



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**ANÁLISE DE FOURIER E A TRANSFORMADA**  
**DE LAPLACE**

**JOSÉ HÉLIO HENRIQUE DE LACERDA**

**CAMPINA GRANDE**

**Maio de 2016**

JOSÉ HÉLIO HENRIQUE DE LACERDA

**ANÁLISE DE FOURIER E A TRANSFORMADA  
DE LAPLACE**

Trabalho Acadêmico de conclusão de curso, apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Dr. Davis Matias de Oliveira

CAMPINA GRANDE

Maio de 2016

---

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

---

L131a Lacerda, José Hélio Henrique de.  
Análise de Fourier e a transformada de Laplace [manuscrito] /  
José Hélio Henrique de Lacerda. - 2016.  
104 p. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)  
- Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e  
Tecnologia, 2016.

"Orientação: Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira,  
Departamento de Matemática".

1. Análise de Fourier. 2. Transformada de Laplace. 3.  
Equações diferenciais. 4. Funções. I. Título.

21. ed. CDD 515.25

JOSÉ HÉLIO HENRIQUE DE LACERDA

**ANÁLISE DE FOURIER E A TRANSFORMADA DE LAPLACE**

Trabalho acadêmico de conclusão de curso apresentado ao curso de licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia CCT, da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Aprovado em: 27/05/2016

COMISSÃO EXAMINADORA

Davis Matias de Oliveira

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira Dpto. Matemática - CCT/UEPB

ORIENTADOR

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

EXAMINADOR

Luciana Roze de Freitas

Prof. Dra. Luciana Roze de Freitas

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

EXAMINADORA

# Dedicatória

Dedico o presente trabalho a minha família e meus professores, em especial, minha mãe Lúcia de Fátima Henrique, minha esposa Cláudia Coutinho Henrique e, a meu professor e orientador Davis Matias De Oliveira.

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, pelas bênçãos alcançadas durante todo esse percurso. Agradeço a minha família, professores e amigos, pela ajuda e incentivos, principalmente a minha mãe Lúcia de Fátima, que esteve sempre orando para que tudo desse certo; a minha esposa Cláudia, que esteve sempre ao meu lado me apoiando em todos os momentos; a meu professor e orientador Davis matias, com quem tive a oportunidade de aprender muito, não só os assuntos estudados no desenvolver do trabalho e do curso, mas pelo exemplo de simplicidade e generosidade; aos professores e participantes da banca, Aldo Louredo Trajano e Luciana Roze de Freitas, pela paciência, incentivos, pela humildade e generosidade não só comigo, mas com todos os estudantes do curso; aos professores Manuel Milla Miranda, Maria da Conceição Vieira, Thiciany Iwano, Isabelle Aires, que contribuíram ricamente para o meu aprendizado; dentre os amigos cito Naelson Silva, Helder Flaubert, Jonatas Romero, Cicero José da Silva e Mirdy Alves, parceiros de estudos.

*“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível. ”*

(Charles Chaplin)

# Resumo

Com o intuito de avançar em uma linha de pesquisa voltada para a Matemática pura e aplicada, visando, em estudos posteriores, a resolução de Equações Diferenciais Parciais (EDP), o presente trabalho objetiva um estudo introdutório de dois métodos utilizados na resolução destas equações, são eles: a Análise de Fourier e a Transformada de Laplace. Contudo, não demos ênfase à resolução das EDPs, mas, as propriedades inerentes à Série e Transformada de Fourier e à Transformada de Laplace. Para tanto é necessária a introdução de certos conceitos matemáticos, bem como a justificativa de alguns teoremas. Porém, para que o texto não se tornasse demasiadamente extenso, omitimos parte destas justificativas, mas desde já destacamos que indicamos as referências onde as mesmas podem ser encontradas. Nossa proposta central é buscar compreender onde e como estão alicerçadas tais teorias, em especial as de Fourier, as quais estudamos com maiores detalhes, tendo em vista que, apesar destas terem muitas aplicações na Física, Engenharia e diversas outras áreas, são pouco abordadas nos cursos de licenciatura e acreditamos ser importante que o estudante de Matemática tenha pelo menos um pouco deste conhecimento para que assim possa ampliar o leque de possibilidades de ingressar nas áreas de pesquisas científicas. Para melhor entendimento e coesão dos conceitos, dividimos este trabalho em três capítulos; no primeiro abordamos alguns conceitos básicos que são utilizados no decorrer do trabalho; no segundo estudamos a Série de Fourier e no terceiro as Transformadas de Fourier e de Laplace, além de algumas aplicações destas.

**Palavras-chave:** Análise de Fourier, Transformada de Laplace, Equações Diferenciais.



# Abstract

In order to advance in a line of research geared by the pure and applied Mathematics, aiming, in future studies, to solve Partial Differential Equations (PDE), this paper aims an introductory study of two methods used in the resolution of these equations, those are: the Fourier Analysis and the Laplace Transform. Although, we are not focusing the solving of the PDEs, instead, we are giving emphasis to the properties inherent to the the Fourier's Transform and Series and the Laplace Transform. For that, an introduction of some math concepts is necessary, as well as a justification of some theorems. However, for the text not becoming too extended, we have omitted part of these justifications, but we haste to clarify that references in this paper indicate where they can be found. Our main proposal is seeking to understand where and how such theories are grounded, in special the Fourier's theories, which we studied accurately, considering that although these theories have many applications in physics, engineering, and many other areas, they are little addressed in education courses and we believe that is important for the Mathematics learner to have at least a little of this knowledge so that he can expand the range of possibilities of joining the areas of scientific research. For better understanding and cohesion of the concepts, we divided this paper in three chapters: in the first one, we covered some basic concepts that was used during the work; in the second one, we studied the Fourier's Series and in the third one, the Fourier and Laplace Transforms, and some of theirs applications.

**Keywords:** Fourier Analysis, Laplace Transform, Differential Equations.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>1 Teoria-Preliminar</b>	<b>14</b>
1.1 Funções Periódicas . . . . .	14
1.2 Funções Ortogonais . . . . .	15
1.3 Funções Pares e Funções Ímpares . . . . .	18
1.4 Convergência Pontual e Convergência Uniforme . . . . .	20
<b>2 Séries de Fourier</b>	<b>23</b>
2.1 Coeficientes de Fourier . . . . .	23
2.2 Séries de Fourier . . . . .	26
2.3 Integração da série de Fourier . . . . .	30
2.4 Forma Complexa da Série de Fourier . . . . .	33
2.5 Convergência Pontual da Série de Fourier . . . . .	38
2.6 Convergência Uniforme da Série de Fourier . . . . .	45
2.7 Núcleos de Dirac . . . . .	47
2.8 O Teorema de Fejér . . . . .	52
2.9 Identidade de Parseval . . . . .	55
2.10 Teste de Jordan . . . . .	59
<b>3 Transformadas: de Fourier e de Laplace</b>	<b>66</b>
3.1 Transformada de Fourier . . . . .	67
3.2 Espaço $\mathcal{L}$ e a Transformada de Fourier em $\mathcal{L}$ . . . . .	71
3.3 Transformada de Laplace . . . . .	78
3.3.1 Transformada de Laplace Inversa . . . . .	81
3.4 Algumas Conexões e Diferenças de $\mathfrak{F}$ e $\mathcal{L}$ . . . . .	84

3.5	Algumas Aplicações da Série de Fourier de $\mathfrak{F}$ e $\mathcal{L}$ . . . . .	91
3.6	Considerações Finais . . . . .	102
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>103</b>

# Introdução

De acordo com relatos históricos a Matemática surgiu na Babilônia, depois do ano 3000 a.C., da necessidade de contar objetos. Com o passar dos anos, desenvolvida por grandes nomes, esta tornou-se um poderoso instrumento intelectual que através da abstração e formalização sintetiza ideias. No entanto, em se tratando de aplicação, para a construção de um modelo matemático de um problema original, é necessário existir uma teoria Matemática adequada e certamente isto não ocorre sempre. Como exemplo disto podemos citar que, para modelar situações de competição econômica, o matemático húngaro naturalizado estadunidense, John Von Neumann (1903-1957) desenvolveu a Teoria dos Jogos.

Tendo surgido junto com o Cálculo Diferencial e Integral e a Mecânica Clássica, a teoria das Equações Diferenciais constitui um conjunto de ferramentas indispensável no exercício da atividade profissional, bem como, no desenvolvimento científico de diversas outras ciências. Pois frequentemente, ao modelar um experimento ou fenômeno qualquer, obtemos equações que envolvem taxas de variações das quantidades presentes consideradas essenciais e, é aí que entra em cena a linguagem oferecida pelas Equações Diferenciais, por tais características, como afirma Bassanezi (1988), estas talvez sejam o ramo da Matemática que maiores interações têm com outras ciências.

Diversas questões como o movimento dos planetas, a oscilação do pêndulo, entre outros, foram estudadas por pesquisadores de várias áreas do conhecimento científico como J. Kepler (1571-1630), Leonardo Da Vinci (1452-1519), Galileu Galilei (1564-1642) e C. Huygens (1629-1695). Contudo, lhes faltara teoria Matemática para modelar tais fenômenos. Com o surgimento do Cálculo no final do século XVII, por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), diversos problemas mecânicos como os acima citados puderam ser resolvidos por grandes matemáticos como os da família Bernoulli e principalmente por um dos seus alunos L. Euler (1707-1783), considerado

um dos maiores matemáticos do século cuja obra (incompleta) preenche setenta e quatro grandes volumes.

Entretanto, com o tempo, notou-se que não seria possível obter métodos gerais de resolução explícita em termos de funções elementares para as Equações Diferenciais, de acordo com Bassanezi (1988), o próprio Euler introduziu métodos que geravam soluções aproximadas, como por exemplo, a aproximação feita com linhas poligonais e a solução que é aproximada por polinômios, ou mais especificamente, por uma série de potências.

Em se tratando das Equações Diferenciais Parciais, podemos dizer que não é uma simples extensão das Equações Diferenciais Ordinárias, muito pelo contrário, para o estudo de tais equações é necessária a compreensão de conceitos mais avançados da Análise Matemática e da Álgebra Linear. Os três problemas clássicos por exemplo, que como afirma Figueiredo (2014), veem sendo estudados desde o século XVIII, à saber, o problema das vibrações transversais de uma corda, cuja posição de um ponto  $x$  da corda é dada pela função  $u(x, t)$  num tempo  $t$ , deve satisfazer a equação  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ; o problema de condução de calor em uma barra onde a temperatura dada por  $u(x, t)$  de um ponto  $x$  da barra no tempo  $t$  deve satisfazer  $u_t = k u_{xx}$ ; e, o problema do equilíbrio de uma membrana sob a ação de certas forças em que obtemos uma função  $u(x, t)$  que deve satisfazer a equação de Laplace dada por  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  em uma determinada região do plano  $xy$ , trazem consigo certas propriedades como: condições de fronteira ou de contorno cujo estudo é uma tarefa nada fácil. Para a obtenção de soluções para problemas como estes, dentre os métodos utilizados, destacamos o Método de Fourier e a Transformada de Laplace. O Método de Fourier consiste basicamente em “separar as variáveis” recaindo em problemas de auto valor para as equações ordinárias intimamente ligadas as Equações Diferenciais Parciais em estudo, obtendo assim, uma família de soluções para a EDP, que satisfazem parcialmente as condições de fronteira, daí o objetivo seguinte é compor a solução do problema em questão na forma de uma série cujos termos são produtos dessas soluções onde os coeficientes são escolhidos convenientemente, este último passo é o que chamamos de Análise de Fourier. Por outro lado, a Transformada de Laplace constitui uma ferramenta poderosa e desempenha um papel importante na resolução de problemas de valor de contorno, possuindo ainda a propriedade de que quando aplicada a uma Equação Diferencial linear de ordem  $n$ , com coeficientes constantes, sujeita a condições iniciais, a transforma em uma equação algébrica. Em aplicações, é comum interpretar as

transformadas de Fourier e de Laplace como transformações do domínio do tempo para o domínio de frequências.

Jean Batiste Joseph Fourier (1766-1830), Físico-Matemático francês, em 1789 decide abandonar a carreira religiosa e tornar-se professor de Matemática da escola militar de Auxerre. Pela sua genialidade Fourier foi mais tarde selecionado para estudar na École Normale de Paris, tendo como professores os maiores Físico-Matemáticos da época: Joseph Louis Lagrange, Pierre Simon Laplace e Gaspard Monge. Em 1811, em suas pesquisas sobre a teoria do calor, Fourier desenvolve *A Théorie mathématique de la chaleur* que explicita os coeficientes e descreve várias funções em séries de senos e cossenos. Como observa Figueiredo (2014), Fourier afirmou ainda que qualquer função poderia ser expressa na forma da série que hoje tem o seu nome, contudo apesar disso não ser verdade, o que foi provado por Dirichlet, ele tem o mérito de descrever claramente a forma da série que deveria representar tal função. Posteriormente com uma fundamentação mais rigorosa da Análise Matemática por Cauchy, Weierstrass e outros, a teoria das séries de Fourier pode ser enriquecida com as contribuições de Riemann. Hoje, as séries de Fourier, a integral de Fourier e as Transformadas de Fourier constituem um ramo da Análise Matemática de valor incalculável para o estudo de fenômenos ondulatórios.

Pierre Simon Marquis de Laplace (1749-1827), um notório matemático, físico e astrônomo, como afirma Zill (2001), foi chamado por alguns de seus contemporâneos de “o Newton da França”. Embora Laplace tenha usado a transformada integral em seu trabalho sobre a teoria das probabilidades, é mais provável que a integral tenha sido descoberta por Euler. Dentre as publicações importantes destacamos os tratados *Mécanique Céleste* e *Théorie Analytique des Probabilités*.

# Capítulo 1

## Teoria-Preliminar

Antes de começarmos o nosso estudo, queremos deixar claro que grande parte das informações contidas em todo este trabalho, são oriundas das referências utilizadas na produção do mesmo, em especial, as ideias empregadas na maioria das demonstrações dos teoremas e proposições foram extraídas da referência [3], que vale enfatizar, constitui o principal alicerce deste texto.

Nesta primeira etapa abordaremos algumas propriedades de certas funções, além de alguns conceitos e resultados da Análise Matemática e da Álgebra Linear que serão utilizados posteriormente.

### 1.1 Funções Periódicas

Como veremos mais a frente, para discutir sobre as séries de Fourier é necessário desenvolver certas propriedades das funções trigonométricas  $\sin \frac{n\pi x}{L}$  e  $\cos \frac{n\pi x}{L}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , em especial, o seu caráter periódico (visto que as funções periódicas aparecem com frequência em problemas de Física e Engenharia). Por este motivo faz-se necessária a seguinte definição.

**Definição 1.1. (*Funções Periódicas*)** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se periódica quando existe uma constante  $P > 0$  tal que  $f(x + P) = f(x)$  para todo  $x$  em  $\mathbb{R}$ .

A constante  $P$  é chamada de período da função  $f$ . Além disso, se  $P$  é o período de  $f$ , então  $2P, 3P, \dots, kP$ , onde  $k$  é um inteiro positivo, também são períodos de  $f$ . Em geral vale também para  $k = 0$ , mas como 0 é o período de qualquer função, consideraremos

apenas os casos em que  $k > 0$ . A verificação destas observações pode ser feita, inspecionando as igualdades  $f(x) = f(x + P) = f(x + 2P) = \dots = f(x + kP)$ , que são obtidas a partir da definição acima. Quando  $k = 1$  dizemos que  $P$  é o período fundamental da função  $f$ . A partir de agora quando nos referirmos ao período de uma função estaremos considerando o período fundamental. Como exemplo de funções periódicas bem conhecidas temos:  $\operatorname{sen} x$ ,  $\operatorname{cos} x$ ,  $\operatorname{tan} x$ , entre outras.

Uma propriedade importante das funções periódicas é

**Proposição 1.1.** *Se uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de período  $P$  é integrável em qualquer intervalo, então*

$$\int_a^{a+P} f(t) dt = \int_0^P f(t) dt \quad (1.1)$$

onde  $a$  é qualquer número real fixado.

**Demonstração:** Definimos  $\phi(x) = \int_x^{x+P} f(t) dt$ . Segue do Teorema Fundamental do Cálculo <sup>1</sup> que  $\phi'(x) = f(x+P) - f(x)$ . Mas  $f$  é periódica com período  $P$ , então  $\phi'(x) = 0$ , o que implica que  $\phi$  é constante. Portanto  $\phi(a) = \phi(0)$ , isto é,  $\int_a^{a+P} f(t) dt = \int_0^P f(t) dt$ . ■

Além disso, dadas  $f_1$  e  $f_2$  duas funções reais periódicas de mesmo período  $P$ , se a função real  $h$  é tal que  $h = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ , onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes, então  $h$  é periódica de período  $P$ . Este fato segue-se imediatamente da definição de função periódica, pois como  $f_1$  e  $f_2$  são periódicas temos:

$$h(x + P) = \alpha_1 f_1(x + P) + \alpha_2 f_2(x + P) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = h(x).$$

Vale observar que este resultado pode ser generalizado.

## 1.2 Funções Ortogonais

Como afirma Zill (2001), em estudos de Matemática avançada, em alguns aspectos, uma função pode ser considerada como uma generalização de um vetor. No que segue utilizaremos algumas propriedades de produto interno e de ortogonalidade entre vetores<sup>2</sup> com o intuito de estender tais conceitos para funções. Começamos considerando duas funções,  $f$  e  $g$ , integráveis e definidas em um intervalo  $[a, b]$ . Como a integral definida

<sup>1</sup>Para ver o Teorema Fundamental do Cálculo, sugerimos a referência [6].

<sup>2</sup>Estudos detalhados sobre produto interno e ortogonalidade entre vetores podem ser encontrados na referência [7].



do produto  $fg$  preserva as propriedades do produto interno usual de vetores em  $\mathbb{R}$ , nos sentimos motivados a apresentar a seguinte definição.

**Definição 1.2. (*Produto Interno*)** O produto interno de duas funções  $f$  e  $g$  em um intervalo  $[a, b]$  é o número

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Sabendo que dois vetores são ditos ortogonais quando o produto interno entre eles é zero, definimos de forma análoga para o produto interno entre duas funções. Entretanto, como observa Zill (2001) vale salientar que o conceito de ortogonalidade que definiremos a seguir não é sinônimo de perpendicularidade, ou seja, no presente contexto a palavra ortogonal não tem significado geométrico.

**Definição 1.3. (*Funções Ortogonais*)** Duas funções  $f$  e  $g$  são ortogonais em um intervalo  $[a, b]$  quando

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Mais geralmente temos

**Definição 1.4. (*Conjuntos Ortogonais*)** Diz-se que um conjunto de funções integráveis em  $\mathbb{R}$ ,  $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}$  é **ortogonal** em um intervalo  $[a, b]$  se

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0$$

para  $n \neq m$ , e

$$\int_a^b \phi_n^2(x)dx = c_n \neq 0,$$

este ainda, recebe o nome de **ortonormal** quando  $c_n = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 1.1.** Usando propriedades das funções trigonométricas segue-se que

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = 0 \text{ se } m, n \geq 1, \text{ onde } L > 0 \quad (1.2)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \text{ } m, n \geq 1 \\ L, & m = n \geq 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \text{ } m, n \geq 1 \\ L, & m = n \geq 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

**Resolução:** Provaremos (1.2), os demais casos mostra-se de forma análoga. Usando a identidade trigonométrica  $\cos x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$ , temos:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[ \operatorname{sen} \frac{m\pi x + n\pi x}{L} + \operatorname{sen} \frac{m\pi x - n\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{m\pi x + n\pi x}{L} dx + \frac{1}{2} \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{m\pi x - n\pi x}{L} dx \\ &= I + II. \end{aligned}$$

Observe que, sendo a função cosseno par, isto é,  $\cos(x) = \cos(-x) \forall x \in \mathbb{R}$ , para  $m \neq n$ , temos

$$\begin{aligned} I + II &= \frac{-L}{2(m\pi + n\pi)} \cos \frac{m\pi x + n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L + \frac{-L}{2(m\pi - n\pi)} \cos \frac{m\pi x - n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L \\ &= \frac{-L}{2\pi(m+n)} \cos \frac{(m+n)\pi x}{L} \Big|_{-L}^L + \frac{-L}{2\pi(m-n)} \cos \frac{(m-n)\pi x}{L} \Big|_{-L}^L \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

De forma geral pode-se mostrar que o sistema seguinte é ortogonal.

$$1, \cos \frac{\pi x}{L}, \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{k\pi x}{L}, \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L}, \dots$$

Segue também das relações de ortogonalidade que

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}, \dots, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{k\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L}, \dots$$

é um sistema ortonormal.

Agora, lembremos do curso de Álgebra Linear que tomando, por exemplo o  $\mathbb{R}^3$ , dados três vetores  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$  deste espaço, não nulos e mutuamente ortogonais, para qualquer  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  existem escalares,  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  tais que podemos escrever,  $\vec{u} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$ , onde tais escalares são chamados de componentes do vetor  $\vec{u}$ .

Se tivermos um conjunto infinito de funções  $\{\phi_n(x)\}$ , duas a duas, ortogonais em um intervalo  $[a, b]$ , dada uma função  $y = f(x)$  neste intervalo, será que é possível determinar um conjunto de coeficientes  $c_n, n = 0, 1, 2, \dots$  tais que

$$f(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) + \dots?$$

Desde que  $f$ ,  $\phi_n$  e  $\phi_m\phi_n$  sejam integráveis, podemos determinar os coeficientes  $c_n$ , utilizando o produto interno. Multiplicando a igualdade acima por  $\phi_m(x)$  e integrando

em  $[a, b]$ , obtemos

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)dx = c_0 \int_a^b \phi_0(x)\phi_m(x)dx + c_1 \int_a^b \phi_1(x)\phi_m(x)dx + \dots + c_n \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx + \dots$$

Segue da ortogonalidade das  $\phi_i(x)$  que cada membro do lado direito a igualdade é igual a zero exceto quando  $m = n$ , e com isso temos

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx = c_n \int_a^b \phi_n^2(x)dx$$

o que resulta em

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx}{\int_a^b \phi_n^2(x)dx} \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots$$

que são os coeficientes procurados. Veremos mais a frente que esta ideia de ortogonalidade nos será muito útil.

### 1.3 Funções Pares e Funções Ímpares

Nesta seção veremos o conceito de funções pares e funções ímpares. Além disso, estudaremos algumas de suas principais propriedades.

**Definição 1.5. (Função Par e Função Ímpar)** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **par** quando  $f(-x) = f(x)$ , para todo  $x$  em  $\mathbb{R}$ . Isto significa que o gráfico de  $f$  é simétrico com relação ao eixo dos  $y$ . Dizemos que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é **ímpar** se  $f(-x) = -f(x)$ , para todo  $x$  em  $\mathbb{R}$ . Isto nos diz que o gráfico de  $f$  é simétrico com relação a origem.

**Exemplo 1.2.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^n$  com  $n \in \mathbb{N}$ , é uma função par se  $n$  é par e  $f$  é ímpar se  $n$  é ímpar.

**Resolução:** Com efeito, se  $n$  é par então  $n$  é da forma  $2k$  com  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Assim  $f(-x) = (-x)^{2k} = [(-x)^2]^k = x^{2k} = f(x)$ . Por outro lado se  $n$  é ímpar,  $n$  é da forma  $2k + 1$  onde  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Logo  $f(-x) = (-x)^{2k+1} = (-x)^{2k}(-x) = (-1)x^{2k}x = -x^{2k+1} = -f(x)$ .

As propriedades seguintes sobre funções pares e funções ímpares são de fácil verificação, por isso justificaremos apenas as propriedades  $P_3$  e  $P_4$ .

- $P_1$ : A soma de duas funções pares é uma função par. Do mesmo modo, a soma de duas funções ímpares é uma função ímpar;

- $P_2$ : o produto de duas funções pares é uma função par e o produto de duas funções ímpares é uma função par;

- $P_3$ : o produto de um função par por uma função ímpar é uma função ímpar;

- $P_4$ : seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , uma função par, integrável em qualquer intervalo de  $\mathbb{R}$ , limitado e simétrico com relação a origem. Então segue que  $\int_{-L}^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx$ ;

- $P_5$ : sendo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , uma função ímpar, integrável em qualquer intervalo de  $\mathbb{R}$ , limitado e simétrico com relação a origem, temos que  $\int_{-L}^L f(x)dx = 0$ .

**Demonstração:** Para provar ( $P_3$ ), considere as funções  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $f$  é ímpar e  $g$  é par. Assim tomando  $G = fg$ , temos  $G(-x) = (fg)(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(-x) = -f(x)g(x) = -(fg)(x) = -G(x)$ . ■

**Demonstração:** ( $P_4$ ). Temos que

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx,$$

mas  $f$  é par. Logo, fazendo a mudança de variável  $x = -y$  e os ajustes necessários nos limites de integração da primeira integral do lado direito da equação, temos

$$\int_{-L}^0 f(x)dx = - \int_L^0 f(-y)dy = \int_0^L f(y)dy$$

donde segue o resultado. ■

**Definição 1.6. (Funções Seccionalmente Contínuas)** Dizemos que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é **seccionalmente contínua**, (ou **contínua por partes**) quando, em qualquer intervalo limitado de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  possui um número finito de descontinuidades. Além disso, todas estas descontinuidades são de primeira espécie, isto é, existem sempre os limites laterais  $l = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  e  $L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , para qualquer ponto  $a$  pertencente ao domínio de  $f$ . Certamente uma função contínua é seccionalmente contínua.

Observemos os exemplos seguintes.

**Exemplo 1.3.** A função  $\phi$  periódica de período  $2\pi$ , definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

é seccionalmente contínua, pois em cada intervalo limitado  $\phi$  possui um número finito de descontinuidades e todas de primeira espécie.

**Exemplo 1.4.** A função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , se  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ , não é seccionalmente contínua, visto que em  $x = 0$  sua descontinuidade é de segunda espécie.

Por outro lado a função

**Exemplo 1.5.** Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{n}, & \text{se } \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{se } x \leq 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

é tal que todas as suas descontinuidades são de primeira espécie, contudo  $g$  não é seccionalmente contínua, pois no intervalo limitado  $(0, 1)$ ,  $g$  possui um número infinito de descontinuidades.

