



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA**

**MARIA DA CONCEIÇÃO LACERDA FERNANDES**

**MODELO NÃO LINEAR BAYESIANO APLICADO A PREVISÃO DE  
CRESCIMENTO POPULACIONAL PARA OS ESTADOS BRASILEIROS**

Campina Grande – Paraíba  
Abril de 2016.

**MARIA DA CONCEIÇÃO LACERDA FERNANDES**

**MODELO NÃO LINEAR BAYESIANO APLICADO A PREVISÃO DE  
CRESCIMENTO POPULACIONAL PARA OS ESTADOS BRASILEIROS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Estatística Aplicada do Departamento de Estatística do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de especialista em Estatística.

Orientador: Dr.Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros

Campina Grande, PB  
Abril de 2016

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

F363m Fernandes, Maria da Conceição Lacerda.  
Modelo não linear Bayesiano aplicado a previsão de crescimento populacional para os estados brasileiros [manuscrito] / Maria da Conceição Lacerda Fernandes. - 2016.  
33 p. : il. color.

Digitado.

Monografia (Especialização em Estatística Aplicada) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.

"Orientação: Prof. Dr. Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros, Departamento de Estatística".

1. Inferência Bayesiana. 2. Crescimento Populacional. 3. Curvas de Crescimento. 4. Modelos não lineares. I. Título.

21. ed. CDD 519.5

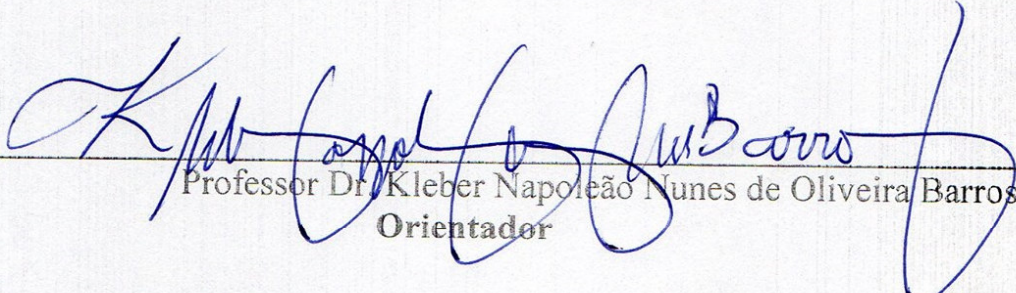
**MARIA DA CONCEIÇÃO LACERDA FERNANDES**

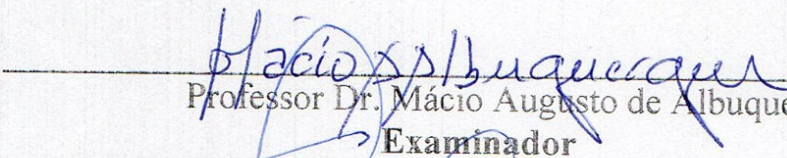
**MODELO NÃO LINEAR BAYESIANO APLICADO A PREVISÃO DE  
CRESCIMENTO POPULACIONAL PARA OS ESTADOS BRASILEIROS**

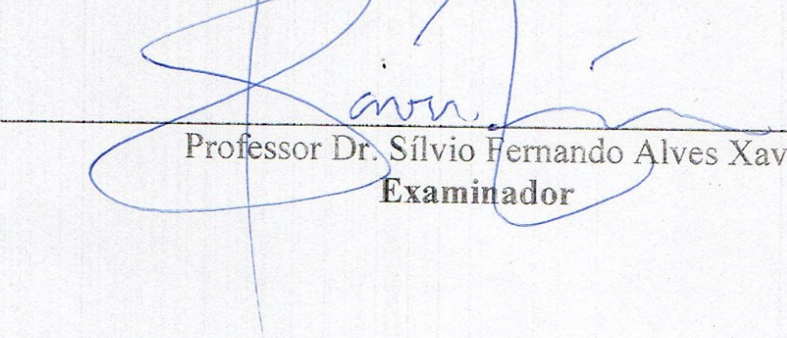
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Estatística Aplicada do Departamento de Estatística do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de especialista em Estatística.

Aprovada em: 20 / 04 / 2016

**Banca examinadora**

  
\_\_\_\_\_  
Professor Dr. Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros  
**Orientador**

  
\_\_\_\_\_  
Professor Dr. Mácio Augusto de Albuquerque  
**Examinador**

  
\_\_\_\_\_  
Professor Dr. Sílvio Fernando Alves Xavier Júnior  
**Examinador**

Campina Grande, PB – Brasil  
Abril de 2016

## AGRADECIMENTOS

Ao coordenador João Gil de Luna do curso de Especialização, por seu empenho.

Ao professor Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros pelas leituras sugeridas ao longo dessa orientação e pela dedicação.

Aos meus familiares e amigos próximos que me deram forças para conquistar esse legado.

Aos professores do Curso de Especialização da UEPB, que contribuíram ao longo de trinta meses, por meio das disciplinas e debates, para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos funcionários do Departamento de Estatística, pela presteza e atendimento quando nos foi necessário.

Aos colegas de classe pelos momentos de amizade e apoio.

O meu muito Obrigada!

“Deus não escolhe os capacitados, capacita os escolhidos. Fazer ou não fazer algo só depende da nossa vontade e perseverança.”

Albert Einstein

## RESUMO

Nos modelos não lineares têm-se os ajustes dos dados através de uma combinação não linear dos parâmetros. A inferência bayesiana é uma importante ferramenta que pode ser aplicada a este tipo de modelo. Dados de crescimento são essencialmente não lineares, possibilitando assim o uso dessa técnica em suas análises; haja vista que a teoria bayesiana tem grande vantagem de propiciar a previsão de probabilidades de modo direto. Os municípios brasileiros recebem recursos governamentais federais com base em dados estatísticos demográficos coletados a cada dez anos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) como também, com levantamentos feitos periodicamente por amostragens em domicílios, obtendo-se assim informações anuais sobre características demográficas e socioeconômicas da população denominadas por Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD). O objetivo desse trabalho é estimar o crescimento populacional brasileiro nos estados e distrito federal referente aos anos de 2016 e 2020, tendo por base resultados demográficos dos Censos relativos aos anos de 1991, 2000, 2010 e 2012; fazendo-se uso de um modelo assintótico, o exponencial com três parâmetros, aplicando-se também o modelo bayesiano na análise dos dados, no intuito de se estimar bem os parâmetros. Com a aplicação de tais técnicas foi possível obter previsões de mudanças no contingente populacional brasileiro por estado, para os respectivos anos (2016 e 2020). As regiões Norte e Centro-Oeste demonstraram um aumento significativo em suas populações. Taxas populacionais menores foram verificadas em regiões litorâneas.

**Palavras-chaves:** Inferência Bayesiana; Crescimento Populacional; Curvas de Crescimento.

## ABSTRACT

In Non-Linear models, we have the data settings through a combination of non-linear parameters. The Bayesian inference is an important tool that can be applied to this type of model. The data growth are essentially non-linear, enabling the use of this technique in its analysis; given that the Bayesian theory has a great advantage of providing predictable probabilities in a direct mode. Brazilian municipalities receive federal governmental funding based on demographic statistics collected every ten years by Brazilian Institute of Geography and Statistics (IBGE) as well as surveys conducted periodically by sampling in households, obtaining annual informations about demographic and socioeconomics characteristics from the population called by National Sample Survey (PNAD). This paper aims to estimate the brazilian populational growth in the states and the federal district according to the years 2016 and 2020, basing on the results of this demographic Census related to the years 1991, 2000 2010 e 2012; Making use of an asymptotic model, exponential with three parameters, also applying the Bayesian model in the data analysis, in order to estimate well the parameters. Applying such techniques was possible to obtain forecast changes in the Brazilian population contingent by states, for the respective years (2016 and 2020). The North and Midwest regions showed a significant increase in their populations. Lower rates were observed in the coastal regions.

**Keywords:** Bayesian Inference; Population growth; Growth curves



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Populações do ano de 2012 observados para cada estado e valores preditos 95% de confiança	25
Figura 2 – Taxas de crescimento previstas para 2016 para cada estado Exemplo de curvas Bayesianas	26
Figura 3 – Taxas de crescimento previstas para 2020 para cada estado	27
Figura 4 - Taxas de crescimento previstas para 2020 para cada estado	28
Figura 5 - População predita para o ano de 2020 para cada estado	28
Figura 6 - Populações preditas de 2016- 2030 para os nove menores estados em número de habitantes.	29

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1:</b> Algumas equações aplicadas em modelos não lineares.	17
<b>Tabela 2:</b> Codificação dos estados brasileiros.	23
<b>Tabela 3:</b> Estatísticas do parâmetro alfa para cada estado.	23
<b>Tabela 4:</b> Estatísticas do parâmetro beta para cada estado.	24
<b>Tabela 5:</b> Estatísticas do parâmetro gama para cada estado.	25

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
<b>2 REVISÃO DE LITERATURA .....</b>	<b>12</b>
<b>2.1 Demografia e Crescimento populacional.....</b>	<b>12</b>
<b>2.2 Modelos de Regressão Não Linear .....</b>	<b>15</b>
<b>2.2.1 Linearização .....</b>	<b>17</b>
	<b>18</b>
<b>2.3 Métodos de Estimação (Modelos Não Lineares) .....</b>	
<b>2.4. Inferência Bayesiana .....</b>	<b>19</b>
<b>3.METODOLOGIA .....</b>	<b>20</b>
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>23</b>
<b>5 CONCLUSÃO .....</b>	<b>30</b>
<b>6. REFERÊNCIAS .....</b>	<b>31</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Os municípios brasileiros recebem recursos governamentais federais com base em dados estatísticos demográficos divulgados pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística). Os mesmos são coletados em intervalos de dez anos, bem como, por meio de levantamentos feitos periodicamente através de amostragens em domicílios, onde se obtêm informações anuais sobre características demográficas e socioeconômicas da população denominadas por PNAD (Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios). O intuito de tais levantamentos é atualizar e estimar o contingente populacional brasileiro (SOUZA, 2012).

