



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Raquel Aline Oliveira Eloy

Distribuição assimétrica t-Student tipo 3: uma aplicação a delineamentos inteiramente casualizados

Campina Grande - PB

Abril de 2016

Raquel Aline Oliveira Eloy

Distribuição assimétrica t-Student tipo 3: uma aplicação a delineamentos inteiramente casualizados

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Estatística Aplicada do Departamento de Estatística do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de especialista em Estatística.

Orientador: Prof^ª. Dr^ª. Ana Patricia Bastos Peixoto

Campina Grande - PB

Abril de 2016

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

E487d Eloy, Raquel Aline Oliveira
Distribuição assimétrica T-Student tipo 3: uma aplicação a
delineamentos inteiramente casualizados [manuscrito] / Raquel
Aline Oliveira Eloy. - 2016.
35 p. : il. color.

Digitado.

Monografia (Estatística Aplicada) - Universidade Estadual da
Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.

"Orientação: Prof. Dr^a Ana Patricia Bastos Peixoto,
Departamento de Estatística".

1. Comparação. 2. T-Student assimétrica tipo 3 (ST3). 3.
Estimativas. 4. Resíduos. I. Título.

21. ed. CDD 519.53

Raquel Aline Oliveira Eloy

Distribuição assimétrica t-Student tipo 3: uma aplicação a delineamentos inteiramente casualizados

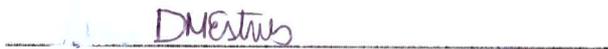
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Estatística Aplicada do Departamento de Estatística do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de especialista em Estatística.

Trabalho aprovado em 06 de abril de 2016.

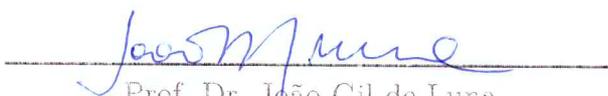
BANCA EXAMINADORA



Prof^ª. Dr^ª. Ana Patricia Bastos Peixoto
Universidade Estadual da Paraíba



Prof^ª. Dr^ª. Divanilda Maia Esteves
Universidade Estadual da Paraíba



Prof. Dr. João Gil de Luna
Universidade Estadual da Paraíba

Dedico este trabalho a Geciro Machado (in memoriam), um pai amoroso e zeloso, com respeito e saudade.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, autor da vida, por me sustentar nos momentos mais difíceis.

Ao doutorando Altemir da Silva Braga, pela paciência, dedicação, boa vontade e inúmeros debates sobre o tema. Ao doutorando Djair Durand e aos mestrandos Fábio Pratavieira e Julio Cezar Souza Vasconcelos, pelo apoio e valiosas sugestões.

Aos professores do Curso de especialização da UEPB, em especial a Ana Patrícia Peixoto e Tiago Oliveira por toda força e orientação.

Aos meus colegas do curso de especialização, em especial, a Adricia Albuquerque, amiga e colega da especialização, pelas horas de estudo e diversão.

Ao meu noivo, Záliston Melo, por estar comigo na horas boas e ruins, obrigada pelo companheirismo e compreensão.

Por último, mas não menos importante, agradeço a Raquel Sousa e Geciro Machado (in memoriam), meus pais, por todo amor, zelo e sacrifício que eles tiveram/fizeram para me ajudar a me tornar um ser humano melhor .

“Algumas pessoas marcam a nossa vida para sempre, umas porque nos vão ajudando na construção, outras porque nos apresentam projetos de sonho e outras ainda porque nos desafiam a construí-los”. (Autor Desconhecido)

Resumo

Apresentar um novo estudo na área de Estatística com aplicações a dados reais sempre foi e será um desafio para os pesquisadores, principalmente, na área de estatística experimental. Neste trabalho foi utilizado a distribuição t-Student assimétrica tipo 3 (ST3) com quatro parâmetros para avaliar o efeito do teor de boro e a absorção de enxofre na produção de grãos de soja. Essa distribuição pode ser assimétrica ou simétrica, platicúrtica ou leptocúrtica, unimodal ou bimodal para alguns valores paramétricos. Encontra-se bem definida e fundamentada por meio de propriedades matemáticas. As estimativas dos parâmetros foram obtidas utilizando o método da máxima verossimilhança. Além disso, foram realizados estudos de análise de resíduos. Assim, utilizando os critérios de comparação de modelos, AIC e BIC a distribuição ST3 apresentou melhores resultados em relação ao modelo normal.

Palavras-chaves: Delineamentos; Assimetria; Estimação; Verossimilhança; Comparação; Resíduos.

Abstract

Providing a new study in the field of statistics with applications to real data will always be a challenge for researcher, mainly, of experimental statistics. In this, work was used the Student t-distribution asymmetric type 3 (ST3) with four parameters to evaluate the effect of boron content and absorption the sulfur in the production of soybean. The parameter estimates were obtained using the maximum likelihood method. Thus, using the BIC AIC models comparison criteria ST3 distribution showed better results compared to the normal model.

Key-words: Design ; Asymmetry; Estimation; Comparison; residuals.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Densidade da distribuição ST3, para valores diferentes de μ , fixando $\sigma = 1$, $\tau = 2$ e $\nu = 6$	17
Figura 2 – Densidades Normal, t de Student, Cauchy e ST3, para diferentes valores de ν , fixando $\mu = 0$, $\sigma = 1$ e $\tau = 1$	17
Figura 3 – Galton’s skewness para a distribuição assimétrica ST3. Gráfico (a) em função de $\lambda \in [0; 0, 9]$ com $\alpha \in [0; 1, 5]$ e (b) em função de $\lambda \in [0; 0, 6]$ com $\alpha \in [0; -0, 5]$	18
Figura 4 – Moors’ kurtosis para a distribuição assimétrica ST3. Gráfico (a) em função de $\lambda \in [0; 0, 9]$ com $\alpha \in [0; 1, 5]$ e (b) em função de $\lambda \in [0; 0, 6]$ com $\alpha \in [0; -0, 5]$	19
Figura 5 – Boxplot para o ajuste do teor de B e a absorção de S na produção de grãos de soja	27
Figura 6 – (a) e (c) gráficos de índices versus os resíduos quantílicos para os modelos normal e ST3, respectivamente. (b) e (d) Gráficos de envelopes simulados dos quantis normais versus os resíduos quantílicos para os modelos normal e ST3, respectivamente.	31

Lista de tabelas

Tabela 1 – Produtos utilizados na condução do experimento. CPGS, Iracemópolis – SP, 2015.	23
Tabela 2 – Descrição e composição dos produtos utilizados na condução do experimento.	24
Tabela 3 – Estimativas de máxima verossimilhança (EMVs), valor da verossimilhança (VV), Informação de Akaike (AIC) e Critério de Informação Bayseano (BIC) comparando a distribuição normal com a distribuição ST3.	28
Tabela 4 – Teste de razão de verossimilhança para verificar se existe diferença estatística entre os modelos ST3 e o normal.	28
Tabela 5 – Resultados da comparação dos 7 tratamentos utilizados para avaliar o teor de B e a absorção de S em grãos de soja	29

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	REVISÃO DE LITERATURA	13
2.1	Distribuições assimétricas	13
2.1.1	Coeficiente de assimetria e curtose	14
2.1.2	Método para obter uma distribuição assimétrica	15
2.1.3	Distribuição t de <i>Student</i>	16
2.1.4	Distribuição skew-t tipo 3	16
2.1.5	Especificação do modelo de regressão	19
2.1.5.1	Modelos de regressão <i>GAMLSS</i>	19
2.1.6	Análise de resíduos	20
2.1.6.1	Resíduo quantílico	20
2.1.7	Crerérios de seleção dos modelos	21
3	MATERIAIS E MÉTODOS	23
3.1	Material	23
3.2	Método	24
3.2.1	Estimação por máxima verossimilhança	24
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	27
4.1	Análises descritivas	27
4.2	Ajuste do delineamento inteiramente casualizado	28
4.3	Análise de resíduos	30
5	CONCLUSÃO	32
5.0.1	Perspectivas de trabalhos futuros	32
	REFERÊNCIAS	33

1 INTRODUÇÃO

A estatística experimental é a ferramenta mais indicada para trabalhar com dados provenientes de ensaios experimentais. Ela contribui para pesquisa científica desde o planejamento até a interpretação dos resultados, conforme (BANZATO D. A. KRONKA, 2006). Esse fato que faz com que a análise estatística desempenhe um papel fundamental no contexto científico, visto que tais técnicas são utilizadas em quase todas as etapas da pesquisa. Neste contexto, muitos estudos são realizados na estatística experimental com a finalidade de melhorar as análises e ajudar na interpretação dos dados.

Segundo (JOHNSTON J. M. E PENNYPACKER, 1993), delinear um experimento é planejar condições controle e experimentais de modo a permitir comparações significativas entre elas, verificar os efeitos da variável independente e responder ao problema de pesquisa. Por esta razão, é extremamente importante que o experimentador conheça as características, as possibilidades e os limites dos delineamentos experimentais ,principalmente, do ensaio experimental que pretende utilizar em sua pesquisa.