Nos próximo parágrafo abordaremos alguns conceitos básicos sobre séries numéricas, para logo em seguida trabalharmos alguns critérios de convergência de séries de funções <sup>3</sup>. Tal abordagem se faz necessária, pois será de grande relevância para o estudo do capítulo seguinte.

## 1.4 Convergência Pontual e Convergência Uniforme

Um dos principais desafios no estudo das séries numéricas é determinar quais são e quais não são convergentes. Uma questão ainda mais complicada é calcular o valor da soma da série. Pensando nisto muitos estudiosos da área desenvolveram teorias e estabeleceram critérios que facilitam tal estudo. Dizemos que uma série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, quando as somas parciais, também chamadas sucessão de reduzidas, converge. Por exemplo, para as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n,$$

mostra-se que a primeira diverge se  $\beta \leq 1$ , e converge se  $\beta > 1$ , em particular para  $\beta = 1$  tal série é chamada de série harmônica; já a segunda, também conhecida como série geométrica, converge para  $\frac{\alpha}{1-\alpha}$  se  $|\alpha| < 1$ .

Quando os termos das séries são funções reais definidas em algum subconjunto  $I$  de  $\mathbb{R}$ , isto é,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ , onde  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  são funções em  $\mathbb{R}$ , de acordo com Lima (2014), ao

---

<sup>3</sup>Para um estudo aprofundado sobre séries numéricas e séries de funções, recomendamos a referência [6].

contrário do que ocorre com as sequências numéricas, para as quais usualmente utiliza-se uma única noção de limite, há varias maneiras distintas de definir a convergência de uma série de funções.

**Definição 1.7.** Diremos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge pontualmente se para cada  $x_0$  fixado em  $I$  se a série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$  converge. Ou equivalentemente, dados  $\epsilon > 0$  e  $x_0 \in I$ , existe um inteiro  $N$ , dependendo de  $\epsilon$  e de  $x_0$ , tal que

$$\left| \sum_{j=n}^m f_j(x_0) \right| < \epsilon$$

para todo  $n < m$ , com  $n \geq N$ .

**Definição 1.8.** Diremos também que a série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente quando, dado  $\epsilon > 0$  existe um inteiro  $N(\epsilon)$  (que não depende de  $x$ ), tal que

$$\left| \sum_{j=n}^m f_j(x) \right| < \epsilon$$

para todos os  $m > n \geq N$ .

Antes de apresentarmos exemplos de séries de funções que convergem uniformemente e pontualmente, enunciaremos e demonstraremos o Teste de Weierstrass que garante a convergência uniforme desde que consigamos majorar a série de funções dada, por uma série numérica convergente. Vale observar que tal teste não só nos garante a convergência uniforme como também assegura a convergência absoluta. Além disso, transforma o problema de verificação da convergência de uma série de funções, (que vale salientar, pode não ser uma tarefa fácil) na verificação da convergência de uma série numérica.

**Teorema 1.1. (Teste de Weierstrass)** Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  uma série de funções, onde as  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  estão definidas em um subconjunto  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Se existem constantes  $a_n \geq 0$  tais que  $|f_n(x)| \leq a_n$ , para todo  $x \in I$  e para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente, então a série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente e absolutamente em  $I$ .

**Demonstração:** Como  $I$  é domínio comum a todas as funções  $f_n$ , então dados  $n, q \in \mathbb{N}$  arbitrários, para todo  $x \in I$ , temos que  $|f_n(x) + f_{n+1}(x) \dots + f_{n+q}(x)| \leq a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+q}$ . Sendo a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente segue do critério de Cauchy,<sup>4</sup> para sequências de funções, que  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  convergem uniformemente em  $I$ . ■

<sup>4</sup>Para ver o critério de Cauchy recomendamos a referência [6].

**Exemplo 1.6.** A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

converge uniformemente em  $\mathbb{R}$ , pois  $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  é uma série numérica de termos positivos e convergente. Assim pelo critério de Weierstrass segue a convergência uniforme da série de funções.

Por outro lado

**Exemplo 1.7.** A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n2^n}$$

converge pontualmente no intervalo  $-1 \leq x < 3$ , visto que aplicando o teste da razão verifica-se que tal série converge absolutamente no intervalo  $-1 < x < 3$ , e em  $x = -1$  temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

que converge, pelo critério de Leibniz. E, finalmente para  $x = 3$  tem-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que sabemos ser divergente por se tratar da série harmônica.

Os três próximos resultados apresentam características relevantes da convergência uniforme, no que diz respeito a continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade<sup>5</sup>.

**Teorema 1.2.** Suponhamos que as funções  $f_n$  são todas contínuas e que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente. Então,  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  é uma função contínua.

**Teorema 1.3.** Suponhamos que as funções  $f_n$  são integráveis em um intervalo  $I$  de  $\mathbb{R}$  e que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente em  $I$ . Então

$$\int_I \left[ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I f_n(x) dx.$$

**Teorema 1.4.** Suponhamos que as funções  $f_n(x)$  definidas em um intervalo  $I$  de  $\mathbb{R}$  sejam contínuas, deriváveis e que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$  das derivadas convirja uniformemente. Suponhamos ainda que para um ponto  $x_0 \in I$ , dado, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$  convirja. Então

$$\frac{d}{dx} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

<sup>5</sup>As demonstrações dos teoremas (1.2), (1.3) e (1.4), podem ser encontradas na referência [6].

# Capítulo 2

## Séries de Fourier

### 2.1 Coeficientes de Fourier

Suponhamos que uma função  $f$  possa ser expressa da seguinte forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right]. \quad (2.1)$$

Para que a igualdade acima se verifique, certamente os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  devem estar fortemente ligados a função  $f$ . Nosso próximo objetivo é investigar quais as funções que podem ser representadas de tal forma. Sendo assim, o primeiro passo é encontrar maneiras de calcular tais coeficientes. Para tanto, vamos supor que a igualdade acima seja verdadeira e que a série que aparece do lado direito da equação seja uniformemente convergente. Sob tais hipóteses, de acordo com o teorema (1.2), a função  $f$  deve ser contínua, portanto integrável, e claro, periódica de período  $2L$ , já que este é o período das funções que aparecem na série. Então, agora usando o teorema (1.3), podemos integrar ambos os lados da equação, donde segue que

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right] = \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dx,$$

pois

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = 0.$$

Por fim

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2}a_0 x \Big|_{-L}^L \implies a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$



mais ainda,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

que pode ser obtido multiplicando (2.1) por  $\cos \frac{m\pi x}{L}$  e  $\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}$ , respectivamente, e utilizando as propriedades de ortogonalidade, descritas no **Exemplo 1.1**. Vale observar que multiplicamos o coeficiente  $a_0$  por  $\frac{1}{2}$  na expressão (2.1), apenas por questão de conveniência, para que tenhamos a mesma fórmula para todos os  $a_n$ . É válido acrescentar que as formas para os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ , obtidas acima, são também conhecidas como **as fórmulas de Euler-Fourier**.

Após o que acabamos de expor, cabe a seguinte definição:

**Definição 2.1.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado de  $\mathbb{R}$  (onde dizer que  $f$  é absolutamente integrável significa afirmar que  $|f|$  é integrável), em particular  $\int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty$ . Então, os coeficientes  $a_n$ , com  $n = 0, 1, 2, \dots$ , e  $b_n$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , são chamados **coeficientes de Fourier** de  $f$ .*

Como  $|\cos \alpha| \leq 1$ , para todo  $\alpha$  em  $\mathbb{R}$ , temos

$$\left| \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right| \leq \int_{-L}^L |f(x)| dx.$$

Com base na última observação, que é válida também para  $|\operatorname{sen} \alpha|$ , podemos obter estimativas dos coeficiente de Fourier de uma função  $f$ , desde que consideremos algumas hipóteses sobre a mesma.

- (i) Suponhamos que a função  $f$  seja periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável. Então, obtemos as seguintes estimativas

$$|a_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx. \quad (2.2)$$

$$|b_n| = \left| \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right| \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx, \quad (2.3)$$

ou seja, sendo  $f$  e  $|f|$  integráveis existe uma contante  $K$ , a saber,  $K = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)| dx$ , tal que  $|a_n| \leq K$  para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$  e  $|b_n| \leq K$ , para todo  $n = 1, 2, \dots$

(ii) Suponha que  $f$  seja periódica de período  $2L$ , derivável, com  $f'$  e  $|f'|$  integráveis.

Usando integração por partes, para  $n \geq 1$ , temos

$$La_n = \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L}{n\pi} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

o que fornece,

$$a_n = \frac{-1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (2.4)$$

De forma análoga tem-se

$$Lb_n = \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = -\frac{L}{n\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

ou ainda

$$Lb_n = \frac{-L}{n\pi} [f(L) \cos(n\pi) - f(-L) \cos(-n\pi)] + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Como  $f$  é periódica tem-se

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (2.5)$$

Finalmente, tomando os valores absolutos de  $a_n$ ,  $b_n$ , e, usando o fato de que as funções cosseno e seno, em módulo, são limitadas por 1, temos

$$|a_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx.$$

Fazendo  $K = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx$ , vem

$$|a_n| \leq \frac{K}{n}, \quad |b_n| \leq \frac{K}{n}, \quad \text{para todo } n = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

(iii) Se formos mais exigentes com a função  $f$ , então as estimativas (2.6) podem ser melhoradas, isto é, supondo agora  $f$  periódica de período  $2L$  com  $f'$  contínua,  $f''$  integrável e absolutamente integrável, aplicando integração por partes em (2.4) e (2.5) tem-se

$$a_n = \frac{1}{n\pi} f'(x) \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} f'(x) \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

donde segue que

$$|a_n| \leq \frac{1}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \frac{1}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx. \quad (2.7)$$

ou ainda, tomando  $K = \frac{L}{\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx$ , obtemos

$$|a_n| \leq \frac{K}{n^2} \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \frac{K}{n^2}, \quad \text{para todo } n = 1, 2, \dots$$

## 2.2 Séries de Fourier

Vimos que se uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , é periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável, podemos calcular os seus coeficientes de Fourier e com isso a expressão

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right] \quad (2.8)$$

recebe o nome de **série de Fourier** da função  $f$ . Observe que colocamos o símbolo ( $\sim$ ), ao invés da igualdade, pois nem sempre a relação entre a função  $f$  e sua série de Fourier é de igualdade, podendo ocorrer, inclusive, casos em que a série em questão não converge. Por este motivo, o nosso próximo objetivo é abordar alguns resultados, frutos de esforços de grandes estudiosos ao longo dos anos, que estabeleceram certos critérios que garantem a convergência da série de Fourier de uma função  $f$  dada, bem como a relação de igualdade entre a mesma e sua série de Fourier.

Antes porém, apresentaremos a seguinte definição:

**Definição 2.2.** *Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  será dita **seccionalmente diferenciável** se  $f$  e sua derivada  $f'$  forem seccionalmente contínuas.*

Onde observa-se que sendo  $f$  seccionalmente contínua, certamente  $f'$  não estará definida nos pontos de descontinuidade de  $f$ , podendo até, não estar definida mesmo em pontos onde  $f$  é contínua. O primeiro e importante resultado é o seguinte:

**Teorema 2.1. (Teorema de Fourier<sup>1</sup>)** *Seja a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente diferenciável e periódica de período  $2L$ . Então a série de Fourier de  $f$  dada em (2.8) converge, em cada ponto  $x$  de  $\mathbb{R}$ , para  $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$  (onde a expressão  $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$  significa a média aritmética dos limites laterais de  $f$ , à direita e à esquerda, no ponto  $x$ ), ou seja, vale*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right]. \quad (2.9)$$

<sup>1</sup>O leitor interessado pode encontrar a demonstração do Teorema de Fourier na referência [3].

Devemos enfatizar que as condições dadas no teorema acima são apenas suficientes para a convergência de uma série de Fourier; elas não são, de modo algum, necessárias.

**Exemplo 2.1.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$  e definida por

$$f(x) = \begin{cases} L - x, & \text{se } 0 \leq x \leq L \\ L + x, & \text{se } -L \leq x \leq 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Calculemos a série de Fourier da função  $f$ .

**Resolução:** Como  $f$  é uma função par, pelas propriedades de ortogonalidade vistas no primeiro capítulo, temos  $b_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim,

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L (L - x) dx = \frac{2}{L} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^L = \frac{2}{L} \cdot \frac{L^2}{2} = L$$

e, usando integração por partes, temos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L (L - x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{n\pi} (L - x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L + \frac{2}{n\pi} \int_0^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= 2 \left( \frac{-L}{n^2\pi^2} \right) \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L \\ &= \left( \frac{-2L}{n^2\pi^2} \right) (\cos n\pi - 1). \end{aligned}$$

Quando  $n$  é par, digamos,  $n = 2k$ , tem-se  $(\cos 2k\pi - 1) = 0$ . Se por outro lado  $n$  é ímpar, isto é,  $n = 2k - 1$ , então  $[\cos(2k - 1)\pi - 1] = -2$ . Portanto  $a_{2k} = 0$ , e

$$a_{2k-1} = \frac{4L}{(2k-1)^2\pi^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Finalmente a série de Fourier da função  $f$  é

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{L}, \quad (2.11)$$

onde, invés do símbolo  $(\sim)$  colocamos o sinal de  $(=)$ , pois estamos nas hipóteses do Teorema de Fourier. Agora, observe que fazendo  $x = 0$  em (2.11) e observando (2.10), obtemos

$$f(0) = L = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

o que nos fornece

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

**Exemplo 2.2.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$ , definida por  $f(x) = x$ , com  $-L \leq x < L$ . Calculemos sua série de Fourier.

**Resolução:** Sendo  $f$  ímpar deveremos ter  $a_n = 0$ , para todo  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Daí, a série de Fourier de  $f$  é uma série de senos, cujos coeficientes  $b_n$  são dados por

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots,$$

pois o produto de duas funções ímpares é uma função par. Daí, integrando por partes, temos

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{-2}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L + \frac{2}{n\pi} \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{-2L}{n\pi} \cos n\pi.$$

Como  $\cos n\pi = -1$ , se  $n$  é ímpar, e  $\cos n\pi = 1$  se  $n$  é par, para  $n = 1, 2, \dots$  temos

$$b_n = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}.$$

E, finalmente, a série de Fourier da função  $f$  é

$$f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

A figura abaixo representa uma aproximação do gráfico de  $f$  pela soma de  $n = 10$  termos de sua série de Fourier.

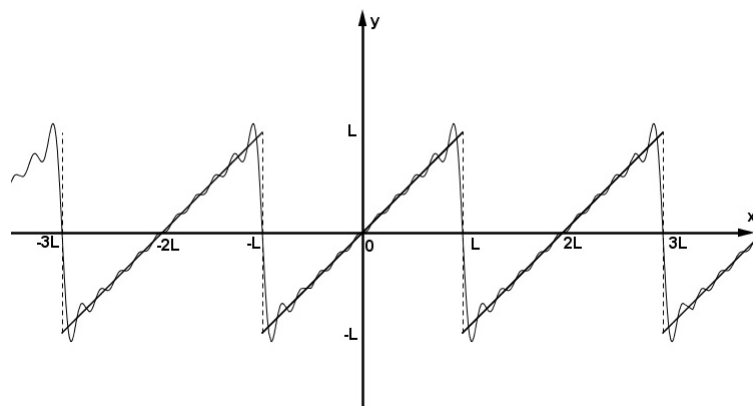


Figura 2.1:

**Observação 2.1.** É importante salientar que dada uma função num intervalo  $[0, L]$ , esta pode ser representada por mais de uma série de Fourier. Nos dois exemplos anteriores definimos as funções em intervalos cujo o ponto médio é a origem. Definimos ainda,

o período de tais funções como sendo o período fundamental. Entretanto, como destaca Figueiredo (2014), em muitas aplicações é interessante que tenhamos certa liberdade de escolher o período da função para que possamos atingir determinados objetivos. Se, por exemplo, apresentarmos a função no intervalo  $[0, L]$  e nada falarmos sobre o período, podemos determiná-lo da maneira que nos seja conveniente, digamos, um período  $P > L$ . Neste caso, podemos definir a função no intervalo  $(L, P)$  de forma a cumprir certas condições desejadas, ou ainda, podemos estender a função ao intervalo  $(-L, 0)$  de muitas maneiras, por exemplo: se refletirmos o gráfico da função em relação ao eixo  $y$ , sobre  $(-L, 0)$ , teremos uma função par no intervalo  $(-L, L)$ ; ou ainda, se refletirmos o gráfico, com relação à origem sobre  $(-L, 0)$ , obteremos uma função ímpar em  $(-L, L)$ ; ou  $f$  pode ser definida como  $f(x) = f(x + L)$ , em  $(-L, 0)$ .

**Exemplo 2.3.** Dada  $f(x) = x$ , para  $0 \leq x \leq \pi$ , representaremos  $f$  como uma série de cossenos.

**Resolução:** Para que  $f$  seja expressa como uma série de cossenos, devemos estendê-la de forma que  $f$  seja par. Definimos  $f_1$  como sendo  $f_1(x) = |x|$  para  $-\pi \leq x \leq \pi$ , com  $f_1$  periódica de período  $2\pi$ . Desta forma  $f_1(x) = f(x)$ , para  $0 \leq x \leq \pi$ . Certamente, se tomássemos outros períodos, como  $4\pi$ ,  $6\pi$ , por exemplo, ainda valeria  $f_1(x) = f(x)$ , para  $0 \leq x \leq \pi$  e teríamos outra série de cossenos. Assim, temos  $b_n = 0$  para todo  $n = 1, 2, \dots$ , e

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi,$$

após uma integração por partes tem-se

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos x dx = \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi}, \quad \text{com } n = 1, 2, \dots$$

Como para  $n$  par, vale  $a_n = 0$ , a série de Fourier da função é

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos[(2k-1)x].$$

Por fim, usando o Teorema de Fourier segue que

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos[(2k-1)x], \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

## 2.3 Integração da série de Fourier

Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que é igual a sua série de Fourier, isto é, se tivermos

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right],$$

e se a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$ , então pelo teorema (1.3) podemos integrar termo a termo, ou seja, vale

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{2}a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_a^b a_n \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_a^b b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right]. \quad (2.12)$$

O teorema seguinte mostra a validade de (2.12) mesmo quando a série de Fourier não converge uniformemente para  $f$ , ou até mesmo quando a série não convergir para  $f$ .

**Teorema 2.2. (Integração da Série de Fourier)** *Seja a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$  e seccionalmente contínua, e seja*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right]$$

a sua série de Fourier. Então,

- (i) *A série pode ser integrada termo a termo e o valor da série integrada é a integral de  $f$ , mais precisamente temos*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{2}a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_a^b a_n \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_a^b b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right] \quad (2.13)$$

- (ii) *A função  $F(x) = \int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}] dt$  é periódica de período  $2L$ , contínua com, derivada  $f'$  seccionalmente contínua, e, representada por sua série de Fourier*

$$\int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{-b_n}{n} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{a_n}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right], \quad (2.14)$$

onde

$$\frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x) dx. \quad (2.15)$$

**Demonstração:** Consideremos, inicialmente, uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente contínua e periódica de período  $2L$ . Agora, definimos a função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$F(x) = \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt, \quad (2.16)$$

que, por consequência do Teorema Fundamental do Cálculo, é contínua e  $F'(x)$  existe em todos os pontos  $x$  onde  $f$  é contínua, com  $F'(x) = f(x)$  em tais pontos. Por isso,  $F'(x)$  é também seccionalmente contínua. Por outro lado,  $F$  também tem período  $2L$ , visto que, como observamos no primeiro capítulo,  $f(t) - \frac{a_0}{2}$  tem período  $2L$ , e, sendo  $\int_{a-L}^{a+L} h dt = \int_{-L}^L h dt$ , para toda função  $h$  periódica de período  $2L$  e para todo  $a \in \mathbb{R}$  fixado. Assim

$$F(x+2L) - F(x) = \int_x^{x+2L} \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \int_{-L}^L \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = 0, \quad (2.17)$$

onde usamos também o fato de que

$$\int_{-L}^L f(t) dt = a_0 L = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dt.$$

Portanto, pelo Teorema de Fourier, segue-se que

$$F(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right], \quad (2.18)$$

onde  $A_n$  e  $B_n$  são dados por

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Note que, usando integração por partes nas integrais acima, podemos estabelecer uma relação entre os coeficientes de Fourier da função  $F$  e os da função  $f$ . De fato, fazendo  $u = F(x)$ , tem-se que  $du = F'(x) dx$ , donde

$$A_n = \frac{1}{L} F(x) \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \frac{1}{L} \int_{-L}^L F'(x) \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

o que nos fornece

$$A_n = \frac{-L}{n\pi} b_n, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

De forma análoga, obtemos

$$B_n = -\frac{1}{L} F(x) \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L + \frac{1}{L} \int_{-L}^L F'(x) \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$



Por fim, usando a periodicidade de  $F$ , ou seja, sabendo que  $F(-L) = F(L)$ , tem-se

$$B_n = \frac{L}{n\pi} a_n, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

Para obter  $A_0$ , basta observar que pela forma como  $F$  foi definida temos  $F(0) = 0$ , e tomar  $x = 0$  na expressão (2.18), usar (2.19), o que resulta em

$$F(0) = 0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \implies A_0 = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \quad (2.21)$$

Finalmente de (2.16) e (2.18) temos

$$F(x) = \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right]$$

e, substituindo os valores de  $A_0$ ,  $A_n$  e  $B_n$ , obtidos em (2.19), (2.20) e (2.21), conseguimos a expressão

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{1}{2} a_0 x + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{-b_n}{n} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{a_n}{n} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right]$$

que pode ainda ser expressa como

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{2} a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^x a_n \cos \frac{n\pi t}{L} dt + \int_0^x b_n \text{sen} \frac{n\pi t}{L} dt \right] \quad (2.22)$$

Fazendo  $x = a$  e  $x = b$  em (2.22) e subtraindo as expressões obtidas, concluímos a demonstração do teorema. ■

Vale salientar que em aplicações práticas onde

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right],$$

como de (2.15) e (2.21), segue-se que  $\frac{1}{2} A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x) dx$ , o teorema acima ganha a seguinte forma

$$F(x) = \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x) dx + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{-b_n}{n} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{a_n}{n} \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right].$$

**Exemplo 2.4.** Consideremos a função  $f$  definida no exemplo (2.2), cuja série de Fourier é

$$f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Como  $f$  é ímpar temos  $a_0 = 0$ . Assim

$$F(x) = \int_0^x \left[ f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2},$$

daí

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L F(x) dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \frac{x^2}{2} dx = \frac{L^2}{6}.$$

Logo

$$\frac{x^2}{2} = \frac{L^2}{6} + \frac{2L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad -L \leq x \leq L.$$

## 2.4 Forma Complexa da Série de Fourier

Mostraremos a seguir que se uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  for periódica de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável, então sua série de Fourier poderá ser representada por

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} \quad \text{com} \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx.$$

**Demonstração:** Com efeito, utilizando a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

e

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta,$$

temos que

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta \implies \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

e

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = i 2 \operatorname{sen} \theta \implies \operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i 2}.$$

Daí

$$a_n \cos \frac{n\pi x}{L} = a_n \frac{e^{\frac{in\pi x}{L}} + e^{-\frac{in\pi x}{L}}}{2} \quad \text{e} \quad b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = b_n \frac{e^{\frac{in\pi x}{L}} - e^{-\frac{in\pi x}{L}}}{i 2},$$

assim,

$$a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \left[ \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{i 2} \right] e^{\frac{in\pi x}{L}} + \left[ \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{i 2} \right] e^{-\frac{in\pi x}{L}}.$$

Agora, fazendo  $c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{i 2}$ , obtemos

$$c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{i 2} = \frac{1}{2} (a_n - i b_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx - \frac{i}{2L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Ou ainda

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left[ \cos \frac{n\pi x}{L} - i \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right] dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx.$$

Tomando  $n = 0$  na última expressão, obtemos também

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

■

**Observação 2.2.** *Até o presente momento, para que pudéssemos definir os coeficientes de Fourier de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , e por conseguinte a sua série de Fourier, exigimos que esta fosse periódica, de período  $2L$  e seccionalmente contínua no intervalo  $[-L, L]$ , isto porque a integral com a qual estamos trabalhando chama-se **Integral de Riemann**,<sup>2</sup> e, portanto, precisamos que a função  $f$  cumpra as condições de integrabilidade exigidas por tal integral. No que segue, estudaremos sob quais condições podemos garantir a convergência da série de Fourier de uma função  $f$  dada. Estudaremos também alguns tipos de convergências, à saber, convergência pontual, convergência uniforme e convergência em média.*

Para simplificar a notação diremos que uma função  $f$  é  $L^1(\mathbb{R})$  quando  $f$  e  $|f|$  forem integráveis em  $\mathbb{R}$ . Pode-se mostrar que se  $f$  for limitada e integrável então  $|f|$  será integrável<sup>3</sup>. Porém a recíproca não é verdadeira, como exemplo deste fato temos a função de Dirichelt dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases} \quad (2.23)$$

$f$  não é integrável no intervalo  $[0, 1]$ , mas  $|f|$  é integrável. Por outro lado, se  $f$  não for limitada, então a integrabilidade de  $f$  não garante a de  $|f|$ . Por exemplo, a função  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{(-1)^n}{n}$ , para  $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$  é integrável, mas não absolutamente, para verificar isto podemos usar o fato de que  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge, entretanto  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

Diremos também que uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é de quadrado integrável, denotando por  $f \in L^2([a, b])$ , quando  $f$  e  $|f|^2$  forem integráveis em  $[a, b]$ . Se  $f$  for limitada e integrável a Riemann, então  $|f|^2$  será integrável, ou seja,  $f$  será  $L^2([a, b])$ . Por outro lado, se  $f$  não for limitada, então  $f$  pode não ser  $L^2([a, b])$ . Por exemplo, a função  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  para  $0 < x < 1$ , tem-se

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{1}{|\sqrt{x}|^2} dx = \infty.$$

<sup>2</sup>Um estudo detalhado sobre a Integral de Riemann pode ser encontrado na referência [6].

<sup>3</sup> Esta justificativa pode ser encontrada na referência [6].

Além disso, se a função  $f$  definida em um intervalo limitado é  $L^2$ ,  $f$  será necessariamente  $L^1$ . Tal fato segue da assertiva seguinte.