Conforme Neto *et.al* (2013), na análise de dados de crescimento, a utilização de funções matemáticas não lineares tem se mostrado eficientes para descrever curvas de crescimento, pelo fato de sintetizarem um grande número de medidas em alguns parâmetros com significado biológico que colaboram na interpretação e entendimento do fenômeno. Uma alternativa altamente eficiente para se trabalhar com dados desta natureza é a Teoria Bayesiana. Segundo Plentz (2003), esta teoria permite calcular a densidade a *posteriori* de uma variável aleatória desejada com base em sua densidade a *priori* e o conjunto de dados.

Neste trabalho, objetiva-se estimar o crescimento populacional no Brasil por estado para os anos de 2016 e 2020, tendo por base resultados demográficos dos Censos referentes aos anos de 1991, 2000, 2010 e 2012; fazendo-se uso de um modelo não linear com enfoque bayesiano na análise dos dados.

Na revisão da literatura (seção 2), são explanadas as teorias que embasaram o estudo, por diversas óticas. Compreendendo temas que abrangem a modelagem bayesiana, tais como função de verossimilhança, Teorema de Bayes e modelos de Regressão não Linear. A seção 3 é composta pela metodologia do trabalho, onde se é aplicada uma curva não linear assintótica denominada por exponencial com três parâmetros, fazendo uso também do modelo bayesiano na análise dos dados, para chegar às estimativas dos parâmetros. A seção 4 traz a apresentação dos resultados e discussão dos mesmos, na seção 5 apresentamos a conclusão para em seguida apresentarmos as referências bibliográficas (seção 5).

## 2. REVISÃO DE LITERATURA

O crescimento demográfico populacional tornou-se uma variante significativa em estudos científicos dos mais diversos tipos, a nível global. Organismos como a ONU e governos locais vêm desempenhando grandes esforços nesse sentido. Tudo isso porque esta variável está diretamente relacionada com a utilização racional dos recursos naturais, os quais nas últimas décadas vêm se tornando cada vez mais escassos. O Brasil também acompanha com bastante seriedade essa temática, através de instituições como o IBGE; o objetivo é a promoção de maneiras inteligentes de gerenciamento estatal ou privado, na incessante busca pelo desenvolvimento econômico autossustentável (ALVES, 2014).

### 2.1 Demografia e Crescimento Populacional

Segundo Baiense (2014), o acompanhamento do crescimento populacional mundial sempre teve importância para os governos em diversos momentos da história, observando seus efeitos tanto econômicos quanto sociais; haja vista a existência de uma crença de que a promoção do desenvolvimento sustentável das nações passa por essa ótica em sua logística. Em 2011, o Fundo de População das Nações Unidas (UNFPA), anunciou que a população mundial seria de 7 bilhões de habitantes. Para a Organização das Nações Unidas (ONU), em 2050 este número chegará a 9,7 bilhões de habitantes, o que dará um acréscimo de aproximadamente 2,1 bilhões de habitantes, alcançando uma taxa de crescimento de 0,33% ao ano. Para 2100 a perspectiva é de que a população mundial chegue a 11,2 bilhões de pessoas. Entretanto, essa tendência de crescimento se dará de maneira diferente nos continentes. Das 2,4 bilhões de pessoas estimadas para ser adicionada a população global no período compreendido entre 2015 e 2050, 1,3 bilhões serão na África. Por conseguinte, na Ásia se dará o segundo maior contingente, apresentando um acréscimo de 0,9 bilhão de pessoas. Segundo este mesmo relatório, a população global está distribuída da seguinte forma: 60% vivem na Ásia (4,4 bilhões), 16% na África (1,2 bilhões), 10 % na Europa (738 milhões), 9% na América Latina e no Caribe (34 milhões), e os restantes 5 % na América do Norte (358 milhões) e Oceania (39 milhões). China (1,4 bilhões) e Índia (1,3 bilhão) continuam a ser os dois maiores países do mundo, ambos com mais de 1 bilhão das pessoas, representando respectivamente 19% e 18% da população do mundo (RELATÓRIO ONU, 2015).

Ainda de acordo com o relatório da ONU, no intervalo de 2015-2050, metade do crescimento da população mundial se concentrará em apenas nove países: Índia, Nigéria,

Paquistão, República Democrática do Congo, Etiópia, República Unida da Tanzânia, Estados Unidos da América (EUA), Indonésia e Uganda, listados de acordo com o tamanho da sua contribuição para o crescimento total. Estima-se também que a população da Índia irá superar a da China, atualmente a população da China é de aproximadamente 1,38 bilhões, em comparação com 1,31 bilhões na Índia.

Lutz *et.al* (2010), enfocam a questão do decréscimo das taxas de natalidade em algumas regiões do globo na metade do século XXI, apesar da África e Ásia Ocidental, apresentarem índices de fertilidade muito elevado. O que acarretará uma redução significativa do contingente populacional, sendo indicada por projeções feitas para 2100. Algumas estimativas da população mundial total são apresentadas e traduzem tais perspectivas: o aumento populacional em 2010 foi de 6.885 milhões e 7,6 bilhões em 2020, 8,2 bilhões em 2030 e cerca de 9 bilhões até 2050. Estes números vislumbram nitidamente a projetada desaceleração da velocidade de crescimento da população mundial. Bongaarts (2009) enfatiza que países da Europa e da Ásia enfrentam declínios populacionais significativos, com taxas de natalidade caindo abaixo das taxas de mortalidade.

Em algumas regiões do globo, a taxa de fecundidade total vem declinando severamente desde 1950 até os dias de hoje. Na América Central, por exemplo, a taxa de fecundidade total era de aproximadamente 6,7 filhos; 61 anos mais tarde, essa taxa caiu para 2,6, meio ponto percentual acima do nível de reposição que é de 2,1 filhos. No Leste Asiático, a taxa de fecundidade total era de cerca de 6 filhos por mulher em 1950 e, hoje, é de 1,6, bem abaixo do nível de reposição. Em algumas partes da África, entretanto, houve apenas uma modesta queda na fecundidade total que permanece atualmente em mais de 5 filhos por mulher (UNFPA, 2011).

Já o número de pessoas com mais de 60 anos é de 893 milhões, porém no meio do século este número poderá passar de 2,4 bilhões (UNFPA, 2011). Estimativas feitas pelo U.S CENSUS BUREAU em 2013 para os continentes (em milhões), revelam percentuais crescentes da população que estarão acima de 65 anos para os anos de 2015, 2030 e 2050. Observa-se que entre 2015 e 2050 a África se destaca com menores percentuais que vai de 3,5% para 6,7%. A Ásia passa de 7,9% para 18,8%, a Europa vai de 17,4% para 27,8%, América Latina e Caribe saltam de 7,6% para 18,6%, por sua vez, América do Norte de 15,1% para 21,4% e Oceania de 12,5% para 19,5%.

Dados referentes ao crescimento populacional brasileiro, coletados e divulgados pelo Instituto de Geografia e Estatística (IBGE), entre 2009 e 2010 denotam sua evolução demográfica, com seguidos aumentos, seu contingente foi adicionado 1,29 vezes no

respectivo período, apesar da velocidade desse crescimento apresentar reduções progressivas (IBGE, 2010).

Em 2014 o IBGE estimou a população brasileira em 202,7 milhões de habitantes distribuídos pelos municípios que compõem as 27 Unidades da Federação. Sendo que os três estados mais populosos localizam-se na Região Sudeste enquanto que os três menos populosos localizam-se na Região Norte. São Paulo aparece como o mais populoso com 44,0 milhões de habitantes, representando 21,7% da população total do país, seguido por Minas Gerais com 20,7 milhões de habitantes (10,2% da população total) e Rio de Janeiro com 16,5 milhões de habitantes (8,1% da população total). O estado de Roraima é o menos populoso com 496,9 mil habitantes (0,2% da população total), seguido do Amapá com 750,9 mil habitantes (0,4% da população total) e Acre com 790,1 mil habitantes (0,4% da população total) (IBGE, 2014).

No Atlas digital do IBGE (2010) têm-se informações censitárias relativas às Regiões Sudeste, Nordeste e Sul, que compreendem, respectivamente, 42,13%, 27,83% e 14,36% do total da população brasileira, demonstrando que as mesmas continuam sendo as mais populosas do País, enquanto a Norte e a Centro-Oeste, apesar de apresentarem as maiores taxas de crescimento populacional da última década, abrangem, respectivamente, 8,32% e 7,37% da população nacional em 2010.