Os delineamentos inteiramente casualizados são utilizados quando a variabilidade entre as parcelas experimentais é muito pequena, isto é, praticamente, inexistente. Devido a esta exigência, são utilizados em locais em que as condições experimentais possam ser bem controladas. A maior desvantagem desse delineamento é que toda a variabilidade existente pode inflacionar o erro experimental, exceto a fonte de variação devida aos efeitos dos tratamentos, podendo comprometer os resultados inferenciais da pesquisa.

Dentre as distribuições de probabilidades utilizadas na área da experimentação a distribuição normal é uma das mais destacadas. Porém, essa distribuição não se ajusta bem a dados que apresentam assimetrias, devido possuir apenas os dois primeiros momentos diferentes de zero, ou seja, a média (parâmetro de locação) e o desvio-padrão (parâmetro de escala), conforme (MOOD A. M.; BOES, 1974). Além disso, alguns pressupostos precisam ser satisfeitos: homocedasticidade, normalidade dos resíduos, independência dos erros e linearidade para verificar a qualidade do ajuste.

No entanto, existem muitos fenômenos que não satisfazem a tais suposições. Neste caso, as distribuições assimétricas são uma boa opção, visto que podem ajustar-se melhor aos dados, pois modelam a assimetria, a curtose e, naturalmente, as possíveis, observações extremas. Existem trabalhos na literatura sugerindo uma transformação na variável resposta para resolver o problema da falta de normalidade dos erros. No entanto, tal metodologia ocasiona uma mudança de interpretação dos resultados, fato que não interessa ao pesquisador, porque a variável passa para uma nova escala, conforme (BANZATO D. A. KRONKA, 2006). Sendo assim, uma das alternativas para contornar o problema

da falta de normalidade dos erros seria a utilização de modelos que apresentam caudas mais pesadas. Por exemplo, a distribuição de Student tem essa propriedade por meio do parâmetro que representa os graus de liberdade.

Por isso, muitos estudos são realizados com a finalidade de criar novas famílias de distribuições que acomodem, tanto a medida de assimetria, quanto a curtose dos dados. Conseqüentemente, tais famílias passam a ter mais parâmetros e exigir mais recursos computacionais. Pode-se encontrar na literatura algumas extensões da distribuição normal, como por exemplo, skew-normal, logística normal, log normal (Box-Cox) e beta-normal.

Essas distribuições normais-assimétricas vêm sendo utilizadas em várias áreas do conhecimento, como por exemplo, a skew-normal na área de seguros agrícolas, a beta-normal e a odd log-logística normal nas áreas de análise de sobrevivência e estatística experimental, respectivamente. A distribuição gama-normal, recentemente, em tensão de ruptura das fibras de carbono. (MACERAU, 2012) realizou um estudo comparativo das distribuições assimétricas α -estável, normal, t de Student e Laplace. Os ajustes foram avaliados e comparados com base na análise dos resíduos e segundo diferentes critérios de qualidade de ajuste, como o Critério de Informação de Akaike - AIC (AKAIKE, 1974) e o Critério de Informação Bayesiano - BIC (SCHWARZ, 1978).

Neste contexto, realizou-se este estudo utilizando a distribuição t de Student assimétrica tipo 3 que encontra-se no pacote "GAMLSS" do software R. Este método faz parte de uma ampla classe de modelos estatísticos chamada GAMLSS (Modelos Aditivos Generalizados para Posição, Escala e Forma) proposta por (RIGBY; STATINOPOULOS, 2005). Tal distribuição foi proposta e fundamentada matematicamente utilizando o método de (FERNÁNDEZ C.; STEEL, 1995). Esta metodologia destaca-se, pois não requer a função de distribuição acumulada. Além disso, propriedades matemáticas como os momentos são fáceis de serem obtidos. Na literatura encontram-se aplicações em retornos financeiros, em (FERNÁNDEZ C., 1998), entre outras aplicações, ver (AZZALINI; CAPITANIO, 2003) e (JONES; FADDY, 2003).

Dessa forma, conduziu-se este estudo, com o objetivo de ajustar o modelo de regressão na distribuição assimétrica t -Student tipo 3. O ajuste do modelo verificou o efeito do teor de boro e a absorção de enxofre na produção de grãos de soja e, além disso, foram comparados os modelos normal e ST3 utilizando os critérios AIC e BIC. Dessa forma, após as análises estatísticas, a distribuição assimétrica ST3 ajustou-se melhor ao conjunto de dados em relação à distribuição normal.

2 REVISÃO DE LITERATURA

O conteúdo desta seção relata os principais aspectos da utilização das distribuições assimétricas, utilizando-se de artigos práticos e teóricos, com o objetivo de obter informações mais precisas sobre o assunto abordado.

2.1 Distribuições assimétricas

Uma das características importantes das distribuições assimétricas é que elas preservam as propriedades matemáticas da distribuição da qual foi gerada. Por exemplo, a distribuição normal assimétrica e a distribuição t de Student assimétrica, ambas permanecem com as propriedades dos submodelos normal e t de Student, respectivamente, (AZZALINI, 1985).

Conforme (CAMPOS, 2011), muitos estudos nem sempre estão de acordo com o modelo normal, devido a falta de simetria na distribuição ou presença e distribuições com caudas mais pesadas ou mais leves do que o modelo normal. Neste sentido, confirma (CRUZ; BRANCO, 2009), que vários trabalhos vem sendo propostos com a utilização de modelos mais flexíveis para o erro, que podem ser mais realistas, ver por exemplo, (AZZALINI A., 1999), (DICICCIO T. J. & MONTI, 2004) e (GENTON, 2004).

Muitos autores utilizaram as distribuições assimétricas para estudos de modelagem em que ocorrem assimetria, caudas mais pesadas ou bimodalidade. (CAMPOS, 2011) ajustou modelos de regressão não lineares considerando erros normais assimétricos e a t -Student assimétricos com e sem heterocedasticidade. O autor concluiu em seu trabalho que o modelo assimétrico normal foi melhor do que os demais. (CRUZ; BRANCO, 2009), fizeram um estudo de modelos de crescimento e consideraram distribuições assimétricas dos erros em dados clínicos de gestantes e concluíram que a distribuição assimétrica de Student foi a que melhor se ajustou aos dados.

Um estudo do modelo de crescimento de Gompertz aplicado em dados de pesos de codornas, machos e fêmeas, realizados por (ROSSI; SANTOS, 2014), considerou distribuições assimétricas e simétricas para os erros e foi constatado que os modelos em erros assimétricos normais e t -Student, respectivamente, foram o que obtiveram melhores ajustes aos dados. (GUEDES T. A.; MARTINS A. T.; CARNEIRO, 2014), ajustaram modelos de regressão com erros normais e com erros normais assimétricos a dados de altura de plantas e o modelo com erros normais assimétricos mostrou-se mais adequado em algumas situações.

2.1.1 Coeficiente de assimetria e curtose

Definição 2.1.1. Coeficiente de assimetria: Seja X uma variável aleatória qualquer com valor esperado μ e desvio-padrão σ . O coeficiente de assimetria de X , denotado por α_3 , indica o grau de assimetria da sua distribuição de probabilidade e é definido por:

$$\alpha_3 = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3},$$

em que supomos a existência do terceiro momento de X , (MAGALHÃES, 2013).

Definição 2.1.2. Coeficiente de curtose: Seja X uma variável aleatória qualquer com valor esperado μ e desvio-padrão σ . O coeficiente de curtose da variável X , denotado por α_4 , mede a intensidade dos picos da sua distribuição de probabilidade e é definido por:

$$\alpha_4 = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4},$$

em que supomos a existência do quarto momento de X .

No caso de uma distribuição unimodal utilizamos

$$\mu - M_o,$$

em que μ e M_o são, respectivamente, a média e a moda da distribuição. A relação apresentada é denominada de medida de assimetria de Pearson, baseia-se na relação entre moda e média, pode-se empregá-las para determinar o tipo de assimetria, se:

- i) $\mu - M_o = 0$ a assimetria é nula, ou seja a distribuição é simétrica;
- ii) $\mu - M_o < 0$, a assimetria é à esquerda;
- iii) $\mu - M_o > 0$, a assimetria é à direita.

Uma medida melhor que essa é o coeficiente de assimetria de Pearson, desenvolvido em 1890 pelo estatístico Karl Pearson (Sheskin, 2000), dado por:

$$A_s^{(1P)} = \frac{\mu - M_o}{\sigma},$$

em que σ é o desvio-padrão da distribuição, a utilização dessa expressão envolve dificuldade caso a distribuição apresente mais de uma moda.

Caso a média e o desvio-padrão não sejam medidas disponíveis, pode-se calcular a assimetria utilizando os quartis, por meio do coeficiente quantil de assimetria dado por

$$A_s^{(B)} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1},$$

em que Q_1 , Q_2 e Q_3 são o primeiro, o segundo e o terceiro quartil, respectivamente, da distribuição, (YULE, 1912) e (BOWLEY, 1920). O coeficiente quantil é conhecido como coeficiente de assimetria de Bowley.

