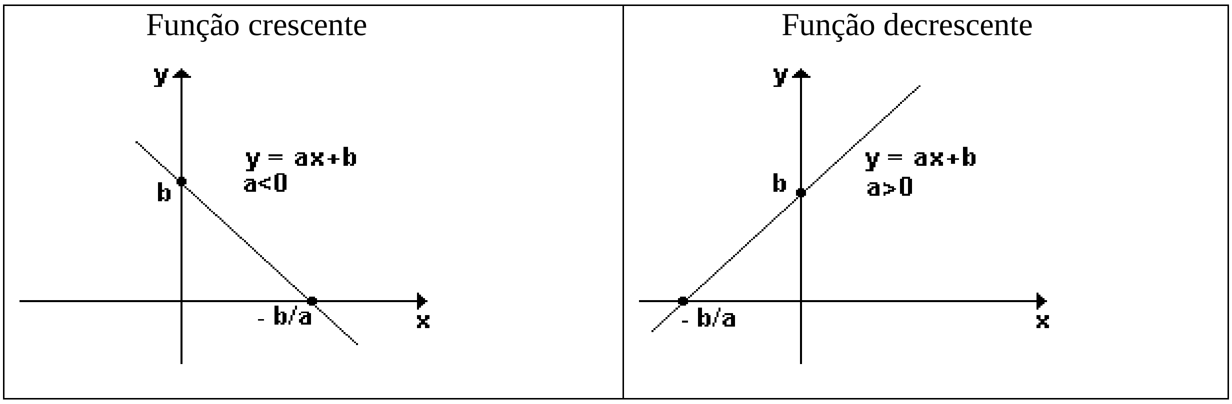
2.2.6 Função afim crescente e função decrescente

- Para $a > 0$, se $x_1 < x_2$, então $ax_1 < ax_2$ e, daí, $ax_1 + b < ax_2 + b$; portanto, $f(x_1) < f(x_2)$, e essa função é dita *crescente*

- Para $a < 0$, se $x_1 < x_2$, então $ax_1 > ax_2$ e, daí, $ax_1 + b > ax_2 + b$; portanto, $f(x_1) > f(x_2)$, e essa função é dita *decrescente.*

Assim, as funções definidas por $f(x) = ax + b$, com $a > 0$ são crescentes, aquelas com $a < 0$ são decrescentes.

Figura 3: Gráficos das funções afins crescente e decrescente.



Fonte: Produção do autor.

2.3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Matemática sempre foi vista pelos alunos como uma disciplina difícil, sendo temida pela maioria dos estudantes, devido ao modo como é apresentada, mas é fundamental que os alunos a compreendam para o desenvolvimento do pensamento funcional, bem como do raciocínio matemático.

Durante muito tempo, o ensino de Matemática se deu pela transmissão do conhecimento do professor para o aluno. Depois de uma exposição de regras, algoritmos e fórmulas, eram propostos exercícios com o intuito de que os alunos aplicassem o que tinha sido transmitido pelo professor.

Visando melhorar o ensino-aprendizagem da Matemática, alguns estudiosos buscam estratégias para estimular os alunos e facilitar a sua aprendizagem. Essa busca é constante e o professor deve estar sempre se atualizando com as novidades, novas tecnologias e tendências no ensino da Matemática, ou seja, ele tem que estar em constante formação.

Uma dessas estratégias de ensino-aprendizagem da Matemática é a aprendizagem através da Resolução de Problemas, que será o método utilizado nas intervenções no presente trabalho.

Acerca desse assunto, muitos pesquisadores e educadores acreditam na Resolução de Problemas como meio utilizado no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Essa tendência tem conquistado um espaço importante no processo de aprendizagem, pois se tem observado aspectos positivos neste processo.

Segundo Cervinhani (2012), pesquisadores e educadores matemáticos têm afirmado que este método estimula o aluno a pensar, desenvolver o raciocínio lógico e deixarem de ser meros receptores e expectadores, passando a ser ativo no processo de aprendizagem, desenvolvendo sua autonomia e participação na construção do conhecimento. Assim, ele não ficando limitado a fórmulas e regras, contribuindo para formação de um cidadão autônomo, participativo na sociedade e o aprendizado não começa pelo professor, mas sim pelo próprio aluno. Este método proporciona um aprofundamento do conhecimento por parte dos alunos, pois tem um caráter de investigação e torna mais atraente e prazerosa a aula de Matemática que sempre foi considerada entediante pela maioria dos estudantes. Além disso, temos como finalidades do ensino de Matemática no nível médio:

> Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo. Utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos. (BRASIL, 2000, p. 42).

O professor pode iniciar a aprendizagem de determinado conteúdo propondo um problema antes da definição formal do conceito com o objetivo de provocar a indagação por parte dos alunos, é o que Onuchic e Avellato (2011) chamam de "Problema Gerador", a partir desse problema pode-se iniciar a construção do conhecimento, estimulando a participação dos alunos na busca pela solução do problema. É importante que o professor deixe os problemas próximos a realidade do aluno para estimular o interesse dos mesmos, além de orientá-los para o fato de que existem vários caminhos para se chegar a solução, característica importante dos conceitos de Matemática.

Para isso, o professor deve primeiramente saber diferenciar um exercício de um problema. Um exercício, como o próprio nome diz, serve para exercitar um conteúdo apresentado, fixar as ideias assimiladas pelos alunos. Podemos encontrar várias definições para um problema; Onuchic e Avellato (2011) afirmam que um problema "é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer."

A Resolução de Problemas como forma de ensinar Matemática teve mais atenção a partir dos trabalhos de Polya (1995), considerado o precursor dessa tendência. Em seu trabalho "A Arte de Resolver Problemas", ele descreve quatro fases para a resolução de um problema. Para ele, primeiro é necessário *compreender* o problema, estabelecer um *plano*, *executar* esse plano e por fim *examinar o retrospecto*. Para Polya (1995), primeiramente é necessário uma compreensão do problema, ou seja, saber as partes principais do problema: identificar os dados, a incógnita, a condicionante.

De acordo com a perspectiva de Polya (1995), deve-se ficar atento ao enunciado do problema, saber aquilo que é necessário, estabelecer em mente um objetivo, familiarizar-se com ele para estabelecer um plano para a resolução. No estabelecimento de um plano, o aluno deve estabelecer um roteiro para chegar à solução, encontrar uma conexão entre os dados e a incógnita, traçar uma figura se houver necessidade, organizar os dados e combiná-los de diversas maneiras procurando enxergar algum significado em cada detalhe. Caso não consiga definir um caminho para chegar à solução, deve-se recorrer a um problema semelhante que possa ter a mesma incógnita ou mesmo caminho utilizado antes para a resolução. Daí deve-se executar esse plano, realizando tudo que foi planejado anteriormente, realizando todos os cálculos a fim de encontrar a solução. O autor salienta que é importante que o aluno estabeleça ele próprio o plano, não havendo risco de esquecimento.

> O maior risco é o de que o estudante esqueça o seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor. Mas se ele próprio houver preparado o plano, mesmo com

> alguma ajuda, e concebido com satisfação a ideia final, não perderá facilmente essa ideia. (POLYA, 1995, p. 9).

Finalmente, Polya (1995) fala acerca do retrospecto como parte da resolução do problema, que deve-se examinar a solução encontrada procurando rever o caminho traçado até a solução e ressalta a importância dessa etapa, assim o aluno poderá aperfeiçoar a capacidade de resolver problemas e adquirir conhecimento através da resolução destes mesmos problemas.

> Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento a aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. (POLYA, 1995, p. 10).

Polya (1995) ainda ressalta o papel do professor, no auxílio ao aluno na resolução de um problema. Para ele, o professor deve auxiliar de uma maneira que caiba ao aluno desenvolver boa parte do trabalho procurando desenvolver a capacidade de resolver outros problemas por capacidade própria.

Segundo Onuchic e Avellato (2011), esta metodologia inseriu-se em um momento em que houve uma tentativa de reforma chamada Matemática Moderna onde o mundo foi influenciado a ensinar Matemática apoiada em estruturas lógicas, algébricas, topológicas e de ordem, enfatizando a teoria dos conjuntos, tentativa esta que não obteve sucesso. Ainda segundo as autoras, nos Estados Unidos (EUA) houve uma tentativa de voltar às práticas anteriores à Matemática Moderna, chamada *volta às bases* que também não obteve sucesso. Em 1980 inicia-se a fase da Resolução de Problemas com foco na aprendizagem por meio da investigação e pela descoberta.

Segundo Cervinhani (2012), a aprendizagem com a Resolução de Problemas como ponto de partida traz um rompimento com as práticas tradicionais onde o professor é o centro do conhecimento e a aprendizagem é feita pela transmissão do professor para o aluno e passa a ser realizada pelo próprio aluno e faz com que o professor assuma um papel mediador, além de ressignificar os conteúdos matemáticos para o aluno que, muitas vezes não consegue perceber a aplicabilidade em sua vida cotidiana.