Entre 2000 e 2010, o crescimento populacional não aconteceu de maneira uniforme entre as grandes regiões e unidades da federação. Sendo que as maiores taxas de crescimento nesse período foram observadas nas regiões Norte (2,09%) e Centro-Oeste (1,91%). As dez Unidades da Federação que tiveram aumentos consideráveis em suas populações se encontram nas seguintes regiões: Amapá (3,45%), Roraima (3,34%), Acre (2,78%), Distrito Federal (2,28%), Amazonas (2,16%), Pará (2,04%), Mato Grosso (1,94%), Goiás (1,84%), Tocantins (1,80%) e Mato Grosso do Sul (1,66%). De acordo com o IBGE, a componente migratória contribuiu significativamente para esse crescimento (IBGE, 2011). Por outro lado, observa-se que as populações das regiões Sudeste e Nordeste cresceram a um ritmo anual abaixo da média nacional: (1,05%) e (1,07%), respectivamente.

Conforme Ávila *et.al* (2015), entre 1950 e 2010, o Brasil passou por mudanças interessantes em sua estruturação populacional, o percentual de jovens passou de 41,8 para 24,1. Os idosos passaram de 4,3% para 10,8%. A esperança de vida ao nascer passou de 45,5 para 73,4 anos. A taxa de fecundidade foi de 6,2 filhos por mulher para 1,9. Já a taxa de mortalidade por mil habitantes foi de 19,7 para 6,1, ao passo que a taxa de natalidade que era de 43,5 por mil habitantes foi para 16.

A redução do crescimento populacional, que tem como um dos fatores, baixos índices de fertilidade, leva necessariamente ao envelhecimento da mesma. Com base nas estimativas do relatório da ONU, a taxa de fertilidade globalmente deve cair de 2,5 crianças por mulher no intervalo compreendido entre 2010-2015, para 2,4 no intervalo de 2025-2030 e 2,0 em 2095-2100. Kuchemann (2011) diz que o Brasil é um país que está envelhecendo rapidamente. Em 2011, a população idosa era de 20,5 milhões, o equivalente a 10,8% da população total. Projeções indicam que, em 2020, a população idosa brasileira será de 30,9 milhões, representando 14% da população total.

O envelhecimento populacional, que se caracteriza pelo aumento da participação percentual dos idosos na população e redução dos demais grupos etários, é um fenômeno já vivenciado em nosso país, tendendo a se intensificar nas próximas décadas. Em 2004, pessoas de 0 a 29 anos de idade eram maioria (54,4%) na população, enquanto em 2014 este indicador cai para 45,7%. Na contramão, a proporção de adultos de 30 a 59 anos de idade aumentou no período, passando de 35,9% para 40,6%, assim como a participação dos idosos de 60 anos ou mais de idade, que era de 9,7% passou para 13,7%. Informações da Projeção da População por Sexo e Idade, realizada pelo IBGE, e divulgada em 2013 indicam a forte tendência de aumento da proporção de idosos na população: em 2030, seria de 18,6% e, em 2060, de 33,7%. Em 2060, a proporção da população com até 14 anos de idade seria de 13,0%; a de jovens de 15 a 29 anos de idade de 15,3% e a de pessoas de 30 a 59 anos de idade, de 38,0%<sup>2</sup> (IBGE, 2015).

## **2.2 Modelos de Regressão Não Linear**

Na literatura, o crescimento populacional é ajustado na sua grande maioria por modelos não lineares. Estes por sua vez, são modelos aplicados na análise de dados quando não se é possível fazer uso dos modelos clássicos de regressão, especialmente quando algumas condições de fundamental importância não são possíveis de se observarem no processo: a normalidade e a linearidade dos parâmetros (MATTOS, 2013). Aplicando estes modelos Fernandes *et.al* (2014), estudaram o crescimento do fruto do cafeeiro através dos modelos não lineares Gompertz e Lógico, ponderados (variâncias amostrais heterogêneas) e não ponderados. Machado *et.al* (2012), fizeram estimativas para o número de espécies biológicas denominadas macroinvertebrados bentônicos, por meio do modelo de regressão não linear, denominada Equação de Michaelis-Menten. Santos *et.al* (2007), avaliaram curvas



de crescimento morfométrico de tilápias do Nilo em função do peso corporal, aplicando os modelos não lineares Gompertz, Brody, von Bertalanffy e logístico, encontrando nos mesmos maneiras eficientes para a sua compreensão. Oliveira *et.al* (2000) acompanharam o crescimento e reprodução de vacas da raça Guzerá por um período de vinte quatro anos, fazendo uso também dos modelos Gompertz, Brody, von Bertalanffy, logístico e Richards, com o intuito de estabelecer um padrão médio de crescimento para as mesmas. O modelo von Bertalanffy sobressaiu-se sobre os demais na compreensão dos dados. Freitas (2005) ajustou estas mesmas curvas de crescimento na produção animal das seguintes espécies: camarão de água doce, rã-pimenta, coelho, frango, ovino, caprino, bovino e suíno, logrando êxito em seus objetivos.

Zeviane (2009) descreve o modelo de regressão não linear como sendo aquele em que uma variável dependente  $Y$  não pode ser escrita como funções lineares de seus parâmetros. Paula (2011) enfatiza a questão de que estes modelos não podem ser linearizáveis por meio de transformações, haja vista que admitem uma estrutura de erros aditivos. Khuri e Cornell (1987), ressalta-se que uma transformação poderá tornar-se insatisfatória quando altera a interpretação inerente do parâmetro e modificam a estrutura da distribuição do erro, ou seja, caso estes satisfaçam as condições necessárias de normalidade, independência e homogeneidade da variância, os erros do novo modelo nem sempre satisfazem os pressupostos necessários.

Modelos de regressão não linear também são aplicados quando alguma informação *a priori* existe sobre o fenômeno, como por exemplo, que a curva seja sempre crescente, caso típico em curvas de crescimento/acúmulo. Frequentemente, esses modelos têm parâmetros com interpretação física, química e biológica e outros parâmetros não têm, porém estão presentes para conferir flexibilidade (ZEVIANI, 2012).

Mazucheli *et. al* (2002) discutem que um modelo de regressão é não linear se pelo menos um de seus parâmetros aparece de forma não linear. Crawley (2012) apresenta as seguintes funções não lineares:

**Tabela1:** Algumas equações aplicadas em modelos não lineares

Assintótico	Michaelis-Mentem	$\mu = \frac{\alpha x}{1 + \beta x}$
	Exponencial com 2 parâmetros	$\mu = \alpha(1 - e^{-\beta x})$
	Exponencial com 3 parâmetros	$\mu = \alpha - \beta e^{-\gamma x}$
Sigmóide	Logística com 2 parâmetros	$\mu = \frac{e^{a+bx}}{1 + e^{a+bx}}$
	Logística com 3 parâmetros	$\mu = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-\gamma x}}$
	Weibull	$\mu = a - \beta e^{-\gamma x^\delta}$
	Gompertz	$\mu = a - \alpha e^{-\beta e^{-\gamma x}}$
Arqueada	Forma de Sino	$\mu = \alpha e^{- \beta x ^2}$
	Biexponencial	$\mu = \alpha e^{-\beta x} - \gamma e^{-\delta x}$

Conforme Carvalho (1996) as curvas de crescimento geralmente possuem a forma sigmoide com uma assíntota superior e, às vezes, apresentam também assíntota inferior. É importante salientar que normalmente para projeções de crescimento populacional é usual a aplicabilidade de modelos assintóticos, tendo em vista que sempre se espera que haja certa estabilidade da população a partir de um determinado tempo. Nas equações assintóticas apresentadas na tabela acima, quando se tem um aumento do tempo, a população tende para um valor  $\alpha$ . Zeviani *et. al* (2013) dizem que as curvas sigmóides possuem formato de “S” ao longo do tempo, já as arqueadas apresentam concavidade. A escolha do modelo deve ter como embasamento o comportamento da variável  $y$  em função do seu aumento.

### 2.2.1 Linearização

Conforme Calbo *et.al* (1989) o ajuste de curvas de crescimento pode ser desenvolvido por meio de diversas equações, as quais podem ser enquadradas nas seguintes categorias: lineares, intrinsecamente lineares e intrinsecamente não lineares. As primeiras são ajustadas através de regressão linear simples ou múltiplas; as segundas podem ser linearizáveis com o uso de transformações adequadas e, as terceiras são as que normalmente não devem ou não podem ser linearizadas por ajuste.

Pode-se fazer a linearização de modelos de regressão não linear através de alguma transformação, este processo pode ser efetivado em modelos chamados de intrinsecamente linear; um exemplo é a equação:

$$y = a \exp(bx + \epsilon). \quad (1)$$

Nesta equação, o erro experimental ou desvio  $\exp(\epsilon)$  é multiplicativo; o que permite a aplicação de logaritmo em seu processo de linearização, tornando o problema em um simples

caso de regressão linear, ou seja:  $\ln y = \ln a + bt + \epsilon$ . Por outro lado, um exemplo de equação intrinsecamente não linear é dado na equação

$$y = a \exp (bx) + \epsilon. \quad (2)$$

O erro neste caso é aditivo, o que impede a aplicação de logaritmo ou qualquer tipo de transformação para se chegar a sua linearização.

O objetivo da linearização é, portanto, facilitar a obtenção das estimativas dos parâmetros, entretanto, alguns inconvenientes poderão ocorrer, como é o caso da perda de sua interpretação intrínseca e possíveis alterações na estrutura e distribuição do erro; sendo materializadas na quebra das suposições de normalidade, independência e homogeneidade da variância (MAZUCHELI *et. al*, 2002).