2.1.2 Método para obter uma distribuição assimétrica

Conforme (FERNÁNDEZ C.; STEEL, 1995), o método para transformar uma distribuição simétrica em uma função densidade assimétrica é dado por:

$$f_X(x; \tau) = \frac{2}{\tau + \frac{1}{\tau}} \begin{cases} f_X(\tau x), \text{ para } x < 0 \\ f_X\left(\frac{x}{\tau}\right), \text{ para } x \geq 0, \end{cases}$$

em que $\tau > 0$ é o parâmetro de assimetria e $f_X(x)$ é a função densidade da distribuição simétrica.

As principais propriedades de $F_X(x|\tau)$ são:

- i) Se $\tau = 1$, então, tem-se o caso simétrico, isto é, $F_X(x|\tau = 1) = F_X(x)$;
- ii) A função $f_X(x|\tau)$ mantém a mesma moda de $f_X(x)$. Uma vez que $f_X(x)$ é unimodal e simétrica em torno de zero, a moda será sempre no zero;
- iii) A massa de probabilidade à esquerda e à direita de zero é independente de $f_X(x)$, ou seja,

$$F(x \geq 0) = \frac{2\tau}{1 + \tau^2} \int_0^{\infty} f_X\left(\frac{x}{\tau}\right) dx = \frac{\tau^2}{1 + \tau^2},$$

$$F(x < 0) = 1 - P(x \geq 0) = 1 - \frac{\tau^2}{1 + \tau^2} = \frac{1}{1 + \tau^2}$$

$$\frac{F(x \geq 0)}{F(x < 0)} = \tau^2$$

- iv) A distribuição será assimétrica à direita se $\tau > 1$ e assimétrica à esquerda se $\tau < 1$. A distribuição é simétrica quando $\tau = 1$.

A existência dos momentos de $F_X(x|\tau)$ depende dos momentos absolutos de $F_X(x)$. O r -ésimo momento é dado por:

$$E_X(x^r|\tau) = \frac{\tau^{r+1} + (-1)^r/\tau^{r+1}}{\tau + \tau^{-1}} M_r,$$

em que,

$$M_r = 2 \int_0^{\infty} x^r f_X(x) dx,$$

é o r -ésimo momento absoluto de $f_X(x)$.

A média e a variância de $f_X(x|\tau)$ são dadas, respectivamente, por:

$$E_X(x|\tau) = M_1 \left(\tau - \frac{1}{\tau} \right) = \mu$$

e

$$\text{Var}(x|\tau) = (M_2 - M_1^2) \left(\tau^2 + \frac{1}{\tau^2} \right) + 2M_1^2 - M_2 = \sigma^2.$$

O coeficiente de assimetria de $f_X(x|\tau)$ pode ser calculado por:

$$A(x|\tau) = \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right) \frac{(M_3 + 2M_1^3 - 3M_1M_2) \left(\tau^2 + \frac{1}{\tau^2} \right) + 3M_1M_2 - 4M_1^3}{\left[(M_2 - M_1^2) \left(\tau^2 + \frac{1}{\tau^2} \right) + 2M_1^2 - M_2 \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

O coeficiente de curtose de $P(x|\tau)$ pode ser calculado por:

$$K(x|\tau) = \frac{E_X(x^4|\tau) - 4E_X(x|\tau)E_X(x^3|\tau) + 6E_X(x^2|\tau)E_X(x|\tau)^2 - 3E_X(x|\tau)^4}{\text{Var}(x|\tau)^2}.$$

2.1.3 Distribuição t de Student

O estatístico *W.S. Gosset* sob o pseudônimo de *Student*, obteve uma distribuição denotada por *t* de *Student*. Uma variável aleatória X tem distribuição *t* de *Student* com notação $X \sim t(\mu, \sigma^2, \nu)$ se sua densidade for escrita da forma:

$$f_X(x, \mu, \sigma, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}\sigma} \left(1 + \frac{1}{\nu} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (2.1)$$

em que $\mu \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de locação, $\sigma > 0$ é o parâmetro de escala, $\Gamma(\cdot)$ é a função matemática gama e $\nu \geq 1$ são os graus de liberdade da distribuição. Para $\nu = 1$, tem-se a distribuição de *Cauchy*. Para $\nu > 20$, a distribuição *t* de *Student*, assintoticamente, é a distribuição normal. Para $2 < \nu < 20$ tem-se a distribuição *t* de *Student*.

2.1.4 Distribuição skew-t tipo 3

A distribuição skew-t tipo 3 (*ST3*) foi obtida pelo método de ([FERNÁNDEZ C., 1998](#)), nesse caso, não foi preciso fazer uso da função de distribuição acumulada, sendo dada por:

$$f_Z(z; \mu, \sigma, \tau, \nu) = \begin{cases} \kappa\sigma^{-1} \times \left[\left(1 + \frac{z^2}{\nu} \right) \frac{1}{\tau^2} \right]^{-\frac{(\nu+1)}{2}}, & z \geq 0 \\ \kappa\sigma^{-1} \times \left[\left(1 + \frac{z^2}{\nu} \right) \tau^2 \right]^{-\frac{(\nu+1)}{2}}, & z < 0 \end{cases}$$

em que, $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $\kappa = \frac{2}{\tau + \frac{1}{\tau}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)(\pi\nu)^{\frac{1}{2}}}$, sendo que $\mu \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de locação, $\sigma > 0$ é o parâmetro de escala, $\tau > 0$ é o parâmetro de forma e $\nu > 0$ são os graus de liberdade.

A distribuição *ST3* é uma das cinco versões assimétricas para a distribuição *t*, definida com quatro parâmetros, tendo suporte no conjunto dos reais. Para a notação, adotar-se-á $Z \sim ST3(\mu, \sigma^2, \tau, \nu)$. Na Figura (1), tem-se algumas formas de assimetria

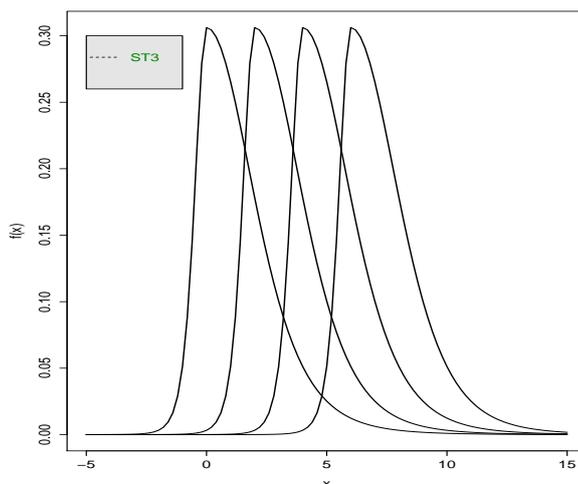


Figura 1 – Densidade da distribuição ST3, para valores diferentes de μ , fixando $\sigma = 1$, $\tau = 2$ e $\nu = 6$

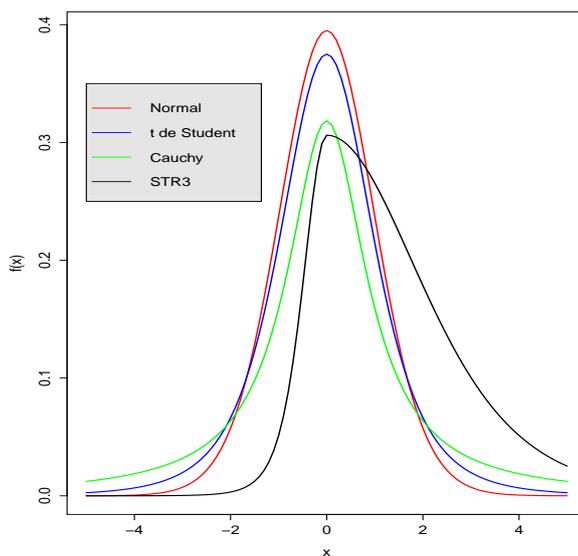


Figura 2 – Densidades Normal, t de Student, Cauchy e ST3, para diferentes valores de ν , fixando $\mu = 0$, $\sigma = 1$ e $\tau = 1$

para a distribuição. É possível observar o comportamento das três distribuições citadas e a distribuição ST3 na Figura 2.

O r -ésimo momento é dado por:

$$E_Z(z^r|\tau) = \frac{\tau^{r+1} + (-1)^r/\tau^{r+1}}{\tau + \tau^{-1}} M_r,$$

em que,

$$M_r = 2 \int_0^\infty z^r f_Z(z) dz$$

é o r -ésimo momento absoluto de $f_Z(z)$.

A média e a variância de $f_Z(z|\tau)$ são dados, respectivamente, por

$$E_Z(z|y) = \mu = M_1 \left(\tau - \frac{1}{\tau} \right)$$

$$Var(z|\tau) = \sigma^2 = (M_2 - M_1^2) \left(\tau^2 + \frac{1}{\tau^2} \right) + 2M_1^2 - M^2$$

Não foi possível obter os momentos da distribuição ST3 de forma analítica. Então, uma alternativa para as medidas de assimetrias \mathcal{B} (GALTON, 1883) e de curtoses \mathcal{M} (MOORS, 1988) são dadas por,

$$\mathcal{B} = \frac{Q(6/8) + Q(2/8) - 2Q(4/8)}{Q(6/8) - Q(2/8)}$$

e

$$\mathcal{M} = \frac{Q(7/8) - Q(5/8) + Q(3/8) - Q(1/8)}{Q(6/8) - Q(2/8)},$$

respectivamente.