É importante ressaltar o papel da Resolução de Problemas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Atualmente as provas no que se refere a parte da Matemática são constituídas de questões contextualizadas e inseridas em uma situação cotidiana na forma de situação-problema, exigindo uma série de habilidades e competências dos alunos e conexões entre temas matemáticos que aluno adquire durante o Ensino Médio, assim a Resolução de Problemas se torna fundamental para que o aluno desenvolva estas competências.

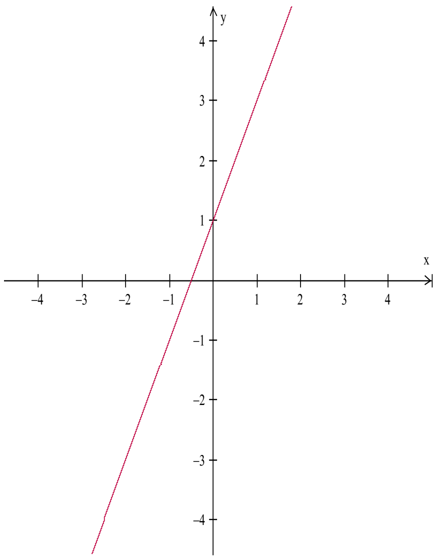
2.4 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A Matemática sempre foi considerada uma disciplina complexa por muitos pesquisadores, professores e alunos. Devido a essa recorrência, ela sempre foi tema de muitas discussões visando melhorar o ensino-aprendizagem da mesma.

Segundo os autores Ziemer et al. (2014), a Matemática é uma disciplina que, diferente das demais, possui uma linguagem própria, cujos objetos podem assumir uma variedade de representações. Essa característica da Matemática de se tornar presente os objetos por meio de suas representações, faz com que ela seja considerada uma disciplina de difícil compreensão por grande parte dos alunos e professores. O aluno muitas vezes não sabe qual representação utilizar, qual conteúdo está relacionado ao problema, etc. Em um problema, por exemplo, que contenha o gráfico da velocidade de um automóvel em função do tempo, muitas vezes ele não consegue determinar a função horária desta velocidade, o que seria a passagem de uma representação para outra: da representação gráfica para a representação algébrica.

De acordo com Ziemer et al. (2014), o conhecimento matemático se dá pela representação de seu objeto e um mesmo objeto pode possuir diferentes representações. As funções, por exemplo, podem ser representadas de diferentes tipos como em linguagem natural, graficamente, algebricamente, etc.

Figura 4: Diferentes representações de um mesmo objeto matemático.

Linguagem natural	Representação algébrica	Representação gráfica
Função Afim	$\boldsymbol{f(x) = 2x + 1}$ **ou** $\boldsymbol{y = 2x + 1}$	

Fonte: Produção do autor.

Sobre esse assunto, o psicólogo e filósofo francês Raymond Duval desenvolveu uma teoria a qual denominou de Registros de Representação Semiótica, que segundo Ziemer et al. (2014), está associada a análise do funcionamento do pensamento para aquisição de conhecimento. Segundo Pinheiro e Barreto (2013), essa teoria vem sendo adotada em diversas pesquisas brasileiras buscando soluções para dificuldades na aprendizagem da Matemática.

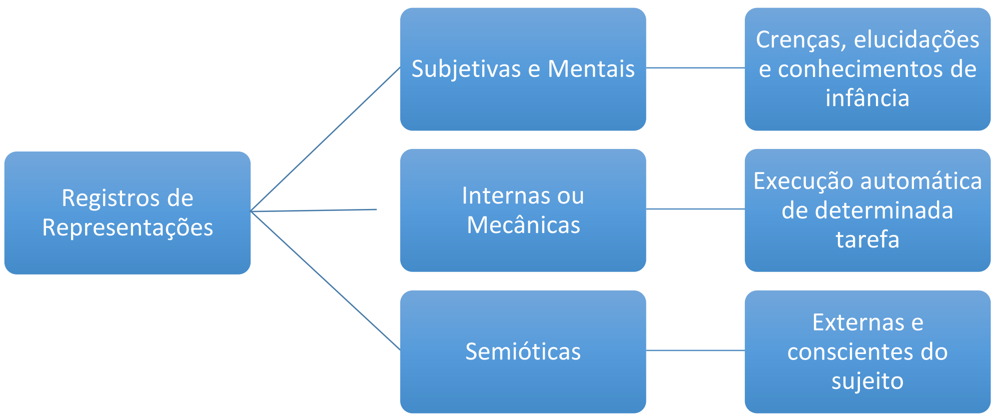
De acordo com Almouloud (2007), Duval afirma que um registro de representação é um sistema semiótico que tem funções cognitivas fundamentais no funcionamento cognitivo consciente.

De acordo com Pinheiro e Barreto (2013), a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval defende uma abordagem cognitiva junto aos alunos, defendendo que o objetivo do ensino da Matemática seja o desenvolvimento das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização. Para Pinheiro e Barreto (2013, p. 3), a teoria de Duval procura "descrever o funcionamento cognitivo que possibilita a um aluno compreender, efetuar e controlar a diversidade dos processos que lhe são propostos."

Segundo Almouloud (2007), os registros são diferentes dos códigos pelo fato de serem funcionalmente mais limitados que os mesmos. Essa diferença torna visível a existência de dois níveis de funcionamento cognitivo, que são o consciente e o não-consciente. O autor ressalta que todo conhecimento implica necessariamente a mobilização destes dois níveis.

Segundo Ziemer et al. (2014), Duval definiu três tipos de registros de representação: as representações subjetivas e mentais que de acordo com os autores são aquelas que estudam as crenças, elucidações e conhecimentos de infância; as representações internas que enfatizam o tratamento de uma informação e caracteriza-se pela execução automática de uma tarefa e as representações semióticas que não são externas e conscientes do sujeito.

Figura 5: Tipos de registros de representações.



Fonte: Produção do autor.

De acordo com Ziemer et al. (2014), é graças as representações semióticas que temos acesso aos objetos matemáticos. Assim, eles não são perceptíveis, mas sim evocados através de representações semióticas para estudo como gráficos, tabelas, linguagem natural, etc.

Pinheiro e Barreto (2013) destaca a importância de um ensino de Matemática baseado nos pressupostos teóricos de Duval, pois possibilita uma real compreensão do funcionamento cognitivo do aluno e aponta que os fracassos e bloqueios nos alunos aumentam quando é preciso mudar de um registro para outro ou quando é necessária a manipulação simultânea de dois registros diferentes. Para ele a compreensão se dá pela capacidade de mudança de registro, pois uma via não garante a compreensão, isto é, a aprendizagem em Matemática. Uma via de registro apenas, torna a representação de fato o próprio objeto o que não se deve confundir, então para isso é preciso dispor de ao menos duas representações em que ambas devam ser percebidas como representação de um mesmo objeto.

Lenartovicz e Gaertner (2013) afirmam que é preciso que os estudantes estejam mais habituados a fazer as conversões e tratamentos entre as mais variadas formas de representações dos objetos matemáticos para que não sintam muita dificuldade, conseguindo identificar em cada uma das representações, formas diferenciadas de escrever o objeto matemático.

Duval (2009 apud ZIEMER et al., 2014, p. 3), define os objetos matemáticos como ideias, conceitos, estruturas, que são propriedades as quais podemos acessar por meio de suas representações. Ele apontou três fenômenos associados a atividade matemática: o primeiro deles é que deve-se considerar as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático, ou seja, um único objeto matemático pode assumir uma diversidade de representações. Podemos encontrar vários exemplos, como as funções, os conjuntos que podem ser representados por chaves, diagramas, e assim por diante.

De acordo com Ziemer et al. (2014), o segundo fenômeno apontado por Duval é a diferenciação de um objeto matemático e sua representação, em que não se deve confundir jamais o objeto com sua respectiva representação. De acordo com os autores Ziemer et al. (2014), na aprendizagem da Matemática é muito frequente a confusão entre um objeto e sua representação.

> Na aprendizagem da matemática é comum a confusão entre o objeto matemático e a sua representação. Quando se fala em potenciação, por exemplo, acredita-se que o objeto matemático potência é o 2^3 ou o 5^2, quando, na verdade, essas são apenas representações de tais potências. Para a compreensão em matemática, é muito importante que essa distinção seja estabelecida e fique clara para os alunos. (ZIEMER et al., 2014, p. 3).

De acordo com Ziemer et al. (2014), o terceiro fenômeno apontado por Duval é com relação a articulação entre diferentes registos de representação, é muito importante a diferenciação entre diferentes registros de representação para a aprendizagem. Assim, para Ziemer et al. (2014), Duval acredita que a compreensão de um conteúdo não se dá pela mudança de um registro de representação para outro, mas sim pelo reconhecimento de um mesmo objeto em diferentes registros de representação, bem como a articulação entre eles.

Durante a aprendizagem na sala de aula ou na resolução de um problema, não utilizamos apenas um registro de representação, mas manipulamos as diferentes representações de modo a encontrarmos a solução. De acordo com os autores citados anteriormente, Duval chama isto de *transformação.*

As transformações estão separadas em dois tipos que Duval (2009 apud ZIEMER et al., 2014, p. 4), chama de *tratamento* e de *conversão*.