### 2.3 Métodos de Estimação (para modelos não lineares)

Para Muianga (2014), modelos não lineares são aqueles em que pelo menos uma das derivadas parciais em relação aos parâmetros do modelo são dependentes de um dos parâmetros do respectivo modelo. De acordo com Ratkowsky (1983) citado por Carvalho, (1996), as propriedades de estimação diferenciam de maneira substancial os modelos não lineares dos lineares. Os pressupostos de normalidade e independência dos erros garantidos tornam os estimadores para o caso linear, não tendenciosos, de variância mínima e normalmente distribuída. Já para o caso de modelos não lineares, é necessária a condição de a amostra ser suficientemente grande.

Tem-se nesse método uma expansão em série de Taylor de primeira ordem para aproximar o modelo de regressão não linear com termos lineares, para finalmente, aplicar o método dos mínimos quadrados ordinários a fim de se estimar os parâmetros.

Segundo Björck (1996), o algoritmo de Gauss-Newton, é uma técnica usada para resolver questões de mínimos quadrados não lineares. Este método possui a grande vantagem de não se precisar fazer o cálculo das derivadas segundas; que por vezes apresentam certo grau de dificuldade em seu processo. É uma modificação do método de Newton, para se encontrar o mínimo de uma função, ou seja, apenas é utilizado para se minimizar uma soma dos valores quadrados da função, vejamos:

Sendo  $m$  funções  $r = (r_1, \dots, r_m)$  de  $n$  variáveis  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)'$ ;  $m \geq n$ , o algoritmo de Gauss-Newton iterativamente encontra o mínimo das somas dos quadrados.

$$S = (\beta) = \sum_{i=1}^m r_i^2 (\beta)$$

Tendo-se uma estimativa inicial  $\beta^{(0)}$  para o mínimo, dá-se prosseguimento as iterações

$$\beta^{(s+1)} = \beta^{(s)} - (J_r' J_r)^{-1} J_r' r(\beta^{(s)})$$

onde

$$J_r = \frac{\partial r_i}{\partial \beta_j}(\beta^{(s)})$$

é a Matriz Jacobiana de  $r$  e  $J_r'$  é a Matriz Transposta de  $J_r$ .

Na montagem de dados, para os quais objetivo é encontrar os parâmetros  $\beta$  tais que uma dada função modelo  $y = f(x, \beta)$  ajuste melhor alguns pontos de dados  $(x_i, y_i)$ , as funções  $r_i$  são os resíduos  $r_i(\beta) = y_i - f(x_i, \beta)$ .

Então, o método de Gauss-Newton pode ser expresso em termos do Jacobiano da função  $f$  como

$$\beta^{(s+1)} = \beta^{(s)} - (J_f' J_f)^{-1} J_f' r(\beta^{(s)})$$

É válido frisar que a suposição  $m \geq n$  na demonstração do algoritmo é imprescindível, visto que a matriz  $J_r' J_r$  não poderá ser invertível e as equações normais não poderão ser resolvidas.

## 2.4 Inferência Bayesiana

De acordo com Mendes (2011), a inferência bayesiana pode ser aplicada em casos onde se tem experimentos pequenos, com poucas medições no tempo e que seriam inviáveis a sua análise com a estatística clássica. A autora ressalta ainda que tendo em vista que na metodologia bayesiana os parâmetros são tratados como variáveis aleatórias dentro do modelo, irá existir a necessidade de um menor número de dados; visto que os conceitos probabilísticos envolvidos reduzem a dependência do ajuste do modelo em relação a quantidade de observações utilizadas.

Nascimento (2009) traduz o desenvolvimento da Teoria Bayesiana como sendo observações  $y$ , pertencentes à certa população cujos valores são originários de distribuições probabilísticas e descritos por uma função densidade  $f(y|\theta)$ . Por sua vez,  $\theta$  corresponde a uma característica da população, que descreve o processo da distribuição da variável. A ideia de que o pesquisador disponha de algum conhecimento prévio sobre a característica em questão  $\theta$  é de fundamental importância na Inferência Bayesiana, pois a subjetividade é à base dessa teoria; ela é aproveitada e incorporada na análise através de uma distribuição de probabilidade  $p(\theta)$  denominada de distribuição *a priori*. A função de verossimilhança é

determinada por  $L(\theta) = f(y|\theta)$  e também é chamada de distribuição observacional da amostra. Agregando esta com a distribuição a *priori* chega-se a distribuição de  $\theta$  após observar  $y$ , que é chamada de distribuição a *posteriori*. Por conseguinte esta distribuição é encontrada por meio do Teorema de Bayes, ou seja,

$$\pi(\theta|y) = \frac{f(y|\theta)p(\theta)}{\int f(y|\theta)p(\theta)d\theta}$$

Sendo o denominador uma constante em relação a  $\theta$ . A densidade  $f(y|\theta)$  é a informação proveniente dos dados (verossimilhança),  $p(\theta)$  é chamada de probabilidade a *priori* (prévia) do evento  $\theta$ ,  $\pi(\theta|y)$  é a probabilidade a *posteriori* (posterior) do evento  $\theta$  dado o evento  $y$ .

A distribuição a *posteriori* pode ser também escrita da seguinte forma:

$$\pi(\theta|y) \propto f(y|\theta) p(\theta).$$

Arrabal (2012) afirma que a Inferência Bayesiana apresenta todas as formas de incerteza em termos de probabilidade, o que não acontece na teoria clássica. Para Rossi (2011), a Inferência Bayesiana é uma metodologia estatística inovadora, que trabalha com a análise de dados tendo como embasamento a probabilidade condicional. A teoria clássica tem em sua estruturação, estimativas alicerçadas em informações presentes em amostras aleatórias. A teoria Bayesiana passa por essa perspectiva, porém uma diferença fundamental entre as duas é que na primeira o parâmetro  $\theta$  é visto como um escalar ou vetor desconhecido e fixo. Já na segunda  $\theta$  é tido como um escalar ou vetor aleatório desconhecido, e que é quantificado em termos de probabilidade e formalmente designado por distribuição a *priori*. São exatamente as informações a *priori* e amostrais que permitem a modelagem e a atualização das estimativas dos parâmetros a *posteriori* através da regra de Bayes. Dentro dessa perspectiva, o parâmetro no conceito bayesiano é considerado como sendo aleatório; podendo-se assim especificar uma distribuição de probabilidade, fazendo-se uso da probabilidade subjetiva para o parâmetro, a qual é denominada de distribuição a *priori*, que em sua essência, reflete a crença inicial que o pesquisador tem sobre o parâmetro  $\theta$  (DEVORE, 2006).

### 3 METODOLOGIA

Modelos de Crescimento são amplamente utilizados em estudos que acompanham o desenvolvimento de certas populações, principalmente quando se trabalha no campo da biologia. De certo que modelos não lineares permitem fazer uma análise dos dados com maior eficiência e menores custos. Neste trabalho, a parte não linear dos dados foi observada através da equação exponencial de 3 parâmetros, apresentada na **Tabela 1**. As quantidades aleatórias envolvidas no modelo foram trabalhadas por meio da metodologia bayesiana, a qual permite chegar a excelentes previsões (Rossi, 2011). Portanto, fazendo uso do software OpenBUGS trabalhou-se a seguinte estrutura na análise dos dados:

$$\left. \begin{aligned}
 &\mu_{i,j} = \alpha_i - \beta_i \cdot e^{(-\gamma_i) \cdot x_j} \\
 &y_{i,j} = \log(\text{pop}_{i,j}) \\
 &y_{i,j} \sim N(\mu_{i,j}; \tau) \\
 &y_{\text{pred}_{i,j}} \sim N(\mu_{i,j}; \tau) \\
 &\text{pop}_{\text{pred}_{i,j}} = e^{y_{\text{pred}_{i,j}}} \\
 &\text{pop}_{\text{pred}_{2012}_i} = e^{y_{\text{pred}_{i,4}}} \\
 &\mu_{2016}_i = \alpha_i - \beta_i \cdot e^{(-\gamma_i) \cdot x_{\text{pred}}} \\
 &y_{\text{pred}_{2016}_i} \sim N(\mu_{2016}_i; \tau) \\
 &\text{pop}_{\text{pred}_{2016}_i} = e^{y_{\text{pred}_{i,4}}} \\
 &R_{\text{pred}_i} = \left[ \left( \frac{\text{pop}_{\text{pred}_{2016}_i}}{\text{pop}_{\text{pred}_{2012}_i}} \right)^{1/4} - 1 \right] \cdot 100 \\
 &\alpha_i \sim G(1.2, 0.1) \\
 &\beta_i \sim G(0.1, 0.1) \\
 &\gamma_i \sim G(0.01, 0.1) \\
 &\tau \sim G(0.01, 0.01)
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 1 \leq j \leq M \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ i \leq N \end{array}$$

A primeira equação nos dá a média por estado (ou distrito federal)  $i = 1, 2, \dots, 27$  (cada estado brasileiro foi codificado em conformidade com a ordem alfabética (observe **Tabela 2**) no tempo  $j = 1, 10, 20, 22$  (codificações para 1991, 2000, 2010 e 2012).

Por sua vez, temos na segunda equação as estimativas populacionais para as respectivas variáveis através da transformação logarítmica dos dados. Na terceira, temos assegurado que as variáveis seguem uma distribuição normal. A quarta equação dá os valores preditos de  $y$ , referente aos mesmos parâmetros. Seguidamente, temos a equação dos valores preditos para a população em qualquer estado ou tempo. Particularmente, na sexta equação encontram-se os valores estimados preditos para a população no ano 2012. A média estimada

para o ano de 2016 é auferida na sétima equação, em que  $xpred = 26$ . A garantia de normalidade dos valores preditos para o ano de 2016 é verificada na equação oito. O modelo **poppred2016<sub>i</sub>** nos dá uma estimativa da população brasileira por estado para 2016. A nona equação conduz aos valores relativos de crescimento da população entre os anos de 2012 e 2016. As demais equações exprimem os parâmetros pertencendo a uma distribuição Gama.