Sejam  $f$  e  $g$ , definidas no intervalo  $[a, b]$ , funções  $L^2([a, b])$ . Então  $|fg|$  é integrável e vale

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.24)$$

Este resultado é uma consequência imediata da desigualdade de Cauchy-Schwarz<sup>4</sup>, enunciada abaixo.

**Desigualdade de Cauchy-Schwarz:** Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , duas funções de quadrado integrável. Então,

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Agora, fazendo  $g \equiv 1$  em (2.24), obtemos

$$\int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

e com isso, a integrabilidade de  $|f|^2$  implica a de  $|f|$ .

O teorema abaixo será extremamente importante para a obtenção dos próximos resultados.

**Teorema 2.3.** *Seja a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L^1$ . Então, dado  $\epsilon > 0$ , arbitrário, existe uma função contínua  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\phi(a) = \phi(b) = 0$  e*

$$\int_a^b |f(x) - \phi(x)|dx < \epsilon.$$

**Demonstração:** Dividiremos a demonstração em duas partes. Suponhamos inicialmente que  $f$  seja limitada e integrável. Assim, dado  $\epsilon > 0$  existe uma partição  $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_k = b\}$  do intervalo  $[a, b]$ , com  $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ , tal que vale

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^k m_j(x_j - x_{j-1}) < \frac{\epsilon}{2} \quad (2.25)$$

onde  $m_j = \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$ , com  $j = 1, 2, \dots$ . Agora definimos a função  $\gamma(x)$ , pondo

$$\gamma(x) = m_j, \quad \text{para } x_{j-1} \leq x < x_j \quad (\star).$$

<sup>4</sup>A demonstração da desigualdade de Cauchy-Schwarz, encontra-se na referência [3].

Com isso o somatório em (2.25) é a integral de  $\gamma(x)$  em  $[a, b]$ , daí podemos reescrever (2.25) da seguinte forma

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \gamma(x)dx = \int_a^b [f(x) - \gamma(x)]dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.26)$$

Faremos uma ilustração gráfica simplificada da ideia que se segue para concluirmos a demonstração. Suponhamos que a partição  $P$  tenha apenas quatro pontos ( $n = 4$ ), e que o gráfico da função  $\gamma(x)$  seja o da Figura (2.2), e para cada  $n$  consideremos a função  $\phi_n$  obtida substituindo em tal figura os “retângulos por trapézios”, cujos lados têm inclinação  $n$ . Para os pontos  $x_0$  e  $x_1$ , por exemplo, lembrando que área de um trapézio de bases  $c, d$  e altura  $h$  é dada por  $h \frac{c+d}{2}$ , como a inclinação de cada trapézio é  $n$ , em particular para  $n = 1$ , temos  $\tan 1 = \frac{m_1}{s} \implies s = \frac{m_1}{\tan 1}$ . Daí

$$\int_{x_0}^{x_1} |\gamma(x) - \phi_1(x)|dx = \left| m_1(x_1 - x_0) - \frac{m_1[(x_1 - x_0) + (x_1 - x_0 - 2s)]}{2} \right| = sm_1 = \frac{m_1^2}{\tan 1}.$$

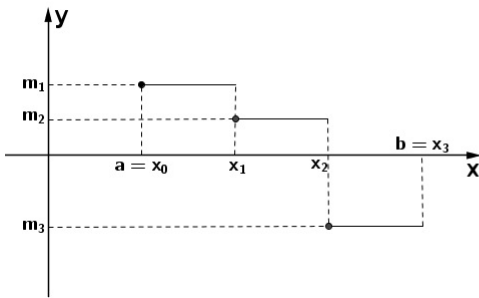


Figura 2.2:

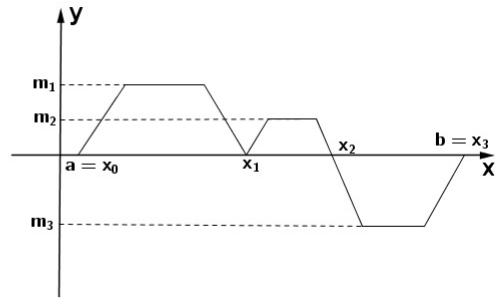


Figura 2.3:

Logo, usando essa ideia para uma função  $\gamma(x)$  qualquer, como a definida em  $(\star)$ , temos

$$\int_a^b |\gamma(x) - \phi_n(x)|dx = \sum_{j=1}^k \frac{m_j^2}{\tan n}. \quad (2.27)$$

Assim, como  $f$  é limitada, seja  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ . Então, de (2.27) segue

$$\int_a^b |\gamma(x) - \phi_n(x)|dx \leq \frac{kM^2}{\tan n}$$

daí, uma vez fixado  $k$ , podemos tomar  $n$  suficientemente grande tal que

$$\int_a^b |\gamma(x) - \phi_n(x)|dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.28)$$

Observemos que de (2.26) e (2.28), segue-se que dado  $\epsilon > 0$ , existe uma função contínua  $\phi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\phi_n(a) = \phi_n(b) = 0$  tal que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \phi_n(x)| dx &= \int_a^b |f(x) - \phi_n(x) + \gamma(x) - \gamma(x)| dx \\ &\leq \int_a^b |f(x) - \gamma(x)| dx + \int_a^b |\gamma(x) - \phi_n(x)| dx \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Agora, suponhamos que  $f$  é ilimitada, porém integrável e absolutamente integrável no sentido das integrais impróprias. Para simplificar as contas, suponhamos que  $f$  não seja limitada apenas nas vizinhanças de  $a$  e  $b$ . Então, dado  $\epsilon > 0$ , podemos obter um  $\delta > 0$  tal que vale

$$\left| \int_a^b |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.29)$$

Sendo  $f$  limitada e integrável no intervalo  $[a + \delta, b - \delta]$ , pelo que mostramos acima, existe uma função contínua  $\phi : [a + \delta, b - \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\phi(a + \delta) = \phi(b - \delta) = 0$ , tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \phi(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.30)$$

Definimos a função  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} \phi(x), & \text{para } a + \delta \leq x \leq b - \delta \\ 0, & \text{para } a \leq x \leq a + \delta, \text{ e } b - \delta \leq x \leq b. \end{cases} \quad (2.31)$$

Temos que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx. \\ \int_a^b |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx &= \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Daí, como  $\psi(x)$  é integrável em  $[a, b]$ , usando a última igualdade acima, (2.29) e (2.30), temos

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx &= \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \phi(x)| dx \\ &\leq \left| \int_a^b |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \phi(x)| dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx - \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x)| dx \right| + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \phi(x)| dx \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

■

Na realidade, de acordo com o teorema (2.3), dada uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L^1$ , existe uma sucessão de funções contínuas  $\phi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\phi_n(a) = \phi_n(b) = 0$ , e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \phi_n(x)| dx = 0.$$

Se uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica de período  $2L$  e  $L^1$ , no intervalo  $[-L, L]$ , então podemos obter uma sucessão de funções contínuas  $\phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , periódicas de período  $2L$ . Para tanto, pelo que vimos acima, basta que tomemos  $\phi_n(-L) = \phi_n(L) = 0$ , para todo  $n$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |f(x) - \phi_n(x)| dx = 0.$$

**Observação 2.3.** *Dando ênfase ao que afirma Figueiredo (2014), dada uma sucessão de funções contínuas  $\phi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dizemos que ela converge no sentido  $L^1$ , quando se tem  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_a^b |\phi_m(x) - \phi_n(x)| dx = 0$ . Podendo, nesse caso, existir uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , integrável e absolutamente integrável, no sentido de integrabilidade que estamos estudando, tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \phi_n(x)| dx = 0$  e com isso dizemos que  $f$  é o limite de  $\phi_n$  no sentido  $L^1$ . Ainda de acordo com o autor, em geral tal função  $f$  não existe. Porém, se considerarmos o conceito mais amplo de **integral de Lebesgue**, então tal  $f$  integrável à Lebesgue existe, de tal forma que o último limite acima seja verdadeiro, dentro do contexto de integrabilidade à Lebesgue, e por conseguinte as funções integráveis à Lebesgue em  $[a, b]$  são os limites no sentido  $L^1$  de sucessões de funções contínuas neste intervalo.*

## 2.5 Convergência Pontual da Série de Fourier

Nosso próximo esforço será em obter condições suficientes sobre uma função  $f$  de modo que garantam a convergência de sua série de Fourier, em um ponto  $x$  fixado, para o valor de  $f$  neste ponto, ou em geral, para o valor  $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ . Para isto, além das hipóteses que já consideramos anteriormente, faremos algumas observações sobre o comportamento de  $f$  nas vizinhanças do ponto  $x$ . Assim, considerando

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \left[ a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right]$$

queremos obter majorações para o valor da expressão

$$e_n(x) = S_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Desta forma, será conveniente representar  $S_n(x)$  de outra maneira. Portanto, relembrado as formas dos coeficiente de Fourier,  $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$ ,  $a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx$  e  $b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx$ , e, utilizando tais formas e a identidade trigonométrica,  $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$ , podemos reescrever  $S_n(x)$  do seguinte modo

$$S_n(x) = \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi(x-y)}{L} \right] f(y) dy. \quad (2.32)$$

Agora, representando por  $D_n(x)$  a expressão que multiplica  $f(y)$  que, aliás, é conhecida como **núcleo de Dirichlet**, temos

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L} \right]. \quad (2.33)$$

O núcleo de Dirichlet, possui as seguintes propriedades:

(i)  $D_n(x)$  é uma função par, contínua e periódica de período  $2L$ . Isto segue diretamente da definição de  $D_n(x)$ .

(ii) Aplicando as relações de ortogonalidade (1.2) e (1.3), segue-se que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L D_n(x) dx &= \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L} \right] dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx + \sum_{k=1}^n \int_{-L}^L \cos \frac{k\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{2L} [L - (-L)] = 1. \end{aligned}$$

(iii) Temos também que

$$D_n(0) = \frac{1}{2L} + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n 1 = \frac{\frac{1}{2} + n}{L}$$

(iv) Para  $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$ , vale a seguinte representação

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{\sin(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{2L}}. \quad (2.34)$$

Para a verificação de (2.34), consideremos a expressão

$$s_n(\beta) = 1 + \sum_{k=1}^n \cos k\beta.$$

Usando a fórmula de Euler, observamos que  $s_n(\beta)$  é a parte real de  $[1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\beta}]$ , ou seja,

$$s_n(\beta) = Re \left[ 1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\beta} \right].$$



Além disso, para  $\beta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ , temos

$$1 + e^{i\beta} + e^{(i\beta)^2} + \dots + e^{(i\beta)^k} = \frac{1 - e^{i(n+1)\beta}}{1 - e^{i\beta}} = \frac{e^{-\frac{i\beta}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\beta}}{e^{-\frac{i\beta}{2}} - e^{\frac{i\beta}{2}}}.$$

Assim

$$\begin{aligned} s_n(\beta) &= \operatorname{Re} \frac{e^{-\frac{i\beta}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\beta}}{e^{-\frac{i\beta}{2}} - e^{\frac{i\beta}{2}}} = \operatorname{Re} \frac{\cos \frac{\beta}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} - \cos \frac{(n+\frac{1}{2})\beta}{2} - i \operatorname{sen} \frac{(n+\frac{1}{2})\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} - \cos \frac{\beta}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \frac{\beta}{2} + \operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\beta}{2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}}. \end{aligned}$$

Usando este resultado em (2.33) com  $\beta = \frac{\pi x}{L}$ , e observando que  $\frac{1}{2} = (1 - \frac{1}{2})$ , obtemos (2.34).

Agora, fazendo a mudança de varável  $y = x - t$ ,  $dy = -dt$  e os ajustes necessários nos limites de integração na expressão (2.32), tem-se

$$S_n(x) = \int_{-L}^L D_n(x-y)f(y)dy = \int_{-L+x}^{L+x} D_n(t)f(x-t)dt = \int_{-L}^L D_n(t)f(x-t)dt.$$

Onde para conseguirmos a última integral do lado direito usamos a fato de  $f$  e  $D_n$  serem periódicas de período  $2L$ . Por outro lado,  $D_n$  é par, isto é,  $D_n(-t) = D_n(t)$ , e quando  $t \rightarrow -L$ , então  $-t \rightarrow L$ . Assim

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \int_{-L}^L D_n(t)f(x-t)dt = \int_{-L}^0 D_n(t)f(x-t)dt + \int_0^L D_n(t)f(x-t)dt \\ &= \int_0^L D_n(-t)f(x+t)dt + \int_0^L D_n(t)f(x-t)dt \\ &= \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Por fim, lembrando que  $\int_{-L}^L D_n(t)dt = 1$ , a expressão para a qual queremos obter estimativas toma a forma seguinte

$$\begin{aligned} e_n(x) &= \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \\ &= \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \int_{-L}^L D_n(t)dt \\ &= \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \left[ 2 \int_0^L D_n(t)dt \right] \\ &= \int_0^L D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]dt + \int_0^L D_n(t)[-f(x+0) - f(x-0)]dt \\ &= \int_0^L D_n(t)\{[f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)]\}dt. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Definindo a função  $g(x, t) = [f(x + t) - f(x + 0)] + [f(x - t) - f(x - 0)]$ , podemos enunciar um resultado sobre a convergência pontual da série de Fourier, que nos permite obter condições de convergência, cuja verificação pode ser mais fácil.

**Teorema 2.4. (Teste de Dini)** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$  e  $L^1$ , em  $[-L, L]$ . Fixado  $x$  neste intervalo, suponha que existam  $f(x + 0)$  e  $f(x - 0)$  (os limites laterais) e que exista  $\eta > 0$  tal que*

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \infty. \quad (2.37)$$

Então  $e_n \rightarrow 0$ , ou seja,  $S_n \rightarrow \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Na demonstração do Teste de Dini faremos uso de Lema de Riemann-Lebesgue <sup>5</sup>, o qual apenas enunciaremos.

**Lema de Riemann-Lebesgue:** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $L^1$ , em  $[a, b]$ . Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0. \quad (2.38)$$

**Demonstração:** (Teste de Dini). De acordo com as propriedades de  $D_n$ , para algum  $\delta > 0$  apropriado, e  $t \neq 0$ , podemos reescrever  $e_n(x)$  da seguinte forma

$$e_n(x) = \int_0^\delta t D_n(t) \frac{g(x, t)}{t} dt + \int_\delta^L \operatorname{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} dt.$$

Observe que, usando as hipóteses enunciadas no Teste de Dini, o valor da primeira integral pode se tornar tão pequeno quanto se queira, desde que se tome  $\delta$  convenientemente pequeno. De fato, segue das propriedades da função seno e do fato de  $t \in (0, L]$ , que

$$D_n(t) = \frac{1}{2L} \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi t}{L}}{\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} \implies |t D_n(t)| \leq \frac{t}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} \leq \frac{1}{2}.$$

Logo, dado  $\epsilon > 0$ , tomando  $\delta < \min(L, \eta)$  tal que pelas hipóteses do Teste de Dini e pelo que observamos acima vale a relação

$$\left| \int_0^\delta t D_n(t) \frac{g(x, t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.39)$$

Agora, uma vez fixado o  $\delta$  acima, analisemos a segunda integral, para que possamos aplicar o Lema Riemann-Lebesgue. Para tanto basta observar que a função  $h(t)$  definida abaixo é integrável, pois o denominador nunca se anula no intervalo  $[\delta, L]$  e  $g$  é integrável.

$$h(t) = \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} \quad \text{com} \quad t \in [\delta, L].$$

<sup>5</sup>A demonstração completa do Lema Riemann-Lebesgue pode ser encontrada na referência [3].

Assim, para  $n$  suficientemente grande, segue do Lema Riemann-Lebesgue que

$$\left| \int_{\delta}^L \operatorname{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} dt \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

e, portanto, com este resultado aliado a expressão (2.39), concluímos a demonstração do teste de Dini. ■

Se considerarmos a expressão

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \left[ a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right],$$

então, a sucessão de reduzidas  $S_n(x)$  da série de Fourier da função  $f$ , poderá ser encarada como uma aproximação de  $f$ .

Dizemos que uma sucessão de funções ( $f_n$ ) de quadrado integrável, em um intervalo  $[a, b]$ , converge em média quadrática, para uma função  $f$ , também de quadrado integrável, quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

Onde a expressão  $\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx$  é chamada de **erro médio quadrático**, na aproximação de  $f$  por  $f_n$ .

Feitas estas observações, pretendemos agora, mostrar que a sucessão de somas parciais  $S_n(x)$  de uma função  $f$ , de quadrado integrável, são os polinômios trigonométricos que melhor aproximam  $f$  em média quadrática. Ou seja, dado um polinômio trigonométrico de ordem  $n$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^n \left[ c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{L} \right], \quad (2.40)$$

denotando por

$$e_n = \int_{-L}^L |S_n(x) - f(x)|^2 dx$$

e por

$$\bar{e}_n = \int_{-L}^L |T_n(x) - f(x)|^2 dx,$$

os erros médios quadráticos de  $S_n(x)$  e  $T_n(x)$ , respectivamente, na aproximação de  $f$ , mostremos que  $e_n \leq \bar{e}_n$ .

**Demonstração:** Supondo a convergência uniforme, temos que

$$\begin{aligned} \bar{e}_n &= \int_{-L}^L |T_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{-L}^L \{ [T_n(x)]^2 - 2T_n(x)f(x) + [f(x)]^2 \} dx \\ &= \underbrace{\int_{-L}^L [T_n(x)]^2 dx}_I - 2 \underbrace{\int_{-L}^L T_n(x)f(x) dx}_{II} + \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

Como  $c_k L = \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx$ , com  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  e  $d_k L = \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ , usando (2.40) e as propriedades de ortogonalidades vistas no primeiro capítulo, podemos escrever

$$I = \frac{c_0^2}{2} L + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2).$$

Fazendo observações análogas para  $a_k$  e  $b_k$ , obtemos

$$II = -c_0 a_0 L - 2L \sum_{k=1}^n (c_k a_k + b_k d_k).$$

Portanto,

$$\bar{e}_n = \frac{c_0^2}{2} L - a_0 c_0 L + L \sum_{k=1}^n (c_k^2 + d_k^2) - 2L \sum_{k=1}^n (c_k a_k + b_k d_k) + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx.$$

Agora, completando os quadrados na última expressão, vem

$$\bar{e}_n = \frac{L}{2} (c_0 - a_0)^2 - \frac{a_0^2 L}{2} + L \sum_{k=1}^n (c_k - a_k)^2 + L \sum_{k=1}^n (d_k - b_k)^2 - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx. \quad (2.41)$$

Por fim, observe  $\bar{e}_n$  assumirá o menor valor quando tivermos  $c_0 = a_0$ ,  $c_k = a_k$  e  $d_k = b_k$ , com  $k = 1, 2, \dots, n$ , e, nesse caso, segue da definição de  $T_n(x)$  e de  $e_n$ , que isso ocorre justamente quando  $\bar{e}_n$  coincide com  $e_n$ , portanto vale sempre  $e_n \leq \bar{e}_n$ . ■

Perceba que  $\bar{e}_n \geq 0$ , seja qual for a escolha dos coeficientes  $c_n$  e  $d_n$ , em particular, para  $c_0 = a_0$ ,  $c_k = a_k$  e  $d_k = b_k$ , podemos escrever

$$0 \leq e_n = -\frac{a_0^2 L}{2} - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx,$$

ou ainda

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx.$$

Sendo a última desigualdade verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ , concluímos a **desigualdade de Bessel**:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx. \quad (2.42)$$

Apresentaremos a seguir um resultado semelhante àquele do teorema (2.3), sendo este para funções  $L^2$ , ou seja, funções de quadrado integrável.

**Teorema 2.5.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de quadrado integrável. Então, existe uma sucessão de funções contínuas  $\psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\psi_n(a) = \psi_n(b) = 0$ , tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - \psi_n(x)|^2 dx = 0.$$

**Demonstração:** Dividiremos a demonstração em duas partes. Inicialmente suponhamos que  $f$  seja limitada, isto é, existe  $k > 0$  tal que  $|f(x)| \leq k$ , para todo  $x \in [a, b]$ . Sendo  $f \in L^2$ , segue-se que  $f$  é  $L^1$ . Assim, da desigualdade (2.24) resulta que

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Por outro lado, do teorema (2.3) tem-se que existe uma função contínua  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , com as seguintes propriedades:  $\psi(a) = \psi(b) = 0$ ,  $|\psi(x)| \leq k$ , para todo  $x \in [a, b]$ , e dado  $\epsilon > 0$  vale

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\epsilon}{2k}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \psi(x)|^2 dx &= \int_a^b |f(x) - \psi(x)| |f(x) - \psi(x)| dx \\ &\leq \int_a^b [|f(x)| + |\psi(x)|] |f(x) - \psi(x)| dx \\ &\leq 2k \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < 2k \frac{\epsilon}{2k} = \epsilon, \end{aligned}$$

e com isso concluímos a demonstração neste caso.

Agora, se for  $f$  ilimitada, suponhamos para facilitar a demonstração, que  $f$  seja ilimitada nas vizinhanças de  $a$  e  $b$ , pois para o caso geral o raciocínio é análogo. Então, dado  $\epsilon > 0$  podemos escolher  $\delta > 0$  de tal forma que tenhamos

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{e} \quad \int_{b-\delta}^b |f(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{3}.$$

Assim, usamos a parte do teorema, já demonstrada, para determinar uma função contínua  $\psi : [a + \delta, b - \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\psi(a + \delta) = \psi(b - \delta) = 0$  tal que

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{3}.$$

Agora, definimos a função

$$\bar{\psi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } a \leq x \leq a + \delta \\ \psi(x), & \text{se } a + \delta \leq x \leq b - \delta. \\ 0, & \text{se } b - \delta \leq x \leq b \end{cases} \quad (2.43)$$

Como a função  $\bar{\psi}$  é contínua, obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - \bar{\psi}(x)|^2 dx &= \int_a^{a+\delta} |f(x)|^2 dx + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(x) - \psi(x)|^2 dx + \int_{b-\delta}^b |f(x)|^2 dx \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

■

Vale observar que se uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  for periódica de período  $2L$  e  $L^2$  em  $[-L, L]$ , então existe uma sucessão de funções contínuas  $\psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , também periódicas e com o mesmo período de  $f$ , satisfazendo o teorema acima. Para isso, basta que tomemos  $\psi_n(-L) = \psi_n(L) = 0$  para todo  $n$ .

## 2.6 Convergência Uniforme da Série de Fourier

Com o propósito de utilizar o teste de Weierstrass que apresentamos no primeiro capítulo, estudaremos condições suficientes sobre uma dada função  $f$  periódica, de período  $2L$  que garantam a convergência uniforme de sua série de Fourier. O teorema seguinte garante tal convergência, desde que  $f$  seja contínua, enquanto  $f'$  pode ser descontínua ou até mesmo ilimitada em alguns pontos isolados. No entanto, supondo  $f$  descontínua em um ponto  $x_0$ , a convergência da série de Fourier de  $f$ , em qualquer intervalo que contenha tal ponto, não poderá ser uniforme, visto que de acordo com o teorema (1.2) se a convergência fosse uniforme, então  $f$  seria contínua.

**Teorema 2.6. (Primeiro Teorema Sobre Convergência Uniforme)** *Seja a função  $f$  periódica de período  $2L$ , contínua com  $f'$  de quadrado integrável. Então, a série de Fourier  $f$  converge uniformemente para  $f$ .*

**Demonstração:** Como vale

$$\left| a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right| \leq |a_n| \quad \text{e} \quad \left| b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right| \leq |b_n|.$$

Devemos verificar sob quais condições ocorre a convergência da série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|). \tag{2.44}$$

Sendo  $f$  contínua e  $f' \in L^2$ , das estimativas (2.4) e (2.5), temos

$$a_n = \frac{-L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{-L}{n\pi} b'_n \quad \text{e} \quad b_n = \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L}{n\pi} a'_n$$

onde  $a'_n$  e  $b'_n$  são os coeficientes de Fourier da função  $f'$ . Assim, a reduzida de ordem  $n$  de (2.44) pode ser expressa como

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|) = \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a'_k| + |b'_k|) \quad (2.45)$$

que usando da desigualdade de Cauchy-Schwarz, qual seja,

$$\left| \sum_{j=1}^n c_j d_j \right| \leq \left( \sum_{j=1}^n c_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^n d_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

pode ser majorada, isto é,

$$\frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a'_k| + |b'_k|) \leq \frac{L}{\pi} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{k=1}^n (|a'_k| + |b'_k|)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Por outro lado,  $0 \leq (|a| - |b|)^2 = |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 \Rightarrow 2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2$ . Daí  $(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$ . Assim

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|) \leq \frac{L}{\pi} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{k=1}^n (|a'_k| + |b'_k|)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{k=1}^n (|a'_k|^2 + |b'_k|^2) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Finalmente, podemos escrever

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leq \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (|a'_k|^2 + |b'_k|^2) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Onde ambas as séries do lado direito da desigualdade convergem, a primeira por ser uma p-série com  $p = 2$  e a convergência da segunda segue da desigualdade de Bessel. Portanto, (2.44) converge e com isso concluímos a demonstração do teorema. ■

O próximo teorema, refere-se a hipótese da função  $f$  ser seccionalmente contínua.

**Teorema 2.7.** (*Segundo Teorema sobre Convergência Uniforme da Série de Fourier*<sup>6</sup>) *Seja  $f$  uma função periódica de período  $2L$ , seccionalmente contínua com  $f' \in L^2$ . Então, a série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$  em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de  $f$ .*

<sup>6</sup>O leitor interessado pode encontrar a demonstração do Segundo Teorema sobre Convergência Uniforme da Série de Fourier na referência [3].

## 2.7 Núcleos de Dirac

Em algumas aplicações é necessário tratar fenômenos de natureza impulsiva. Os sistemas mecânicos, por exemplo, estão frequentemente sujeitos a ações de forças externas de grande amplitude que agem apenas por um curto período de tempo. Como é o caso de uma bola de futebol quando chutada; as cordas de um piano quando atingidas pelo martelo; ou uma bola de tênis quando atingida pela raquete etc.

A função **impulso unitário**, também chamada de função **Delta de Dirac** traz na sua definição as seguintes propriedades.