O tratamento, também chamado de processamento como afirmam Fonseca, Sousa e Santos (2014), é a transformação da representação de um objeto em outra equivalente, mas permanecendo no mesmo registro que foi abordado inicialmente; é uma transformação dentro de um mesmo registro. Um exemplo muito simples disso é a resolução de uma equação, inicialmente se tem um registro algébrico, e fazemos transformações dentro deste mesmo registro algébrico através de algoritmos até chegar a uma representação mais simples e curta, porém no mesmo registro inicial.

A conversão é uma transformação de uma representação na qual mudamos o registro e considerando o mesmo objeto matemático. Um exemplo simples de conversão é a passagem da função de uma representação algébrica para uma representação gráfica e vice-versa, mudando assim o registro de representação, ao fazer isso convertemos a representação de um mesmo objeto matemático em outra representação.

> Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria. As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica. (DUVAL, 2008 apud ZIEMER et al., 2014, p. 4).

Essas duas formas de transformações são de grande importância para a compreensão de um conteúdo.

Segundo Ziemer et al. (2014), a Teoria dos Registros de Representação Semiótica afirma que do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolha do registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro. Já do ponto de vista cognitivo, as conversões de um registro em outro é fundamental para a compreensão de determinado objeto. Porém muitas vezes estes pontos de vista não são levados em conta nas pesquisas relativas ao ensino da Matemática.

Na conversão existem dois fenômenos que contribuem para a dificuldade dos alunos na compreensão dos registros de representação, são eles o da não-congruência e o da congruência.

Para que dois registros sejam congruentes é preciso que a representação de chegada transpareça na representação de partida e a conversão se assemelha a uma situação de simples codificação, então há congruência. Por outro lado, se a representação terminal não transparece na representação de saída, temos o fenômeno da não congruência.

Assim, acreditamos que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica nos proporciona a reflexão acerca das diferentes funções cognitivas que são processadas em diferentes registros de representação, e que ensinar com base nesta teoria é tornar possível o desenvolvimento das capacidades de raciocínio, análise e visualização que de acordo com Pinheiro e Barreto (2013), se dá pela articulação e distinção de diferentes registros de representação semiótica.

Segundo Fonseca, Sousa e Santos (2014), a teoria de Duval diz que para analisar os obstáculos da aprendizagem de Matemática é necessário estudar com prioridade as conversões das representações semióticas e não os tratamentos destas representações, pois a articulação dos registros, nas palavras do autor, constitui o não enclausuramento em um determinado registro.

CAPÍTULO III
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O presente estudo possui cunho qualitativo e foi realizado em uma turma do 3º ano do Ensino Médio (3º "A"), no turno da manhã da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio "Presidente João Pessoa" (E.E.E.F.M.), localizada na cidade de Umbuzeiro, Paraíba, onde lecionamos a disciplina de Física durante o ano letivo de 2015; escolhemos esta turma pela mesma ter obtido em 2015 os melhores resultados dentre as turmas da escola no que se refere a aprendizagem e, sendo assim, pretendemos confirmar ou não, este desempenho no que se refere ao estudo da função de 1º grau, tendo em vista ser turma concluinte do Ensino Médio, o que nos leva a acreditar que os alunos já possuem um certo conhecimento do conteúdo de funções.

As questões trabalhadas são problemas que envolvem conhecimentos de função afim e algumas aplicações à cinemática.

A E. E. E. F. M "Presidente João Pessoa" é composta por 7 (sete) salas de aula, sendo que uma delas era um antigo laboratório de informática e teve que ser transformado em sala de aula pois não havia sala suficiente para atender todos os alunos, mesmo que a escola nunca tenha utilizado o laboratório, existente anteriormente.

Todas as salas são utilizadas nos períodos da manhã e tarde, sendo apenas no turno da noite que sobram duas salas. Isto torna muito difícil a divisão de turma de um mesmo ano, o que faz com que se tenham algumas turmas com mais de 40 alunos em uma mesma sala de aula, problema discutido entre professores e demais funcionários.

A escola ainda possui uma biblioteca com muitos livros didáticos, TV e DVD, mesas para estudo e equipamentos de robótica, além de uma sala de professores, secretaria, uma cozinha, uma horta onde cultiva-se verduras para merenda e uma quadra poliesportiva para diversos esportes e eventos. A turma do 3º ano "A", a qual será alvo de nossa investigação fica na sala onde era o antigo laboratório.

Em nossa investigação, utilizamos quatro aulas de 45 minutos cada, uma no dia 22/03/2016, numa terça – feira, e três no dia 23/03/2016, numa quarta – feira.

A turma é composta por 28 alunos, mas excepcionalmente no primeiro dia (22/03/2016), 19 alunos compareceram à aula.

Neste primeiro dia, utilizamos a penúltima aula do turno da manhã, com início às 10:15 h e término às 11:00 h. Eram duas aulas de Matemática, a primeira fizemos uma breve exposição do conteúdo, a segunda aula que iniciou-se às 11:00 h foi cedida à professora de Espanhol como tínhamos combinado com a mesma antes.

De início fizemos uma breve exposição do conteúdo da função polinomial do 1º grau em PowerPoint com a definição formal do conteúdo, alguns exemplos de função afim e seus casos particulares.

Para que os alunos entendessem bem o conceito de Função, usamos o método pedagógico da "máquina de transformar números" a qual desenhamos no quadro e explicamos que o número que sai é dado *em função* do número que entra na máquina. Assim, percebemos que os alunos entenderam melhor o conteúdo do que apenas com a definição formal. Expomos como se encontra o valor numérico de uma função e o zero da função afim, bem como o conceito de função crescente e decrescente e a construção de gráficos por meio de pontos atribuídos a determinada função dada. Através do gráfico mostramos como se comporta uma função crescente e decrescente e expomos também como encontrar uma função afim através do seu gráfico, escolhendo dois pontos arbitrários da reta.

Por fim, exibimos dois exemplos de aplicações da função afim que foram resolvidos no quadro branco, um relacionado à Matemática e outro relacionado à Física, sobre o Movimento Uniforme (MU), o qual possuía um gráfico da posição de um móvel em relação ao tempo.

Figura 6: Exposição da função polinomial do 1º grau.

Fonte: Produção do autor.

Após essa breve exposição do conteúdo que durou cerca de 35 minutos, reservamos os 10 minutos finais da aula para podermos aplicar um questionário (ver apêndice A) relacionado ao perfil de cada aluno e sua visão acerca da Matemática, ao qual responderam em cerca de 5 minutos.

Figura 7: Aplicação do questionário.

Fonte: Produção do autor.

Assim encerramos nosso primeiro dia de investigação, ficando marcada para o próximo dia a resolução das questões.

No segundo dia que foi uma quarta – feira (23/03/2016), aplicamos as questões que serviram para nossa investigação. Neste dia a turma estava com 18 alunos presentes, dois deles faltaram no dia anterior e afirmaram não saber responder nenhuma das questões.

Iniciamos pontualmente às 7:30 h e não no horário real de início da aula, pois a direção da escola costuma fazer um momento de oração antes de começarem as aulas.

Primeiramente formamos as filas em sala de aula e entregamos a folha com as questões (ver apêndice B) e outra folha em branco para os respectivos cálculos. Durante a resolução, muitos alunos ainda tiveram dificuldades e tivemos que mostrar no quadro mais alguns exemplos para que pudessem entender melhor o conteúdo cobrado nas questões. Até as 9:00 h todos os alunos já haviam entregado as respostas e a folha de questões e assim encerramos a aula.

Figura 8: Aplicação das questões.

Fonte: Produção do autor.

CAPÍTULO IV
ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresentamos nossa análise dos dados coletados a partir do que diz a teoria apresentada neste trabalho, bem como discutimos os resultados de acordo com os pressupostos da mesma.

4.1 CARACTERIZAÇÃO DA TURMA E ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO

Apresentaremos uma amostra das questões aplicadas e faremos as descrições/análises dos resultados das respostas feita por alguns alunos. Como foram seis questões aplicadas a 18 alunos, então apresentamos aqui algumas respostas específicas de três questões da nossa lista que foi aplicada e que se enquadram melhor em nossa análise.

Assim, descreveremos como os alunos procederam para chegar até a resposta final e, se for o caso, onde e quais bloqueios os impediram de chegar à mesma e se ele dominou os processos de transformação apontados por Duval, de acordo com os autores citados neste trabalho.