De acordo com Magalhães (2006), a distribuição gama possui a função densidade dada por:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} I_{(0,\infty)}(x),$$

Sendo  $\alpha$  e  $\beta$  dois parâmetros positivos e com  $\Gamma(\alpha)$  sendo a função matemática gama, definida por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0.$$

Alguns resultados dessa função são importantes frisar:

- i.  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \alpha > 0$ ;
- ii.  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ ,  $n$  inteiro positivo;
- iii.  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

Além disso, dependendo dos valores dos parâmetros o modelo gama recebe outros nomes, tais como:

- i.  $\alpha = 1, \beta > 0$ , Exponencial;
- ii.  $\alpha = \frac{n}{2}, n > 0$  inteiro,  $\beta = \frac{1}{2}$ , Qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade;
- iii.  $\alpha = k, k$  inteiro,  $\beta > 0$ , Erlang de ordem  $k$ .

Com a inversão da equação que segue, encontra-se a estimativa para a taxa de crescimento por estado para os anos de 2012 e 2016, ou seja:

$$\mathbf{pop2016} = \mathbf{pop2012} \left(1 + \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{100}}\right)^4$$

Observa-se que se trata de uma Progressão Geométrica. O mesmo procedimento foi utilizado para se obter projeções populacionais para o ano de 2020.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Ao procedermos à análise dos dados, fez-se necessário fazer a codificação dos estados, apresentada na tabela a seguir, conforme citado anteriormente.

**Tabela 2:** codificação dos estados brasileiros.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
AC	AL	AM	AP	BA	CE	DF	ES	GO
10	11	12	13	14	15	16	17	18
MA	MG	MS	MT	PA	PB	PE	PI	PR
19	20	21	22	23	24	25	26	27
RJ	RN	RO	RR	RS	SC	SE	SP	TO

Foram encontradas as estatísticas dos parâmetros  $(\alpha, \beta, \gamma)$  do modelo escolhido, para cada estado e o Distrito Federal. Os resultados são expostos nas próximas Tabelas.

Se, ao dividirmos os valores da média menos um pelos valores do erro-padrão encontrarmos um número diferente de um, teremos uma estimativa significativa para os parâmetros. A sétima coluna da **Tabela 3** traz essa informação. Verifica-se, por exemplo, que para o estado do Acre, o parâmetro alpha ( $\alpha = 13,4301$ ) é diferente de um, o mesmo acontece para beta ( $\beta = 0,3636$ ) e gama ( $\gamma = - 0,7692$ ).

**Tabela 3:** Estatística do parâmetro alfa para cada estado.

PARÂMETROS	MÉDIA	E.P	q2,5%	MEDIANA	q97,5%	(MÉDIA - 1)/E. P
alpha[1]	13,58	0,9367	1,25E+001	13,28	15,56	13,43012704
alpha[2]	14,22	0,8055	1,35E+001	13,8	16,07	16,41216636
alpha[3]	14,83	0,6278	1,42E+001	14,59	16,5	22,0293087
alpha[4]	16,29	4,529	12,76	13,85	24,91	3,376021197
alpha[5]	15,13	0,6222	1,46E+001	14,81	16,43	22,70973963
alpha[6]	14,81	0,3274	1,45E+001	14,69	15,73	42,18081857
alpha[7]	15,39	0,9395	1,45E+001	14,95	17,73	15,3166578
alpha[8]	12,75	0,2514	1,25E+001	12,68	13,58	46,73826571
alpha[9]	14,23	0,4194	1,39E+001	14,07	15,32	31,54506438
alpha[10]	13,99	0,4197	1,36E+001	13,82	15,16	30,95067906
alpha[11]	15,03	0,6287	1,45E+001	14,71	16,45	22,31588993
alpha[12]	18,05	1,975	1,35E+001	18,59	20,97	8,632911392
alpha[13]	13,34	0,3742	1,30E+001	13,2	14,46	32,97701764
alpha[14]	14,75	0,7655	1,40E+001	14,35	16,4	17,96211626
alpha[15]	14,75	0,944	1,33E+001	1,54E+001	15,62	14,56567797
alpha[16]	14,44	0,3436	1,41E+001	14,29	15,2	39,11525029
alpha[17]	13,73	0,3948	1,34E+001	13,59	15,04	32,24417427
alpha[18]	14,64	0,5918	1,42E+001	14,36	16,17	23,04832714
alpha[19]	16,16	0,6956	1,55E+001	15,76	17,61	21,79413456
alpha[20]	13,62	0,1831	1,34E+001	13,57	14,14	68,9240852
alpha[21]	13,28	0,7306	1,27E+001	12,98	15,51	16,80810293
alpha[22]	13,24	0,9058	1,22E+001	12,98	15,66	13,51291676
alpha[23]	14,21	0,1106	1,40E+001	1,42E+001	14,46	119,4394213
alpha[24]	20,69	2,797	1,58E+001	20,44	25,39	7,039685377
alpha[25]	13,3	0,2787	1,30E+001	13,21	14,12	44,13347686
alpha[26]	16,33	0,2898	1,61E+001	16,24	17,26	52,89855072
alpha[27]	12,9	0,5132	12,3	12,77	14,36	23,187841



Vale ressaltar que na terceira coluna das tabelas (E.P) corresponde ao erro padrão e que o fato de aparecer valores negativos para os parâmetros não gera distorção nos resultados, o importante é que eles sejam maiores que 2 ou menores do que -2, o que indica que as estimativas são diferentes de 1 para mais ou para menos.

**Tabela 4:** Estatísticas do parâmetro beta para cada estado.

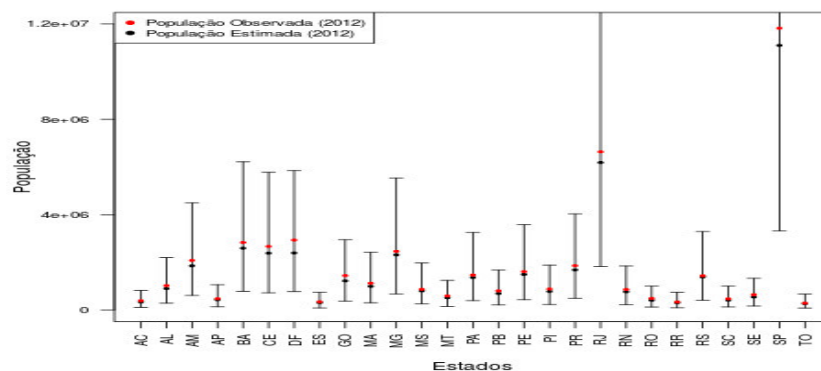
PARÂMETROS	MÉDIA	E. P	q2,5%	MEDIANA	q97,5%	(MÉDIA - 1)/E.P
beta[1]	1,513	1,411	8,84E-005	1,238	3,584	0,363571935
beta[2]	0,9466	1,388	4,24E-005	0,5294	2,885	-0,038472622
beta[3]	1,202	1,351	0,001971	0,9427	3,261	0,149518875
beta[4]	4,334	4,535	0,6492	1,886	12,85	0,735170893
beta[5]	0,5315	1,088	5,91E-008	0,1011	1,833	-0,430606618
beta[6]	0,5007	1,278	3,76E-006	0,1785	2,529	-0,390688576
beta[7]	1,158	1,332	5,77E-007	0,757	3,697	0,118618619
beta[8]	0,3151	0,9948	1,77E-006	0,0416	1,721	-0,688480097
beta[9]	0,5138	1,106	1,49E-006	0,2007	2,356	-0,43960217
beta[10]	0,6002	1,238	5,30E-006	0,2748	2,567	-0,322940226
beta[11]	0,55	0,974	1,02E-006	0,1106	1,929	-0,46201232
beta[12]	4,769	1,947	0,09223	5,305	7,555	1,935798665
beta[13]	0,4851	1,099	1,02E-006	0,1429	2,262	-0,468516833
beta[14]	0,7638	1,272	1,29E-005	0,4568	2,385	-0,185691824
beta[15]	1,499	1,097	2,32E-004	2,097	2,097	0,454876937
beta[16]	0,3802	1,037	1,29E-005	0,1601	1,385	-0,597685632
beta[17]	0,4912	1,217	3,55E-005	0,1239	2,337	-0,418077239
beta[18]	0,519	1,188	1,06E-005	0,04932	2,299	-0,404882155
beta[19]	0,6518	0,889	1,13E-005	0,2824	1,99	-0,39167604
beta[20]	0,3231	1,043	1,30E-005	0,06821	1,936	-0,648993289
beta[21]	0,8108	1,862	2,07E-006	0,4158	3,051	-0,101611171
beta[22]	1,382	1,262	0,001006	1,243	3,956	0,302694136
beta[23]	0,0905	0,1033	1,54E-005	0,09164	0,3818	-8,804743466
beta[24]	8,174	2,809	3,341	7,852	12,76	2,553933784
beta[25]	0,4195	1,087	7,41E-005	0,07218	1,933	-0,534038638
beta[26]	0,3048	0,9928	1,62E-007	0,03983	1,483	-0,700241741
beta[27]	3,115	0,5154	2,474	3,024	4,407	4,103608847

Todos os três parâmetros satisfizeram a condição exposta acima (ou seja, de estarem acima de 2 ou abaixo de -2).