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (2.46)$$

Observe que  $\delta(x)$  não é uma função no sentido usual, pois se fosse, a cada  $x \in \mathbb{R}$  deveria associar um número real e não  $+\infty$ . Além disso, sendo  $\delta(x) = 0$  para todo  $x \neq 0$  deveríamos ter  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 0$  em vez de  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ . Por estas propriedades um tanto estranhas para uma função no sentido comum, segundo Figueiredo (2014), a Delta de Dirac encontrou inicialmente severas restrições por parte dos matemáticos, embora produzisse resultados corretos. De modo geral, como afirma o autor, uma propriedade importante da função Delta de Dirac, que em alguns textos da literatura é chamada de **propriedade de separação**, visto que tem o efeito de separar o valor  $f(x_0)$  dos demais valores de uma determinada função  $f$ , é a seguinte: se uma função real contínua  $f(x)$  se anula fora de um conjunto limitado, então vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0). \quad (2.47)$$

De acordo com Bassanezi (1988), no que se refere a expressão (2.47), Dirac raciocinou da seguinte forma: sendo  $\delta(x) = 0, \forall x \neq 0$ , então os limites de integração poderiam ser substituídos por  $-\epsilon$  e  $\epsilon$ , para um  $\epsilon > 0$  convenientemente pequeno. Além disso, sendo  $f(x)$  contínua em  $x = 0$ , seus valores no intervalo  $(-\epsilon, \epsilon)$  são aproximadamente iguais a  $f(0)$ . Entretanto, (2.47) também foi alvo de muitas críticas por parte dos matemáticos. Porém, tais controvérsias sobre a função Delta de Dirac foram formalizadas de maneira rigorosa pelo matemático francês Laurent Schwartz em seu trabalho *La Théorie de Distribution*.

Objetivamos agora, justificar a expressão (2.47), e para isso, consideraremos a sucessão de funções contínuas  $k_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com as características seguintes:

- $N_1: k_n(x) \geq 0$ .



- $N_2$ :  $\int_{-\infty}^{\infty} k_n(x)dx = 1$ .
- $N_3$ : Dados  $\epsilon > 0$  e  $\eta > 0$ , então existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq n_0$  vale

$$\int_{|x|>\eta} k_n(x)dx < \epsilon.$$

Como mostra a figura abaixo, temos uma sucessão de funções  $k_n(x)$ , cujos gráficos tendem a se acumularem próximo ao eixo dos  $y$ , desde que se tome  $n$  suficientemente grande, o que intuitivamente sugere que as funções  $k_n(x)$  se aproximam da função Delta de Dirac. E isto nos direciona a escrever (2.47) como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(x)f(x)dx. \quad (2.48)$$

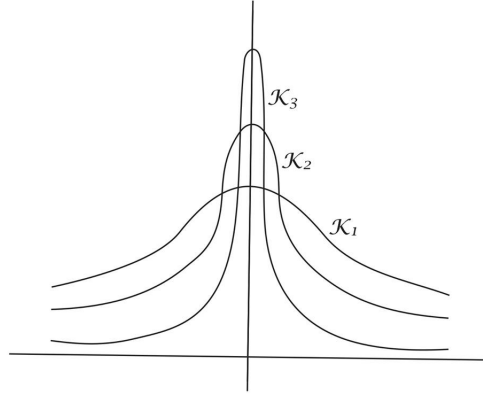


Figura 2.3:

O teorema seguinte contém a propriedade básica dos núcleos de Dirac. Além disso, nos ajudará a justificar a veracidade de (2.48). Antes porém, apresentaremos as seguintes definições.

**Definição 2.3.** *Uma sucessão de funções  $k_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente contínuas e satisfazendo as propriedades  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$  descritas acima, é chamada uma **sucessão de núcleos de Dirac**.*

**Definição 2.4 (Produto Convolução).** *Sejam as funções  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , absolutamente integráveis e uma delas limitada. Então o **produto convolução** de  $f$  por  $g$ , denotado por  $f * g$  é definido como sendo*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)g(s)ds.$$

O produto convolução tem ainda a seguinte propriedade:  $f * g = g * f$ , isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)g(x)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds \quad (2.49)$$

**Demonstração:** De fato, fazendo  $u = x - s$  e  $du = -ds$ , e observado os limites de integração, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)g(x)ds = - \int_{\infty}^{-\infty} f(u)g(x-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du,$$

donde segue o resultado. ■

**Teorema 2.8.** *Seja  $(k_n)$  uma sucessão de núcleos de Dirac e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente contínua e limitada. Então*

(i) *As funções  $f_n$  abaixo estão bem definidas*

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_n(x-s)f(s)ds.$$

(ii) *Supondo que cada  $k_n$  seja uma função par, para cada  $x$ , temos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

(iii) *A sucessão  $(f_n)$  converge uniformemente para  $f$ , em todo intervalo fechado e limitado  $I$  que não contém pontos de descontinuidade de  $f$ .*

**Demonstração:** (i) Sendo  $f$  seccionalmente contínua e limitada, digamos  $|f(s)| \leq M$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$  e para algum  $M > 0$ , como  $k_n(y) \geq 0$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ , usando  $N_2$ , temos

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} k_n(x-s)f(s)ds \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |k_n(x-s)||f(s)|ds \leq M \int_{-\infty}^{\infty} k_n(y)dy = M.$$

(ii) Com o intuito de simplificar a escrita denotaremos por  $f^*(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ . Então para demonstrar este item, devemos mostrar que  $|f_n(x) - f^*(x)| < \epsilon$ ,  $\forall \epsilon > 0$ . Usando a comutatividade da convolução e a propriedade  $N_2$  do núcleo de Dirac, ou seja,

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)f(x-s)dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)ds = 1,$$

temos

$$\begin{aligned} f_n(x) - f^*(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)f(x-s)ds - \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)f^*(x)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)[f(x-s) - f^*(x)]ds \\ &= \int_{|s|>\delta} k_n(s)[f(x-s) - f^*(x)]ds + \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)[f(x-s) - f^*(x)]ds \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Onde  $\delta > 0$  será escolhido convenientemente mais a diante. Agora, lembrando que  $k_n$  é par e qual é a expressão de  $f^*$ , isto é,

$$k_n(-s) = k_n(s), \quad \int_{-\delta}^{\delta} k_n(s)ds = 2 \int_0^{\delta} k_n(s)ds \quad \text{e} \quad f^*(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

vem

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{|s| \leq \delta} k_n(s)[f(x-s) - f^*(x)]ds = \int_{-\delta}^{\delta} k_n(s)f(x-s)ds - \int_{-\delta}^{\delta} k_n(s)f^*(x)ds \\ &= \int_{-\delta}^0 k_n(s)f(x-s)ds + \int_0^{\delta} k_n(s)f(x-s)ds - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \cdot 2 \int_0^{\delta} k_n(s)ds \\ &= - \int_{\delta}^0 k_n(-s)f(x+s)ds + \int_0^{\delta} k_n(s)f(x-s)ds - \int_0^{\delta} k_n(s)[f(x+0) + f(x-0)]ds \\ &= \int_0^{\delta} k_n(s)[f(x+s) + f(x-s)]ds - \int_0^{\delta} k_n(s)[f(x+0) + f(x-0)]ds \\ &= \int_0^{\delta} k_n(s)[f(x+s) - f(x+0)]ds + \int_0^{\delta} k_n(s)[f(x-s) - f(x-0)]ds. \end{aligned}$$

Como  $f$  é limitada, digamos  $|f(s)| \leq M, \forall s \in \mathbb{R}$ , seccionalmente contínua, isto é, existem os limites laterais, tem-se que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para  $0 < s < \delta$ , vale

$$|f(x+s) - f(x+0)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |f(x-s) - f(x-0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, usando a propriedade  $N_2$ ,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_0^{\delta} k_n(s)|f(x+s) - f(x+0)|ds + \int_0^{\delta} k_n(s)|f(x-s) - f(x-0)|ds \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^{\delta} k_n(s)ds + \frac{\epsilon}{2} \int_0^{\delta} k_n(s)ds \leq 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} \int_0^{\delta} k_n(s)ds \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)ds = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Agora, usando o  $\delta$  que acabamos de determinar acima, vamos majorar  $I_1$ , observando que também vale  $|f^*(s)| \leq M, \forall s \in \mathbb{R}$ . Além disso, da propriedade  $N_3$  do núcleo de Dirac, segue que existe  $n_0$  tal que para  $n \geq n_0$ , temos  $\int_{|s| > \delta} k_n(s)ds < \frac{\epsilon}{4M}$ , daí

$$|I_1| \leq \int_{|s| > \delta} k_n(s)|f(x-s) - f^*(x)|ds \leq 2M \int_{|s| > \delta} k_n(s)ds \leq 2M \frac{\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0$  tal que para  $n \geq n_0$

$$|f_n(x) - f^*(x)| < |I_1| + |I_2| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

o que prova (ii).

Por fim, para demonstrar (iii), do mesmo modo como fizemos no item (ii), vamos decompor a expressão

$$f_n(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)[f(x-s) - f(x)]ds$$

em duas partes, visto que  $f^*(x) = f(x)$  nos pontos onde  $f$  é contínua. Inicialmente, sejam os números  $a$  e  $b$  os extremos do intervalo  $I$  onde  $f$  é contínua, ou seja,  $I = [a, b]$ . Agora, tomemos  $\eta > 0$  tal que o intervalo fechado  $I' = [a - \eta, b + \eta]$  também não contenha pontos de descontinuidade de  $f$ . Com isso, segue-se que  $f$  é uniformemente contínua em  $I'$ . Logo dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para  $x_1, x_2 \in I'$  e  $|x_1 - x_2| < \delta$  temos  $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$ . Assim,

$$f_n(x) - f(x) = \int_{|s|>\delta} k_n(s)[f(x-s) - f(x)]ds + \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)[f(x-s) - f(x)]ds.$$

Como  $f$  é limitada por  $M$ , temos

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2M \int_{|s|>\delta} k_n(s)ds + \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)|f(x-s) - f(x)|ds = 2MJ_1 + J_2.$$

Daí, tomando  $\delta < \eta$ , vemos que quando  $x$  varia em  $I$ , então  $x - s$  varia em  $I'$ , assim, usando a continuidade uniforme de  $f$  neste intervalo, temos

$$J_2 = \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)|f(x-s) - f(x)|ds \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{|s|\leq\delta} k_n(s)ds \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)ds = \frac{\epsilon}{2},$$

onde no último passo usamos  $N_2$ . Agora, segue de  $N_3$  que para  $n$  suficientemente grande vale  $\int_{|s|>\delta} k_n(s)ds < \frac{\epsilon}{4M}$ , então

$$2MJ_1 = 2M \int_{|s|>\delta} k_n(s)ds < 2M \frac{\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, dado  $\epsilon > 0$ , e o correspondente  $\delta > 0$ , existe  $n_0$  tal que para todo  $x \in I$  e para todo  $n \geq n_0$  vale

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

O que nos mostra a convergência uniforme de  $(f_n)$  em  $I$ . ■

Com isso, observando agora a função Delta de Dirac e a expressão (2.47), pelo que acabamos de provar, sendo  $f$  contínua e limitada, se os núcleos forem também funções pares temos

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(-s)f(s)ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_n(s)f(s)ds,$$

que é exatamente a expressão (2.48).

## 2.8 O Teorema de Fejér

O Teorema de Fejér, o qual enunciaremos logo mais, nos traz informações sobre a convergência da série de Fourier de uma determinada função  $f$ , nos seus pontos de descontinuidade. Além disso, tal teorema aborda ainda, um outro conceito de convergência pouco conhecido nos estudos iniciais de Análise. Trata-se das séries **Cesàro-somais** que são séries convergentes no sentido de que as médias aritméticas das reduzidas convergem. Por exemplo, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ , que sabemos ser divergente, no contexto usual de convergência, de acordo com Figueredo (2014), Euler e outros matemáticos, observaram que a média aritmética da sucessão de reduzidas converge para  $\frac{1}{2}$ . Para ver isto, observamos as reduzidas desta série, que são:  $D_1 = 1, D_2 = 0, D_3 = 1, D_4 = 0, D_5 = 1, D_6 = 0, \dots$  e as médias aritméticas

$$\sigma_n = \frac{D_1 + \dots + D_n}{n}, \quad \sigma_{2n-1} = \frac{n}{2n-1} \text{ e } \sigma_{2n} = \frac{n}{2n}$$

onde certamente a sucessão  $(\sigma_n)$  converge para  $\frac{1}{2}$ . Ainda segundo o autor, Fejér estudou algumas propriedades importantes da relação entre a somabilidade à Cesàro e a série de Fourier. Vejamos algumas destas propriedades.

Seja a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente contínua e periódica de período  $2L$ , e, seja  $S_n(x)$  a sua reduzida de ordem  $n$ , isto é,

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \left[ a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \text{sen} \frac{k\pi x}{L} \right].$$

Denotemos por  $\sigma_{n+1}$  a média aritmética de  $S_0, S_1, \dots, S_n$ , ou seja

$$\sigma_{n+1} = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}(S_0 + S_1 + \dots + S_n).$$

Agora, usando a expressão do núcleo de Dirichlet, para  $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{L} \right) = \frac{1}{2L} \frac{\text{sen} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right]}{\text{sen} \frac{\pi x}{2L}},$$

onde também podemos escrever

$$S_n(x) = \int_{-L}^L D_n(x-y) f(y) dy.$$

Assim, é possível representar as médias aritméticas na forma de uma integral

$$\sigma_{n+1}(x) = \int_{-L}^L F_{n+1}(x-y) f(y) dy \tag{2.50}$$

em que

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x),$$

é chamado **núcleo de Fejér**.

Antes de enunciarmos o Teorema de Fejér, apresentaremos um lema que diz à respeito do núcleo de Fejér e será essencial na demonstração do teorema.

**Lema 2.1.** *O núcleo  $F_{n+1}(x)$  de Fejér é uma função par, contínua, periódica de período  $2L$ , que pode ser expressa como*

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2L(n+1)} \left[ \frac{\text{sen} \frac{(n+1)\pi x}{2L}}{\text{sen} \frac{\pi x}{2L}} \right]^2 \quad (2.51)$$

para  $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$ , e tem-se ainda  $F_{n+1}(0) = \frac{n+1}{2L}$ .

**Demonstração:** Como o núcleo de Dirichlet é uma função par, periódica de período  $2L$  e contínua, segue-se imediatamente da definição que  $F_{n+1}$  possui tais propriedades. Por outro lado, pelo que vimos acima sobre  $D_k(x)$ , podemos escrever

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2L(n+1)} \sum_{k=0}^n \frac{\text{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} \right]}{\text{sen} \frac{\pi x}{2L}}.$$

Portanto, seguindo um raciocínio semelhante àquele da demonstração da forma complexa da série de Fourier, procuremos uma representação para

$$A(\beta) = \sum_{k=0}^n \text{sen} \left( k + \frac{1}{2} \right) \beta.$$

Agora, usando mais uma vez a fórmula de Euler  $e^{ik\beta} = \cos k\beta + i \text{sen} k\beta$ , observamos que para  $\beta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ ,  $A(\beta)$  é a parte imaginária da expressão

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{i(k+\frac{1}{2})\beta} &= e^{\frac{i\beta}{2}} \sum_{k=0}^n e^{ik\beta} = e^{\frac{i\beta}{2}} \frac{1 - e^{i(n+1)\beta}}{1 - e^{i\beta}} = \frac{1}{e^{-\frac{i\beta}{2}}} \cdot \frac{1 - e^{i(n+1)\beta}}{1 - e^{i\beta}} = \\ &= \frac{1 - e^{i(n+1)\beta}}{e^{-\frac{i\beta}{2}} - e^{\frac{i\beta}{2}}} = \frac{1 - \cos(n+1)\beta - i \text{sen}(n+1)\beta}{-2i \text{sen} \frac{\beta}{2}} = \\ &= \frac{i[1 - \cos(n+1)\beta]}{2 \text{sen} \frac{\beta}{2}} + \frac{\text{sen}(n+1)\beta}{2 \text{sen} \frac{\beta}{2}}. \end{aligned}$$

Assim, usando a identidade trigonométrica  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$ , temos

$$A(\beta) = \frac{[1 - \cos(n+1)\beta]}{2 \text{sen} \frac{\beta}{2}} = \frac{[1 - \cos \frac{2(n+1)\beta}{2}]}{2 \text{sen} \frac{\beta}{2}} = \frac{2 \text{sen}^2 \left[ \left( \frac{n+1}{2} \right) \beta \right]}{2 \text{sen} \frac{\beta}{2}}.$$

Fazendo  $\beta = \frac{\pi x}{L}$ , obtemos

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2L(n+1)} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi x}{2L}} A\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2L(n+1)} \left[ \frac{\sin \frac{(n+1)\pi x}{2L}}{\sin \frac{\pi x}{2L}} \right]^2.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} F_{n+1}(0) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(0) = \frac{1}{L(n+1)} \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^k \cos \frac{j\pi 0}{L} \right) \\ &= \frac{1}{L(n+1)} \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{2} + k \right) = \frac{(n+1)^2}{2L(n+1)} = \frac{(n+1)}{2L}. \end{aligned}$$

■

**Teorema 2.9. (Teorema de Fejér)** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente contínua, periódica de período  $2L$ . Então*

(a) *para cada  $x$  vale*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2};$$

(b) *a sucessão  $(\sigma_n)$  converge uniformemente para  $f$  em todo intervalo fechado  $I$  que não contenha pontos de descontinuidade de  $f$ .*

**Demonstração:** Usando expressão (2.50), e, pela comutatividade da convolução podemos escrever

$$\sigma_{n+1}(x) = \int_{-L}^L F_{n+1}(y) f(x-y) dy.$$

Definindo as funções

$$\phi_{n+1}(x) = \begin{cases} F_{n+1}(x), & \text{se } -L \leq x \leq L, \\ 0, & \text{se } |x| > L \end{cases} \quad (2.52)$$

temos que

$$\sigma_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n+1}(y) f(x-y) dy. \quad (2.53)$$

Se provarmos que  $(\phi_{n+1})$  é uma sucessão de núcleos de Dirac, podemos utilizar o teorema (2.8) e concluir imediatamente a demonstração deste resultado. Para tanto, verifiquemos as propriedades  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$ .  $N_1$  segue imediatamente do Lema anterior. Para verificar  $N_2$ , observemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n+1}(x) dx = \int_{-L}^L F_{n+1}(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_{-L}^L D_k(x) dx = \frac{1}{n+1} (n+1) = 1$$

visto que

$$\int_{-L}^L D_k(x) dx = 1.$$

Por fim, dados  $\epsilon, \delta > 0$ , como  $\phi_{n+1}(x) = 0$  para  $|x| > L$ , temos

$$\int_{|x|>\delta} \phi_{n+1}(x) dx = 2 \int_{\delta}^L F_{n+1}(x) dx = \frac{2}{2L(n+1)} \int_{\delta}^L \left[ \frac{\text{sen} \frac{(n+1)\pi x}{2L}}{\text{sen} \frac{\pi x}{2L}} \right]^2 dx.$$

Como para  $x \in [\delta, L]$  vale

$$\left[ \frac{\text{sen} \frac{(n+1)\pi x}{2L}}{\text{sen} \frac{\pi x}{2L}} \right]^2 \leq \frac{1}{(\text{sen} \frac{\pi \delta}{2L})^2},$$

tem-se

$$\int_{|x|>\delta} \phi_{n+1}(x) dx \leq \frac{1}{L(n+1)} \cdot \frac{1}{(\text{sen} \frac{\pi \delta}{2L})^2} \int_{\delta}^L dx \leq \frac{L - \delta}{L(n+1) (\text{sen} \frac{\pi \delta}{2L})^2}.$$

Logo, para  $n$  suficientemente grande a propriedade  $N_3$  se verifica. Donde pela aplicação imediata do teorema (2.8) segue o resultado.  $\blacksquare$

## 2.9 Identidade de Parseval

Vimos nas secções anteriores que dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$ , com  $f$ ,  $|f|$  e  $|f|^2$  integráveis, podemos calcular e obter estimativas para os seus coeficientes de Fourier  $a_n$  e  $b_n$ . Vimos também que o erro médio quadrático  $e_n = \int_{-L}^L |S_n(x) - f(x)|^2 dx$  na aproximação de  $f$  pelas reduzidas  $S_n(x)$  de sua série de Fourier, pode ser representado pela seguinte expressão

$$0 \leq e_n = -\frac{a_0^2 L}{2} - L \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) + \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx. \quad (2.54)$$

Se tomarmos o limite em  $e_n$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , o que será que ocorre? O teorema seguinte mostrará que sob certas condições impostas a função  $f$ , teremos  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$  (também conhecido como limite em média), o que resultará na **Identidade de Parseval**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx. \quad (2.55)$$

Antes de enunciarmos o teorema mencionado acima, apresentaremos uma importante desigualdade a qual utilizaremos na demonstração de tal teorema.



**Proposição 2.1.** (*Desigualdade de Minkowski*<sup>7</sup>) Sejam  $f$  e  $g$ , funções de quadrado integrável no intervalo  $[a, b]$ . Então vale

$$\left[ \int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

**Teorema 2.10.** Seja a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periódica de período  $2L$  e de quadrado integrável no intervalo  $[-L, L]$ . Então a série de Fourier de  $f$  converge em média quadrática para  $f$ .

**Demonstração:** Devemos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \int_{-L}^L |S_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

Para tanto, assim como já fizemos em outras demonstrações, dividiremos esta em duas partes:

(1<sup>a</sup>) Suponhamos  $f$  contínua. Então, segue do Teorema de Fejér que a sucessão  $(\sigma_n)$  das médias aritméticas das reduzidas  $S_n(x)$  converge uniformemente para  $f$  no intervalo  $[-L, L]$ , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max |\sigma_n(x) - f(x)| = 0, \forall x \in [-L, L]. \quad (2.56)$$

Sendo  $f$  contínua no compacto<sup>8</sup>  $[-L, L]$ ,  $f$  é limitada neste intervalo, então

$$\int_{-L}^L |\sigma_n(x) - f(x)|^2 dx \leq 2L[\max |\sigma_n(x) - f(x)|^2], \forall x \in [-L, L].$$

Mas,  $\sigma_n(x)$  é um polinômio trigonométrico de ordem  $n$ , e já vimos que o polinômio trigonométrico que melhor aproxima  $f$  é  $S_n(x)$ , com isso devemos ter

$$\int_{-L}^L |S_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_{-L}^L |\sigma_n(x) - f(x)|^2 dx.$$

Assim

$$0 \leq \int_{-L}^L |S_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_{-L}^L |\sigma_n(x) - f(x)|^2 dx \leq 2L[\max |\sigma_n(x) - f(x)|^2],$$

$\forall x \in [-L, L]$ . Daí, tal majoração junto com (2.56), nos diz que tomando o limite temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |S_n(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

<sup>7</sup>A demonstração da Desigualdade de Minkowski pode ser encontrada na referência [3].

<sup>8</sup>Detalhes sobre a continuidade de uma função real num conjunto compacto podem ser encontrados na referência [6].

(2ª) Para o caso geral, lembremos que de acordo com o teorema (2.5), toda função  $f$  de quadrado integrável pode ser aproximada em média quadrática por funções contínuas  $\psi$ . Observamos também que se  $f$  for periódica de período  $2L$ , assim também será a função  $\psi$ , ou seja, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua e periódica de período  $2L$ , satisfazendo

$$\int_{-L}^L |f(x) - \psi(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{4}. \quad (2.57)$$

Agora, sendo  $\psi$  contínua e considerando  $\overline{S}_n(x)$  a reduzida de ordem  $n$  da sua série de Fourier, podemos utilizar a parte já demonstrada do teorema para concluir que existe  $n_0$  tal que, para  $n \geq n_0$  vale

$$\int_{-L}^L |\psi(x) - \overline{S}_n(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{4}. \quad (2.58)$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Minkowski, para  $n \geq n_0$  segue-se

$$\begin{aligned} \left[ \int_{-L}^L |f(x) - \overline{S}_n(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} &= \left[ \int_{-L}^L |f(x) - \psi(x) + \psi(x) - \overline{S}_n(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left[ \int_{-L}^L |f(x) - \psi(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \int_{-L}^L |\psi(x) - \overline{S}_n(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &< \left( \frac{\epsilon}{4} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{\epsilon}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{2} = \epsilon^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Logo, para todo  $n \geq n_0$ , temos

$$\int_{-L}^L |f(x) - \overline{S}_n(x)|^2 dx < \epsilon.$$

Mas, como já observamos, sendo  $\overline{S}_n(x)$  um polinômio trigonométrico, vale

$$\int_{-L}^L |f(x) - S_n(x)|^2 dx < \int_{-L}^L |f(x) - \overline{S}_n(x)|^2 dx < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Como  $\epsilon > 0$  é arbitrário, concluímos a demonstração do teorema. ■

**Observação 2.4.** Como já mencionado, a reduzida  $S_n(x)$  de ordem  $n$  da série de Fourier de uma função  $f$  de quadrado integrável, pode ser encarada como uma aproximação de  $f$ , cujo erro médio quadrático  $e_n$ , de acordo com a Identidade de Parseval, tende a zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Por outro lado, a Desigualdade de Bessel sugere a possibilidade desse erro médio quadrático não tender a zero. Segundo Spiegel (1977), estes fatos estão relacionados com a ideia de completividade, ou seja, se abandonássemos um ou mais termos numa série de Fourier, jamais teríamos  $e_n \rightarrow 0$  por maior que fosse o número de termos que tomássemos. No estudo precedente, por algumas vezes, utilizamos as relações de ortogonalidade que apresentamos no primeiro capítulo. Vale observar, que para desenvolver

uma função  $f$  em séries de funções ortogonais, é certamente necessário que  $f$  não seja ortogonal a todas as funções  $\psi_n$  do sistema, visto que se assim o fosse, todos os coeficiente de Fourier de  $f$  seriam nulos. Para evitar este último problema, apresentaremos uma definição de **sistema ortonormal completo**. Tal terminologia aqui descrita, de acordo com Figueiredo (2024), também se justifica no sentido de que tal sistema não é parte de outro sistema ortonormal, isto é, ele é maximal, sendo chamado, em alguns textos, de sistema ortonormal fechado, para significar que em tal sistema vale a Identidade de Parseval para funções  $L^2$ .