De acordo com o questionário aplicado que teve como objetivo observar o perfil da turma e a visão dos alunos com relação à Matemática, a turma é composta por alunos com faixa etária entre 16 e 17 anos, divididos entre meninos e meninas. Através do mesmo, pudemos constatar que a maioria dos alunos veem a Matemática como uma disciplina regular, mas não a têm como favorita, apenas 20% dos alunos afirmaram tê-la como preferência e nenhum afirmou ter a Física, o que nos mostra a preferência de grande parte pelas disciplinas em que a Matemática não esteja presente. Além disso, praticamente todos os alunos afirmaram que o conteúdo de funções foi, dentre os conteúdos matemáticos, aquele que mais sentiram dificuldades durante o Ensino Médio e também que foi no 1º ano que tiveram mais dificuldades com a Matemática, ano este em que eles passam praticamente todo estudando as funções, isto evidencia a grande dificuldade que os alunos possuem na compreensão deste conteúdo e mais ainda o desenvolvimento do pensamento funcional, como mostra os resultados deste trabalho.

Com relação ao conteúdo em que os alunos afirmaram ter mais facilidade no Ensino Médio, podemos destacar as matrizes que foi praticamente unanimidade entre as afirmações dos alunos e apenas dois afirmaram o conteúdo das funções.

Outro ponto a salientar, é que entre a aritmética, álgebra e geometria, a maioria afirmou ter a álgebra como preferência, o que nos parece um pouco contraditório de acordo com os conteúdos apontados pelos mesmos aos quais tiveram mais dificuldades, pois a maioria apontou as funções, e as mesmas se inserem no bloco da álgebra, conforme os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (2000).

Também foi unanimidade os alunos que afirmaram ter mais dificuldades com a Física do que com a Matemática, o que nos faz perceber os bloqueios no que se refere a Matemática aplicada a outras situações e contextos, já que a Física tem como ferramenta de estudo a própria Matemática. Além disso, a maioria afirmou como justificativa que as fórmulas de Física são mais complicadas do que as de Matemática, sendo que praticamente todas as fórmulas vista no Ensino Médio em Física são compostas apenas por variáveis diferentes das usuais nas aulas de Matemática envolvidas nas mesmas operações fundamentais.

4.2 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DA ATIVIDADE

Apresentamos agora a análise das questões dois, três e cinco e as respostas de alguns alunos para estas questões:

Vamos inicialmente observar o segundo problema de nossa lista de questões:

Figura 9: Problema dois da lista de questões.

2) Em algumas cidades você pode alugar um carro $ 154 por dia mais um adicional de $ 16,00 por km. Determine a função por um dia e esboce no gráfico. Calcule o preço para se alugar por um dia e dirigi-lo por 200 km.

Fonte: Produção do autor.

Observando esta questão, verificamos que a sua resolução consiste em encontrar a função que determina o valor a ser pago em um dia de aluguel do carro, o esboço do gráfico e o cálculo do preço a ser pago por um dia se dirigir o carro por 200 km.

Para isso, os alunos deveriam primeiramente realizar o que Polya (1995) chama de primeiro passo para a resolução de um problema, ou seja, compreendê-lo, lendo-o com atenção e identificando os dados e a incógnita, e assim realizar o que segundo Ziemer et al. (2014), Duval chama de conversão, isto é, converter a informação que inicialmente está em linguagem natural para a linguagem algébrica, isto é feito ao determinar a função por um dia de aluguel do automóvel.

Observamos que esta questão tem como principal ponto a compreensão do problema, sendo esta a etapa mais relevante dentre os passos apontados por Polya (1995) para se resolver um problema.

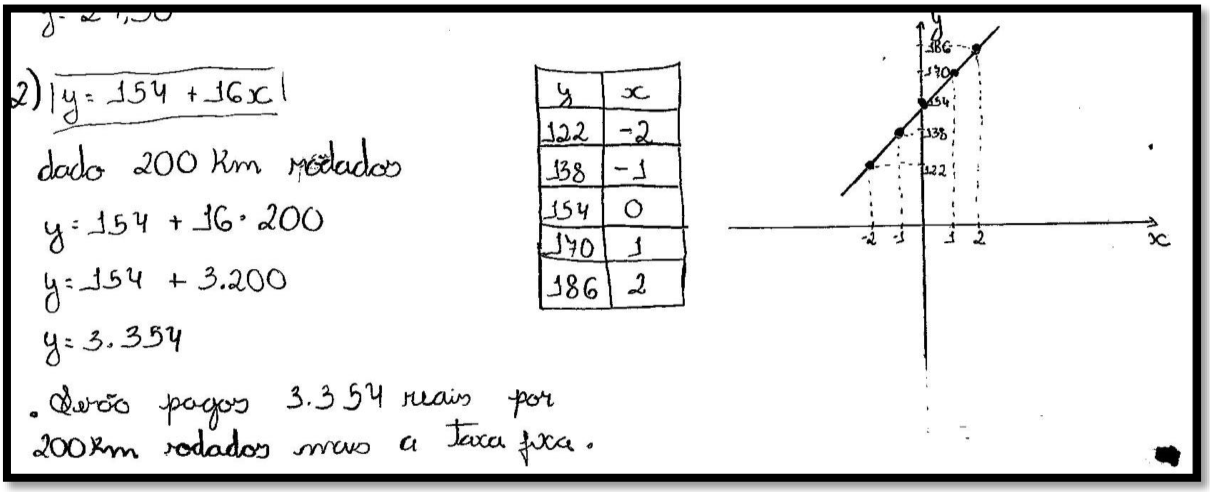
Na segunda parte da resolução, o aluno deve esboçar o gráfico da função por um dia, realizando assim uma nova conversão ao converter o registro que agora está em representação algébrica para a representação gráfica, e por fim calcular o preço a pagar por um dia dirigindo-o por 200 km, realizando assim o que de acordo com Ziemer et al. (2014), Duval chama de tratamento, que consiste em "tratar" o registro, ou seja, transformar em uma representação mais simples, porém dentro do mesmo registro de representação.

Apenas quatro alunos souberam resolver corretamente esta questão sem nenhum auxílio.

Vamos observar alguns exemplos de resolução por alguns alunos relacionados à questão anterior. Como neste capítulo analisaremos as respostas de seis alunos para as questões, então os chamaremos pelas letras do alfabeto, da letra "A" à letra "F", sempre pela ordem das respostas que aparecem durante o texto.

Observamos primeiramente a resposta da questão anterior dada pelo aluno A:

Figura 10: Resolução da questão dois pelo aluno A



Fonte: Produção do autor.

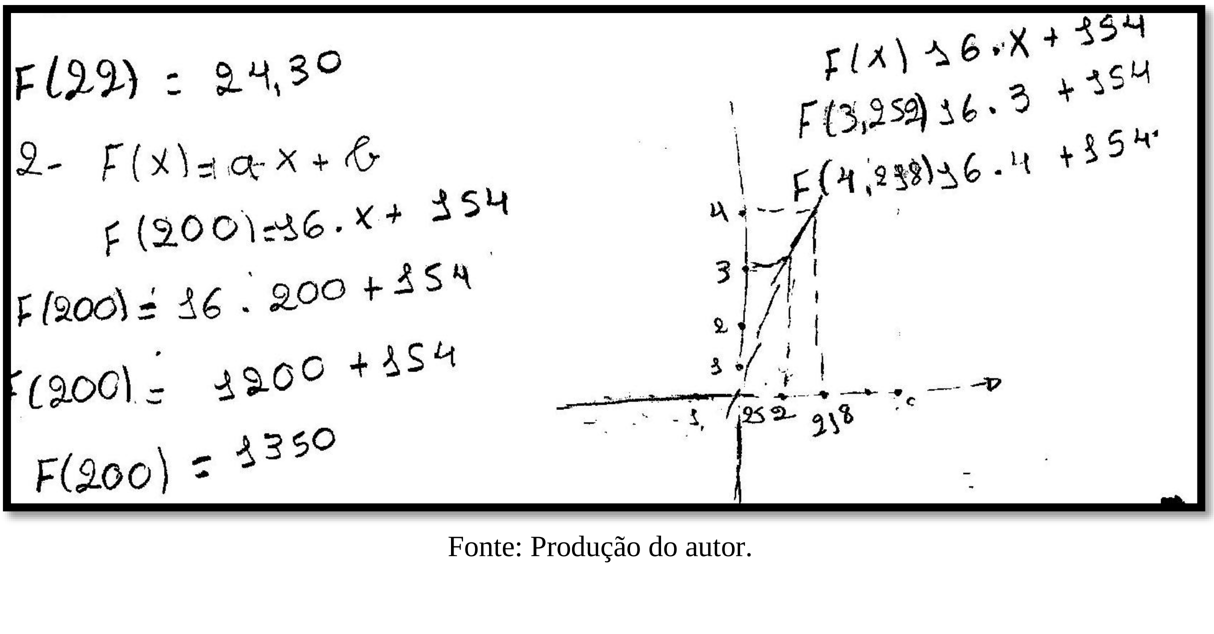
Verificamos que o aluno A soube organizar as informações e interpretar corretamente o problema, conseguindo com êxito fazer a conversão da linguagem natural para o registro algébrico, transformando as informações na função do 1º grau $y = 154 + 16x$, que representa o preço pago por um dia, realizando a conversão de um registro de representação em outro.