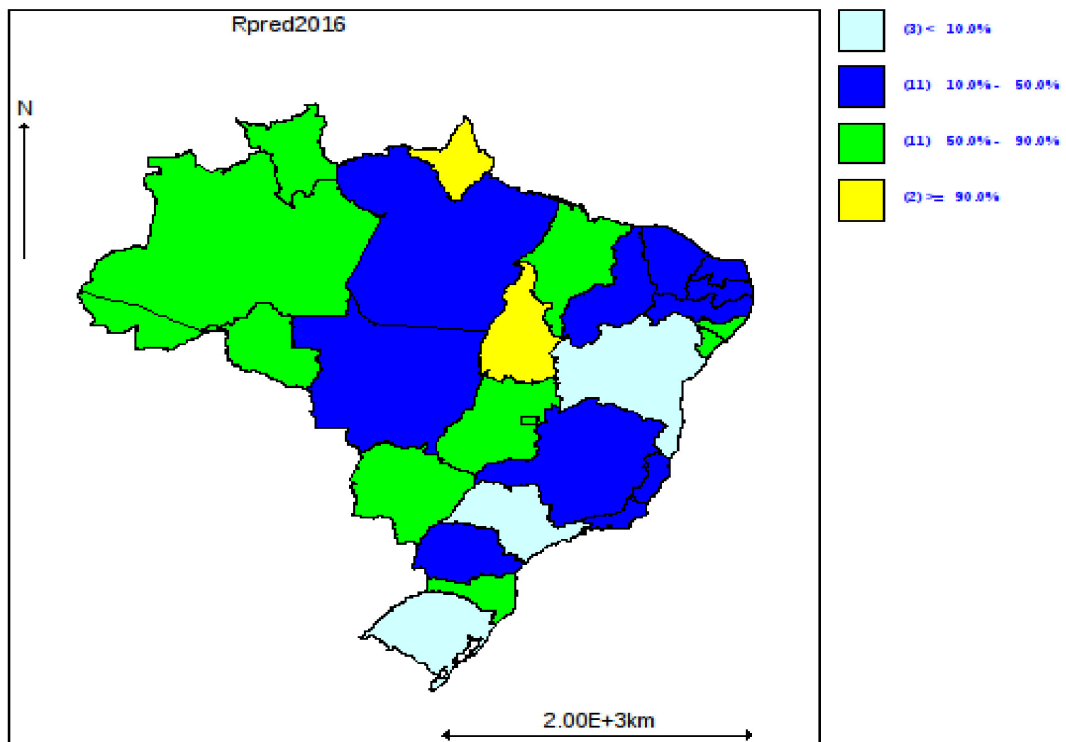
**Tabela 5:** Estatísticas do parâmetro gama para cada estado.

PARÂMETROS	MÉDIA	E.P	q2,5%	MEDIANA	q97,5%	(MÉDIA - 1)/E.P
gama[1]	0,2445	0,9822	3,86E-004	0,02762	2,093	-0,769191611
gama[2]	0,526	1,794	2,08E-005	0,02292	4,468	-0,264214047
gama[3]	0,363	1,867	2,96E-006	0,05787	2,411	-0,341189073
gama[4]	0,1047	0,3075	0,002425	0,03246	0,9199	-2,911544715
gama[5]	0,5549	2,013	3,48E-006	0,01166	5,477	-0,221112767
gama[6]	0,9617	2,589	8,56E-005	0,06684	7,495	-0,014793357
gama[7]	0,3438	1,059	1,62E-006	0,02807	2,82	-0,619641171
gama[8]	0,9443	2,757	8,35E-006	0,0331	7,97	-0,020203119
gama[9]	0,6332	2,146	2,90E-006	0,02612	5,307	-0,170922647
gama[10]	0,887	2,924	9,40E-005	0,05871	7,976	-0,038645691
gama[11]	1,254	3,422	5,46E-006	0,03276	10,44	0,074225599
gama[12]	0,0577	0,4071	2,92E-007	0,001933	0,5699	-2,314664702
gama[13]	0,9426	2,6	7,91E-005	0,0863	8,475	-0,022076923
gama[14]	0,773	2,914	8,19E-006	0,002848	7,708	-0,077899794
gama[15]	0,2302	1,293	2,48E-007	2,48E-007	2,391	-0,595359629
gama[16]	0,8028	2,859	5,14E-006	0,002139	6,868	-0,068975166
gama[17]	0,9986	3,216	5,71E-005	0,02964	8,411	-0,000435323
gama[18]	0,5964	2,177	6,92E-006	0,01603	5,388	-0,185392742
gama[19]	0,9274	2,952	5,14E-006	0,002388	10,16	-0,024593496
gama[20]	0,9004	2,75	6,67E-006	0,03996	8,405	-0,036218182
gama[21]	0,8455	2,31	6,88E-005	0,04347	4,938	-0,066883117
gama[22]	0,1062	0,4327	7,88E-006	0,02809	0,8579	-2,065634389
gama[23]	0,07698	0,6411	2,67E-008	2,67E-008	0,6247	-1,43974419
gama[24]	0,003215	0,002706	2,10E-006	0,002841	0,009232	-368,3610495
gama[25]	0,6705	2,313	4,94E-005	0,02457	6,397	-0,142455685
gama[26]	1,247	2,907	1,17E-005	0,05694	8,964	0,08496732
gama[27]	0,1208	0,07771	0,04137	0,1107	0,2421	-11,31385922

A **figura 1** consiste numa técnica visual de validação do modelo empregado. Nela estão representados os tamanhos populacionais do ano de 2012 observados para cada estado, bem como os valores preditos pelo modelo com barras de erros com 95% de credibilidade. Observa-se que todos os valores observados estão próximos aos valores previstos e dentro das barras de erros. O mesmo acontece para os outros anos observados, indicando assim um bom ajuste do modelo aos dados.

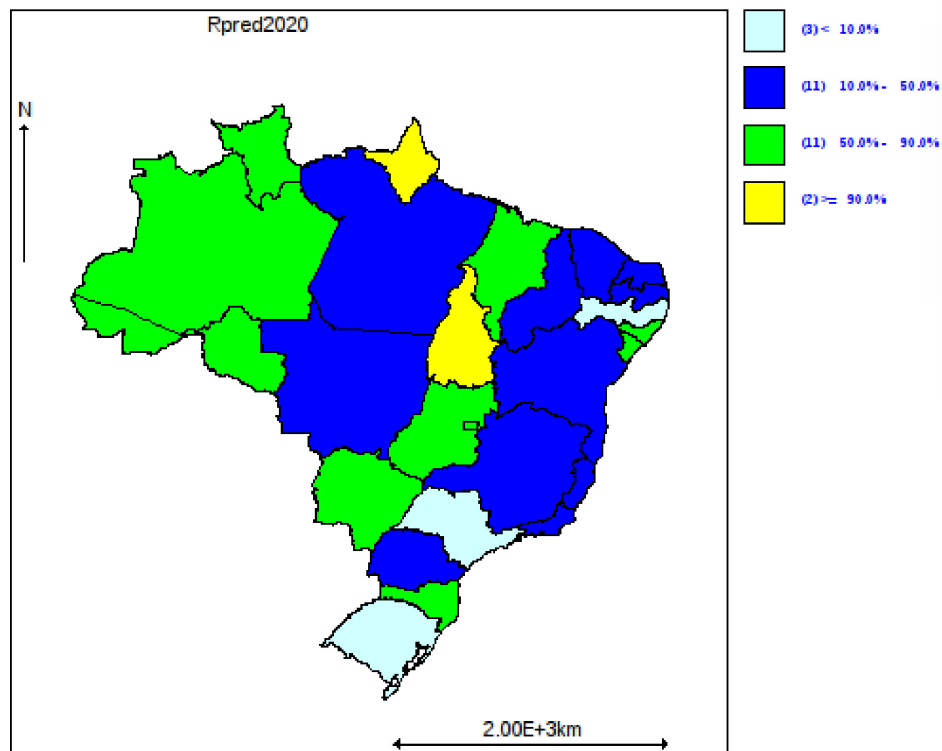
**Figura 1:** populações do ano de 2012 observados para cada estado e valores preditos 95% de confiança.

A análise dos dados através do software citado proporcionou a obtenção de mapas do Brasil, nos quais os estados estão coloridos em conformidade com o número de habitantes estimados para os mesmos. A **Figura 2** representa um destes mapas, em que são apresentadas estimativas populacionais (em percentuais) para o ano de 2016. Observa-se a ocorrência de taxas populacionais menores nas regiões que compreendem o litoral, enquanto que os estados que estão dispostos geograficamente no interior do país possuem taxas maiores de crescimento.