**Definição 2.5.** Diremos que um sistema ortonormal  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$  é **completo** quando, para uma função  $f$  de quadrado integrável no intervalo  $[-L, L]$ , se tivermos

$$\int_{-L}^L f \psi_n = 0, \quad \text{para todo } n. \quad (2.59)$$

Então  $f(x) = 0$  em todos os pontos onde  $f$  é contínua.

**Lema 2.2.** O sistema

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{2\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{k\pi x}{L}, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{k\pi x}{L}, \dots$$

é completo.

**Demonstração:** No primeiro capítulo já observamos que tal sistema é ortonormal. Por outro lado, segue da definição de sistema completo que todos os coeficiente de Fourier de  $f$  se anulam. Assim, da Identidade de Parseval temos

$$\int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = 0.$$

Mas isso significa  $f(x) = 0$ , em todos os pontos onde  $f$  é contínua, visto que do contrário, digamos,  $f(x_0) \neq 0$  em algum ponto  $x_0$  de continuidade de  $f$ , então existe um intervalo  $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  (para algum  $\delta > 0$ ) tal que  $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$ . Daí,

$$0 < \int_I |f(x)|^2 dx \leq \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx = 0,$$

o que é um absurdo. ■

Até agora estudamos alguns tipos de convergências da série de Fourier de uma função. Mas, e quanto a unicidade? Será que funções distintas possuem séries de Fourier distintas? Vejamos o que diz o próximo teorema.

**Teorema 2.11.** (*Unicidade da Série de Fourier*) *Sejam  $f$  e  $g$  funções periódicas de quadrado integrável no intervalo  $[-L, L]$ . Suponha que suas séries de Fourier são as mesmas. Então nestas condições  $f(x) = g(x)$ , em todo os pontos onde  $f$  e  $g$  são contínuas.*

**Demonstração:** Consideremos a função  $h = f - g$  e o sistema ortonormal completo  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ . Como os coeficientes de Fourier de  $f$  e de  $g$  são os mesmos, devemos ter

$$\int_{-L}^L h\psi_n = 0 \quad \forall n.$$

Portanto, pelo Lema anterior temos  $h = 0$ , ou seja,  $f = g$  em todos os pontos onde  $f$  e  $g$  são contínuas. ■

## 2.10 Teste de Jordan

Apresentaremos a seguir mais um teste sobre a convergência pontual da série de Fourier. Vimos no teste de Dini, a exigência, por exemplo, da existência dos limites laterais em cada ponto do domínio da função  $f$ . O que veremos logo mais, é um teste relativamente simples e que trata propriedades distintas daquelas consideradas no teste de Dini. Tal teste, envolve o conceito de **função de variação limitada**, que, de acordo com Figueiredo (2014), foi formulado por Jordan e desempenha um papel importante na teoria de Lebesgue.

Dada uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada partição  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  do intervalo  $[a, b]$ , onde  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , seja  $V(f; P) = \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|$ . Quando o conjunto  $\{V(f; P); \text{tal que } P \text{ é partição de } [a, b]\}$  for limitado, então diz-se que  $f$  é uma função de variação limitada. Mais especificamente temos que existe uma constante  $M > 0$  tal que

$$\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq M. \quad (2.60)$$

Além disso, a menor das constantes  $M$  utilizadas para obter (2.60), qualquer que seja a partição  $P$  de  $[a, b]$ , é chamada de variação de  $f$  em  $[a, b]$  a qual denotaremos por  $V[a, b]$ . Vale observar que nem toda função contínua é de variação limitada, como é o caso de, por exemplo,  $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ . Por outro lado, existem funções descontínuas que são de variação limitada. Na verdade, pode-se provar que qualquer função monótona

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é de variação limitada, e vale  $V[a, b] = |f(b) - f(a)|$ . Além disso, se  $f$  é de variação limitada e as funções monótonas  $h, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , são tais que

$$h(x) = \frac{1}{2}(V[a, x] + f(x)) \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{2}(V[a, x] - f(x)),$$

então

$$h(x) - g(x) = \frac{1}{2}(V[a, x] + f(x)) - \frac{1}{2}(V[a, x] - f(x)) = f(x),$$

ou seja, acabamos de mostrar que uma função de variação limitada pode ser expressa como a diferença de duas funções monótonas. E com isso, segue das propriedades das funções monótonas que  $f$  possui um número contável de descontinuidades, e, estas descontinuidades são todas de primeira espécie.

Antes de apresentarmos o Teste de Jordan, mostraremos dois resultados que utilizaremos na demonstração deste.

**Teorema 2.12.** (*Segundo Teorema do Valor Médio para Integrais*) *Sejam,  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função não-negativa e não-decrescente em  $[a, b]$ , e  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $L^1$ . Então, existe  $\delta \in [a, b]$  tal que*

$$\int_a^b g(x)f(x)dx = g(a+0) \int_a^\delta f(x)dx + g(b-0) \int_\delta^b f(x)dx \quad (2.61)$$

**Demonstração:** Suponhamos inicialmente que  $g(a+0) = 0$ , e mostremos que se tem

$$\int_a^b g(x)f(x)dx = g(b-0) \int_\delta^b f(x)dx \quad \text{para algum } \delta \in [a, b].$$

Consideremos a função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , a qual pode-se mostrar que é contínua, dada por

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt.$$

Sendo  $F$  contínua no compacto  $[a, b]$ , segue-se que  $F$  é limitada. Além disso,  $F$  assume valor máximo  $M$  e valor mínimo  $m$  neste intervalo. Por conseguinte a função  $g(b-0)F(x)$  é também contínua e vale  $mg(b-0) \leq g(b-0)F(x) \leq Mg(b-0), \forall x \in [a, b]$ . Agora, dado  $n \in \mathbb{N}$ , construímos uma partição  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  de  $[a, b]$  pondo  $K = g(b-0)$  e

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b, \quad \text{onde } x_j = \sup \left\{ x \in [a, b] : g(x) \leq j \frac{K}{n} \right\}.$$

Definindo a função simples

$$\psi(x) = j \frac{K}{n} \quad \text{para } x \in (x_{j-1}, x_j),$$

visto que os extremos destes intervalos não nos interessa. Observe que sendo  $g$  não-decrescente, pela forma como construímos  $P$ ,

$$x \in (x_{j-1}, x_j), \implies (j-1)\frac{K}{n} \leq g(x) \leq j\frac{K}{n},$$

ou ainda, para todo  $x \in (x_{j-1}, x_j)$ ,  $0 \leq \psi(x) - g(x) \leq \frac{K}{n}$ . Por conseguinte

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(x)f(x)dx - \int_a^b \psi(x)f(x)dx \right| &= \left| \int_a^b [g(x) - \psi(x)]f(x)dx \right| \\ &\leq \int_a^b |g(x) - \psi(x)||f(x)|dx \\ &\leq \frac{K}{n} \int_a^b |f(x)|dx. \end{aligned}$$

O que implica

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x)f(x)dx - \frac{K}{n} \int_a^b |f(x)|dx &\leq \int_a^b g(x)f(x)dx \leq \\ &\leq \int_a^b \psi(x)f(x)dx + \frac{K}{n} \int_a^b |f(x)|dx. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Além disso, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x)f(x)dx &= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} j\frac{K}{n}f(x)dx = \frac{K}{n} \sum_{j=1}^n j[F(x_{j-1}) - F(x_j)] \\ &= \frac{K}{n} [F(x_0) - F(x_1) + 2F(x_1) - 2F(x_2) + \cdots + nF(x_{n-1}) - nF(x_n)] \\ &= \frac{K}{n} [F(x_0) + F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) \cdots + F(x_{n-1})] \\ &= \frac{K}{n} \left[ F(x_0) + \sum_{j=2}^n F(x_{j-1}) \right]. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Como vale  $m \leq F(x) \leq M$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , avaliando (2.63) segue-se que

$$Km \leq \int_a^b \psi(x)f(x)dx \leq KM.$$

Agora, aplicando este último resultado em (2.62), obtemos

$$mK - \frac{K}{n} \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b g(x)f(x)dx \leq KM + \frac{K}{n} \int_a^b |f(x)|dx.$$

Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , e observando que  $K = g(b-0)$ , tem-se

$$mg(b-0) \leq \int_a^b g(x)f(x)dx \leq g(b-0)M.$$

Finalmente, segue do Teorema do Valor Intermediário<sup>9</sup> que existe  $t \in [a, b]$  tal que

$$g(b - 0)F(t) = \int_a^b g(x)f(x)dx \implies g(b - 0) \int_t^b f(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx.$$

Para o caso em que  $g(a + 0) \neq 0$ , basta aplicar o que acabamos de demonstrar à função  $h(x) = g(x) - g(a + 0)$  ■

**Exemplo 2.5.** *Aplicando o teorema (2.12), podemos verificar que existe  $M > 0$  tal que para quaisquer  $a < b$  vale*

$$\left| \int_a^b \frac{\text{sen}x}{x} dx \right| \leq M. \quad (2.64)$$

**Demonstração:** De fato, como a função  $\frac{\text{sen}x}{x}$  é contínua e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$ . Basta analisarmos para  $1 \leq a < b$ , donde  $\frac{1}{a} \leq 1$  e  $\frac{1}{b} < 1$ . Agora, pelo teorema anterior existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \int_a^b \frac{\text{sen}x}{x} dx \right| = \left| \frac{1}{a} \int_a^\delta \text{sen}x dx + \frac{1}{b} \int_\delta^b \text{sen}x dx \right| \leq 4.$$

Onde usamos o fato de  $|\cos \alpha| \leq 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ . ■

O segundo resultado que utilizaremos para a demonstração do Teste de Jordam é o Princípio de Localização de Riemann.

**Teorema 2.13. (Princípio de Localização de Riemann**<sup>10</sup>) *Seja a função  $f \in L^1$  e periódica de período  $2L$ . Então sua série de Fourier, em um ponto  $x \in [-L, L]$ , convergirá para  $s(x)$  se, e somente se, existir  $0 < \lambda \leq L$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\lambda \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})\frac{\pi t}{L}}{t} g(x, t) dt = 0, \quad (2.65)$$

onde  $g(x, t) = f(x + t) + f(x - t) - 2s(x)$ .

**Teorema 2.14. (Teste de Jordan)** *Seja  $f$  uma função de variação limitada e periódica de período  $2L$ . Então, sua série de Fourier converge para  $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ , ou seja, converge para a média aritmética dos limites laterais.*

**Demonstração:** Vamos usar o teorema (2.13), porém com a função  $g(x, t)$  dada por

$$g(x, t) = f(x + t) + f(x - t) - f(x + 0) - f(x - 0).$$

<sup>9</sup>Detalhes sobre o Teorema do Valor Intermediário podem ser encontrados na referência [6].

<sup>10</sup>Para ver a demonstração do Princípio de Localização de Riemann recomendamos referência [3].

Sendo  $f$  de variação limitada, segue-se que para cada  $x$  fixado a função  $g$  é de variação limitada em  $t$ , e pelo que já vimos, existem funções monótonas, não-negativas e não-decrescentes  $h_1(t)$  e  $h_2(t)$  tais que  $g(x, t) = h_1(t) - h_2(t)$  e  $h_1(0+0) = h_2(0+0) = 0$ . Assim, como consequência do teorema (2.13) basta mostrarmos que se tem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^L \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})\frac{\pi t}{L}}{t} h_i(t) dt = 0, \quad \text{com } i = 1, 2. \quad (2.66)$$

Para tanto, vamos decompor a integral de (2.66) em duas partes, ou seja, dado  $\epsilon > 0$ , arbitrário, tomemos  $0 < \lambda < L$  de tal forma que para todo  $t \in (0, \lambda)$  se tenha  $|h_i(t)| < \frac{\epsilon}{M}$ , onde  $M > 0$  é aquele que usamos no exemplo acima. Assim, podemos escrever

$$\int_0^L \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})\frac{\pi t}{L}}{t} h_i(t) dt = \underbrace{\int_0^\lambda \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})\frac{\pi t}{L}}{t} h_i(t) dt}_J + \underbrace{\int_\lambda^L \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})\frac{\pi t}{L}}{t} h_i(t) dt}_{JJ}.$$

Agora, pelo Lema Riemann-Lebesgue, temos que  $(JJ) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Quanto a integral  $(J)$ , segue do Segundo Teorema do Valor Médio para Integrais que existe  $\delta \in (0, \lambda)$ , tal que

$$\int_0^\lambda \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})\frac{\pi t}{L}}{t} h_i(t) dt = h_i(\lambda - 0) \int_\delta^\lambda \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})\frac{\pi t}{L}}{t} dt = h_i(\lambda - 0) \int_{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi\delta}{L}}^{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi\lambda}{L}} \frac{\text{sen}y}{y} dy,$$

onde para obtermos a última integral fizemos uma mudança de variável, e, finalmente usando o fato de que  $|h_i(\lambda - 0)| < \frac{\epsilon}{M}$  e o exemplo (2.5) acima, temos

$$\int_0^\lambda \frac{\text{sen}(n + \frac{1}{2})\frac{\pi t}{L}}{t} h_i(t) dt = h_i(\lambda - 0) \int_{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi\delta}{L}}^{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi\lambda}{L}} \frac{\text{sen}y}{y} dy < \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon,$$

o que conclui a demonstração do teorema. ■

Vejamos os seguintes exemplos

**Exemplo 2.6.** *Considere a função periódica de período 1*

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\log|x|}, & \text{se } 0 < |x| < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (2.67)$$

**Exemplo 2.7.** *Seja  $g$  periódica de período 2, dada por*

$$g(x) = \begin{cases} |x| \text{sen} \frac{1}{|x|}, & \text{se } 0 < |x| < 1 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases} \quad (2.68)$$



Pode-se mostrar que a função  $f$  do exemplo (2.6) é de variação limitada, pois é contínua e monótona em cada intervalo  $[-\frac{1}{2}, 0]$ ,  $[0, \frac{1}{2}]$ , o que acarreta na possibilidade da aplicação do Teste de Jordan. Porém não podemos aplicar o Teste de Dini, visto que a integral  $\int_0^\delta \frac{1}{x \log x} dx$  diverge. Por outro lado, à função  $g$  do exemplo (2.7) podemos aplicar o Teste de Dini, entretanto não vale o Teste de Jordan, já que tal função não é de variação limitada.

**Observação 2.5.** *Vimos, nos estudos precedentes, que se uma função  $f$  é periódica de período  $2L$ , seccionalmente contínua, com  $f'$  e  $|f'|$  integráveis, então sua série de Fourier converge uniformemente para  $f$ , em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de  $f$ . Contudo, se o intervalo contém pontos de descontinuidades a convergência pode não ser uniforme. Mas, como se comporta a série de Fourier de  $f$  numa pequena vizinhança de tais pontos? Segundo Figueiredo (2014), Gibbs estudou tal comportamento e verificou uma característica curiosa da convergência próximo de um ponto  $\xi$  de descontinuidade de  $f$ . Tal comportamento, que hoje é conhecido como **fenômeno de Gibbs**, diz que a oscilação da soma parcial  $S_n(x)$  da série de Fourier de  $f$ , numa vizinhança de  $\xi$ , não se aproxima do valor do salto de  $f$  neste ponto, por menor que seja a vizinhança considerada. Em outras palavras, denotando por  $w_n(\xi, \epsilon)$  a diferença entre o máximo e o mínimo da soma parcial  $S_n(x)$  no intervalo  $[\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$ , segue-se que  $w_n(\xi, \epsilon)$  não se aproxima de  $|f(\xi + 0) - f(\xi - 0)|$ , por menor que se tome  $\epsilon > 0$ . Este fenômeno pode ser observado inspecionando os gráficos, da função  $f$  e da sua série de Fourier no exemplo (2.2).*

Outro tópico também importante destacado por Figueiredo, diz respeito ao **Teorema de Riesz-Fischer**, provado em 1907, que trata alguns questionamentos relativos a uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , periódica de período  $2L$  e  $L^2$ , no intervalo  $[-L, L]$ . Vimos que sob tais condições  $f$  satisfaz a Identidade de Parseval, em particular vale

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) < \infty. \quad (2.69)$$

As observações feitas pelo autor são as seguintes: dadas sucessões  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  e  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ , será que estas são coeficientes de Fourier de alguma função? Nem sempre, pois como vimos, os coeficientes de Fourier de uma função  $f$  devem satisfazer certas estimativas, inclusive se  $f$  for  $L^2$ , devem satisfazer (2.69). Em contrapartida, (2.69) é suficiente para que esses  $a_n$  e  $b_n$ , sejam coeficientes de Fourier de alguma função  $f \in L^2$ ? O autor

*afirma que se estivermos considerando apenas funções de quadrado integrável à Riemann, a resposta é não, porém se tais funções forem  $L^2$  à Lebesgue a resposta é sim.*

# Capítulo 3

## Transformadas: de Fourier e de Laplace

Neste capítulo ampliaremos um pouco mais o nosso campo de investigação abordando duas **transformadas integrais** de grande relevância em aplicações no estudo das Equações Diferenciais. São elas: a **Transformada de Fourier**, que é muito utilizada para tratar problemas de vibrações de cordas infinitas e semi-infinitas, problemas de condução de calor em barras infinitas e semi-infinitas<sup>1</sup>, em especial, a transformada e a série de Fourier desempenham um papel importante na Engenharia Elétrica e em outras áreas de processamento de sinais; e a **Transformada de Laplace**, que é muito útil na resolução de problemas relacionados a sistemas físicos tais como: Sistema Massa-mola, Circuito Elétrico em Série e em problemas de valor de contorno, entre outros. Procuraremos ainda, investigar algumas aplicações.

Inicialmente estudaremos a Transformada de Fourier, e começamos lembrando que até agora abordamos, (em boa parte do estudo) a Teoria de Fourier sobre determinadas funções  $f$  de período  $2L$ , em intervalos do tipo  $[-L, L]$ . Surge então, a seguinte pergunta: o que ocorre quando  $L \rightarrow \infty$ ? Como observa Spiegel (1977), veremos a seguir que sob certas condições, em tal caso, a série se torna uma Integral de Fourier.

---

<sup>1</sup>Estudos detalhados sobre cordas infinitas e semi-infinitas podem ser encontrados na referência [3].

### 3.1 Transformada de Fourier

A princípio vamos construir, de forma não rigorosa, a Integral de Fourier a partir da série de Fourier. Consideremos a função  $f$ , de período  $2L$  e  $L^1$  em  $[-L, L]$ . A ideia é a seguinte: supondo a igualdade entre  $f$  e sua série de Fourier, isto é,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right],$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \text{sen} \frac{n\pi t}{L} dt.$$

Fazendo  $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$  e  $\Delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{L}$ ,  $f(x)$  pode ser representada pela seguinte expressão

$$\frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-L}^L f(t) dt \right] \Delta\lambda + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \cos \lambda_n x \int_{-L}^L f(t) \cos \lambda_n t dt + \text{sen} \lambda_n x \int_{-L}^L f(t) \text{sen} \lambda_n t dt \right] \Delta\lambda.$$

Além disso, percebemos que quando  $L \rightarrow \infty$ ,  $\Delta\lambda \rightarrow 0$ . Daí tomando o limite, o somatório acima toma a forma  $\lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} F(\alpha_n) \Delta\lambda$ , que intuitivamente sugere, pela soma de Riemann,  $\int_0^{\infty} F(\alpha) d\alpha$ . Agora, se a integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$  converge, então  $\frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right] \Delta\lambda$  vale zero, quando  $\Delta\lambda \rightarrow 0$ . Desse modo, tem-se

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \cos \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt + \text{sen} \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sen} \lambda t dt \right] d\lambda.$$

Finalmente, fazendo

$$A(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad B(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sen} \lambda t dt,$$

obtemos a **Integral de Fourier** da função  $f$  no intervalo  $(-\infty, \infty)$ , dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \text{sen} \lambda x] d\lambda.$$

Segue das propriedades de ortogonalidades que se  $f$  é par em  $(-\infty, \infty)$ , a Integral de Fourier da função  $f$  é a **integral cosseno**

$$A(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad \text{onde } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} A(\lambda) \cos \lambda x d\lambda.$$

Do mesmo modo, se  $f$  é ímpar em  $(-\infty, \infty)$ , a Integral de Fourier de  $f$  é uma **integral seno**

$$B(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x) \text{sen} \lambda x dx, \quad \text{onde } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\lambda) \text{sen} \lambda x d\lambda.$$

As condições suficientes para que a Integral de Fourier de  $f$ , convirja para  $f$ , estão enunciadas no seguinte teorema.

**Teorema 3.1.** (*Condições para Convergência da Série*<sup>2</sup>) *Sejam  $f$  e  $f'$  seccionalmente contínuas em qualquer intervalo finito, e seja  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$  convergente. Então, a Integral de Fourier de  $f$  converge para  $f(x)$  em um ponto de continuidade de  $f$ . E, em pontos de descontinuidades, converge para  $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ .*

Por outro lado, sabemos que a série de Fourier de uma função  $f$  na forma complexa, pode ser expressa como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}, \quad \text{onde } c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-\frac{in\pi x}{L}} f(x) dx.$$

Analogamente ao que fizemos acima, usando a notação  $\xi_n = \frac{n\pi}{L}$  e  $\Delta\xi = \xi_{n+1} - \xi_n = \frac{\pi}{L}$ , podemos escrever

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\xi_n x}, \quad \text{com } c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-i\xi_n x} f(x) dx.$$

Ou ainda, como  $c_n$  também depende de  $\xi_n$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , temos

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c(\xi_n) e^{i\xi_n x}] \Delta\xi, \quad \text{onde } c(\xi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L e^{-i\xi_n x} f(x) dx.$$

Tomando o limite, observamos que quando  $L \rightarrow \infty$ ,  $\Delta\xi \rightarrow 0$ . Logo, o último somatório e a expressão de  $c(\xi_n)$  produzem

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad \text{com } c(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Desde que as integrais impróprias acima sejam convergentes, nosso objetivo será mostrar que tais expressões representam a Transformada Inversa de Fourier e a Transformada de Fourier, respectivamente, da função  $f$ , ou mais especificamente, dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , queremos definir a sua Transformada de Fourier, dada pela integral imprópria

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx = \lim_{M, N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^N e^{-i\xi x} f(x) dx, \quad (3.1)$$

onde  $M \rightarrow \infty$  e  $N \rightarrow \infty$ , de forma independente. Além disso, para cada  $\xi$  a integral (3.1) converge para um número. Para tanto, nosso propósito é investigar sob quais condições a função  $\mathcal{F}(\xi)$ , descrita acima está bem definida, ou seja, quais classes de funções  $f$  devemos considerar para que o limite em (3.1) exista.

<sup>2</sup>O leitor interessado pode encontrar a demonstração do teorema (3.1) na referência [8].

Dizemos que o conjunto das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é um espaço  $L^1(\mathbb{R})$ , quando as integrais impróprias de cada função  $f$  e  $|f|$  existem. Isto significa que  $f$  e  $|f|$  são funções  $L^1$ , no sentido visto nos capítulos anteriores, em cada intervalo  $[-M, N]$  e que existem

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N f(x) dx \quad \text{e} \quad \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N |f(x)| dx.$$

Contudo, segue das características de  $\mathcal{F}(\xi)$  que teremos de trabalhar com funções reais que assumam valores no plano dos números complexos, isto é, estudaremos funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , tais que  $f(x) = u(x) + iv(x)$ , onde  $u$  e  $v$  representam suas partes real e imaginária, respectivamente, e ainda,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} v(x) dx$ . Este é o caso de  $\mathcal{F}(\xi)$ , pois, usando a fórmula de Euler, temos

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \xi x dx - i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \xi x dx.$$

Desta forma, diremos que a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  será  $L^1$  se suas partes, real, imaginária e  $|f|$ , forem  $L^1$  no sentido visto acima.

Formalmente temos.

**Definição 3.1. (Transformada de Fourier)** Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  for uma função  $L^1$ , sua Transformada de Fourier será a função  $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , dada pela expressão

$$\mathfrak{F}[f](\xi) = \mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx. \quad (3.2)$$

### Propriedades da Transformada de Fourier:

Como consequência imediata da linearidade da integral segue-se que a Transformada de Fourier é linear, isto é, dadas  $f$  e  $g$  funções  $L^1$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  números complexos quaisquer, vale a relação

$$\mathfrak{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathfrak{F}[f] + \beta \mathfrak{F}[g].$$

Por outro lado, sendo  $f \in L^1$ , pode-se mostrar que

**Lema 3.1.**  $\mathcal{F}(\xi)$  é contínua<sup>3</sup>. Além disso,  $\mathcal{F}(\xi)$  se anula no infinito, ou seja, temos

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\xi) = 0$$

**Demonstração:** Provaremos apenas a segunda afirmação, dado que a primeira segue das propriedades da integral. Então, como  $f$  é  $L^1$ , temos que  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ . Assim, tomemos  $\epsilon > 0$  e consideremos o intervalo  $[-a, a]$  de tal forma que se tenha

$$\int_{|x| > a} |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

<sup>3</sup>A demonstração da continuidade de  $\mathcal{F}(\xi)$ , pode ser encontrada na referência [3].

Por outro lado, segue do Lema Riemann-Lebesgue que

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{-i\xi x} f(x) dx = 0.$$

Isto significa que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\xi_0 > 0$  tal que para  $|\xi| > \xi_0$ , temos

$$\left| \int_{-a}^a e^{-i\xi x} f(x) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, escolhendo convenientemente  $\xi_0$ , para  $|\xi| > \xi_0$ , tem-se

$$|\mathcal{F}(\xi)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{-a}^a e^{-i\xi x} f(x) dx \right| + \int_{|x|>a} |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

donde segue o resultado. ■

Agora vejamos o exemplo seguinte.

**Exemplo 3.1.** Calcule a Transformada de Fourier da função abaixo (função pulso)

$$u_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < a \\ 0, & \text{se } |x| > a \end{cases} \quad \text{com } a > 0. \quad (3.3)$$

**Resolução:** Temos que, para  $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[f](\xi) = \mathcal{F}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u_a(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-i\xi x} dx. \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \Big|_{-a}^a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-e^{-i\xi a} + e^{i\xi a}}{i\xi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-\cos \xi a + i \operatorname{sen} \xi a + \cos \xi a + i \operatorname{sen} \xi a}{i\xi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \operatorname{sen} \xi a}{\xi}. \end{aligned}$$

Para  $\xi = 0$ , temos  $\mathcal{F}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i0x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2a$ .