Podemos observar também que o mesmo conseguiu realizar a nova conversão que foi da passagem do agora registro algébrico para o gráfico, sendo esta a maior dificuldade que pudemos notar durante as resoluções. No esboço do gráfico feito pelo aluno A, o mesmo utilizou uma tabela auxiliar atribuindo valores arbitrários a x e encontrando os respectivos valores para $f(x)$, ao qual ele denominou de y. É interessante observar que ao fazer a conversão do registro algébrico para o gráfico podemos perceber que o aluno compreende o conteúdo da função polinomial do 1° grau, porém não apresenta uma compreensão da situação proposta, tendo em vista que ele atribui valores negativos para a variável $km\ rodados$, o que no caso da situação do problema não seria possível.

Assim, podemos afirmar que este aluno domina os registros de representação de um mesmo objeto matemático, como linguagem natural, algébrica, gráfica e também de tabelas e os manipula com facilidade, pois Duval nas palavras de Pinheiro e Barreto (2013), afirma que a compreensão de um conceito se dá pela articulação de diferentes representações de um objeto, o que foi realizado pelo aluno A. Ele também soube realizar o tratamento atribuindo a x o valor correto dos $200\ km$ e encontrou a resposta correta $R\$\ 3354{,}00$, assim ele não teria dificuldades em calcular para quaisquer valores em km, esta é uma vantagem de se conhecer os processos de tratamento, pois poupa muito tempo e evita procedimentos exaustivos. Um detalhe equivocado do aluno A foi ao dar a resposta final por escrito, o mesmo cometeu um pequeno deslize ao afirmar que a resposta seria $R\$\ 3354{,}00$ mais a taxa fixa, o que na verdade seria este valor já com a taxa fixa incluída.

Agora observamos outros dois tipos de resolução da mesma questão elaborados por dois alunos, aos quais chamamos de B e C.

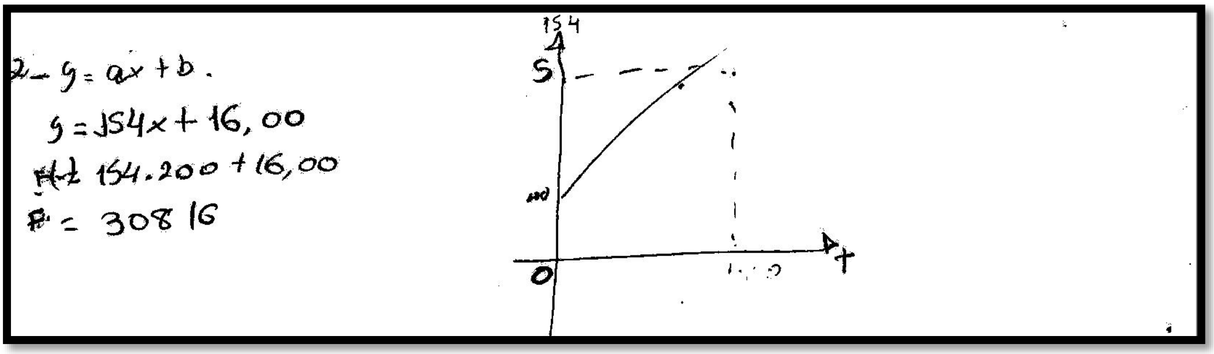
Figura 11: Resolução da questão dois pelo aluno B.



Fonte: Produção do autor.

Na resolução feita pelo aluno B, o mesmo soube converter os dados em linguagem natural na representação algébrica, mas cometeu alguns deslizes, pois apesar da função conter a variável x, ele não a explicitou com função de y ou $f(x)$, ele cometeu um erro ao escrever $f(200) = 16x + 154$ ao invés de $f(x) = 16x + 154$. Percebemos também que o aluno B não conseguiu realizar o tratamento, pois cometeu erros ao fazer os cálculos para calcular a resposta final. Quanto ao gráfico, o aluno B não realizou a conversão corretamente, o que nos leva a concluir que o mesmo não sabe converter um objeto em linguagem algébrica para a representação gráfica, evidenciando o que Duval destaca segundo Pinheiro e Barreto (2013), que os bloqueios e fracassos aumentam quando é necessária a mudança de um registro para outro, o que está explícito na resposta do aluno B e também na resposta do aluno C, o que podemos observar na figura abaixo:

Figura 12: Resolução da questão dois pelo aluno C.



Fonte: Produção do autor.

Observamos que o aluno C não conseguiu converter a representação em linguagem natural para a linguagem algébrica, o mesmo trocou a posição da variável x que deveria está multiplicando o número 16 e não o 154, e também ele não conseguiu converter o objeto em representação gráfica, o que podemos concluir que ele não compreende o conteúdo de função polinomial do 1º grau, pois vai contra o que afirma Duval segundo os autores citados, que a compreensão acontece pela capacidade de manipular diferentes registros e o aluno B não consegue manipular dois registros nem realizar qualquer conversão entre eles.

No que se refere à representação gráfica da função, nem o aluno B e nem o aluno C tem conhecimento da representação gráfica e não sabem realizar a devida conversão. Se observarmos as duas respostas, o aluno B ainda tentou esboçar um gráfico, porém com fracasso. Já o aluno C fez um esboço de duas coordenadas as quais chamou de S e T, respectivamente, provavelmente confundiu com o gráfico pedido na questão 6 da folha de questões, o que mostra um enorme bloqueio no que se refere ao conteúdo de funções.

Então assim concluímos que os alunos B e C não compreenderam o conteúdo e não realizaram o que nas palavras de Ziemer et al. (2014), Duval aponta como terceiro fenômeno associado a atividade matemática que é a articulação entre diferentes registros, o que torna clara a não compreensão do conteúdo por parte dos alunos B e C, e nem os mesmos conseguem ir e vir entre diferentes registros, deixando claro um grande bloqueio por parte dos mesmos.

Tomemos agora o terceiro problema de nossa lista de questões:

Figura 13: Problema três da lista de questões.

3) Na revelação de um filme. uma óptica calcula o preço a ser cobrado usando a fórmula $P = 12{,}00 + 0{,}65n$, onde p é o preço, em reais, a ser cobrado e n o número de fotos reveladas do filme.

a) Quanto pagarei se forem reveladas 22 fotos do meu filme?

b) Se paguei a quantia de $R\$$ 33,45 pela revelação. qual o total de fotos reveladas?

Fonte: Produção do autor.

Analisando essa questão, verificamos que para resolvê-la o aluno precisa apenas compreender a função que está em linguagem algébrica, ou seja, relacioná-la com o enunciado. Esta é uma das etapas descritas por Polya (1995) para se resolver um problema, que é encontrar a conexão com os dados e a incógnita, no nosso caso as variáveis da função descrita.

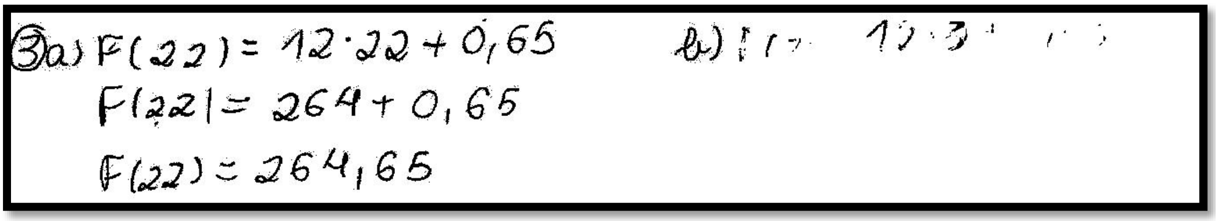
Daí bastaria substituir o valor de "n" e o de "p" correspondentes a cada pergunta e realizar os cálculos necessários. Na letra *(a)*, bastaria substituir "n" por 22 e encontrar o valor "p" a ser pago. Na letra *(b)*, bastaria substituir "p" pelo preço a ser pago e encontrar o número "n" de fotos reveladas.

Observamos que essa questão está relacionada a apenas um registro de representação (representação algébrica), e que para resolvê-lo é necessário apenas realizar o tratamento do registro de representação, o que nos faz considerar o problema relativamente simples e de fácil compreensão.

A grande dificuldade encontrada pelos alunos em problemas como este é fazer a conexão do modelo matemático com a situação. Como nas aulas de Matemática os alunos, em geral, ficam muito presos a exercício de repetição e sem qualquer relação com alguma situação do dia-a-dia, a grande maioria sente dificuldade quando encontra o objeto matemático aplicado a determinada situação do cotidiano. Eles são sempre instruídos a acreditarem que, por exemplo, a função polinomial do 1º grau é sempre dada em variáveis "x" e "y", ou seja, "y" em função de uma certa variável chamada de "x" e não compreendem que estas variáveis são apenas formas genéricas de representar uma função do 1º grau. Um exemplo disso está claramente na função horária do Movimento Uniforme (MU) que muitos alunos não compreendem que esta é uma função do 1º grau, pois a mesma não está nas variáveis "x" e "y".

Vamos observar alguns exemplos de resolução dos alunos para o terceiro problema:

Figura 14: Resolução da questão três pelo aluno D.