Os gráficos de assimetrias e de curtoses de Z para alguns valores paramétricos foram mostrados nas Figuras (3) e (4).

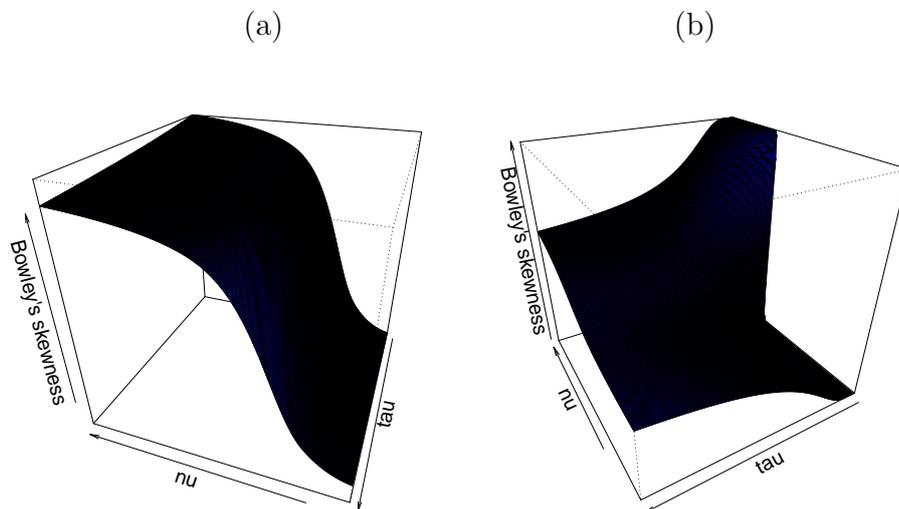


Figura 3 – Galton's skewness para a distribuição assimétrica ST3. Gráfico (a) em função de $\lambda \in [0; 0, 9]$ com $\alpha \in [0; 1, 5]$ e (b) em função de $\lambda \in [0; 0, 6]$ com $\alpha \in [0; -0, 5]$.

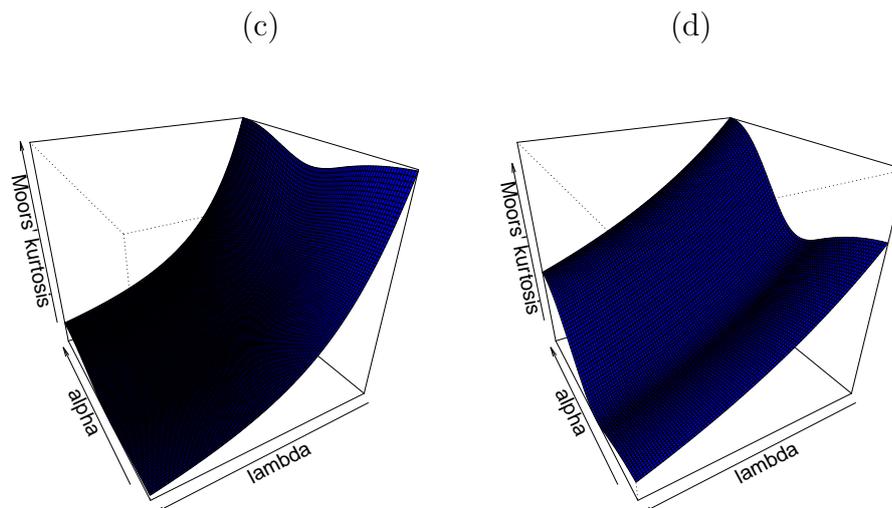


Figura 4 – Moors' kurtosis para a distribuição assimétrica ST3. Gráfico (a) em função de $\lambda \in [0; 0, 9]$ com $\alpha \in [0; 1, 5]$ e (b) em função de $\lambda \in [0; 0, 6]$ com $\alpha \in [0; -0, 5]$.

2.1.5 Especificação do modelo de regressão

Algumas aplicações são explicadas por variáveis explanatórias, como por exemplo, tempo de vida, produção de soja, preços de produtos, pressão arterial, entre outros. Os modelos de regressão que são utilizados para estimar estão diretamente relacionados aos parâmetros de localização μ . Quando tais modelos fornecem bons ajustes para o conjunto de dados, eles tendem a dar estimativas mais precisas sobre as quantidades de interesse, pois estas estimativas baseiam-se em menos parâmetros. Recentemente, vários modelos de regressão foram propostos na literatura, considerando-se a classe de modelos localização-escala.

Uma desvantagem a ser considerada nesta classe de modelos, é que a variância, assimetria, bimodalidade, curtose e outros parâmetros não são modeladas explicitamente em termos das variáveis explicativas, mas implicitamente através de sua dependência em relação ao parâmetro de localização. Como alternativa, surgem os modelos aditivos generalizados GAMLSS, em que a parte sistemática do modelo permite expandir tanto a parte do parâmetro de localização, quanto o parâmetro de escala e os parâmetros de forma.

2.1.5.1 Modelos de regressão GAMLSS

Um fato importante para ser destacado nos modelos da família GAMLSS é a facilidade que se tem em relacionar a variável resposta com as covariáveis, por meio dos parâmetros de localização, escala, assimetria e bimodalidade.

Seja $\theta^T = (\mu, \sigma, \tau, \nu)$ o vetor de parâmetros para a fdp $f(y; \theta)$ modelado usando modelos aditivos. Assumindo que para $i = 1, 2, \dots, n$ observações independentes y_i condicional em θ_i , com fdp $f(y_i; \theta_i)$, em que $\theta_i^T = (\mu_i, \sigma_i, \tau_i, \nu_i)$ é um vetor de parâmetros

relacionados com a covariável.

Baseada na distribuição, a regressão linear do modelo que liga a variável resposta y_i e a variável explicativa está definida por

$$y_i = \mu_i + \sigma_i z_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

em que, os erros aleatórios z_i seguem a função densidade $f(z_i; \nu_i, \tau_i)$ e $z_i = (y_i - \mu_i)/\sigma_i$. Foi definido o vetor de parâmetros θ usando uma função de ligação apropriada como

$$\theta_i = \begin{bmatrix} \mu_i \\ \sigma_i \\ \nu_i \\ \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\beta_{01} + x_1[i, 2]\beta_{11} + \dots + x_1[i, p_1 + 1]\beta_{p_11}) \\ g_2(\beta_{02} + x_2[i, 2]\beta_{12} + \dots + x_2[i, p_2 + 1]\beta_{p_22}) \\ g_3(\beta_{03} + x_3[i, 2]\beta_{13} + \dots + x_3[i, p_3 + 1]\beta_{p_33}) \\ g_4(\beta_{04} + x_4[i, 2]\beta_{14} + \dots + x_4[i, p_4 + 1]\beta_{p_44}) \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

2.1.6 Análise de resíduos

A fim de detectar possíveis observações discrepantes, assim como alguns desvios em relação às hipóteses do ajuste do modelo de regressão, foram feitos gráficos dos resíduos quantílicos versus index e o dos resíduos quantílicos versus quantis normais. Vale ressaltar que os resíduos quantílicos normalizados são assintoticamente normais quando o modelo ajustado é adequado para explicar os dados estudados.

2.1.6.1 Resíduo quantílico

(DUNN; SMYTH, 1996) propuseram uma técnica para fazer análise de resíduos que é conhecido por resíduos quantílicos (rq). Este método gera resíduos para uma distribuição contínua por meio dos desvios e dos resíduos quantis, respectivamente. O propósito dos autores foi utilizar a i -ésima observação do resíduo quantílico (rq) como uma medida de discrepância entre y_{ij} e $\hat{\mu}_{ij}$. Dessa forma, o resíduo quantílico ($\hat{r}q_{ij}$) para o modelo (3.1) pode ser definido por:

$$\hat{r}q_{ij} = \Phi^{-1} \{ \Phi_{ST3}(\hat{y}, \mu = \hat{\mu}, \text{sigma} = \hat{\sigma}, \text{nu} = \hat{\nu}, \text{tau} = \hat{\tau}) \}, \quad (2.4)$$

em que $\Phi(\cdot)^{-1}$ é a função quantílica da distribuição normal padrão e $\Phi_{ST3}(\cdot) = Q_{ST3}(\cdot)$ é o quantil da distribuição t Student tipo 3.

(ATKINSON, 1987), sugeriu a construção de envelopes simulados para interpretar o gráfico normal de probabilidade dos resíduos. Tais envelopes são bandas de confiança simuladas que cobrem os resíduos, de tal forma que, se o modelo estiver bem ajustado, a maioria dos pontos estarão dentro do envelope.