Vale salientar que este exemplo nos mostra que a função  $\mathcal{F}(\xi)$  não é  $L^1$ , visto que a função  $\frac{\operatorname{sen} \xi a}{\xi}$  não pode ser integrada da forma “usual”, pois a mesma não possui como antiderivada uma função elementar. Desse modo,  $f$  ser  $L^1$  não implica  $\mathfrak{F}[f]$  ser  $L^1$ , e isto nos diz que esta teoria é um tanto assimétrica. Com base neste fato, buscaremos trabalhar a Transformada de Fourier em um espaço onde  $\mathfrak{F}$  possua um grande número de propriedades, e, uma boa alternativa, como afirma Figueiredo (2014), é estudar um subconjunto de  $L^1$ , conhecido como o **espaço das funções de decrescimento rápido**, que aqui denotaremos por  $\mathfrak{L}$ . O autor observa ainda, que  $\mathfrak{L}$  é um pouco maior que o espaço  $C_0^\infty$ , das funções infinitamente diferenciáveis, e que em  $\mathfrak{L}$  a teoria da Transformada de Fourier é mais elegante e mais simétrica.  $\mathfrak{L}$  é conhecido como o **espaço de Schwartz**, em homenagem ao matemático Laurent Schwartz, que criou a Teoria das Distribuições.

## 3.2 Espaço $\mathcal{L}$ e a Transformada de Fourier em $\mathcal{L}$

**Definição 3.2.** Diremos que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é de **decréscimento rápido**, se  $f$  for infinitamente diferenciável, e, se

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m D^n f(x) = 0, \quad (3.4)$$

para  $m, n \in \mathbb{Z}$ , com  $m, n \geq 0$ . Em outras palavras, dados  $m, n$  números inteiros não negativos, existe uma constante  $M(m, n)$ , dependendo de  $m$  e de  $n$ , tal que

$$|x^m D^n f(x)| \leq M(m, n), \quad \text{para todo } x. \quad (3.5)$$

Antes de verificarmos que de fato (3.4) e (3.5) são equivalentes, vale observar que a definição acima nos diz que  $f$  e suas derivadas tendem a zero, quando  $|x| \rightarrow \infty$ , mais rapidamente do que as potências  $|x|^m$  tendem para infinito.

**Demonstração:** (3.4)  $\implies$  (3.5). Segue-se de (3.4) que, dado  $\epsilon = 1$ , existe  $N > 0$  tal que  $|x| > N \implies |x^m D^n f(x)| \leq 1$ . Por outro lado, considere a função  $x \mapsto x^m D^n f(x)$ , que é contínua no intervalo  $[-N, N]$ , e portanto é limitada neste intervalo, ou seja, existe  $M_1 > 0$  tal que, para  $|x| \leq N$  tem-se  $|x^m D^n f(x)| \leq M_1$ . Logo, tomando  $M(m, n) = \max\{1, M_1\}$ , temos

$$|x^m D^n f(x)| \leq M(m, n).$$

(3.5)  $\implies$  (3.4). Reciprocamente, supondo que dados  $m, n \in \mathbb{Z}$ , com  $m, n \geq 0$ , existe  $M$  tal que  $|x^m D^n f(x)| \leq M(m, n)$ . Então, para  $m+1$  e  $n$ , vale  $|x^{m+1} D^n f(x)| \leq M(m+1, n)$ , ou seja, para  $x \neq 0$  tem-se,  $0 \leq |x^m D^n f(x)| \leq \frac{M(m+1, n)}{|x|}$ . Daí, tomando o limite quando  $|x| \rightarrow \infty$  obtemos (3.4).  $\blacksquare$

Podemos alargar um pouco mais este resultado; na verdade a cada polinômio  $P(X) = \sum_{j=0}^n a_j X^j$ , com  $a_j$  constante, é possível associar um operador diferencial linear com coeficientes constantes na forma  $P(D) = \sum_{j=0}^n a_j D^j$ . E com isso, (3.4) torna-se equivalente a afirmar que dados dois polinômios  $P(X)$  e  $Q(X)$ , existe uma constante  $M(P, Q)$  que depende de  $P$  e de  $Q$  tal que

$$|Q(X)P(D)f(x)| \leq M(P, Q). \quad (3.6)$$

Certamente (3.6)  $\implies$  (3.5), já que  $X^m$  e  $X^n$  são polinômios, do mesmo modo (3.5)  $\implies$  (3.6), pois a expressão do lado esquerdo da desigualdade de (3.6) pode ser vista



como uma soma de termos da forma dos que aparecem no lado esquerdo da desigualdade de (3.5).

Apresentaremos a seguir alguns resultados importantes sobre o espaço  $\mathfrak{L}$  e a Transformada de Fourier neste espaço. O primeiro deles é a proposição (3.1), que nos diz que os operadores diferenciais  $P(D)$  levam funções de  $\mathfrak{L}$  em  $\mathfrak{L}$ , assim como fazem os operadores de multiplicação por polinômios. Em outras palavras, neste espaço, a Transformada de Fourier, os operadores de multiplicação por polinômios, e os operadores polinomiais diferenciais são transformações lineares.

**Proposição 3.1.** *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  estiver em  $\mathfrak{L}$ , então  $D^n f$  e  $x^m f$  também estão em  $\mathfrak{L}$ , para quaisquer  $m, n \geq 0$  inteiros. Por conseguinte,  $x^m D^n f$  está em  $\mathfrak{L}$ , e para quaisquer polinômios  $P(X)$  e  $Q(X)$ ,  $Q(x)P(D)f$  também está em  $\mathfrak{L}$ .*

**Demonstração:** De (3.4) temos que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m D^n f(x) = 0$ , quaisquer que sejam os inteiros  $m, n \geq 0$ . Assim

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m D^n (D^n f(x)) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m D^{2n} f(x) = 0.$$

Do mesmo modo, aplicando a regra do produto e usando (3.4) e (3.6), mostra-se os demais casos. ■

**Proposição 3.2.** *Toda função de decrescimento rápido  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função  $L^1$ .*

**Demonstração:** Sendo infinitamente diferenciável,  $f$  é contínua em  $[-M, N]$ , e com isso  $f$  é limitada neste intervalo, por conseguinte  $f$  e  $|f|$  são integráveis em  $[-M, N]$ . Agora, para mostrar que a integral imprópria de  $f$  converge, vamos usar (3.5) com  $n = 0$  e  $m = 2$ . Assim, temos

$$|x^2 D^0 f(x)| \leq M(2, 0), \text{ ou ainda, } |f(x)| \leq \frac{M(2, 0)}{|x^2|}, \quad x \neq 0.$$

O que nos dá, para  $|x| \geq 1$

$$\int_{|x| \geq 1} |f(x)| dx \leq M(2, 0) \int_{|x| \geq 1} \frac{1}{|x^2|} dx = 2M(2, 0).$$

Daí

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_{|x| \geq 1} |f(x)| dx \leq \int_{-1}^1 |f(x)| dx + 2M(2, 0) < \infty.$$

■

Como consequência imediata, das duas proposições anteriores, segue-se que se a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  está em  $\mathfrak{L}$ , então  $x^m D^n f(x)$  é uma função  $L^1$  para quaisquer que sejam os números inteiros não-negativos  $m$  e  $n$ . Por outro lado, a proposição (3.2) mostra que a Transformada de Fourier, de funções em  $\mathfrak{L}$ , está bem definida, consequentemente, vale a linearidade de  $\mathfrak{F}$  neste espaço, ou seja, se as funções  $f$  e  $g$  estão em  $\mathfrak{L}$ , tem-se  $\mathfrak{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathfrak{F}[f] + \beta \mathfrak{F}[g]$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números complexos arbitrários.

As próximas proposições nos darão mais algumas informações importantes sobre as características da Transformada de Fourier de uma função  $f$  pertencente ao espaço  $\mathfrak{L}$ , inclusive uma propriedade que a Transformada de Laplace também possui (não necessariamente neste espaço), que é a de “destruir as derivadas”, ou seja, sob certas condições  $\mathfrak{F}$  transforma uma Equação Diferencial em uma equação algébrica. Vejamos

**Proposição 3.3.** *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  for uma função de  $\mathfrak{L}$ , então  $\mathfrak{F}[f]$  será infinitamente derivável e vale*

$$D_\xi^n \mathfrak{F}[f] = \mathfrak{F}[(-ix)^n f(x)]. \quad (3.7)$$

*Ou ainda, mais geralmente, se  $P(X)$  for um polinômio, então*

$$P(D_\xi) \mathfrak{F}[f] = \mathfrak{F}[P(-ix)f(x)]. \quad (3.8)$$

**Demonstração:** A justificativa dessa proposição segue-se da infinita diferenciabilidade de  $f$  e da convergência uniforme da integral da definição de  $\mathfrak{F}$  para funções em  $\mathfrak{L}$ , pois as derivadas parciais, com relação a  $\xi$ , do integrando são funções contínuas, ocorrendo também a convergência uniforme das integrais compostas por estas funções, tais propriedades nos permite derivar dentro do sinal de integração, o que nos fornece resultado procurado<sup>4</sup>. ■

**Proposição 3.4.** *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  for uma função do espaço  $\mathfrak{L}$ , então*

$$\mathfrak{F}[D^n f] = (i\xi)^n \mathfrak{F}[f]. \quad (3.9)$$

*Ou ainda, para todo inteiro  $n \geq 1$  e um polinômio  $P(X)$ , vale*

$$\mathfrak{F}[P(D)f] = P(i\xi) \mathfrak{F}[f]. \quad (3.10)$$

---

<sup>4</sup>A proposição (A6.9) da referência [3] justifica com maior rigor o argumento utilizado na demonstração da proposição (3.3).

**Demonstração:** Para provar a igualdade (3.9) usaremos indução sobre  $n$  e integração por partes. Então, para  $n = 1$ , temos

$$\mathfrak{F}[Df(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f'(x) dx = \underbrace{e^{-i\xi x} f(x)}_I \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx = (i\xi)\mathfrak{F}[f(x)].$$

Onde usamos o fato de que os limites em  $I$  são iguais a zero, pois  $f$  está em  $\mathfrak{L}$ . Agora, suponhamos a validade deste resultado para  $n > 1$  e mostremos que vale também para  $n + 1$ . Com efeito, da hipótese de indução vale

$$\mathfrak{F}[D^n f] = (i\xi)^n \mathfrak{F}[f]. \quad (3.11)$$

Seja  $g(x) = D^n f(x)$ , então  $g'(x) = D^{n+1} f(x)$ . Daí, como  $g$  está em  $\mathfrak{L}$ , temos

$$\mathfrak{F}[D^{n+1} f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} g'(x) dx = i\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} g(x) dx = (i\xi)\mathfrak{F}[g(x)] = i\xi \mathfrak{F}[D^n f(x)].$$

Por fim, usando a hipótese de indução, ou seja, (3.11), obtemos

$$\mathfrak{F}[D^{n+1} f] = i\xi \mathfrak{F}[D^n f] = i\xi (i\xi)^n \mathfrak{F}[f] = (i\xi)^{n+1} \mathfrak{F}[f].$$

Para comprovar a veracidade de (3.10) basta usar o que acabamos de mostrar junto com a linearidade de  $\mathfrak{F}[f]$ . ■

**Proposição 3.5.** *Se a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  pertence a  $\mathfrak{L}$ , então a sua Transformada de Fourier  $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  também pertence a  $\mathfrak{L}$ .*

**Demonstração:** De (3.7),  $D_\xi^n \mathfrak{F}[f] = \mathfrak{F}[(-ix)^n f(x)] \implies \xi^m D_\xi^n \mathfrak{F}[f] = \xi^m \mathfrak{F}[(-ix)^n f(x)]$ . E de (3.9), se  $g \in \mathfrak{L}$ , então  $\mathfrak{F}[D_x^m g] = (i\xi)^m \mathfrak{F}[g] \implies (-i)^m \mathfrak{F}[D_x^m g] = \xi^m \mathfrak{F}[g]$ . Agora, tomando  $g = (-ix)^n f(x)$  e usando a linearidade de  $\mathfrak{F}$ , obtemos

$$\xi^m D_\xi^n \mathfrak{F}[f] = \xi^m \mathfrak{F}[\underbrace{(-ix)^n f}_g] = (-i)^m \mathfrak{F}[D_x^m (-ix)^n f] = \mathfrak{F}[(-iD_x)^m (-ix)^n f].$$

Como  $(-i)^m D_x^m \{(-ix)^n f\} = (-i)^{n+m} D_x^m \{x^n f\}$  está em  $\mathfrak{L}$  (proposições 3.1 e 3.2), então  $\xi^m D_\xi^n \mathfrak{F}[f]$  é limitada, o que nos mostra que  $\mathfrak{F}[f]$  está em  $\mathfrak{L}$  como queríamos. ■

Diante das propriedades de  $\mathfrak{F}$  no espaço  $\mathfrak{L}$ , expostas nas proposições acima, para que possamos apresentar a Transformada Inversa de Fourier para funções neste espaço, cuja forma queremos que seja àquela enunciada no início deste capítulo, basta que justifiquemos a injetividade e a sobrejetividade de  $\mathfrak{F}$ , ou seja, devemos mostrar que dadas duas funções  $f_1$  e  $f_2$  de  $\mathfrak{L}$  com  $\mathfrak{F}[f_1] = \mathfrak{F}[f_2]$ , então se tem  $f_1 = f_2$ , ou equivalentemente usando

a linearidade de  $\mathfrak{F}$ , mostremos que  $\mathfrak{F}[f] = 0 \implies f = 0$ . Além disso, dada  $\mathcal{F}(\xi)$  em  $\mathfrak{L}$ , provemos que existe  $f(x)$  em  $\mathfrak{L}$  tal que  $\mathfrak{F}[f] = \mathcal{F}$ . Faremos isto usando o seguinte teorema, o qual demonstraremos logo após verificarmos a injetividade e sobrejetividade de  $\mathfrak{F}$ .

**Teorema 3.2.** (*Transformada Inversa de Fourier*) *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função de  $\mathfrak{L}$ , e  $\mathcal{F}(\xi)$  sua Transformada de Fourier, então*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \mathcal{F}(\xi) d\xi. \quad (3.12)$$

A justificativa da injetividade e sobrejetividade de  $\mathfrak{F}$ , pode ser enunciada da seguinte forma.

**Lema 3.2.**  $\mathfrak{F} : \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}$  *é um operador linear injetivo e sobrejetivo, isto é,  $\mathfrak{F}[f] = 0 \implies f = 0$  e  $\mathfrak{F}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}$ , respectivamente.*

**Demonstração:** Induzidos pela expressão (3.12), definimos um operador linear de  $\mathfrak{L}$  em  $\mathfrak{L}$ , que denotaremos por  $\overline{\mathfrak{F}}$ , dado por

$$\overline{\mathfrak{F}}[g](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} g(t) dt$$

que por definição tem características parecidas com as de  $\mathfrak{F}$ . Além disso, segue do teorema (3.2) que para  $f \in \mathfrak{L}$  vale

$$\overline{\mathfrak{F}}\{\mathfrak{F}[f]\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi s} \mathcal{F}(\xi) d\xi = f$$

o que resulta imediatamente na injetividade de  $\mathfrak{F}$ , pois  $\mathfrak{F}[f] = 0 \implies 0 = \overline{\mathfrak{F}}[0] = f$ . Agora dada uma função  $G(\xi) \in \mathfrak{L}$ , para mostrar que existe  $g(x) \in \mathfrak{L}$  tal que  $\mathfrak{F}[g(x)] = G(\xi)$ , definimos  $g(x) = \overline{\mathfrak{F}}[G(\xi)]$ . Daí

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[g(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} g(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\eta} G(\eta) d\eta dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-x)\xi} \mathfrak{F}[G]( -x) dx = G(\xi), \end{aligned}$$

onde fizemos  $\mathfrak{F}[G]( -x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(-x)\eta} G(\eta) d\eta$ , e para obter a última igualdade usamos (3.12), o que prova a sobrejetividade de  $\mathfrak{F}$  e podemos fazer  $\overline{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}^{-1}$ . ■

Na demonstração do teorema (3.2) usaremos o resultado abaixo, o qual apenas enunciaremos.

**Proposição 3.6.** (*o fubinizinho*<sup>5</sup>) Seja  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, tal que as integrais iteradas abaixo converjam

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy \quad e \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dy dx.$$

Então, as integrais iteradas da  $f$  convergem e vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx.$$

**Demonstração:** (teorema (3.2)) Substituindo

$$\mathfrak{F}[f](\xi) = \mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} f(y) dy$$

em (3.12), obtemos a expressão

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} f(y) dy d\xi. \quad (3.13)$$

Percebemos que apesar de (3.13) ser convergente, não podemos inverter a ordem de integração, visto que os integrandos envolvidos não satisfazem as condições da proposição (3.6), pois se assim procedêssemos, obteríamos a integral divergente

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\xi} d\xi.$$

Então, nosso objetivo será melhorar a integral, com relação a  $\xi$ , em (3.13), faremos isto definindo uma função  $f_n$ , ao introduzir em (3.13) a expressão  $e^{\frac{-\xi^2}{n^2}}$ , com  $n = 1, 2, \dots$ . Desse modo, temos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{\frac{-\xi^2}{n^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(y) dy d\xi \equiv f_n(x). \quad (3.14)$$

Agora, observe que  $f_n \in \mathfrak{L}$ , pois  $e^{\frac{-\xi^2}{n^2}} \mathfrak{F}[f] \in \mathfrak{L}$ . Além disso,  $f_n = \overline{\mathfrak{F}}\{e^{\frac{-\xi^2}{n^2}} \mathfrak{F}[f]\}$ . Então, fazendo  $f(y, \xi) = e^{i(x-y)\xi} e^{\frac{-\xi^2}{n^2}} f(y)$ , tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y, \xi)| dy = e^{\frac{-\xi^2}{n^2}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y, \xi)| d\xi = |f(y)| \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\xi^2}{n^2}} d\xi.$$

Então,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y, \xi)| dy d\xi < \infty \quad e \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y, \xi)| d\xi dy < \infty.$$

---

<sup>5</sup> Para ver a demonstração do fubinizinho, sugerimos a referência [3]. É importante acrescentar que no caso da integral de Lebesgue, este resultado é chamado Teorema de Fubine.

Logo, usando a proposição (3.6) e a fórmula de Euler, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 f_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)\xi} e^{\frac{-\xi^2}{n^2}} d\xi dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \cos[(x-y)\xi] e^{\frac{-\xi^2}{n^2}} d\xi + i \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}[(x-y)\xi] e^{\frac{-\xi^2}{n^2}} d\xi \right] dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[ 2 \int_0^{\infty} \cos[(x-y)\xi] e^{\frac{-\xi^2}{n^2}} d\xi \right] dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n\sqrt{\pi} e^{-(x-y)^2 \frac{n^2}{4}} f(y) dy,
 \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que a integral acima, que aparece multiplicada por  $i$ , converge para zero, pois o integrando é uma função ímpar de  $\xi$  e, para obtermos a última igualdade fizemos uso da identidade<sup>6</sup>

$$2 \int_0^{\infty} \cos[(x-y)\xi] e^{\frac{-\xi^2}{n^2}} d\xi = n\sqrt{\pi} e^{-(x-y)^2 \frac{n^2}{4}} \quad (\star).$$

Portanto,

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} n\sqrt{\pi} e^{-(x-y)^2 \frac{n^2}{4}} f(y) dy.$$

Daí, fazendo

$$k_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} n e^{-x^2 \frac{n^2}{4}},$$

obtemos uma integral de convolução

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k_n(x-y) f(y) dy.$$

Agora, para que possamos aplicar o teorema (2.8), devemos mostrar que  $k_n$  é uma sucessão de núcleos de Dirac. Para tanto, basta observar que tomando  $k(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$ , temos

$$k_n(x) = nk(nx),$$

onde  $k(x)$ <sup>7</sup> é contínua, positiva, e mais uma vez usando aplicação da proposição (3.6), mencionada acima, podemos mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x) dx = 1.$$

Logo, segue do teorema (2.8) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x). \quad (3.15)$$

<sup>6</sup>( $\star$ ) é uma aplicação da proposição (3.6) e está demonstrada na referência [3].

<sup>7</sup>Na teoria das Probabilidades, a função  $k(x)$  é chamada de função de Gauss, conhecida como a densidade da distribuição normal.

Por outro lado, voltando a expressão (3.14), observamos que a mesma pode também ser expressa da seguinte forma

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-\frac{\xi^2}{n^2}} \mathcal{F}(\xi) d\xi.$$

Então, se mostrarmos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-\frac{\xi^2}{n^2}} \mathcal{F}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \mathcal{F}(\xi) d\xi,$$

aliado ao limite em (3.15) teremos a demonstração do teorema. Mas, demonstrar tal fato é equivalente a mostrar que dado  $\epsilon > 0$ , para  $n$  suficientemente grande, se tem

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-\frac{\xi^2}{n^2}} \mathcal{F}(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \mathcal{F}(\xi) d\xi \right| < \epsilon,$$

ou ainda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} (1 - e^{-\frac{\xi^2}{n^2}}) \mathcal{F}(\xi) d\xi = 0, \quad (3.16)$$

como  $0 < e^{-\frac{\xi^2}{n^2}} < 1$ ,  $\forall \xi \neq 0$  e  $n = 1, 2, \dots$ . Então, desde que  $\mathcal{F} \in \mathfrak{L}$ , dado  $\epsilon > 0$ , podemos tomar  $\xi_0$  tal que

$$\int_{|\xi| > \xi_0} |\mathcal{F}(\xi)| d\xi < \frac{\epsilon}{4}.$$

Agora, seja  $M = \max |\mathcal{F}(\xi)|$  e, fixado  $\xi_0$  acima, tomemos  $n_0$  tal que, para  $|\xi| \leq \xi_0$  e  $n \geq n_0$  vale  $(1 - e^{-\frac{\xi^2}{n^2}}) < \frac{\epsilon}{4M\xi_0}$ . Portanto a expressão

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} (1 - e^{-\frac{\xi^2}{n^2}}) \mathcal{F}(\xi) d\xi,$$

é majorada por

$$\begin{aligned} & \int_{|\xi| > \xi_0} (1 - e^{-\frac{\xi^2}{n^2}}) |\mathcal{F}(\xi)| d\xi + \int_{-\xi_0}^{\xi_0} (1 - e^{-\frac{\xi^2}{n^2}}) |\mathcal{F}(\xi)| d\xi \\ & \leq 2 \int_{|\xi| > \xi_0} |\mathcal{F}(\xi)| d\xi + \frac{\epsilon}{4M\xi_0} M 2\xi_0 < \epsilon. \end{aligned}$$

■

### 3.3 Transformada de Laplace

Nesta seção estudaremos a definição e as propriedades de uma integral conhecida como a Transformada de Laplace, que como já mencionado, assim como a Transformada de Fourier, tem a característica de em determinadas situações, quando aplicada a uma Equação Diferencial a transforma em uma equação algébrica.

**Definição 3.3.** Se uma função  $f(x)$  estiver definida para todo  $x \geq 0$ , então a integral imprópria

$$\int_0^{\infty} k(s, x) f(x) dx$$

é definida por um limite

$$\int_0^{\infty} k(s, x) f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b k(s, x) f(x) dx.$$

Se o limite existe, dizemos que a integral existe ou converge. Se o limite não existe, dizemos que a integral não existe ou diverge. O limite em questão existirá somente para certos valores de  $s$ . Daí, fazendo a escolha  $k(s, x) = e^{-sx}$  obtemos uma transformada integral extremamente importante.

Uma definição mais formal da Transformada de Laplace pode ser expressa da seguinte maneira

**Definição 3.4. (Transformada de Laplace)** Seja  $f$  uma função definida para  $x \geq 0$ . Então, a integral

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = F(s) \quad (3.17)$$

é chamada de **Transformada de Laplace** de  $f$ , desde que a integral acima convirja.

Denotando por  $\mathcal{L}$  a Transformada de Laplace. Segue imediatamente da definição que  $\mathcal{L}$  é um operador linear, isto é,

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx + \beta \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) dx,$$

quando ambas as integrais convergem segue-se que

$$\mathcal{L}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(x)\} + \beta \mathcal{L}\{g(x)\} = \alpha F(s) + \beta G(s).$$

Mas, sob quais condições a Transformada de Laplace estará bem definida? Por exemplo, pode-se provar que  $\mathcal{L}\{\frac{1}{x}\}$  e  $\mathcal{L}\{e^{x^2}\}$  não existem. Isto porque a integral que define  $\mathcal{L}$  nem sempre converge. Para que  $\mathcal{L}$  esteja bem definida é necessário que a função  $f$  cumpra certas condições. Certamente se  $f$  é seccionalmente contínua em  $[0, \infty)$  e é de ordem exponencial, ou seja, existem números  $c$ ,  $M > 0$  e  $T > 0$  tais que  $|f(x)| \leq Me^{cx}$  para todo  $x > T$ , então  $\mathcal{L}$  existe. Isto é o que nos afirma o teorema seguinte.

**Teorema 3.3. (Condições de Existência da Transformada  $\mathcal{L}$ )** Seja  $f(x)$  uma função seccionalmente contínua no intervalo  $[0, \infty)$  e de ordem exponencial para  $x > T$ . Então, sua Transformada de Laplace existe para todo  $s > c$ .