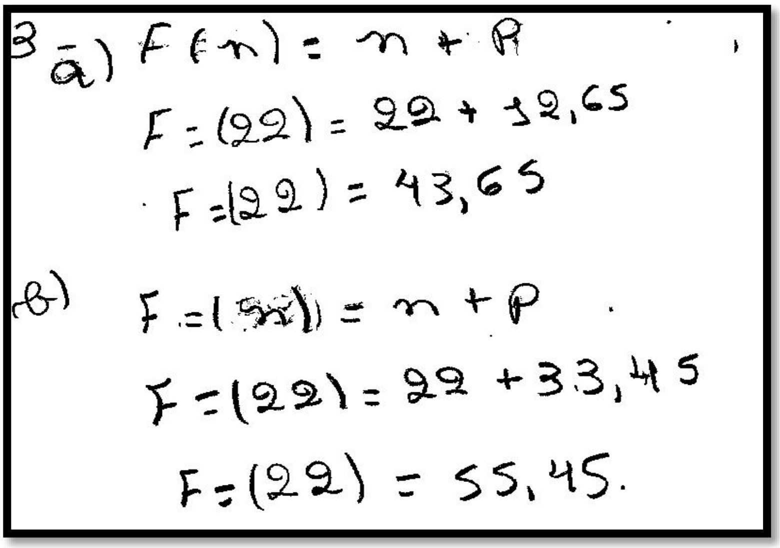
Fonte: Produção do autor.

Nesta resolução, o aluno D não soube realizar o tratamento correto, encontrando a resposta errada. Ele multiplicou o número 22 pelo número 12, o que na verdade seria multiplicado pelo número 0,65 que é o preço por cada foto revelada.

Percebemos aqui que este aluno possui uma grande dificuldade no que se refere ao conteúdo de função, pois apesar da função já ter sido dada na questão, o mesmo não conseguiu obter êxito na resolução e ele não consegue interpretar a função com o enunciado do problema, ou seja, ele não consegue transformar a situação descrita no enunciado em um modelo matemático, até mesmo por isso ele não conseguiu responder a letra *(b)* da questão, deixando-a em branco. Este aluno também não tem conhecimento no que se refere ao tratamento da função, pois ele ao se referir a $f(22)$ não consegue comparar com $f(x)$ onde só é necessário substituir o valor 22 no lugar da variável "x" e realizar os devidos cálculos.

É muito comum encontrarmos esse tipo de dificuldade nos alunos, muitos não conseguem relacionar o modelo matemático com a situação do problema, mesmo conseguindo manipular os diferentes registros de representação. Acreditamos este ser um grande desafio do ensino-aprendizagem de Matemática, que é fazer o aluno ter a capacidade de realizar a conexão com a situação do problema; isto será possível se os mesmos compreenderem os diferentes registros de representações e ter a capacidade de perceber que são representações de uma ideia, ou seja um conceito matemático abstrato que segundo Ziemer et al. (2013), Duval afirma que são evocados para estudo através de suas representações.

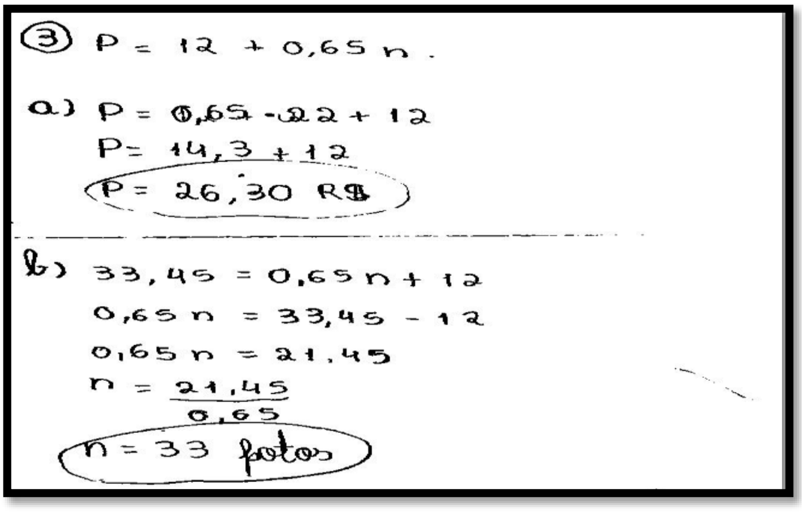
Figura 15: Resolução da questão três pelos alunos B.



Fonte: Produção do autor.

Nesta outra resolução elaborada pelo aluno B, constatamos que o mesmo também possui grande dificuldade na interpretação da questão, não conseguindo comparar a função com o enunciado e nem realizando o tratamento correto, fazendo cálculos incompatíveis com o enunciado do problema, ficando claro que tanto o aluno B como o aluno D possui muita dificuldade no que se refere ao conteúdo da função afim.

Figura 16: Resolução da questão três pelo aluno E.



Fonte: Produção do autor.

Já o aluno E conseguiu interpretar o significado das variáveis "n" e "p" da função, fazendo os cálculos corretos. Este aluno consegue compreender bem o conteúdo de função independentemente das variáveis apresentadas e tem a ideia intuitiva que a função pode assumir diferentes representações com diferentes letras representando as variáveis.

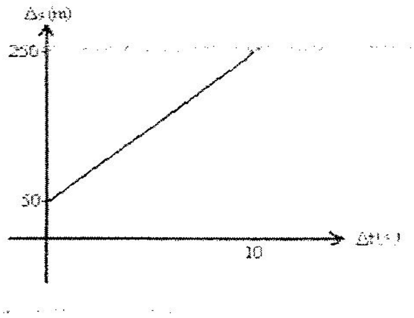
Percebe-se também que este aluno não confunde a representação da função do 1º grau $y = ax + b$ com a representação da função do 1º grau $P = 12{,}00 + 0{,}65n$, tendo consciência de que se trata de um mesmo conteúdo.

Outro ponto importante a destacar na resolução do aluno E, é que durante o processo de tratamento, o mesmo inverte as posições dos membros da igualdade, como podemos observar na resolução da letra *(b)* com o intuito de deixar o valor procurado no primeiro membro, artifício este que poucos alunos conseguem realizar sem necessidade de fazer o famoso "jogo de sinais" e sem multiplicar ambos os membros pelo número (-1), o que demonstra o domínio dos processos de conversão e compreensão do conteúdo e que além disso, poupa tempo e cálculos durante a resolução.

Um bloqueio encontrado em grande parte dos alunos e também em nossa coleta de dados é com relação à conversão inversa de registros. Habitualmente, a maioria dos exercícios e problemas propostos costumam tratar a conversão da representação algébrica para a representação gráfica e, quando o aluno se depara com um problema em que precisa realizar a conversão inversa com relação a maioria dos exercícios, ou seja, da representação gráfica em algébrica, eles sentem uma certa dificuldade, pois não estão habituados a realizar esse procedimento, é o caso do quinto problema da nossa lista de questões:

Figura 17: Problema cinco da lista de questões.

5) O gráfico a seguir representa a função horária do espaço de um móvel em trajetória retilínea e em movimento uniforme.



Com base nele, determine a velocidade e a função horária do espaço deste móvel.

Fonte: Produção do autor.

Observamos que para resolver esta questão, se faz necessário que o aluno interprete o gráfico do movimento e através dele, determine a velocidade do móvel e em seguida determine a função horária.

Percebemos que esta questão exige do aluno um conhecimento da representação gráfica de uma função e a capacidade de conversão da representação gráfica para a algébrica, o que geralmente não é encontrado na maioria dos exercícios e problemas em sala de aula. Os exercícios são em sua maioria esboço do gráfico das funções. Isso contraria o terceiro fenômeno apontado por Duval que de acordo com Ziemer et al. (2013), é a articulação entre diferentes registros de representação e que é muito importante para a aprendizagem matemática, ou seja, é preciso que o aluno saiba articular de várias maneiras e que ele tenha capacidade de transitar entre diferentes registros tanto do algébrico para o gráfico como vice-versa, da linguagem natural para a algébrica e vice-versa.