Para a construção das bandas de confiança recomendam-se os seguintes passos:

1. Ajustar o modelo proposto e calcular os resíduos rq_{ij} 's;

2. Simular k amostras da variável resposta utilizando o modelo ajustado;
3. Ajustar o modelo proposto para cada uma das amostras simuladas e calcular os seus respectivos resíduos simulados $r_{q_{ij}}$, com $i = 1, 2, \dots, k$ e $j = 1, 2, \dots, n$;
4. Colocar cada grupo de IJ resíduos em ordem crescente, obtendo $t_{(ij)k}$ para $k = 1, \dots, K$;
5. Para cada ij calcular a média, o mínimo e o máximo dos resíduos $t_{(ij)k}$, ou seja,

$$t_{(ij)M} = \sum_{k=1}^K \frac{t_{(ij)k}}{K}, t_{(ij)B} = \min\{t_{(ij)k} : 1 \leq k \leq K\} \text{ e}$$

$$t_{(ij)H} = \max\{t_{(ij)k} : 1 \leq k \leq K\};$$

6. Incluir as médias, os mínimos e os máximos conjuntamente com os valores $r_{q_{ij}}$ contra os quantis esperados da distribuição normal padrão.

O modelo $ST3$ estará bem ajustado, se os resíduos $r_{q_{ij}}$ apresentarem um comportamento aleatório em torno de zero. Foram realizadas 19 simulações, sugeridas por Atkinson (1987). Por isso, existe 1 chance em 20 ou 5% de que o maior valor absoluto dos resíduos dos dados estudados esteja fora do envelope simulado, assumindo que o modelo esteja bem ajustado.

2.1.7 Critérios de seleção dos modelos

A escolha do modelo apropriado, do ponto de vista estatístico, é um tópico extremamente importante na análise de dados (BOZDONGAN, 1987). (AKAIKE, 1974) utilizou a Informação de Kullback-Leibler para testar se um dado modelo é adequado. Segundo (KONISHI; KITAGAWA, 2008), um critério de informação (IC) tem a forma que se segue

$$IC(X_n, \hat{G}) = -2 \sum_{i=1}^n \log f(X_i | \hat{\theta}(X_n)) + 2(\text{viés}).$$

$$= -2 \sum_{i=1}^n \log f(X_i | \hat{\theta}(X_n)) + 2(b(G)). \quad (2.5)$$

Fundamentado no conceito de informação, ele oferece uma medida relativa das informações perdidas, quando um determinado modelo é utilizado para descrever a realidade. Dessa forma, mostrou que o viés $b(G)$ é dado assintoticamente por:

$$b(G) = \text{tr} I(\theta_0) J(\theta_0)^{-1}, \quad (2.6)$$

sendo que $J(\theta_0)$ é a matriz de informação de Fisher de g e $I(\theta_0)$ é dado por

$$I(\theta_0) = \int g(x) \frac{\partial(x|\theta)}{\partial\theta} \frac{\partial(x|\theta)}{\partial\theta} \mathbf{T} dx.$$

O AIC é um critério que avalia a qualidade do ajuste do modelo paramétrico, estimado pelo método da máxima verossimilhança; tendo fundamentos ligados ao fato que o viés assintótico (2.6) tende ao número de parâmetros a serem estimados no modelo, pois sob a suposição de que existe um θ_0 no espaço paramétrico Θ tal que $g(x) = f(x|\theta_0)$, ocorre a igualdade das expressões $I(\theta_0) = J(\theta_0)$, e assim obtém-se que na equação (2.6) que:

$$\begin{aligned} b(G) &= E_{G(x_n)}[\log f(\mathbf{X}_n|\hat{\theta}(X_n)) - nE_{G(Z)}[\log f(Z|\hat{\theta}(X_n))]] \\ &= \text{tr}I(\theta_0)J(\theta_0)^{-1} = \text{tr}(I_p) = p, \end{aligned} \quad (2.7)$$

em que p é o número de parâmetros a serem estimados no modelo.

Substituindo o resultado obtido em (2.7) na expressão (2.5), Akaike (1974) definiu seu critério de informação da seguinte forma,

$$AIC = -2\log L(\hat{\theta}) + 2(p)$$

A derivação completa do resultado acima pode ser encontrada, por exemplo, em (EMILIANO, 2013) e (KONISHI; KITAGAWA, 2008). O modelo com menor valor e AIC é considerado o modelo de melhor ajuste. Existem várias correções para melhorar o comportamento do AIC, no sentido de diminuir a probabilidade de selecionar uma ordem maior do que a necessária. Modificações do AIC incluem o critério de informação Bayesiano

O Critério Bayesiano de Schwarz (BIC) tem como pressuposto a existência de um "modelo verdadeiro" que descreve a relação entre a variável dependente e as diversas variáveis explanatórias entre os diversos modelos sob seleção. Assim o critério é definido como a estatística que maximiza a probabilidade de se identificar o verdadeiro modelo dentre os avaliados.

Seja $f(x_n|\theta)$ um modelo estocástico estimado através do método da máxima verossimilhança. Então, o critério de informação Bayesiano (BIC) é dado por:

$$BIC = -2\log L(\hat{\theta}) + p\log(n), \quad (2.8)$$

em que $L(\hat{\theta})$ é a verossimilhança do modelo ajustado, p é o número de parâmetros a serem estimados e n é o número de observações da amostra. O modelo com menor BIC é considerado o de melhor ajuste.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Nesta seção destacam-se a estrutura do delineamento experimental e os principais aspectos do método da máxima verossimilhança que foi utilizado para estimar os parâmetros. A finalidade foi obter informações precisas e de interpretação prática.

3.1 Material

Os dados utilizados nesta aplicação são referentes a um ensaio experimental conduzido no Bloco 3, do Centro de Pesquisa Geraldo Schultz, localizado no município de Iracemápolis-SP. O clima segundo Köppen é do tipo Cwa (clima tropical de altitude, com chuvas no verão e seca no inverno). O solo foi classificado como Latossolo Vermelho distrófico. O objetivo do experimento foi avaliar o efeito do teor de boro (B) e a absorção de enxofre (S) na produção de grãos de soja. A pesquisa foi realizada pela empresa Produquímica, em Iracemápolis-SP, no ano agrícola 2014/2015.

A semeadura foi realizada no dia 12 de novembro de 2014, com espaçamento entre linhas de 0,5 m e densidade de 16 sementes por metro linear. Cada parcela foi composta de 6 linhas com 7 m de comprimento, com 6 repetições por tratamento. A parcela útil foi constituída por 2 linhas com 5 m de comprimento. Foi utilizado um tratamento controle (Tratamento 1) e, além disso, o experimento foi conduzido por meio de um delineamento inteiramente casualizado com 4 repetições e 7 tratamentos. Conforme o quadro abaixo:

Tabela 1 – Produtos utilizados na condução do experimento. CPGS, Iracemápolis – SP, 2015.

Tratamento	Dose de Boro (kg ha^{-1})	Dose de Enxofre (kg ha^{-1})
1 Controle	-	-
2 Sulfurgran	-	38,5
3 Sulfurgran + Borosol	1	38,5
4 Sulfurgran + ActiveBor	1	38,5
5 Sulfurgran + Ulexita	1	38,5
6 Sulfurgran + Produbor	1	38,5
7 Sulfurgran B-MAX	1	38,5

Tabela 2 – Descrição e composição dos produtos utilizados na condução do experimento.

Produto Comercial	Composição	Granulometria	S%	B%
1 Controle	-	-	-	-
2 Sulfurgran	S elementar	Pastilhado	90	-
3 Sulfurgran + borosol	elementar + ácido bórico	Pastilhado + pó	90	17
4 Sulfurgran + activeBor	elementar + octaborato de sódio	Pastilhado + pó	90	20,9
5 Sulfurgran + ulexita	elementar + ulexita	Pastilhado + pó	90	14
6 Sulfurgran + produbor	elementar + ulexita parcialmente acidulada	Pastilhado + granuado	90	10
7 Sulfurgran + B-MAX	elementar + ulexita na mesma pastilha	Pastilhado	77	2

3.2 Método

Nesta subseção foi desenvolvido o modelo de regressão para a função log verossimilhança.

3.2.1 Estimação por máxima verossimilhança

Neste estudo, foi considerado o delineamento inteiramente casualizado (DIC), porém sob a suposição que os resíduos seguem uma distribuição TS3, conforme está apresentada no pacote GAMLSS do software estatístico R. Sabe-se que em tais delineamentos os modelos normais são aplicados com muita frequência, principalmente, em áreas de estudos como: agronomia, engenharias, ciências biológicas, etc. Entretanto, quando os dados apresentam assimetria, curtose ou bimodalidade este modelo torna-se inadequado para ser utilizado na modelagem dos dados. Dessa forma, neste momento, estão sendo apresentados os estudos referentes às inferências estatísticas, tanto relacionados aos testes de hipóteses quanto parte de estimação (intervalos de confiança). E, ainda, foram enfatizados os métodos computacionais de estimação existentes no software R. Sendo assim, o modelo de um ensaio em DIC tem a seguinte forma:

$$Y_{ij} = m + \tau_i + \sigma\epsilon_{ij}, \quad (3.1)$$

em que Y_{ij} representa o valor observado do tratamento i , m é o efeito da média geral, τ_i é o efeito do tratamento i e $\epsilon_{ij} \sim ST3(0, \sigma^2, \nu, \alpha)$ representam os efeitos do fator não controlado do ensaio experimental, com $i = 1, \dots, I$ e $j = 1, \dots, J$, sendo que I denota o número de tratamentos e J o número de repetições.