**Demonstração:** Temos que

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^T e^{-sx} f(x) dx + \int_T^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = I_1 + I_2.$$

Afirmamos que  $I_1$  existe, pois a mesma pode ser escrita como somas de integrais em intervalos nos quais a função  $e^{-sx} f(x)$  é contínua. Agora, usando a hipótese de que  $f(x)$  é de ordem exponencial, existem  $c, M > 0$  tais que para  $s > c$  vale

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_T^{\infty} |e^{-sx} f(x)| dx \leq M \int_T^{\infty} e^{-sx} e^{cx} dx = M \int_T^{\infty} e^{-(s-c)x} dx \\ &= -M \frac{e^{-(s-c)x}}{s-c} \Big|_T^{\infty} = M \frac{e^{-(s-c)T}}{s-c}. \end{aligned}$$

Logo, a integral  $I_2$  converge para todo  $s > c$ , donde segue o resultado. ■

**Exemplo 3.2.** Calculemos o valor de  $\mathcal{L}\{x^n\}$ , com  $x \geq 0$  e  $n = 1, 2, \dots$

**Resolução:** Usando a definição de  $\mathcal{L}$  e aplicando integração por partes, tem-se

$$\mathcal{L}\{x^n\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} x^n dx = -\frac{1}{s} e^{-sx} x^n \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{n-1} dx = \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{n-1} dx,$$

ou ainda

$$\mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{x^{n-1}\}.$$

Por outro lado, usando a definição da transformada, é simples a verificação que para  $s > 0$ , tem-se  $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ . Além disso, por integração podemos ver que

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s^2} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{x^2\} = \frac{2}{s} \mathcal{L}\{x\} = \frac{2!}{s^3}.$$

Usando indução, suponhamos que vale  $\mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$  e, mostremos que tal resultado é válido também para  $n + 1$ . Com efeito

$$\mathcal{L}\{x^{n+1}\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{n+1} dx = -\frac{1}{s} e^{-sx} x^{n+1} \Big|_0^{\infty} + \frac{n+1}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} x^n dx = \frac{n+1}{s} \mathcal{L}\{x^n\}.$$

Assim, usando a hipótese de indução, vem

$$\mathcal{L}\{x^{n+1}\} = \frac{n+1}{s} \mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n+1}{s} \left( \frac{n!}{s^{n+1}} \right) = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}.$$

**Exemplo 3.3.** Vejamos para quais valores de  $s$  existe  $\mathcal{L}\{e^{\alpha x}\}$ .

**Resolução:** Usando a definição de  $\mathcal{L}$  e integrando, obtemos

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha x}\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{\alpha x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)x} dx = -\frac{e^{-(s-\alpha)x}}{(s-\alpha)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-\alpha},$$

Para  $s > \alpha$ . Daí,

$$\mathcal{L}\{e^{iwx}\} = \frac{1}{s - iw} = \frac{s + iw}{(s - iw)(s + iw)} = \frac{s + iw}{s^2 + w^2} = \frac{s}{s^2 + w^2} + i\frac{w}{s^2 + w^2}. \quad (3.18)$$

Por outro lado,  $e^{iwx} = \cos wx + i\sin wx$ , usando a linearidade de  $\mathcal{L}$ , tem-se

$$\mathcal{L}\{e^{iwx}\} = \mathcal{L}\{\cos wx\} + i\mathcal{L}\{\sin wx\}. \quad (3.19)$$

Logo, comparando as partes reais e imaginárias de (3.18) e (3.19), obtemos

$$\mathcal{L}\{\cos wx\} = \frac{s}{s^2 + w^2}, \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{\sin wx\} = \frac{w}{s^2 + w^2}, \quad s > 0.$$

### 3.3.1 Transformada de Laplace Inversa

Percebemos nos exemplos acima que  $\mathcal{L}$  transforma uma função  $f(x)$  em uma função  $F(s)$ , isto é, simbolicamente, por meio de uma integral fizemos  $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ . Contudo, nas aplicações é interessante que também se possa fazer o processo contrário, ou seja, dada uma função  $F(s)$ , objetiva-se encontrar uma função  $f(x)$  cuja transformada é  $F(s)$ . Quando isto é possível, dizemos  $f(x)$  é a Transformada de Laplace Inversa e denotaremos por  $\mathcal{L}^{-1}$ . Assim,  $f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ . Na verdade, utilizando variáveis complexas, pode-se mostrar que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{sx} F(s) ds = f(x). \quad (3.20)$$

Onde a integral (3.20) é conhecida como **integral de contorno**. Segue das propriedades da integral que  $\mathcal{L}^{-1}$  também é uma transformada linear. É importante salientar que, como afirma Zill (2001), a Transformada de Laplace Inversa pode não ser única. Porém, para o nosso objetivo isso não trará prejuízos, pois se  $f_1$  e  $f_2$  são seccionalmente contínuas e de ordem exponencial, e se  $\mathcal{L}\{f_1\} = \mathcal{L}\{f_2\}$ , é possível mostrar que  $f_1$  e  $f_2$  são essencialmente idênticas, exceto nos pontos de descontinuidades.

Os próximos resultados nos dão informações importantes sobre algumas propriedades de  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{L}^{-1}$ .

**Teorema 3.4.** (*Comportamento de  $F(s)$  quando  $s \rightarrow \infty$* ) *Seja  $f(x)$  seccionalmente contínua em  $[0, \infty)$  e de ordem exponencial para  $x > T$ , então*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1}\{f(x)\} = 0.$$

**Demonstração:** Sendo  $f(x)$  seccionalmente contínua em  $0 \leq x \leq T$ , segue-se que ela é limitada nesse intervalo, daí existe  $M_1 > 0$  tal que

$$|f(x)| \leq M_1 = M_1 e^0,$$

ou ainda,

$$|f(x)| \leq M_2 e^{\gamma x},$$

para  $x > T$ . Seja  $M = \max\{M_1, M_2\}$  e  $c = \max\{0, \gamma\}$ , então para  $s > c$

$$|\mathcal{L}\{f(x)\}| \leq \int_0^\infty e^{-sx} |f(x)| dx \leq M \int_0^\infty e^{-sx} e^{cx} dx = -M \frac{e^{-(s-c)x}}{s-c} \Big|_0^\infty = \frac{M}{s-c}.$$

Como  $s \rightarrow \infty$ , temos que  $|\mathcal{L}\{f(x)\}| \rightarrow 0$ , logo  $\mathcal{L}\{f(x)\} \rightarrow 0$ . ■

Veremos agora, dois resultado que dizem respeito a derivada da transformada e a transformada da derivada.

Seja a função  $f$  tal que vale  $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ , então usando a definição de  $\mathcal{L}$ , e desde que possamos derivar sob o sinal de integração, temos

$$\frac{d}{ds} F(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} [e^{-sx} f(x)] dx = - \int_0^\infty e^{-sx} x \cdot f(x) dx = -\mathcal{L}\{x \cdot f(x)\}.$$

Logo,  $\mathcal{L}\{x \cdot f(x)\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(x)\}$ .

Usando este resultado e procedendo de forma análoga, temos que

$$\mathcal{L}\{x^2 f(x)\} = \mathcal{L}\{x[x \cdot f(x)]\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{x \cdot f(x)\} = -\frac{d}{ds} \left( -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(x)\} \right) = \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}\{f(x)\}.$$

Tais resultados nos induz apresentar o teorema abaixo, cuja demonstração para o caso geral será omitida.

**Teorema 3.5. (Derivada de Transformadas)** *Seja a função  $f$  tal que  $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , tem-se*

$$\mathcal{L}\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

**Teorema 3.6. (Transformada de uma Derivada)** *Se  $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$  são contínuas no intervalo  $[0, \infty)$ , de ordem exponencial, e se  $f^n(x)$  for seccionalmente contínua neste intervalo, então*

$$\mathcal{L}\{f^n(x)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

em que  $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ .

**Demonstração:** Provaremos apenas para os casos  $n = 1, 2$ . Então, usando integração por partes, desde que  $e^{-sx}f(x) \rightarrow 0$ , quando  $x \rightarrow \infty$ , tem-se

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx}f'(x)dx = e^{-sx}f(x)\Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-sx}f(x)dx = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(x)\}.$$

De forma análoga para  $f''(x)$ , com  $e^{-sx}f'(x) \rightarrow 0$ , quando  $x \rightarrow \infty$  temos

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx}f''(x)dx = e^{-sx}f'(x)\Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-sx}f'(x)dx = -f'(0) + s\mathcal{L}\{f'(t)\}.$$

Assim, usando a primeira parte, vem

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

■

Vemos no teorema (3.6) uma característica comum a Transformada de Laplace e a Transformada de Fourier, qual seja, a de transformar uma Equação Diferencial em uma equação algébrica. Em especial,  $\mathcal{L}$  tem a propriedade de que quando aplicada a uma Equação Diferencial linear de ordem  $n$ , com coeficientes constantes, envolvendo condições iniciais  $f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$ , a transforma em uma equação algébrica. E se  $f$  for uma função periódica, será que podemos obter a sua Transformada de Laplace? a resposta vem no seguinte teorema.

**Teorema 3.7. (Transformada de uma Função Periódica).** *Considere a função  $f$  seccionalmente contínua no intervalo  $[0, \infty)$  e de ordem exponencial. Se  $f$  for periódica de período  $P$ , tem-se*

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{1}{1 - e^{-sP}} \int_0^P e^{-sx}f(x)dx. \quad (3.21)$$

**Demonstração:** Sendo  $f$  periódica de período  $P$ , vamos decompor a Transformada de Laplace em duas integrais da seguinte maneira

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^P e^{-sx}f(x)dx + \int_P^{\infty} e^{-sx}f(x)dx.$$

Fazendo  $x = u + P$ , na última integral, observando os limites de integração e a periodicidade em  $f$ , segue-se que

$$\int_P^{\infty} e^{-sx}f(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-s(u+P)}f(u+P)du = e^{-sP} \int_0^{\infty} e^{-su}f(u)du = e^{-sP}\mathcal{L}\{f(x)\}.$$

Assim, temos

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^P e^{-sx}f(x)dx + e^{-sP}\mathcal{L}\{f(x)\}.$$

Por fim, para  $s, P \neq 0$

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{1}{1 - e^{-sP}} \int_0^P e^{-sx} f(x) dx.$$

■

### 3.4 Algumas Conexões e Diferenças de $\mathfrak{F}$ e $\mathcal{L}$

Veremos nesta seção, algumas semelhanças e diferenças entre  $\mathfrak{F}$  e  $\mathcal{L}$ , em determinadas situações. E iniciaremos com o produto convolução.

**Teorema 3.8.** *Se  $f$  e  $g$  são funções  $L^1$  com  $f$  contínua e limitada em  $\mathbb{R}$ , então*

$$\mathfrak{F}[f * g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F}[f] \mathfrak{F}[g].$$

**Demonstração:** Por definição, temos que

$$\mathfrak{F}[f] = \mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi u} f(u) du, \quad \mathfrak{F}[g] = G(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi v} g(v) dv.$$

Então

$$\mathcal{F}(\xi)G(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(u+v)} f(u)g(v) dudv. \quad (3.22)$$

A ideia é mudar das variáveis  $(u, v)$ , para as variáveis  $(u, x)$ . Assim, fazemos  $u + v = x$ .

Daí

$$dudv = \frac{\partial(u, v)}{\partial(u, x)} dudx,$$

onde o jacobiano da transformação é dado por

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u, x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Então, podemos escrever (3.22) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[f] \mathfrak{F}[g] = \mathcal{F}(\xi)G(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(u)g(x-u) dudx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u) du \right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u) dx \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{F}[f * g]. \end{aligned}$$

■

Com relação a Transformada de Laplace, como definimos  $\mathcal{L}$  no intervalo  $[0, \infty)$ , abordaremos o produto convolução de duas funções  $f$  e  $g$ , seccionalmente contínuas e de ordem exponencial, também neste intervalo, isto é,  $f * g = \int_0^\infty f(\tau)g(x - \tau)d\tau$ .

**Teorema 3.9.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções seccionalmente contínuas no intervalo  $[0, \infty)$  e de ordem exponencial, tem-se*

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f(x)\}\mathcal{L}\{g(x)\} = F(s)G(s).$$

**Demonstração:** Sejam

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{g(x)\} = G(s) = \int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta)d\beta.$$

Daí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(x)\}\mathcal{L}\{g(x)\} = F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta)d\beta \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} f(\tau)g(\beta)d\tau d\beta \\ &= \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)} g(\beta)d\beta. \end{aligned}$$

Fixando  $\tau$  e fazendo  $x = \tau + \beta$ ,  $dx = d\beta$ , temos

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-sx} g(x - \tau)dx.$$

No plano  $x\tau$ , sendo  $f$  e  $g$  funções seccionalmente contínuas no intervalo  $[0, \infty)$  e de ordem exponencial, assim, podemos inverter a ordem de integração. O que nos fornece

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} dx \int_0^\infty f(\tau)g(x - \tau)d\tau \\ &= \int_0^\infty e^{-sx} \left\{ \int_0^\infty f(\tau)g(x - \tau)d\tau \right\} dx \\ &= \mathcal{L}\{f * g\}. \end{aligned}$$

■

Vale observar que quando  $g(x) = 1$  e  $G(s) = \frac{1}{s}$ , o teorema (3.9) implica que a Transformada de Laplace da integral de uma função  $f$  é

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^\infty f(\tau)d\tau \right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

A integral que define  $\mathcal{L}$  poderia ter sido apresentada num contexto mais geral, ou seja, poderíamos ter definido  $\mathcal{L}$  no intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Neste intervalo, segundo Hsu

(2012), em alguns textos da literatura,  $\mathcal{L}$  é chamada de Transformada de Laplace bilateral. A definição que expomos anteriormente se justifica no sentido que é comum nas aplicações considerar  $f(x) = 0$  para  $x < 0$ , o que culmina na transformada unilateral que apresentamos. Consideremos então, a função  $f$  seccionalmente contínua e tal que  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ , e

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x)dx. \quad (3.23)$$

Além disso, sabemos que sua Transformada de Fourier, desde que exista, é

$$\mathfrak{F}[f] = \mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx. \quad (3.24)$$

Por outro lado, é importante salientar que a constante  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  que aparece multiplicando a integral da Transformada de Fourier, pode ser substituída por 1, desde que a constante que multiplica a integral da transformada inversa passe a ser  $\frac{1}{2\pi}$ . Em geral, como observa Spiegel (1977), o importante é que o produto das constantes das integrais, de  $\mathfrak{F}$  e de  $\mathfrak{F}^{-1}$ , seja  $\frac{1}{2\pi}$ . Desse modo, para o propósito seguinte, consideremos

$$\mathfrak{F}[f] = \mathcal{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx \quad \text{e} \quad \mathfrak{F}^{-1}[\mathcal{F}(\xi)] = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \mathcal{F}(\xi) f\xi.$$

Assim, observamos que  $\mathfrak{F}$  é um caso especial de  $\mathcal{L}$ , quando  $s = i\xi$ . Entretanto se, porém, fizermos  $s = \sigma + i\xi$ , onde  $\sigma$  é um número real positivo, em (3.23), teremos

$$F(s) = F(\sigma + i\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma+i\xi)x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} [e^{-\sigma x} f(x)]dx = \mathfrak{F}[e^{-\sigma x} f(x)].$$

Isto nos mostra que a Transformada de Laplace bilateral da função  $f(x)$ , pode ser interpretada como sendo a Transformada de Fourier da função  $h(x) = e^{-\sigma x} f(x)$ . Agora, aplicando a Transformada de Fourier inversa, obtemos

$$e^{-\sigma x} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} F(\sigma + i\xi) d\xi,$$

que multiplicada por  $e^{\sigma x}$ , nos permite escrever

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x} e^{i\xi x} F(\sigma + i\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+i\xi)x} F(\sigma + i\xi) d\xi,$$

se  $s = \sigma + i\xi$ , então  $d\xi = \frac{ds}{i}$ , resultando em

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} F(s) ds.$$

Embora ideia da existência de conexão entre as transformadas de Fourier e Laplace, seja bem intuitiva, até pela semelhança nas definições das mesmas, elas não são equivalentes. Na realidade, como menciona Hsu (2012),  $\mathcal{L}$  (bilateral) pode ser considerada como uma generalização de  $\mathfrak{F}$ , na qual a frequência  $i\xi$  foi generalizada para  $s = \sigma + i\xi$ . Por outro lado, não é verdade que dada uma função  $f$  e sua Transformada de Fourier  $\mathfrak{F}[f]$ , a simples substituição de  $i\xi$  por  $s$ , faz com que tenhamos a Transformada de Laplace de  $f$ , ou seja,  $\mathcal{L}\{f\}$ . Tal fato está intimamente ligado as propriedades de  $f$ . Por exemplo, se  $f$  não for absolutamente integrável, pode haver disparidade entre  $\mathfrak{F}[f]$  e  $\mathcal{L}\{f\}$ .

Consideremos a seguinte função

**Exemplo 3.4. (Função de Heaviside)** *Seja a função  $\mathcal{U}(x - a)$  (também chamada de função degrau unitário), definida por*

$$\mathcal{U}(x - a) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x > a \end{cases}, \quad a \geq 0.$$

Observe que a função não está definida para  $x = a$ . E se quisermos definir um valor para  $\mathcal{U}(0)$ , ou seja,  $\mathcal{U}(a - a)$ ? Qual seria uma escolha adequada para  $\mathcal{U}(0)$ ? Esta questão foi avaliada por Tonidandel (2012). Vamos analisar esta possibilidade definindo a seguinte função

$$\mathfrak{U}(x - a) = \begin{cases} 0, & x < a \\ k, & x = a. \\ 1, & x > a \end{cases}$$

Onde o valor de  $k$ , pretendemos determinar através da Transformada de Fourier. Certamente para qualquer escolha de  $k$  temos uma descontinuidade em  $x = a$ . Além disso, como verifica o autor acima citado, apesar de não existir a Transformada de Fourier desta função, ao introduzir um fator multiplicativo conveniente a ela, chamado fator de convergência, podemos obter uma conexão entre as transformadas de Fourier e Laplace. Vejamos.

Calculemos inicialmente a sua Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{\mathfrak{U}(x - a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} \mathfrak{U}(x - a) dx = \int_a^{\infty} e^{-sx} dx = \frac{e^{-sx}}{-s} \Big|_a^{\infty} = \frac{e^{-sa}}{s}, \quad \text{para } s > 0.$$

Por outro lado se tentarmos calcular a sua Transformada de Fourier, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \mathfrak{U}(x - a) dx = \int_a^{\infty} e^{-i\xi x} dx = \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \Big|_a^{\infty} = \frac{\cos \xi x - i \operatorname{sen} \xi x}{-i\xi} \Big|_a^{\infty} ?$$



Observe que esta integral não converge, visto que quando  $x \rightarrow \infty$  as funções seno e cosseno oscilam infinitamente entre  $-1$  e  $1$ . Por outro lado, se multiplicarmos a função  $\mathfrak{U}(x - a)$  pela expressão  $e^{-\alpha x}$ , com  $\alpha > 0$ . Como  $e^{-i\xi x}$  é limitada e  $e^{-\alpha x} \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \infty$ , temos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} e^{-i\xi x} = 0$ . Assim

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[e^{-\alpha x} \mathfrak{U}(x - a)] = \mathcal{F}(\xi) &= \int_a^\infty e^{-i\xi x} e^{-\alpha x} dx = \int_a^\infty e^{-(\alpha + i\xi)x} dx \\ &= \frac{-e^{-(\alpha + i\xi)x}}{(\alpha + i\xi)} \Big|_a^\infty = \frac{e^{-(\alpha + i\xi)a}}{(\alpha + i\xi)}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Agora que conseguimos uma integral convergente, com o objetivo de determinar o valor adequado para  $k$ , ou mais especificamente, o valor da função  $\mathfrak{U}(x - a)$  em  $x = a$ , vamos aplicar a transformada inversa. Porém, será que não estamos trabalhando em vão, isto é, não podemos atribuir um valor qualquer a  $k$ ? De acordo com Tonidandel (2012), não parece ser uma boa ideia, pois isso significaria que  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha x} \mathfrak{U}(x - a) = \mathfrak{U}(x - a)$ , o que implicaria  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{-\alpha a} e^{-i\xi a}}{(\alpha + i\xi)} = \frac{e^{-i\xi a}}{i\xi}$  e por conseguinte, teríamos o par  $\mathfrak{U}(x - a) \leftrightarrow \frac{e^{-i\xi a}}{i\xi}$ , em que por exemplo, para  $a = 0$  parece indicar um problema, já que a Transformada de Fourier teria apenas a parte complexa. Agora, aplicando a Transformada de Fourier Inversa, tem-se

$$\mathfrak{F}^{-1}[\mathcal{F}(\xi)] = e^{-\alpha x} \mathfrak{U}(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\alpha + i\xi)a}}{(\alpha + i\xi)} e^{i\xi x} d\xi.$$

Para  $x = a$ ,

$$e^{-\alpha a} \mathfrak{U}(a - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\alpha + i\xi)a}}{(\alpha + i\xi)} e^{i\xi a} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha a} e^{-i\xi a} e^{i\xi a}}{(\alpha + i\xi)} d\xi.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + i\xi)} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + i\xi)} \left( \frac{\alpha - i\xi}{\alpha - i\xi} \right) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha - i\xi}{(\alpha^2 + \xi^2)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \xi^2)} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\xi}{(\alpha^2 + \xi^2)} d\xi. \end{aligned}$$

A segunda integral da última igualdade converge para zero, pois o integrando é ímpar. Já na primeira fazendo  $\alpha\xi = x$  e  $\alpha d\xi = dx$ , obtemos

$$\mathfrak{U}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha^2}{\alpha^2(1 + x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \arctan x \Big|_0^\infty = \frac{1}{2}.$$

Logo, a Transformada de Fourier nos sugere a escolha  $k = \frac{1}{2}$ , que está em conformidade com o fato de que nos pontos de descontinuidade a série de Fourier converge para a média

aritmética dos limites laterais. Por outro lado, a substituição  $s = \alpha + i\xi$  em (3.25), nos fornece uma conexão entre as transformadas de Fourier e Laplace, visto que se tem  $\mathfrak{F}[e^{-\alpha x}\mathfrak{U}(x - a)] = \mathcal{L}\{\mathfrak{U}(x - a)\}$ .

Relembremos agora o exemplo (3.1), o qual calculamos a Transformada de Fourier da função pulso dada por

$$u_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < a \\ 0, & \text{se } |x| > a \end{cases} \quad \text{com } a > 0, \quad (3.26)$$

onde obtivemos

$$\mathfrak{F}[f](\xi) = \mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\text{sen}(a\xi)}{\xi}.$$

Estudando um pouco mais esta função, vamos usar a Transformada de Laplace unilateral, e as proposições<sup>8</sup>

**Proposição 3.7.** *Se  $f : I \times [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  for uma função contínua e a integral  $\int_a^\infty f(x, y)dy$  converge uniformemente em  $I$ , então a função  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\psi(x) = \int_a^\infty f(x, y)dy$  é contínua.*

**Proposição 3.8.** *Seja  $f : I \times [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, possuindo derivada parcial  $f_x : I \times [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  também contínua. Suponha que a integral  $\int_a^\infty f(x, y)dy$  converge (não necessariamente uniformemente) e que  $\int_a^\infty f_x(x, y)dy$  converge uniformemente em  $I$ . Então,  $\psi$  é derivável em todo ponto de  $I$  e vale  $\psi'(x) = \int_a^\infty f_x(x, y)dy$ ,*

para provar que

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}\xi}{\xi} d\xi = \frac{\pi}{2}. \quad (3.27)$$

**Demonstração:** Para provar (3.27), começamos definindo, para  $s \geq 0$ , a função

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} \frac{\text{sen}\xi}{\xi} d\xi. \quad (3.28)$$

Mostraremos inicialmente que a integral em (3.28) converge uniformemente  $\forall s \geq 0$ , e faremos isto usando integração por partes. Assim, para  $\eta > 0$ , fazendo  $u = \frac{e^{-s\xi}}{\xi}$  e  $dv = \text{sen}\xi d\xi$ , temos

$$\int_\eta^\infty e^{-s\xi} \frac{\text{sen}\xi}{\xi} d\xi = \frac{-e^{-s\xi}}{\xi} \cos \xi \Big|_\eta^\infty - \int_\eta^\infty \frac{(1 + s\xi)e^{-s\xi}}{\xi^2} \cos \xi d\xi,$$

<sup>8</sup>A demonstração das proposições (3.7) e (3.8) podem ser encontradas na referência [3].

ou seja,

$$\int_{\eta}^{\infty} e^{-s\xi} \frac{\text{sen}\xi}{\xi} d\xi = \frac{e^{-s\eta}}{\eta} \cos \eta - \int_{\eta}^{\infty} \frac{(1+s\xi)e^{-s\xi}}{\xi^2} \cos \xi d\xi.$$

Além disso,  $|(1+s\xi)e^{-s\xi} \cos \xi| \leq e^{s\xi} e^{-s\xi} |\cos \xi| \leq 1$ . Então, segue-se que para todo  $s \geq 0$

$$\left| \int_{\eta}^{\infty} e^{-s\xi} \frac{\text{sen}\xi}{\xi} d\xi \right| \leq \frac{1}{\eta} + \int_{\eta}^{\infty} \frac{1}{\xi^2} d\xi = \frac{2}{\eta}, \quad (3.29)$$

donde tem-se a convergência uniforme da integral que define  $F(s)$ . Logo, pela proposição (3.7) temos que  $F(s)$  é contínua em todo  $s \geq 0$ . Como a integral

$$\int_0^{\infty} e^{-s\xi} \text{sen}\xi d\xi,$$

converge uniformemente em cada intervalo da forma  $[\eta, \infty)$ , onde  $\eta > 0$ . Usando agora a proposição (3.8) para derivar dentro do sinal de integral, tem-se

$$F'(s) = - \int_0^{\infty} e^{-s\xi} \text{sen}\xi d\xi, \quad (3.30)$$

que é a Transformada de Laplace da função  $-\text{sen}\xi$  e, como vimos no exemplo (3.3), é convergente para todo  $s > 0$ , e é dada por

$$\mathcal{L}\{-\text{sen}\xi\} = F'(s) = -\frac{1}{1+s^2}.$$

Integrando em ambos os lados da última igualdade, obtemos

$$F(s) = -\arctan s + C, \quad s > 0.$$

Além disso, verifica-se que

$$0 \leq |F(s)| \leq \int_0^{\infty} e^{-s\xi} d\xi = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Assim, usando tal resultado e tomando o limite quando  $s \rightarrow \infty$ , temos que  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ , ou seja,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = - \lim_{s \rightarrow \infty} \arctan s + C = -\frac{\pi}{2} + C = 0 \implies C = \frac{\pi}{2}.$$

Daí,

$$F(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s, \quad s > 0.$$

Por fim, como as funções  $F$  e  $\arctan$  são contínuas em todos os pontos  $s \geq 0$ , obtemos

$$F(0) = \int_0^{\infty} e^{0\xi} \frac{\text{sen}\xi}{\xi} d\xi = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}\xi}{\xi} d\xi = \frac{\pi}{2} - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}.$$

■

### 3.5 Algumas Aplicações da Série de Fourier de $\mathfrak{F}$ e $\mathcal{L}$

Para finalizar este trabalho, veremos alguns exemplos de como a Transformada de Laplace, a série e a Transformada Fourier, podem ser aplicadas na resolução de EDPs. Entretanto, o leitor interessado pode encontrar várias aplicações de  $\mathcal{L}$ ,  $\mathfrak{F}$  e da série de Fourier, em um contexto bem mais amplo, nas referências [2], [3], [8] e [11], de onde, aliás, foram extraídos os exemplos deste texto.