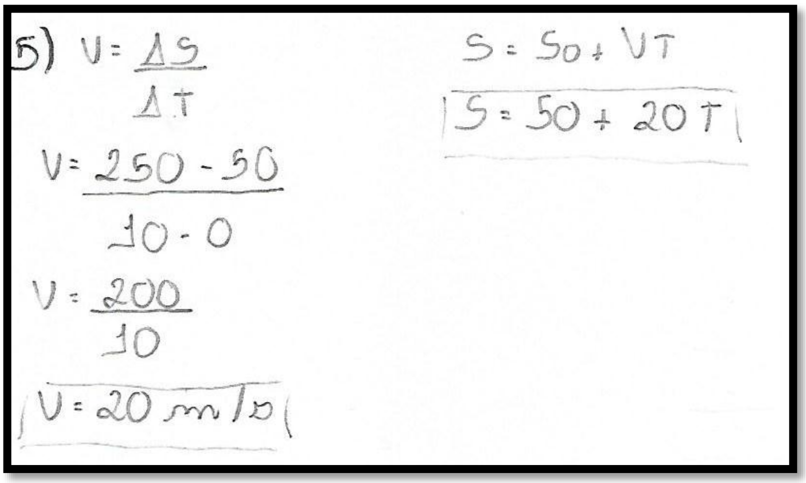
Para a resolução da questão cinco, primeiramente o aluno deve determinar a velocidade (v) do móvel segundo o gráfico, o que seria a razão entre o espaço percorrido e o tempo gasto para percorrer esse espaço, que de acordo com o gráfico seria a razão da variação conhecida no eixo "y" que no caso seria (ΔS) pela variação conhecida do eixo x, que seria (Δt), no caso do gráfico:

$$\boxed{v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{250 - 50}{10 - 0}}$$

Feito isso, restava determinar a função horária do espaço que seria uma função do 1º grau da forma $S = S_0 + vt$, que como dito anteriormente, gera um bloqueio em grande parte dos alunos por serem acostumados a trabalhar sempre com as variáveis "x" e "y" e não possuem a capacidade de perceber que a função polinomial do 1º grau possui inúmeras formas de representação na linguagem algébrica.

Assim, a maioria dos alunos sentiu dificuldades nesta questão e surgiram perguntas já clássicas em aulas de Matemática, como: "Nessa daqui é pra fazer o que?" e "Como se faz essa cinco?".

Figura 18: Resolução da questão cinco pelo aluno A.

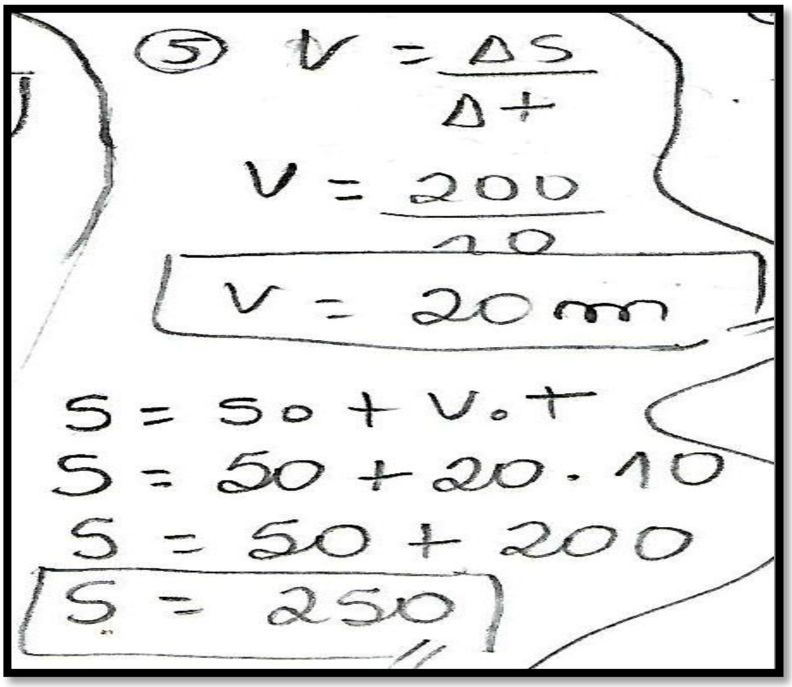


Fonte: Produção do autor.

Percebemos que na resposta do aluno A, o mesmo interpretou bem a representação gráfica calculando assim a velocidade do móvel corretamente e a substituiu na função horária da velocidade. Concluímos que este aluno compreendeu bem o conteúdo, pois ele realiza o que de acordo com Pinheiro e Barreto (2013), Duval afirma que é necessário para a compreensão de um conteúdo, que é a articulação entre diferentes registros de representações, ou seja, ele manipula diferentes registros de representação e realiza as devidas conversões e articula entre elas sem dificuldade.

Vale salientar que o aluno A também não se deixa confundir a representação da função do 1º grau na forma $S = S_0 + vt$ com a forma genérica $y = ax + b$ e reconhece que são diferentes registros representações de um mesmo objeto e soube interpretar com êxito o gráfico $\Delta S \times \Delta t$ sem confundi-lo com o famigerado $x \times y$ sempre adotado nas aulas de Matemática.

Figura 19: Resolução da questão cinco pelo aluno F.



Fonte: Produção do autor.

Analisando esta resposta elaborada pelo aluno F, constatamos que ele não tem conhecimento das conversões de registros de representações, pois ele não conseguiu converter o gráfico em uma expressão algébrica e ainda afirmou que a unidade de velocidade seria o metro (m) e não o metro por segundo (m/s). Além disso, ele calculou um certo valor atribuindo o número 10 a variável "t", o que evidencia que ele não soube analisar o gráfico e consequentemente não compreende o conteúdo, pois não manipula o objeto em sua representação algébrica, e como dito antes, para Duval, segundo Pinheiro e Barreto (2013), a compreensão se dá pela capacidade de mudança de registro o que não ocorre nesta resolução pelo aluno F.

Neste último problema proposto, notamos muitas dificuldades por parte de praticamente todos os alunos, isso reforça novamente o que aponta Duval nas palavras de Pinheiro e Barreto (2013), de que os fracassos e bloqueios aumentam quando se precisa mudar de um registro para outro e quando se manipula diferentes registros simultaneamente.

Assim, é evidente as dificuldades encontradas pelos alunos principalmente no que se refere à conversão de diferentes registros de representações, e constatamos que os mesmos encontram mais dificuldade ainda quando se trabalha com outras variáveis diferentes das habituais utilizadas nas aulas de Matemática, como o caso da análise do gráfico $\Delta S \times \Delta t$, por exemplo, onde sentiram bastante dificuldade durante a aplicação das questões e também quando o conteúdo se insere em uma situação-problema, onde a maioria não consegue interpretar a situação proposta e transformá-la em um modelo matemático para estudo, além de apresentarem dificuldades em transferir o conhecimento matemático específico, a exemplo da função do 1º grau, para outras áreas do conhecimento.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao fim desse estudo, tecemos algumas considerações acerca do trabalho realizado em sala de aula e os resultados obtidos nesta experiência, tanto no que foi observado como para perspectivas futuras no que se refere ao ensino de Matemática no nível médio.

Assim, podemos concluir que o ensino de Matemática ainda está muito longe de uma realidade satisfatória, isto é evidenciado quando observamos os bloqueios e as dificuldades encontradas pelos alunos em questões simples de nível de 1º ano do Ensino Médio, mesmo quando aplicadas a uma turma de 3º ano.

Percebemos também que os mesmos sentem mais dificuldade quando se faz necessário a conversão dos diferentes registros de representação, principalmente do algébrico para o gráfico, esta que exige o domínio do conteúdo. Outra dificuldade observada é com relação à conexão do conteúdo matemático com a situação-problema proposta, o qual ficou evidenciado que a maioria dos alunos não possui habilidades para relacionar o conteúdo com o problema, ou seja, transformar a situação em um modelo matemático, isto é claramente observado na primeira questão onde muitos não conseguiram determinar a função correspondente à situação do problema.

Acreditamos que se faz necessário um repensar nas formas de ensinar a Matemática não só no Ensino Médio, que foi nosso alvo de estudo, mas também no Ensino Fundamental. No nosso foco foi a função polinomial do 1º grau que se insere no bloco da álgebra, conforme os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (2000).

Acreditamos também que é preciso alterar a percepção do aluno de que os símbolos usados na Matemática só são representados pelas letras "x" e "y", pois isto gera um grande bloqueio quando eles se deparam com os mesmos objetos em problemas com outros contextos e aplicações, como por exemplo na Física, onde os símbolos matemáticos geralmente são apresentados com outras letras diferentes das utilizadas habitualmente em Matemática representando as variáveis, isso fica claro quando analisamos o questionário e observamos que a maioria dos alunos afirmaram que dentre a Matemática e a Física, os mesmos acham a Física mais complicada e o argumento utilizado por eles é que a ela possui “mais fórmulas complicadas”, sendo que são apenas fórmulas matemáticas com variáveis diferentes das utilizadas nas aulas de Matemática, e além disso, sobre as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Física, os PCN (2000) afirmam que é necessário a utilização bem como a compreensão de tabelas, também se faz necessária a compreensão de gráficos e das relações matemáticas existentes entre eles para a expressão do saber físico. O que nos deixa claro a necessidade dos alunos conseguirem relacionar a Matemática em outras situações e contextos.

Enfim, achamos necessário tornar a aprendizagem matemática, principalmente um conteúdo importante como é o caso das funções, flexíveis a qualquer situação deparada pelos alunos, seja em outra disciplina ou no seu dia-a-dia, e isso deve começar nas próprias aulas de Matemática, onde o professor pode utilizar por exemplo a Física como ferramenta em suas aulas, enriquecendo-as. Pode expor funções com outras letras representando as variáveis para que os alunos não fiquem presos aos "x" e "y" e nem aos "a", "b" e "c" e desenvolver nos mesmos a capacidade de ir e vir entre os diferentes registros de representações, tornando assim a Matemática uma disciplina prazerosa, de fácil compreensão e que eles percebam a ampla aplicação em diversas situações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Ed. UFPR, 2007, p. 71 – 73.