**Figura 2:** Taxas de crescimento previstas para 2016 para cada estado.

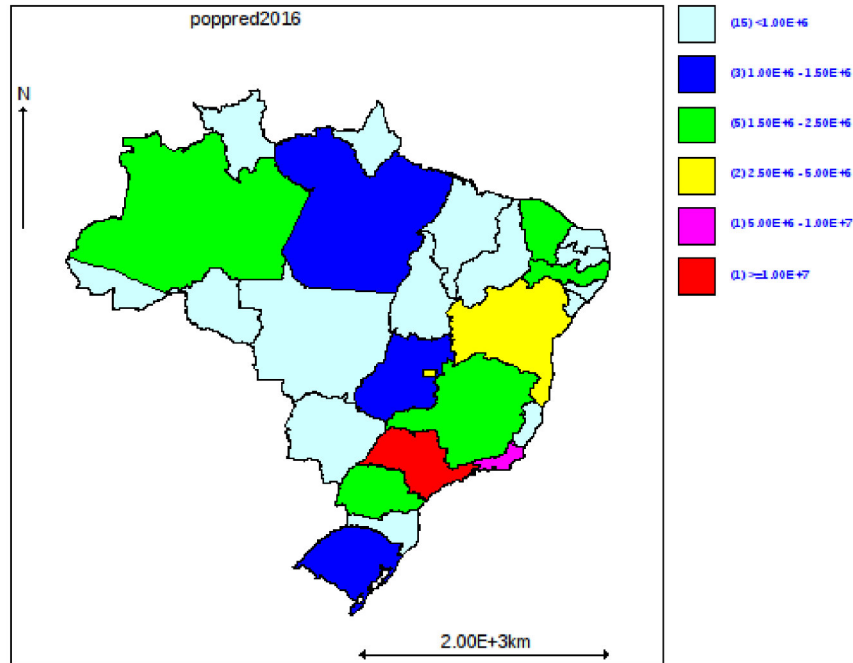
A **Figura 3**, também é composta por estimativas populacionais para os estados e Distrito Federal, todavia referente ao ano de 2020. O comportamento dos dados revela projeções com a mesma perspectiva, onde áreas litorâneas aparecem com taxas menores das demais, denotando assim um aumento em suas populações.



**Figura 3:** Taxas de crescimento previstas para 2020 para cada estado.

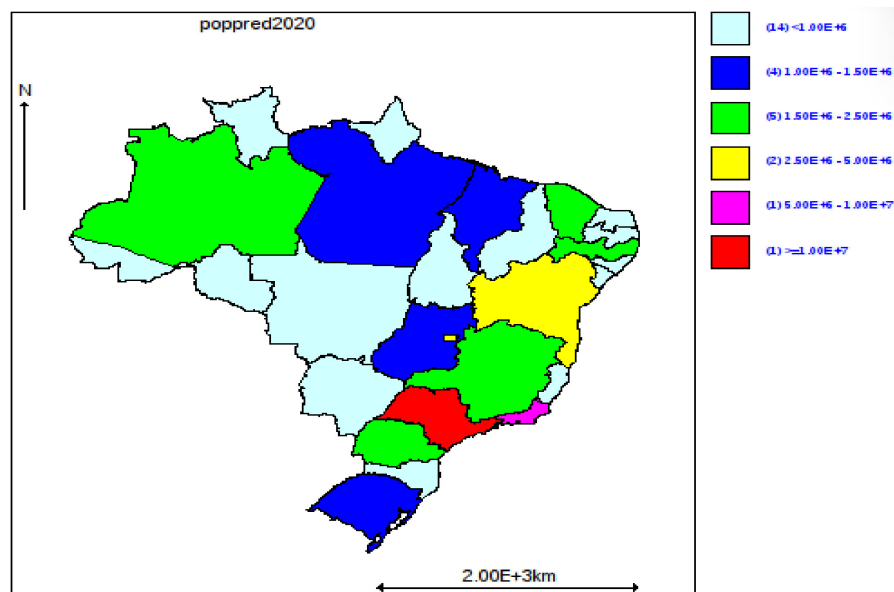
Verifica-se também que está acontecendo uma transferência de pessoas de áreas mais densamente povoadas para áreas menos povoadas. A análise gráfica corrobora os índices estatísticos disseminados pelo Instituto de Geografia e Estatística (IBGE) em 2010, conforme citado anteriormente, os quais indicavam crescimento populacional para região Norte de 2,09% e Centro-Oeste com 1,91%. Outros estudos como o de Noronha *et.al* (2013), ressaltam também as regiões Sudeste, Nordeste e Sul como sendo as mais populosas e que as regiões menos populosas, Norte e Centro-Oeste, continuam crescendo a um ritmo mais veloz que as demais no período compreendido entre 2000 e 2010. Na **Figura 1**, por exemplo, aparecem taxas bastante significativas para os estados de Tocantins e Amapá (cor amarela) que aparecem com valores a partir de 90%. Roraima, Amazonas, Acre, Rondônia, Mato grosso, Mato Grosso do Sul, Goiás, seguidos pelos estados do nordeste Alagoas e Sergipe, bem como pelo estado do sul (Santa Catarina) possuem taxas consideradas positivas ao crescimento populacional que giram entre 50% e 90%. O destaque em nossas previsões se dá para os dois estados nordestinos, já que o IBGE indicava uma queda para a região nordeste. Os estados com menor taxa de crescimento são Rio Grande do Sul, São Paulo e Bahia (taxas menores que 10%). As estimativas presentes na Figura 2 referentes a 2020, também remetem aos mesmos percentuais para os estados de Tocantins e Amapá (maior que 90%). Todavia Pernambuco passa a apresentar um percentual diferente de crescimento que chega a ser menor do que 10%. Bahia por sua vez, aparece com acréscimo percentual maior, variando entre 10% e 50%.

As **Figuras 4 e 5** correspondem às populações previstas para os estados e Distrito Federal. Elas evidenciam que das populações previstas para 2016 e 2020, somente o estado do Maranhã tende mudar de categoria.



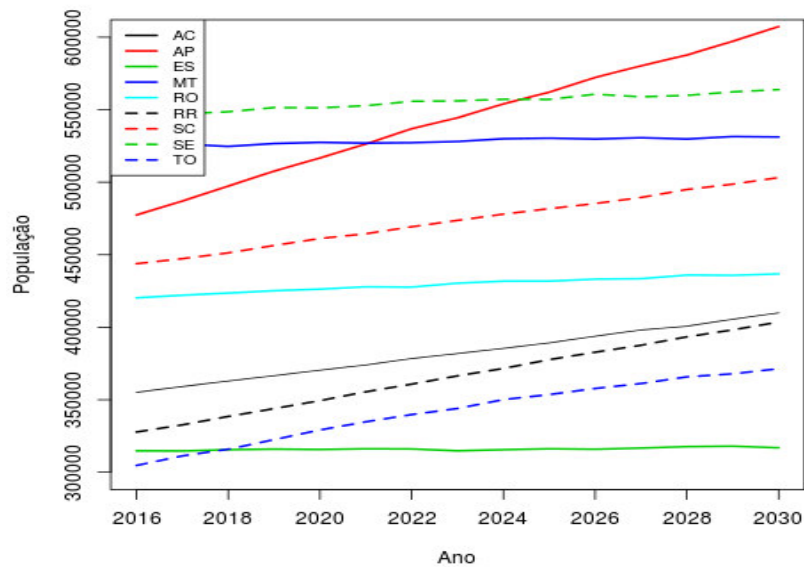
**Figura 4:** população prevista para o ano de 2016 para cada estado.

Em ambas as figuras, o Estado de São Paulo aparece com uma população acrescida de dez milhões de pessoas. Em seguida, vem o estado do Rio de Janeiro apresentando um aumento entre cinco e dez milhões de pessoas. Bahia e Distrito Federal também se destacam nesta linha de raciocínio, com suas populações variando entre dois milhões e meio e cinco milhões.



**Figura 5:** população prevista para o ano de 2020 para cada estado.

A **Figura 6** traz um gráfico onde estão dispostas as populações previstas entre os anos de 2016 e 2030 para os nove menores estados (em número de habitantes) do país. Observe que alguns estados como Amapá, Roraima, Tocantins e Santa Catarina tenderão a continuar crescendo bastante nos próximos 15 anos, enquanto estados como Mato Grosso, Espírito Santo e Rondônia parecem ter atingido um limiar de crescimento. Portanto, espera-se que as populações destes últimos estados não sofram grandes alterações nos próximos anos.



**Figura 6:** populações previstas de 2016- 2030 para os nove menores estados em número de habitantes.

De modo geral, estas projeções são convergentes com as estimativas feitas pelo Instituto de Geografia e Estatística (IBGE), principalmente as relacionadas aos estados do nordeste.

## 5 CONCLUSÃO

Pode-se observar pela literatura apresentada no trabalho a existência de uma dinâmica demográfica expressiva que abrange os continentes de maneira peculiar, onde taxas de crescimento populacionais em sua maioria se apresentam decrescentes, apesar de se verificar aumentos contínuos no contingente populacional mundial, existem projeções para uma estabilização da mesma, e finalmente, o seu desaceleramento a partir de 2100. Verifica-se ainda o desempenho estimado para a África em termos de esta promover o maior aumento a população global em relação aos demais continentes, como também, do baixo desempenho populacional da Europa. O envelhecimento da população mundial é outro aspecto bastante interessante no processo. Dados demográficos pertinentes ao Brasil também acompanham este ritmo: acréscimos populacionais constantes com desaceleração em suas taxas de natalidade e envelhecimento de sua população.

Em relação à aplicação do modelo baesiano, verifica-se nos resultados alcançados que o mesmo cumpre de maneira promissora o seu objetivo principal, que é o de estimar bem as taxas de crescimento populacionais dos estados brasileiros. Os dados trabalhados espelham o crescimento da população brasileira, porém, com escala menor em estados constituídos tanto por maior desenvolvimento como por um contingente populacional abundante. Contrariamente, os estados com menor desempenho nestas duas variantes, pontuaram projeções populacionais maiores. Os percentuais do modelo, auferidos para os estados brasileiros refletem os valores dos resultados disseminados pelo IBGE relativo ao censo demográfico 2010, expostos inicialmente.