Seja y_{11}, \dots, y_{IJ} uma amostra de tamanho n da distribuição $ST3$. Então, o logaritmo da função verossimilhança para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (m, \boldsymbol{\tau}^T, \sigma, \tau, \nu)^T$, em que $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_I)^T$ é dada por:

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \log \left\{ k\sigma^{-1} \times \left[\left(1 + \frac{z^2}{\nu} \right) \frac{1}{\tau^2} \right]^{-\frac{(\nu+1)}{2}} \right\} \quad (3.2)$$

em que, $z_{ij} = (y_{ij} - m - \tau_i) / \sigma$. As estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ do vetor de parâmetros podem ser obtidas maximizando a log-verossimilhança (3.2). Nesta etapa, foram utilizados os métodos Nelder-Mead e o “L-BFGS-B” que são fornecidos no pacote “Optim” do software R, em que os os valores iniciais podem ser obtidos da função “summary.lm”. Além disso, o “Optim” fornece a opção “gr” em que o usuário pode fornecer o vetor escore que torna o algoritmo mais eficiente. Neste sentido, para obter as componentes do vetor escore $U(\boldsymbol{\theta})$ do modelo $ST3$ derivou-se a função log-verossimilhança (3.2) em relação a ν , m , μ , $\boldsymbol{\tau}$ e σ . Dessa forma, as componentes do vetor escore $U(\boldsymbol{\theta})$ são dadas por:

$$\begin{aligned} U_\nu(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left\{ \frac{\psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \sqrt{\pi\nu}\tau^2 + \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \left[\psi\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \pi\nu - \psi\left(\frac{\nu}{2}\right) \pi\nu - \pi \right]}{2\sqrt{\pi\nu}} \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left\{ -\frac{1}{2} \ln \left[\frac{\nu\sigma^2 + (y_{ij} - \mu)^2}{\nu\sigma^2\tau^2} \right] + \frac{(\nu+1) + (y_{ij} - \mu)^2}{2\nu [\nu\sigma^2 + (y_{ij} - \mu)^2]} \right\}, \\ U_\mu(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left\{ \frac{\left(\frac{\nu+1}{2}\right) (-2y_{ij} + 2\mu)}{\nu\sigma^2 + (y_{ij} - \mu)^2} \right\}, \\ U_\tau(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{j=1}^J \left\{ \frac{-\tau^2 + \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi\nu} - (\nu+1) \left[\tau^2 + \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi\nu} \right]}{\tau \left(\tau^2 + \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi\nu} \right)} \right\}, \\ U_\sigma(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left\{ \frac{1}{\sigma} - \frac{(\nu+1)(y_{ij} - \mu)^2}{\sigma[\nu\sigma^2 + (y_{ij} - \mu)^2]} \right\}. \end{aligned}$$

Igualando essas equações a zero e resolvendo-as, simultaneamente, obtêm-se as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros utilizando métodos numéricos.

Sob certas condições de regularidade o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, em seu espaço paramétrico, tem distribuição assintótica $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$ normal multivariada $N_{I+4}(0, K(\boldsymbol{\theta})^{-1})$, em que $K(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação esperada. A matriz de covariâncias assintóticas $K(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ pode ser aproximada pela inversa de $(I+4) \times (I+4)$ da matriz de informação observada $-\ddot{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta})$, isto é, pode-se inverter a matriz de informação observada da função dos parâmetros para obter uma aproximação da matriz de covariâncias. Assim, com as EMVs podem fornecer regiões de confiança utilizando a normalidade assintótica. Então, as inferências assintóticas para os vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ podem ser realizadas utilizando aproximação normal $N_{I+4}(0, -\ddot{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta})^{-1})$ para $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e os erros-padrão para as EMVs podem ser

obtidos pela raiz quadrada dos elementos da diagonal principal da inversa da matriz de informação observada e podem ser formuladas hipóteses a serem testadas. Os elementos da matriz de informação observada são dadas por:

$$\ddot{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} J_{mm} & J_{m\tau_1} & \cdots & J_{m\tau_I} & J_{m\sigma} & J_{m\lambda} & J_{m\alpha} \\ \cdot & J_{\tau_1\tau_1} & \cdots & J_{\tau_1\tau_I} & J_{\tau_1\sigma} & J_{\tau_1\lambda} & J_{\tau_1\alpha} \\ \cdot & \cdot & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & J_{\tau_I\tau_I} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & J_{\sigma\sigma} & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & J_{\lambda\lambda} & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & J_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}$$

para $i = i' = 1, \dots, I$ e $j = j' = 1, \dots, J$ que são obtidas numericamente. A distribuição normal assintótica $N_{I+4}(0, -\ddot{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta})^{-1})$ pode ser utilizada para construir regiões aproximadas de confiança para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$. Neste caso, os intervalos de confiança assintóticos $100(1 - \gamma)\%$ para cada componente do vetor de parâmetros θ_r é dado por:

$$IC_r = \left(\hat{\theta}_r - z_{\gamma/2} \sqrt{-\hat{L}^{r,r}}, \hat{\theta}_r + z_{\gamma/2} \sqrt{-\hat{L}^{r,r}} \right),$$

em que $-\hat{L}^{r,r}$ denota o r -ésimo elemento da diagonal da inversa da matriz de informação observada $-\ddot{\mathbf{L}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1}$ e $z_{\gamma/2}$ é o quantil $1 - \gamma/2$ da distribuição normal padrão.

A normalidade assintótica, também, é útil para testes de qualidade de ajuste de alguns submodelos. A estatística da razão de verossimilhança (RV) pode ser utilizada para comparar a distribuição $ST3(\mu, \sigma^2, \lambda, \alpha)$ com os submodelos normal, Student e Cauchy. Por isso, obtém-se o valor da estatística w da função log verossimilhança LV do modelo restrito sob o modelo irrestrito a ser testado. Em alguns casos, testa-se a hipótese do tipo $H_0 : \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_0$ versus $H : \boldsymbol{\psi} \neq \boldsymbol{\psi}_0$, em que $\boldsymbol{\psi}$ é o vetor formado com alguns componentes de $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{\psi}_0$ é um vetor específico. Por exemplo, a hipótese $H_0 : \tau = 1$ versus $H : H_0$ não é verdadeira é equivalente a comparar $ST3(\mu, \sigma^2, \tau, \nu)$ com a distribuição t de Student sendo que a estatística W é obtida por:

$$w = 2\{\ell(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\tau}, \hat{\nu}) - \ell(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}, 1, \tilde{\nu})\},$$

em que $\hat{\alpha}$, $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$ são as EMVs sob H e $\tilde{\mu}$ e $\tilde{\sigma}$ são as estimativas sob H_0 .

A comparação de diferenças de tratamentos foi realizada por meio de intervalos de confiança fazendo restrições nas colunas da matriz de delineamento experimental. Por exemplo, para comparar os tratamentos *Trat 1*, *Trat 2*, ..., *Trat I* em relação ao *Trat 1* basta fazer *Trat 1* = 0. Caso se tenha interesse em comparar em relação aos *Trat 2*, deve-se restringir, *Trat 2* = 0 e, assim, para os demais I tratamentos. O software R fornece a função “relevel (,)” que permite tais restrições. Qualquer interessado nas rotinas computacionais basta solicitar a um dos autores.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção ressaltam-se os principais resultados deste estudo. Dessa forma, foi apresentado uma análise descritiva, os resultados do ajuste do delineamento inteiramente casualizado e por fim uma análise de resíduos. Cada parte foi escrita de forma simples de tal maneira que outros pesquisadores possam utilizá-los em outras situações práticas.

4.1 Análises descritivas

A Figura (5), apresenta uma análise estatística descritiva para cada um dos tratamentos (Trat 1, Trat 2, Trat 3, Trat 4, Trat 5, Trat 6 e Trat 7). Observou-se nos tratamentos (Trat 1, Trat 2 e Trat 4) que os valores das médias amostrais foram superiores aos das medianas, enquanto que para os outros tratamentos (Trat 3, Trat 5, Trat 6 e Trat 7) tais valores são praticamente iguais. Tal fato, evidencia que a distribuição normal pode ser inadequada para esse ajuste. Outro fato a ser destacado é a possível violação da pressuposição de homogeneidade exigida na análise de variância, ao ajustar-se o modelo normal. Tal pressuposição pode interferir nos resultados dos testes de médias, inferindo diferenças significativas entre as médias dos tratamentos, quando na realidade não existem ou o contrário. Dessa forma, tem-se evidências que uma distribuição assimétrica pode ser utilizada para o ajuste do teor de boro e enxofre na produção de grãos de soja.