ÁVILA, G. S. de Sousa. **Várias faces da Matemática**: tópicos para licenciatura e leitura geral. São Paulo: Blucher, 2007. cap. 19, p. 162 – 172.

BARRETO, M. M. **Tendências atuais sobre o ensino de funções no Ensino Médio**. Matemática e Educação Sexual: Modelagem do Fenômeno da absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários. Dissertação de Mestrado. PPg-Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008.

BOTELHO, L.; REZENDE, W. **Um breve histórico do conceito de função**. Caderno dá licença. Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense, v. 6, p. 63-76, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2000.

CERVINHANI, R. A.; GARCIA, T. M. R. O ensino da função e da função afim e a resolução de problemas. **O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense: produção didático-pedagógica**, 2012. Curitiba: SEED/PR, 2014. v. 2 (Cadernos PDE) In: Paraná. Secretaria de Educação do Estado. Superintendência de Educação. Disponível em: <www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=20>. Acesso em: 10/11/2015.

DANTE, L. R. **Matemática.** Volume único. São Paulo: Ática, 2005. p. 54 – 71.

FAINGUELERNT, E. K.; NUNES, K. R. A. **Práticas Pedagógicas para o Ensino Médio**. Porto Alegre: Penso, 2012.

FONSECA, A. J. dos Santos; SOUZA, D. do Nascimento; SANTOS, S. G. dos. **Análise combinatória: uma apreciação de conteúdo através dos registros de representação semiótica**. Caminhos da Educação Matemática em Revista (On-line), v. 2, n. 1, 2014.

LENARTOVICZ, I. G.; GAERTNER, R. **Aplicação da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval no estudo de funções polinomiais do 1º grau no curso de administração**. Actasdel VII CIBEM ISSN, v. 2301, n. 0797, p. 2628.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas**: caminhos, avanços e novas perspectivas. Revista Bolema. Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

PINHEIRO, J. L.; BARRETO, M. C. **A teoria dos registros de representação semiótica**: contribuições para a formação matemática de professores em ambientes virtuais. In: Anais do Encontro Virtual de Documentação em Software Livre e Congresso Internacional de Linguagem e Tecnologia Online. 2013.

POLYA, G. **A arte de Resolver Problemas.** 2. ed. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 196p, 1995.

ZIEMER, N. E. et al. **A utilização de registros de representação semiótica para o ensino de matemática na educação básica**. Semana da Matemática da UTFPR - Câmpus Toledo, v. 1, n. 1, p. 10-19, 2014.

BIBLIOGRAFIA

ALVARENGA, K.; BARBOSA, C. V.; FERREIRA, G. **O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a. C até o século XX.** REVEMAT. Florianópolis (SC), v.9, n. 1, p. 159-178, 2014.

ALVES, Juliany Paula da Silva. **A função afim e suas aplicações.** 2012. 38 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Matemática) – Curso de Licenciatura Plena em Matemática, Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, 2012.

AZEVEDO, R. S.; **Resolução de problemas no ensino de função afim**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro: 2014.

BIEMBENGUT, M. S. **Funções reais**: uma abordagem por meio de modelos matemáticos. In: GAERTNER, Rosinete (Organizadora). **Tópicos de Matemática para o ensino médio.** Blumenal: Edifurb, 2001.p. 39 – 57.

FERREIRA, R. B.; ALLEVATO, N. S. G. **O Ensino de Funções através da Resolução de Problemas na Educação de Jovens e Adultos**. Revista de Produção Discente em Educação Matemática. ISSN 2238-8044, v. 1, n. 2, 2012.

MEDEIROS, J. S.; CORREIRA, E. S. A. **A Resolução de Problemas Matemáticos e o Professor**. In: ENCONTRO DE PESQUISA EM ALAGOAS – EPEAL, 5., 2010, Maceió. **Anais eletrônicos**...Maceió: Universidade Federal de Alagoas, 2010. Disponível em: <ww.webfactional.com/anais>. Acesso em 20.12.2015.

SOUZA, V. D. M.; MARIANI, V. C. **Um breve relato do desenvolvimento do conceito de função**. In: CONGRESSO NACIONAL DA ÁREA DE EDUCAÇÃO – EDUCERE, 5, 2005, Curitiba. **Anais eletrônicos...**Curitiba: Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2005. Disponível em: <www.pucpr/eventos/educere/2005>. Acesso em 15.11.2015**.**

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA – UEPB
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Março de 2016

Prezado estudante,

O presente instrumento de pesquisa é parte do meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) de Licenciatura plena em Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). O mesmo refere-se a questões a fim de investigar o perfil do estudante e suas concepções acerca da Matemática. Desde já agradeço a vossa colaboração.

Orientador: Prof. Me. José Roberto Costa Júnior

Aluno: João Paulo de Aguiar

Questionário

1. Idade: ____ anos.
2. Sexo:

   ( ) Masculino
   ( ) Feminino

3. Qual sua disciplina favorita? _______________________
4. O que você acha da disciplina de Matemática?

   ( ) Fácil
   ( ) Regular

( ) Difícil

( ) Muito Complicada

5. Sobre a disciplina de Matemática, qual dos itens abaixo você mais gosta?

   ( ) Aritmética

   ( ) Álgebra

   ( ) Geometria

6. A disciplina de Matemática ajuda em alguma outra disciplina?

   ( ) Sim

   ( ) Não

   Qual? ___________________________

7. Qual ano do Ensino Médio você teve mais dificuldade com a disciplina de Matemática?

   ( ) 1º Ano

   ( ) 2º Ano

   ( ) 3º Ano

8. Qual(is) conteúdo(s) de Matemática você se recorda que teve mais dificuldade durante o Ensino Médio?

   ____

9. Qual(is) conteúdo(s) de Matemática você se recorda que teve mais facilidade durante o Ensino Médio?

   ____

10. Dentre as duas disciplinas abaixo, qual você tem mais dificuldade de aprendê-la?

    ( ) Matemática

    ( ) Física

    Por que? ____

APÊNDICE B – LISTA DE PROBLEMAS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA – UEPB

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Março de 2016

Prezado estudante,

O presente instrumento de pesquisa é parte do meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) de Licenciatura plena em Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). O mesmo é composto de problemas de Matemática e Física, afim de investigação e sem compromisso escolar. Desde já agradeço a vossa colaboração.

Orientador: Prof. Me. José Roberto Costa Júnior

Aluno: João Paulo de Aguiar

<u>QUESTÕES</u>

1) Um motorista de táxi cobra $R\$\ 4{,}50$ de bandeirada mais $R\$\ 0{,}90$ por quilômetro rodado. Sabendo que o preço a pagar é dado em função do número de quilômetros rodados, calcule o preço a ser pago por uma corrida em que se percorreu 22 quilômetros.

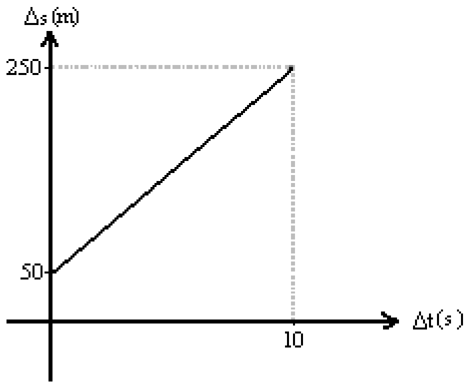
2) Em algumas cidades você pode alugar um carro $\$\ 154$ por dia mais um adicional de $\$\ 16{,}00$ por km. Determine a função por um dia e esboce no gráfico. Calcule o preço para se alugar por um dia e dirigi-lo por $200\ km$.

3) Na revelação de um filme, uma óptica calcula o preço a ser cobrado usando a fórmula $P = 12{,}00 + 0{,}65n$, onde p é o preço, em reais, a ser cobrado e n o número de fotos reveladas do filme.
   a) Quanto pagarei se forem reveladas 22 fotos do meu filme?
   b) Se paguei a quantia de $R\$\ 33{,}45$ pela revelação, qual o total de fotos reveladas?

4) Um carro está localizado no $km\ 16$ de uma rodovia retilínea no instante $t = 0$. Ele está se movendo a uma velocidade constante de $80\ km/h$. Determine:

   a) a função horária do movimento do carro.
   b) determine a posição que o carro estará no instante $t = 1{,}5$.

5) O gráfico a seguir representa a função horária do espaço de um móvel em trajetória retilínea e em movimento uniforme.



Com base nele, determine a velocidade e a função horária do espaço deste móvel.

6) Uma bicicleta movimenta-se sobre uma trajetória retilínea segundo a função horária $S = 10 - 2t$ (no SI). Pede-se:

   a) sua posição inicial;

   b) sua velocidade;

   c) esboce o gráfico da função horária das posições.