## 6. REFERÊNCIAS

ALVES José Eustáquio Diniz. **População, desenvolvimento e sustentabilidade: perspectivas para a CIPD pós-2014**. R. bras. Est. Pop., Rio de Janeiro, v. 31, n.1, p. 219-230, jan./jun. 2014.

ÁVILA, Róber Iturriet; MACHADO, Alessandra Moreira. **Transição demográfica brasileira: desafios e oportunidades na educação, no mercado de trabalho e na produtividade**. Textos Para Discussão FEE. Texto n° 133. Secretaria de Planejamento e Desenvolvimento Regional. Fundação de Economia e Estatística Siegfried Emanuel Heuser. Porto Alegre. 2015.

ARRABAL, Claude Thiago. **Estimação Clássica e Bayesiana para relação espécie-área com Distribuições Truncadas no Zero**. (2012). Disponível em: [http://www.bdtd.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado/tde\\_arquivos/12/TDE-2012-09-05](http://www.bdtd.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado/tde_arquivos/12/TDE-2012-09-05). Acessado: 07-02-2016

BAIENSE, Érika Martins. **Análise do desenvolvimento econômico e social do Espírito Santo à luz da transição demográfica**. Dissertação apresentada à Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória. 2014

BJÖRCK, A. **Numerical methods for least squares problems** SIAM, Philadelphia [S.I.] ISBN 0-89871-360-9. 1996.

BONGAARTS, John. **Population growth and policy options in sub-saharan áfrica**. Paper presented at a special session organized by the Hewlett Foundation, PAA meetings, Detroit, May 2, 2009.

CALBO, Adonai G., SILVA. Washington LC, TORRES Antonio C.. **Ajuste de funções não lineares de crescimento**. Rev. Bras. Fisiol. Vegetal1.1 (1989): 9-18. Disponível em: <http://www.cnpdia.embrapa.br/rbfv/pdfs/v1n1p9.pdf>. Acessado em 15 de março de 2016

CARVALHO, Lídia Raquel de. **Métodos para comparação de curvas de crescimento**. (1996): 172f-il. Disponível em: <http://repositorio.unesp.br/handle/11449/101837>. Acessado em:13 de março 2016.

CRAWLEY, Michael J. John Wiley & Sons. **The R Book**, 2nd Edition, West Sussex, United Kingdom. 2012

DEVORE, Jay L. **Probabilidade e estatística: para engenharia e ciências**. Pioneira Thomson Learning, 2006.

FREITAS, Alfredo Ribeiro de. **Curvas de crescimento na produção animal**.R. Bras. Zootec, v. 34, n. 3, p. 786-795, 2005. <http://www.scielo.br/pdf/rbz/v34n3/a10v34n3>. Acesso em: 13 de abril de 2016.



FERNANDES, Tales Jesus, et.al **Seleção de modelos não lineares para a descrição das curvas de crescimento do fruto do cafeeiro**. *Coffee Science* 9.2 (2014): 207-215. [//www.coffeescience.ufla.br/index.php/Coffeescience/article/view/618](http://www.coffeescience.ufla.br/index.php/Coffeescience/article/view/618). Acessado em: 12 de Abril de 2016.

GOODKIND, Daniel. KOWAL, Paul. **An Aging World: 2015**. U.S. Census Bureau, International Population Reports, P95/16-1, , U.S. Government Publishing Office, Washington, DC, 2016.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. **ATLAS do censo demográfico**. 2010.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. Nota Técnica. **Estimativas da população dos municípios brasileiros com data de referência em 1º de julho de 2014**. DPE/COPIS/GEADD.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE. **Síntese de Indicadores Sociais Uma análise das condições de vida da população brasileira 2015**. Estudos e Pesquisas- Informação Demográfica e Socioeconômica. nº 35. Rio de Janeiro. 2015

Lutz Wolfgang; KC, Samir. **Dimensions of global population projections: what do we know about future population trends and structures?** *This journal is*. The Royal Society. 2010

KÜCHEMANN, Berlindes Astrid. **Envelhecimento populacional, cuidado e cidadania: velhos dilemas e novos desafios**. *Revista Sociedade e Estado - Volume 27 Número 1 - Janeiro/Abril 2012*.

MACHADO, Eustáquio José; MUNIZ, Joel Augusto; SÁFADI, Thelma. SAVIAN Taciana Villela. **Estimação de um modelo de espécies de macroinvertebrados bentônicos via análise bayesiana do modelo de michaelis-menten**. *Rev. Bras. Biom., São Paulo, v.30, n.1, p.106-123, 2012*.

MATTOS, Thalita do Bem . **Modelos Não Lineares e suas Aplicações**. - 2013. 58 p. : il. Disponível em: [www.ufjf.br/cursoestatistica/files/2014/04/Modelos-N%C3%A3o-Lineares-e-suas-Aplica%C3%A7%C3%B5es.pdf](http://www.ufjf.br/cursoestatistica/files/2014/04/Modelos-N%C3%A3o-Lineares-e-suas-Aplica%C3%A7%C3%B5es.pdf). Acessado: 8-03-2016 .

MAZUCHELI, Josmar; ACHCAR, Jorge Alberto. **Algumas considerações em regressão não linear**. *Acta Scientiarum*. Maringá, v. 24, n. 6, p. 1761-1770, 2002.

MENDES, Patrícia Neves. **Ajustes dos modelos Gompertz e logístico na descrição das curvas de crescimento de tomates: uma abordagem bayesiana** – Lavras: UFLA, 2011, 82 P. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Lavras, 2011. Disponível em: <http://repositorio.ufla.br/bitstream/1/4409/1/TESE>. Acessado em: 8-04-2016

MUIANGA, Carlos Alberto. **Modelos não lineares com estrutura de erros independentes e autocorrelacionados na descrição do crescimento do fruto do cajueiro**. Lavras: UFLA, 2014.

NASCIMENTO, Fernando Ferraz do. **Abordagem Bayesiana não-paramétrica para análise de valores extremos**. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2009.

NETO, Farid Sallum; CARVALHO Lídia Raquel de; MISCHAN Martha Maria. **Ajustes de modelos não lineares a dados de crescimento com estrutura de erros independentes e autorregressivos de primeira ordem-aplicações**. Rev. Bras. Biom., São Paulo, v.31, n.4, p.631-644, 2013

PAULA, Fernanda Vital de. **Métodos estatísticos aplicados à análise de dados de etiqueta de sequência expressa**. 59 p. Minas Gerais. Dissertação aprovada em 2011.

PLENTZ, Rafael Dobrachinsky. **Redes bayesianas para análise de comportamento aplicadas a telefonia celular**. Dissertação submetida à U.F.S.C. Florianópolis. 2003.

OLIVEIRA, Antônio Tadeu Ribeiro de. ONEILL, Maria Monica Vieira Caetano. **Cenário sociodemográfico em 2022/2030 e distribuição territorial da população uso e ocupação do solo**. Rio de Janeiro: Fiocruz/Ipea/Ministério da Saúde/Secretaria de Assuntos Estratégicos da Presidência da República, 2013. Vol. 2. pp. 41-93. ISBN 978-85-8110-016-6. Available from SciELO Books .

OLIVEIRA, Henrique Nunes de, LÔBO Raysildo Barbosa, PEREIRA Carmen Silva. **Comparação de modelos não-lineares para descrever o crescimento de fêmeas da raça Guzerá**. Pesquisa Agropecuária Brasileira(2000): 1843-1851. Disponível em: <http://repositorio.unesp.br/handle/11449/27322>. Acesso em: 13de abril de 2016.

Relatório da ONU. **World Population Prospects 2015**. United Nations. Department of Economic and Social Affairs, Population Division (2015).– Data Booklet (ST/ESA/SER.A/377).

ROSSI, Robson M. **Introdução aos métodos bayesianos na análise de dados zootécnicos com o uso do WinBUGS e R**. Maringá: Eduem, 2011.

SANTOS, Vander Bruno dos, TADEU, Rilke, et.al **Avaliação de curvas de crescimento morfométrico de linhagens de tilápia do Nilo (Oreochromis niloticus)**. Ciênc.agrotec. 31.5,(2007).[https://www.researchgate.net/profile/Rilke\\_Freitas/publication/262462540\\_Evaluation\\_of\\_morphometric\\_growth\\_curves\\_of\\_tilapia\\_of\\_Nilo\\_\(Oreochromis\\_niloticus\)\\_strains/links/0c96053bf29298f50f000000.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Rilke_Freitas/publication/262462540_Evaluation_of_morphometric_growth_curves_of_tilapia_of_Nilo_(Oreochromis_niloticus)_strains/links/0c96053bf29298f50f000000.pdf). Acessado em 13-04-2016.

SOUZA, Leandro Gomes. **Preparação da base espacial do censo demográfico ibge 2010 para o município do rio de janeiro**. IV Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação. p. 001 – 009. Recife - PE, 2012.

UNFPA. **Relatório sobre a situação da população mundial**. Antônio Fiorente. 2011.

ZEVIANI, Walmes Marques. **Avaliação de modelos de regressão não linear na cinética de liberação de potássio de resíduos orgânicos**. Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras. Minas Gerais. Brasil. 2009. Disponível em: <http://repositorio.ufla.br/handle/1/3761>. Acessado em: 13-04-2016

ZEVIANI. Walmes. **Interface gráfica para ajuste de modelos de regressão não linear**. Disponível em: <https://ridiculas.wordpress.com/tag/nao-linear/07/12/2012>. Acessado em 23-03-2016.