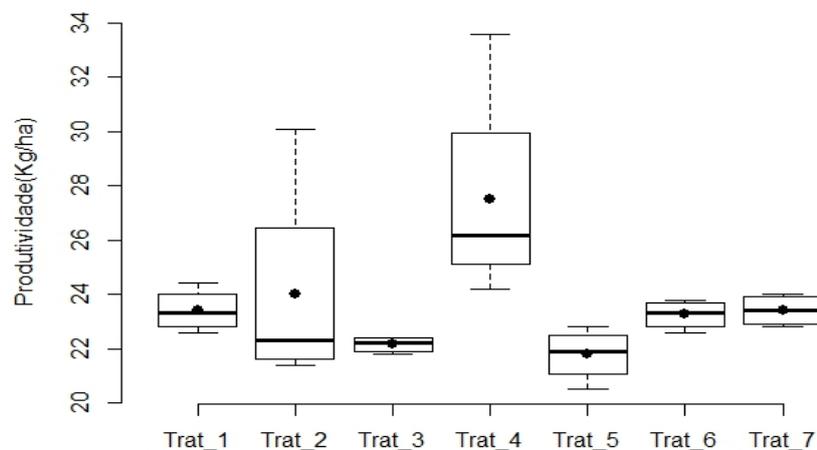


Figura 5 – Boxplot para o ajuste do teor de B e a absorção de S na produção de grãos de soja

4.2 Ajuste do delineamento inteiramente casualizado

Na Tabela 3 estão as estimativas dos parâmetros para os modelos normal e ST3. Dentre tais estimativas de máxima verossimilhança (EMVs) destacam-se os erros-padrão e os valores do Critério de Informação de Akaike (AIC) e Critério de Informação Bayesiano (BIC). De acordo com os critérios, quanto menor forem estas estimativas, melhor o ajuste. Enquanto que na Tabela 4 encontram-se os valores do teste de razão de verossimilhança e do seu nível descritivo. Conforme os resultados, existem evidências estatísticas que o modelo ST3 pode ser utilizado para análise dos dados de densidades.

No ajuste do modelo, foi realizada uma restrição na solução, isto é, considerou-se o efeito do tratamento $\tau_1 = 0$. Dessa forma, as estimativas dos parâmetros dos tratamentos ($\tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6$ e τ_7) representam diferenças médias em relação ao tratamento τ_1 . Isto, significa que as interpretações devem ser feitas em relação ao tratamento que foi realizado a restrição τ_1 . Observa-se, ainda, que para os dois modelos justados (Normal e ST3) as estimativas dos parâmetros estão coerentes com os resultados mostrados na Figura 5, visto que os efeitos médios de todas as diferenças estimadas apresentaram valores positivos, conforme pode ser observado na Tabela (3).

Tabela 3 – Estimativas de máxima verossimilhança (EMVs), valor da verossimilhança (VV), Informação de Akaike (AIC) e Critério de Informação Bayesiano (BIC) comparando a distribuição normal com a distribuição ST3.

Normal				ST3			
θ	EMVs	E.P.	p-valor	θ	EMVs	E.P.	p-valor
m	23,400	0,986	<0,001	m	22,617	0,186	<0,001
τ_2	0,625	1,395	0,659	τ_2	-1,204	0,302	<0,001
τ_3	-1,250	1,395	0,380	τ_3	-0,796	0,246	<0,001
τ_4	4,125	1,395	0,007	τ_4	3,586	0,497	<0,001
τ_5	-1,625	1,395	0,257	τ_5	-1,008	0,350	<0,001
τ_6	-0,150	1,395	0,915	τ_6	0,001	0,254	0,994
τ_7	0,000	1,395	1,000	τ_7	0,199	0,271	0,472
σ	0,679	0,133	<0,001	σ	0,204	0,266	<0,001
ν				ν	2,372	0,187	<0,001
α				α	0,881	0,324	0,701
	VV	AIC	BIC	VV	AIC	BIC	
	117,512	133,512	144,169	79,765	99,765	113,087	

Tabela 4 – Teste de razão de verossimilhança para verificar se existe diferença estatística entre os modelos ST3 e o normal.

Modelos	Hipóteses	Estatística w	p -value
Normal vs ST3	$H_0 : \lambda = 1$ vs $H_1 : H_0$ é falsa	37,747	< 0,001

Em relação às estimativas dos erros-padrão, a distribuição normal apresentou valores iguais (1,395), indicando homogeneidade dentro dos tratamentos, fato que não foi verificado na Figura 5. Enquanto que o modelo ST3 evidencia ter modelado melhor a variância dentro dos tratamentos. Por exemplo, o tratamento (τ_5) foi que apresentou maior variância e, também, o que apresentou maior erro padrão (0,350) e o τ_3 foi o que apresentou menor variância e, também, o que apresentou menor erro padrão (0,246). Assim, destaca-se, a distribuição ST3 que apresentou estimativas para os erros-padrão menores do que o modelo normal.

Na Tabela 4, o nível descritivo (< 0.001) evidencia que existe diferença estatística entre os modelos ST3 e a Normal. Assim, após as análises dos critérios de comparação, dos erros-padrão do teste de razão de verossimilhança utilizou-se a distribuição ST3 para explicar os dados. Dessa forma, foram realizados os ajustes para considerando restrições para os tratamentos τ_2 , τ_3 , τ_4 , τ_5 , τ_6 e τ_7 e calculados seus respectivos intervalos de confiança, todos os resultados estão apresentados na Tabela 5.

Portanto, utilizando a distribuição ST3 para explicar os dados foram construídos intervalos de confiança para todos os tratamentos tomados dois a dois, conforme apresentados na Tabela (5).

Tabela 5 – Resultados da comparação dos 7 tratamentos utilizados para avaliar o teor de B e a absorção de S em grãos de soja

Diferenças	Estimativas	IC_{inf}	IC_{sup}	Diferenças	Estimativas	IC_{inf}	IC_{sup}
Trat 2 - Trat 1	-1,204	-1,824	-0,583	Trat 1 - Trat 2	1,204	0,583	1,824
Trat 3 - Trat 1	-0,796	-1,301	-0,290	Trat 3 - Trat 2	0,409	-0,180	0,998
Trat 4 - Trat 1	3,587	2,567	4,608	Trat 4 - Trat 2	4,791	3,727	5,855
Trat 5 - Trat 1	-1,009	-1,727	-0,290	Trat 5 - Trat 2	0,197	-0,583	0,975
Trat 6 - Trat 1	0,002	-0,520	0,524	Trat 6 - Trat 2	1,206	0,602	1,810
Trat 7 - Trat 1	0,200	-0,359	0,758	Trat 7 - Trat 2	1,403	0,770	2,038
Trat 1 - Trat 3	0,796	0,290	1,301	Trat 1 - Trat 4	-3,587	-4,608	-2,567
Trat 2 - Trat 3	-0,409	-0,998	0,180	Trat 2 - Trat 4	-4,791	-5,855	-3,727
Trat 4 - Trat 3	4,382	3,3813	5,384	Trat 3 - Trat 4	-4,382	-5,384	-3,381
Trat 5 - Trat 3	-0,212	-0,903	0,479	Trat 5 - Trat 4	-4,595	-5,720	-3,470
Trat 6 - Trat 3	0,798	0,313	1,282	Trat 6 - Trat 4	-3,585	-4,595	-2,574
Trat 7 - Trat 3	0,995	0,472	1,518	Trat 7 - Trat 4	-3,388	-4,417	-2,359
Trat 1 - Trat 5	1,009	0,290	1,727	Trat 3 - Trat 6	-0,798	-1,282	-0,313
Trat 2 - Trat 5	-0,197	-0,975	0,583	Trat 4 - Trat 6	3,585	2,574	4,595
Trat 3 - Trat 5	0,212	-0,479	0,903	Trat 5 - Trat 6	-1,010	-1,713	-0,307
Trat 4 - Trat 5	4,595	3,470	5,720	Trat 7 - Trat 6	0,198	-0,341	0,737
Trat 6 - Trat 5	1,010	0,307	1,713	Trat 1 - Trat 6	-0,002	-0,524	0,520
Trat 7 - Trat 5	1,208	0,478	1,938	Trat 5 - Trat 6	-1,010	-1,713	-0,307

4.3 Análise de resíduos

Com a finalidade de detectar algumas observações discrepantes e, também, alguns desvios das suposições do modelo de regressão foram realizados estudos de análises de resíduos para os modelos normal e ST3. Tais resultados foram apresentados na Figura (6), sendo que os gráficos (a) e (c) representam os resíduos quantílicos versus os índices e os (b) e (d) representam os envelopes simulados para as respectivas distribuições. Especificando cada item observa-se em (a) que existem evidências de uma possível violação da independência dos parâmetros de locação e de escala. Enquanto que em (c) os resíduos quantílicos estão bem distribuídos em torno de zero e não apresentam evidências de problemas de dependência entre o modelo esperado e a variação dos dados. Para os envelopes simulados no item (b) muitos pontos estimados encontram-se fora do envelope indicando que a distribuição normal não foi bem ajustada. Entretanto, no item (d) a maioria dos pontos estimados encontram-se dentro do envelope indicando que a distribuição ST3 ajustou-se bem aos dados e pode ser utilizada para explicar o efeito do teor de B e a absorção de S na produção de grãos. Portanto, a distribuição assimétrica ST3 ajustou-se melhor aos dados do que o modelo normal, neste exemplo específico de ensaios inteiramente casualizados.