Definindo como

$$\mathcal{L}\{u(x, t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt = U(x, s),$$

a Transformada de Laplace de uma função de duas variáveis  $u(x, t)$ , em relação a variável  $t$ , onde estamos tratando  $x$  como um parâmetro, e admitindo que as propriedades vistas anteriormente se apliquem também a funções de duas variáveis. Por exemplo, para o caso da derivada parcial

$$\mathcal{L}\{u_t\} = s\mathcal{L}\{u(x, t)\} - u(x, 0) = sU(x, s) - u(x, 0).$$

De forma análoga, obtemos

$$\mathcal{L}\{u_{tt}\} = s^2 U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0). \quad (3.31)$$

Por outro lado, como estamos fazendo a transformação com relação a  $t$ , admitiremos também que podemos permutar a diferenciação e a integração na transformada de  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . Assim

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [e^{-st} u(x, t)] dt \\ &= \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, t) dt = \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{L}\{u(x, t)\} = \frac{d^2 U}{dx^2}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

**Exemplo 3.5.** Vamos encontrar a Transformada de Laplace da **equação da onda**<sup>9</sup>

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad \text{com } t > 0.$$

**Resolução:** Temos

$$\mathcal{L}\{a^2 u_{xx}\} = \mathcal{L}\{u_{tt}\},$$

que por (3.31) e (3.32) podemos escrever

$$a^2 \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{L}\{u(x, t)\} = s^2 \mathcal{L}\{u(x, t)\} - su(x, 0) - u_t(x, 0),$$

---

<sup>9</sup>A dedução da equação da onda pode ser encontrada na referência [2].

ou ainda

$$a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - s^2 U = -su(x, 0) - u_t(x, 0). \quad (3.33)$$

Observe que considerando  $s$  como um parâmetro em (3.33), temos uma Equação Diferencial Ordinária<sup>10</sup> (EDO) na variável  $x$ .

Consideremos o seguinte exemplo

**Exemplo 3.6.** *Dada a equação*

$$u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

*Sujeita a*

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, & u(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u_t|_{t=0} = \text{sen}\pi x, \quad 0 < x < 1. \end{cases} \quad (3.34)$$

*Vamos tentar resolvê-la usando o que conhecemos sobre a Transformada de Laplace.*

**Resolução:** *Podemos observar que temos a equação da onda com  $a = 1$ . Assim, aplicando a transformada, usando (3.33) e as condições iniciais, tem-se*

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - s^2 U = -\text{sen}\pi x, \quad (3.35)$$

*onde  $U(x, s) = \mathcal{L}\{u(x, t)\}$ . Por outro lado, as condições de contorno são funções de  $t$ , então devemos calcular também as suas Transformadas de Laplace, o que implica em*

$$\mathcal{L}\{u(0, t)\} = U(0, s) = 0 \quad e \quad \mathcal{L}\{u(1, t)\} = U(1, s) = 0. \quad (3.36)$$

*Como a equação (3.35) está definida em um intervalo finito, a função complementar, que é solução da homogênea associada  $\frac{d^2 U}{dx^2} - s^2 U = 0$ , pode ser representada por*

$$U_c(x, s) = c_1 \cosh sx + c_2 \text{senh}sx.$$

*Além disso, pelo método dos coeficientes indeterminados, podemos obter uma solução particular para (3.35), dada por*

$$U_p(x, s) = \frac{1}{s^2 + \pi^2} \text{sen}\pi x.$$

*Portanto, juntando estas duas informações, obtemos*

$$U(x, s) = U_c(x, s) + U_p(x, s) = c_1 \cosh sx + c_2 \text{senh}sx + \frac{1}{s^2 + \pi^2} \text{sen}\pi x.$$

---

<sup>10</sup>Demonstrações detalhadas de como resolver Equações Diferenciais Ordinárias podem ser encontradas da referência [10].

Como os resultados obtidos em (3.36) são condições de contorno para a EDO em (3.35), substituindo  $U(0, s) = 0$ , e, em seguida  $U(1, s) = 0$ , na expressão acima, sabendo que  $\sinh 0 = 0$ , e  $\cosh 0 = 1$ , tem-se  $c_1 = c_2 = 0$ , o que implica em

$$U(x, s) = \frac{1}{s^2 + \pi^2} \operatorname{sen} \pi x.$$

Finalmente, aplicando a transformada inversa, lembrando que é em relação a  $t$ , vem

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \pi^2} \operatorname{sen} \pi x \right\} = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi x \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\pi}{s^2 + \pi^2} \right\} = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} \pi t.$$

Usaremos agora o **método de Fourier**, e começamos com a série de Fourier, a partir das seguintes considerações.

Suponhamos que uma haste circular delgada, de comprimento  $L$ , tenha área  $A$  de seção transversa e coincida com o eixo dos  $x$  no intervalo  $[0, L]$ . Suponhamos ainda que: o fluxo de calor dentro da haste se verifique apenas na direção dos  $x$ ; a superfície lateral, ou curva, da haste é isolada, isto é, nenhum calor escapa dessa superfície; nenhum calor é gerado dentro da haste; a haste é homogênea, ou seja, sua massa por unidade de volume  $\rho$  é constante; o calor específico  $\gamma$  e a condutividade térmica  $k$  do material da haste são constantes. É possível mostrar que a temperatura na haste é governada por uma Equação Diferencial Parcial (**equação do calor**<sup>11</sup>) que tem a forma

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad \text{e} \quad \alpha^2 = \frac{k}{\gamma \rho}.$$

**Exemplo 3.7.** Consideremos uma barra de seção reta uniforme, feita com material homogêneo, comprimento  $L$  e temperatura inicial  $f(x)$  em toda ela e com as extremidades mantidas à temperatura zero para todo tempo  $t > 0$ . Se tal barra satisfaz as condições expostas acima, então a temperatura  $u(x, t)$  na barra é determinada pela equação

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (3.37)$$

Sujeita as condições

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, & u(L, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L. \end{cases} \quad (3.38)$$

**Resolução:** Vamos usar o método de separação de variáveis<sup>12</sup>, ou seja, procuremos uma solução na forma  $XT$ , onde  $X$  é função apenas de  $x$ , e,  $T$  é função apenas de  $t$ , isto é,

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

<sup>11</sup>A dedução da equação do calor pode ser encontrada na referência [2].

<sup>12</sup>Para ver o método de separação de variáveis recomendamos referência [10].

Assim, derivando e substituindo em (3.37), obtemos

$$\alpha^2 X''(x)T(t) = X(x)T'(t).$$

Ou ainda, desde que os denominadores não sejam nulos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)}.$$

O primeiro membro, depende apenas de  $x$ , enquanto o segundo depende apenas de  $t$ , mas isto só é possível se eles forem iguais a um parâmetro  $\beta$ , independente de  $x$  e de  $t$ , ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \beta.$$

Desta forma, temos as Equações Diferenciais Ordinárias

$$X''(x) - \beta X(x) = 0, \text{ com } 0 < x < L \quad \text{e} \quad T'(t) - \alpha^2 \beta T(t) = 0. \quad (3.39)$$

Por outro lado, a nossa candidata a solução  $u(x,t) = X(x)T(t)$ , deve satisfazer as condições  $u(0,t) = u(L,t) = 0$ , isto é,

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L,t) = X(L)T(t) = 0, \forall t > 0.$$

Deste modo, devemos ter  $X(0) = X(L) = 0$ , pois das igualdades acima,  $X(0) \neq 0$  implica em  $T(t) \equiv 0$  para todo  $t > 0$ , o que acarreta  $u(x,t) \equiv 0$ , e isto não é interessante, pois a outra condição  $u(x,0) = f(x)$ , só será satisfeita se for  $f(x) \equiv 0$ . O mesmo argumento justifica a imposição de  $X(L) = 0$ . Agora, para a resolução de  $X''(x) - \beta X(x) = 0$ , há três casos a considerar:

(i) Se  $\beta > 0$ , digamos,  $\beta = \lambda^2$ , então a solução é

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}.$$

Daí, aplicando as condições  $X(0) = X(L) = 0$ , obtemos o sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\lambda L} + c_2 e^{-\lambda L} = 0, \end{cases} \quad (3.40)$$

cuja única solução é  $c_1 = c_2 = 0$ , o que resulta em  $X(x) \equiv 0$ , que não nos interessa, visto que também implica em  $u(x,t) \equiv 0$ .

(ii) Se  $\beta = 0$ , então  $X''(x) = 0$  o que implica em  $X'(x) = b$  e  $X(x) = bx + d$ , sendo  $X(0) = X(L) = 0$ , obtemos novamente  $X(x) \equiv 0$ .

(iii) Se  $\beta < 0$ , digamos,  $\beta = -\lambda^2$ , usando a fórmula de Euler, a solução geral da primeira EDO em (3.39) pode ser escrita como

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x.$$

Daí,  $0 = X(0) = c_1 \cos \lambda 0 + c_2 \operatorname{sen} \lambda 0 \implies c_1 = 0$ . Logo  $0 = X(L) = c_2 \operatorname{sen} \lambda L$ . Como não queremos a solução identicamente nula, devemos ter  $\operatorname{sen} \lambda L = 0$ . Mas isto implica  $\lambda L = n\pi$ , para todo número inteiro não nulo  $n$ . Assim,  $\lambda = \frac{n\pi}{L}$ , como  $-\beta = \lambda^2$ , temos os autovalores  $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ , das autofunções  $X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$ . Logo

$$X_n(x) = c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Onde consideramos apenas  $\lambda_n > 0$ , visto que para  $\lambda_n < 0$ , as autofunções diferem destas apenas no sinal.

Agora, resolvendo  $T'(t) - \alpha^2 \beta T(t) = 0$ , obtemos a solução  $T(t) = ae^{\alpha^2 \beta t}$ , ou ainda, sendo  $n = 1, 2, \dots$

$$T_n(t) = a_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}.$$

Portanto, fazendo  $B_n = a_n c_n$ , para cada  $n = 1, 2, \dots$ , temos a função

$$u_n(x, t) = B_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Contudo, devemos escolher o coeficiente  $B_n$  de forma que se tenha

$$u_n(x, 0) = f(x) = B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Além disso, pelo princípio de superposição, a função

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.41)$$

deve satisfazer (3.38). Então, fazendo  $t = 0$  em (3.41), temos

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.42)$$

Assim, devemos escolher os coeficientes  $B_n$  de forma que a série em (3.42) seja convergente para  $0 < x < L$ . Porém, reconhecemos nessa última expressão o desenvolvimento de meio-intervalo de  $f$ , em uma série de Fourier de  $f$ , em senos, e,



sabemos que seus coeficientes são dados por

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Concluimos então, que a solução do problema descrito por (3.37) e (3.38), é dada pela série

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Na resolução dos próximos exemplos, omitiremos alguns passos, sempre que estes forem semelhantes aos utilizados nos exemplos acima.

**Exemplo 3.8.** Considere uma barra de comprimento  $L$ , cuja superfície total (inclusive seus extremos em  $x = 0$  e  $x = L$ ) é isolada, e tem temperatura inicial  $f(x)$ . Vamos determinar a temperatura subsequente desta barra. Onde, neste caso, o problema de contorno é dado pela equação

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t. \quad (3.43)$$

Sujeita a

$$\begin{cases} u_x(0, t) = 0, & u_x(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), & |u(x, t)| \leq M. \end{cases} \quad (3.44)$$

**Resolução:** Fazendo  $u = XT$  em (3.43) e separando as variáveis, encontramos

$$XT' = \alpha^2 X''T \quad \text{ou} \quad \frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

Agora, igualando cada membro à constante  $-\lambda^2 \neq 0$ , obtemos

$$T' + \alpha^2 \lambda^2 T = 0 \quad \text{e} \quad X'' + \lambda^2 X = 0,$$

que resolvendo, tem-se

$$X = a \cos \lambda x + b \operatorname{sen} \lambda x \quad \text{e} \quad T = ce^{-\alpha^2 \lambda^2 t}.$$

Assim, pondo  $A = ac$  e  $B = bc$ , uma solução é dada por

$$u(x, t) = e^{-\alpha^2 \lambda^2 t} (A \cos \lambda x + B \operatorname{sen} \lambda x),$$

que derivando com relação a  $x$  e aplicando a condição  $u_x(0, t) = 0$ , implica em  $B = 0$ , de modo que se tem

$$u(x, t) = Ae^{-\alpha^2 \lambda^2 t} \cos \lambda x.$$

Então, usando  $u_x(L, t) = 0$ , como não queremos a solução identicamente nula, devemos ter  $\text{sen}\lambda L = 0$  ou  $\lambda = n\pi$ , com  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Logo

$$u_n(x, t) = A_n e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

que também deve satisfazer a condição  $u(x, 0) = f(x)$ . Daí, pelo princípio de superposição, podemos obter

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Assim, de  $u(x, 0) = f(x)$ , fazendo  $t = 0$  na última expressão acima, vem

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Mas, da série de Fourier, reconhecemos

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Donde segue que

$$u(x, t) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos \frac{n\pi x}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

**Exemplo 3.9. (Equação de Laplace<sup>13</sup>)** Suponhamos uma placa quadrada com lados de comprimento unitário, com suas faces isoladas e que tenha três lados mantidos à uma temperatura zero, enquanto o quarto lado é mantido à uma temperatura  $u_1$ . Vamos determinar a temperatura estacionária nessa placa.

**Resolução:** Vamos escolher o lado com temperatura  $u_1$ , com sendo aquele em que  $y = 1$ . Como queremos a temperatura estacionária  $u$ , que não depende do tempo  $t$ , obtêm-se a equação de Laplace em duas dimensões.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{3.45}$$

Cujas condições de contorno são

$$\begin{cases} u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0, \\ u(x, 1) = u_1, \quad |u(x, 1)| < M. \end{cases} \tag{3.46}$$

---

<sup>13</sup>Para ver detalhes sobre a Equação de Laplace recomendamos a referência [11].

Analogamente ao exemplo anterior, fazemos  $u = XY$  em (3.45), obtendo

$$X''Y + XY'' = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}.$$

igualando cada membro a,  $-\lambda^2 \neq 0$ , vem

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad \text{e} \quad Y'' - \lambda^2 Y = 0,$$

Então

$$X = a_1 \cos \lambda x + b_1 \operatorname{sen} \lambda x \quad \text{e} \quad Y = a_2 \cosh \lambda y + b_2 \operatorname{senh} \lambda y.$$

Donde segue que uma possível solução é

$$u(x, y) = (a_1 \cos \lambda x + b_1 \operatorname{sen} \lambda x)(a_2 \cosh \lambda y + b_2 \operatorname{senh} \lambda y).$$

Agora, de  $u(0, y) = 0$  e  $u(x, 0) = 0$ , obtemos  $a_1 = 0$  e  $a_2 = 0$ . E, de  $u(1, y) = 0$  tem-se  $\lambda = n\pi$ , com  $n = 1, 2, \dots$ . Desta forma, vemos que uma solução que satisfaz todas estas condições é

$$u_n(x, y) = B_n \operatorname{sen} n\pi x \cdot \operatorname{senh} n\pi y.$$

Além disso, para que tenhamos a condição  $u(x, 1) = u_1$  satisfeita, vamos utilizar novamente o princípio de superposição, para obter a solução

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} n\pi x \cdot \operatorname{senh} n\pi y. \quad (3.47)$$

Logo, substituindo  $y = 1$  em (3.47) vem

$$u(x, 1) = u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \operatorname{senh} n\pi] \operatorname{sen} n\pi x,$$

que aplicando a teoria das séries de Fourier, nos fornece

$$B_n \operatorname{senh} n\pi = 2 \int_0^1 u_1 \operatorname{sen} n\pi x dx = \frac{2u_1(1 - \cos n\pi)}{n\pi},$$

donde tem-se

$$B_n = \frac{2u_1(1 - \cos n\pi)}{n\pi \operatorname{senh} n\pi}.$$

Substituindo este último resultado em (3.47), concluímos que

$$u(x, y) = \frac{2u_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos n\pi)}{n \operatorname{senh} n\pi} \operatorname{sen} n\pi x \cdot \operatorname{senh} n\pi y.$$

Vale acrescentar que, como afirma Spiegel (1977), se trata de um problema de Dirichlet, tendo em vista que resolvemos uma equação de Laplace  $\nabla^2 u = 0$  em relação a  $u$  no interior de uma região  $\mathfrak{R}$  onde  $u$  é especificado na fronteira de  $\mathfrak{R}$ .

**Exemplo 3.10.** Dada e equação do calor

$$u_t = ku_{xx}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (3.48)$$

sujeita a condição inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{onde} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{se } |x| > 1. \end{cases} \quad (3.49)$$

Vamos tentar encontrar a solução desta equação usando a Transformada de Fourier. Vale observar que este problema pode ser interpretado como a determinação da temperatura em uma haste infinita.

**Resolução:** Como  $x$  percorre o intervalo  $(-\infty, \infty)$ , fixando  $t > 0$ , aplicamos a Transformada de Fourier com relação a  $x$ , e definimos

$$\mathfrak{F}[u(x, t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(x, t) dx = U(\xi, t). \quad (3.50)$$

Agora, aplicando a transformada na equação de derivadas parciais (3.48), e utilizando a proposição (3.4), temos

$$\mathfrak{F}[u_t] = \mathfrak{F}[ku_{xx}] \implies U_t(\xi, t) = -k\xi^2 U(\xi, t),$$

onde usamos também o fato de que pela convergência uniforme, tem-se  $\mathfrak{F}[u_t] = \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{F}[u] = U_t(\xi, t)$ . Assim, para cada  $\xi$  fixado, temos a equação diferencial ordinária

$$\frac{dU}{dt}(\xi, t) + k\xi^2 U(\xi, t) = 0,$$

cuja solução é

$$U(\xi, t) = Ce^{-k\xi^2 t}. \quad (3.51)$$

Para determinar o valor da constante de integração, usamos a condição inicial (3.49), ou seja, para  $\xi \neq 0$ ,

$$\mathfrak{F}[u(x, 0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-e^{-i\xi} + e^{i\xi}}{i\xi} = U(\xi, 0),$$

ou ainda, substituindo este resultado em (3.51), vem

$$U(\xi, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\text{sen}\xi}{\xi} = C.$$

Assim

$$U(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\operatorname{sen}\xi}{\xi} e^{-k\xi^2 t}.$$

Por fim, aplicando a Transformada de Fourier inversa, obtemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\operatorname{sen}\xi}{\xi} e^{-k\xi^2 t} e^{i\xi t} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi} e^{-k\xi^2 t} [\cos \xi t + i \operatorname{sen}\xi t] d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi} e^{-k\xi^2 t} \cos \xi t d\xi + i \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi} e^{-k\xi^2 t} \operatorname{sen}\xi t d\xi. \end{aligned}$$

Como a última integral converge para zero, pois o integrando é uma função ímpar de  $\xi$ . Temos

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\xi \cos \xi t}{\xi} e^{-k\xi^2 t} d\xi. \quad (3.52)$$

Vimos no início deste capítulo, a partir da Integral de Fourier, que quando a função  $f$  é par, obtemos uma transformada integral cosseno, e quando  $f$  é ímpar, obtemos uma transformada integral seno, estas integrais são também chamadas: **Transformada cosseno de Fourier**

$$\mathfrak{F}_c[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x) \cos \xi x dx = \mathcal{F}(\xi), \quad \text{onde} \quad \mathfrak{F}_c^{-1}[\mathcal{F}(\xi)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}(\xi) \cos \xi x d\xi = f(x),$$

e, **Transformada seno de Fourier**

$$\mathfrak{F}_s[f(x)] = \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen}\xi x dx = \mathcal{F}(\xi), \quad \text{onde} \quad \mathfrak{F}_s^{-1}[\mathcal{F}(\xi)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}(\xi) \operatorname{sen}\xi x d\xi = f(x).$$

Estas definições são pertinentes, pois em algumas aplicações é conveniente fazer uso de tais transformadas, tendo em vista que, se por exemplo,  $f$  e  $f'$  forem contínuas, com  $|f|$  integrável em  $[0, \infty)$  e  $f''$  seccionalmente contínua em qualquer intervalo finito. Se  $f \rightarrow \infty$  e  $f' \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \infty$ , pode-se mostrar que  $\mathfrak{F}_c[f''(x)] = -\xi^2 \mathcal{F}(\xi) - f(0)$  (observe que se  $f \in \mathfrak{L}$  todas estas condições são satisfeitas). Vejamos uma aplicação deste fato.

**Exemplo 3.11.** A temperatura do estado estacionário de uma chapa semi-infinita é dada por

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y > 0. \quad (3.53)$$

Com

$$\begin{cases} u(0, y) = 0, & u(\pi, y) = e^{-y}, \quad y > 0, \\ u_y \Big|_{y=0} = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases} \quad (3.54)$$

Determinemos  $u(x, y)$ . Vamos fazer isto do seguinte modo:

**Resolução:** O domínio da variável  $y$  e a condição estabelecida em  $y = 0$ , nos indicam que é uma boa ideia utilizar a Transformada cosseno de Fourier. Assim, definimos

$$\mathfrak{F}_c[u(x, y)] = \int_0^{\infty} u(x, y) \cos \xi y dy = U(x, \xi).$$

Com base no que mencionamos acima,  $\mathfrak{F}_c[u_{xx}] + \mathfrak{F}_c[u_{yy}] = \mathfrak{F}_c[0]$ , se torna

$$\frac{dU}{dx^2} - \xi^2 U(x, \xi) - u_y(x, 0) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dU}{dx^2} - \xi^2 U = 0.$$

Além disso, o domínio de  $x$  é um intervalo finito, então podemos escrever a solução desta EDO como

$$U(x, \xi) = c_1 \cosh \xi x + c_2 \sinh \xi x. \quad (3.55)$$

Aplicando a transformada nas condições de contorno, ou seja,  $\mathfrak{F}_c[u(0, y)] = \mathfrak{F}_c[0]$ , assim como  $\mathfrak{F}_c[u(\pi, y)] = \mathfrak{F}_c[e^{-y}]$ , obtemos

$$U(0, \xi) = 0 \quad \text{e} \quad U(\pi, \xi) = \frac{1}{1 + \xi^2}.$$

Agora, estes dois últimos resultados aplicados em (3.55), resultam em  $c_1 = 0$  e  $c_2 = \frac{1}{(1 + \xi^2) \sinh \xi \pi}$ . Donde segue

$$U(x, \xi) = \frac{\sinh \xi x}{(1 + \xi^2) \sinh \xi \pi},$$

e pela transformada inversa concluímos que

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sinh \xi x}{(1 + \xi^2) \sinh \xi \pi} \cosh \xi y d\xi. \quad (3.56)$$

Surge, então o seguinte questionamento: será que as integrais em (3.52) e (3.56) podem realmente ser calculadas? Como afirma Zill (2001), em muitos casos a resposta é não. O autor afirma ainda que uma forma de achar um valor específico, digamos, da temperatura  $u(1, 1)$  em (3.56) é recorrer à integração numérica.<sup>14</sup> Em contra partida, em se tratando do exemplo (3.10), Figueiredo (2014, pg.217), apresenta um exemplo semelhante, onde a função  $u(x, 0) = f(x)$  da condição inicial, aparece definida em um contexto mais amplo, e a existência de solução é garantida, desde que sejam cumpridas as condições do teorema<sup>15</sup> abaixo.

<sup>14</sup>Ao leitor interessado em detalhes sobre integração numérica, recomendamos a referência [11].

<sup>15</sup>A demonstração do teorema (3.10), bem como a do exemplo citado encontra-se na referência [3].

**Teorema 3.10.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente contínua e limitada. Então a expressão  $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y) dy$ , define uma função  $u(x, t)$ ,  $C^\infty$  no semiplano  $t > 0$ , que satisfaz a equação (3.48). Além disso, a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , é satisfeita no seguinte sentido:*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

*Em particular, se  $f$  for contínua, vale  $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = f(x)$ .*

### 3.6 Considerações Finais

A realização deste trabalho contribuiu ricamente para nosso amadurecimento e aprofundamento no estudo de alguns dos conteúdos da graduação, em especial da Análise Matemática, Álgebra Linear e Equações Diferenciais. Além disso, nos permitiu conhecer um pouco da teoria de Fourier e da Transformada de Laplace, bem como, suas importâncias e o amplo campo onde estas podem ser aplicadas, o que fomentou o interesse de, em estudos posteriores, nos aprofundarmos um pouco mais neste fascinante universo de pesquisa científica.

# Referências Bibliográficas

- [1] BASSANEZI, Rodney Carlos. FERREIRA JR, Wilson Castro. **Equações Diferenciais com Aplicações**. São Paulo: Harbra, 1988.
- [2] BOYCE, Willian E. e DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- [3] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e Equações diferenciais parciais**.4. Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [4] GONDAR, J. Lopes e CIPOLATTI, R. **Iniciação à Física Matemática**. Modelagem de Processos e Métodos de Solução. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
- [5] HSU, Hwei P. **Sinais e Sistemas**. Tradução Anatólio Laschuk. São Paulo: Bookman Companhia Editora, 2012.
- [6] LIMA, Elon Lages. **Um Curso de Análise**. Vol. 1. 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014.
- [7] LOUREDO, Aldo Trajano e OLIVEIRA, Alexadro Marinho. **Um Primeiro Curso de Álgebra Linear**. Campina Grande: Eduepb, 2015.
- [8] SPIEGEL, Murray R. **Análise de Fourier**. Tradução Alfredo Alves de Farias. São Paulo: Macgraw-Hill do Brasil, 1977.
- [9] TOLSTOV, George P. **Fourier Series**. Translated from the Russian by Richard A. Silverman. New York: Dover Publications, 2015.
- [10] TONIDANDEL, D. A. V. e ARAÚJO, A. E. A. **Conectando Transformadas: Fourier e Laplace**. In. .... Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática. Campina Grande: CBA, 2012.



- [11] ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais**. Volume 1. Tradução Antonio Zumpano. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.
- [12] ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais**. Volume 2. Tradução Alfredo Alves de Farias. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.