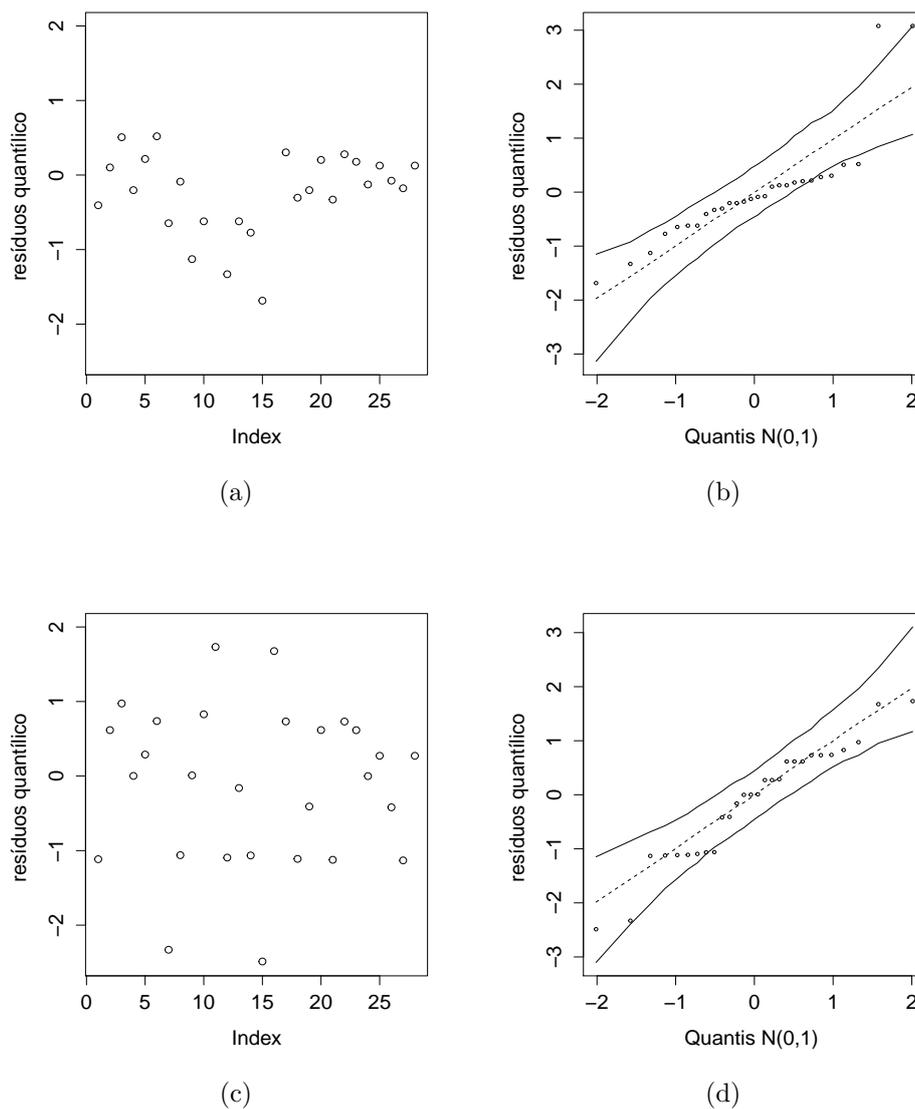


Figura 6 – (a) e (c) gráficos de índices versus os resíduos quantílicos para os modelos normal e ST3, respectivamente. (b) e (d) Gráficos de envelopes simulados dos quantis normais versus os resíduos quantílicos para os modelos normal e ST3, respectivamente.

5 CONCLUSÃO

A nova distribuição de probabilidade com quatro parâmetros chamada assimétrica t-Student assimétrica tipo 3 (ST3) foi proposta com sucesso nos estudos com ensaios de delineamento inteiramente casualizado. Tal distribuição ajusta-se a dados com a presença de assimetria e, ainda, é analiticamente tratável. Também, permite testar a qualidade do ajuste com alguns de seus submodelos: normal, Cauchy e Student. Foram fornecidas algumas propriedades matemáticas, incluindo, assimetria e curtose. O ajuste do modelo foi realizado utilizando o método da máxima verossimilhança, de forma fácil e intuitiva, por meio de rotinas computacionais implementadas no software estatístico R. O modelo pode ser utilizado em situações práticas de delineamentos experimentais com interpretações de interesse do pesquisador sem a necessidade das pressuposições exigidas pela análise de variância. Para explicar o efeito do teor de B e a absorção de S na produção de grãos de soja o modelo t-Student assimétrica tipo 3 (ST3) ajustou-se melhor do que a distribuição normal.

5.0.1 Perspectivas de trabalhos futuros

Abaixo foram descritos algumas sugestões de futuros trabalhos que podem ser realizados para complementar o tema estudado:

** Fazer estudos tanto com o modelo t-Student assimétrica tipo 3 (ST3), como para seus submodelos com efeitos aleatórios para ensaios experimentais com medidas repetidas no tempo;*

** Fazer estudos de simulação computacional tanto, com o modelo t-Student assimétrica tipo 3 (ST3), como para seus submodelos;*

** Implementar no software Shiny tanto o modelo t-Student assimétrica tipo 3 (ST3), como os seus submodelos para tornar as modelagens mais intuitivas para as outras áreas do conhecimento.*

Referências

- AKAIKE, H. A New Look at Statistical Model Identification. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1974. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 21.
- ATKINSON, A. C. *Plots, transformations and regression: an introduction to graphical methods of diagnostics regression analysis*. 1987. Citado na página 20.
- AZZALINI, A. *A class of distributions which includes the normal ones*. v. 2, 1985. Citado na página 13.
- AZZALINI, A.; CAPITANIO, A. *Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t distribution*. v. 65, 2003. Citado na página 12.
- AZZALINI, A., C. A. *A statistical application of the multivariate skew normal distribution*. v. 61, n. 3, 1999. Citado na página 13.
- BANZATO D. A. KRONKA, S. d. N. *Experimentação agrícola*. 4. ed. Jaboticabal: Funep: [s.n.], 2006. Citado na página 11.
- BOWLEY, A. L. *Elements of statistics*. 1920. Citado na página 14.
- BOZDONGAN, H. *Model selection and akaike's information criterion (aic): The general theory and its analytical extensions*. v. 52, n. 3, setembro 1987. Citado na página 21.
- CAMPOS, A. M. *Uma abordagem bayesiana para alguns modelos de crescimento na presença de assimetria e heterocedasticidade. Tese (Tese (Mestrado)) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011. Citado na página 13.*
- CRUZ, R. D. l.; BRANCO, M. D. *Bayesian analysis for nonlinear regression model under skewed errors, with application in growth curves*. v. 51, n. 4, 2009. Citado na página 13.
- DICICCIO T. J. & MONTI, A. C. *Inferential aspects of the skew exponential, power distribution*. v. 99, 2004. Citado na página 13.
- DUNN, P. K.; SMYTH, G. K. *Randomized quantile residuals*. n. 5, 1996. Citado na página 20.
- EMILIANO, P. C. *Critérios de informação: como eles se comportam em diferentes modelos. Tese (Tese (Doutorado)) — Universidade Federal de Lavras, 2013. Citado na página 22.*
- FERNÁNDEZ C., O. J.; STEEL, M. F. J. *Modeling and inference with v- spherical distribution*. *Journal of the American Statistical Association*, n. 90, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 15.
- FERNÁNDEZ C., S. M. F. J. *On bayesian modeling of fat tails and skewness*. *Journal of the American Statistical Association*, v. 93, n. 441, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 16.

GALTON, F. Inquiries Into the Human Faculty. [S.l.], 1883. Disponível em: <<http://www.mugu.com/galton/books/human-faculty/text/galton-1883-human-faculty-v4.pdf>>. Citado na página 18.

GENTON, M. G. *Skew elliptical distributions and their application*. 2004. Citado na página 13.

GUEDES T. A., R. R. M.; MARTINS A. T., J. V.; CARNEIRO, J. W. P. Applying regression models with skew-normal errors to the height of bedding plants of *stevia rebaudiana* (bert) bertonii. [S.l.], 2014. v. 36. Citado na página 13.

JOHNSTON J. M. E PENNYPACKER, H. S. Strategies and tactics of behavioral research. 2. ed. [S.l.], 1993. Citado na página 11.

JONES, M. C.; FADDY, M. J. Series B (Statistical Methodology). [S.l.], 2003. v. 65. Citado na página 12.

KONISHI, S.; KITAGAWA, G. *Information criteria and statistical modeling*. 2008. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

MACERAU, W. M. O. Comparação das distribuições alpha-estável, normal, t de student e Laplace assimétricas. Tese (Tese (Mestrado)) — Universidade de São Paulo UFSCar, 2012. Citado na página 12.

MAGALHÃES, M. Probabilidade e Variáveis Aleatórias. [S.l.], 2013. Citado na página 14.

MOOD A. M., G. F. A.; BOES, D. C. Introduction to the Theory of Statistics. [S.l.], 1974. Citado na página 11.

MOORS, J. J. A. A quantile alternative for kurtosis. [S.l.], 1988. Citado na página 18.

RIGBY, R. A.; STATINOPOULOS, D. M. Generalized additive models for location, scale and shape. [S.l.], 2005. v. 54. Citado na página 12.

ROSSI, R. M.; SANTOS, L. A. Modelagem bayesiana para curvas de crescimentos de codornas assumindo assimetria nos erros. v. 35, n. 3, 2014. Citado na página 13.

SCHWARZ, G. The Annals of Statistics. 1978. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2958889>>. Citado na página 12.

YULE, G. U. *Introduction to the theory of statistics*. 1912. Citado na página 14.