



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS, TECNOLOGIA E SAÚDE - CCTS**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**  
**CURSO DE ENGENHARIA CIVIL**

**PEDRO LIBERATO DE AVELAR NETO**

**ESTUDO SOBRE A TEORIA CLÁSSICA DAS PLACAS: INFLUÊNCIA DA  
VARIAÇÃO DO COEFICIENTE DE POISSON SOBRE OS MOMENTOS ATUANTES  
EM LAJES.**

**ARARUNA**

**2016**

**PEDRO LIBERATO DE AVELAR NETO**

**ESTUDO SOBRE A TEORIA CLÁSSICA DAS PLACAS: INFLUÊNCIA DA  
VARIAÇÃO DO COEFICIENTE DE POISSON SOBRE OS MOMENTOS ATUANTES  
EM LAJES.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Estadual da Paraíba – Campus VIII, como requisito à obtenção do título de Bacharelado em Engenharia Civil.

Área de concentração: Engenharia Estrutural.

Orientador: Prof. Me. Valdecir Alves dos Santos Júnior.

**ARARUNA**

**2016**

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

A948e Avelar Neto, Pedro Liberato de  
Estudo sobre a teoria clássica das placas [manuscrito] :  
Influência da variação do coeficiente de poisson sobre os  
momentos atuantes em lajes / Pedro Liberato de Avelar Neto. -  
2016.  
72 p. : il. color.

Digitado.  
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia  
Civil) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências  
Tecnologia e Saúde, 2016.  
"Orientação: Me. Valdecir Alves dos Santos Júnior.,  
Departamento de Engenharia Civil".

1. Engenharia Civil. 2. Lajes. 3. Análise de estrutura. I.  
Título.

21. ed. CDD 624

**PEDRO LIBERATO DE AVELAR NETO**

**ESTUDO SOBRE A TEORIA CLÁSSICA DAS PLACAS: INFLUÊNCIA DA  
VARIAÇÃO DO COEFICIENTE DE POISSON SOBRE OS MOMENTOS ATUANTES  
EM LAJES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Coordenação do Curso de Engenharia Civil da  
Universidade Estadual da Paraíba, como  
requisito para obtenção do título de  
Bacharelado em Engenharia Civil.

Área de concentração: Engenharia estrutural.

Aprovada em: 30, 05, 2016.

**BANCA EXAMINADORA**

Valdecir Alves dos Santos Júnior  
Prof. Me. Valdecir Alves dos Santos Júnior (Orientador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Pedro Filipe de Luna Cunha  
Prof. Pedro Filipe de Luna Cunha (Examinador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Laércio Leal dos Santos  
Prof. Dr. Laércio Leal dos Santos (Examinador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

*“A Deus pelas bênçãos concedidas e aos meus pais pelos esforços e incentivos”.*

DEDICO.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, que na sua infinita bondade e misericórdia guiou-me até aqui, sempre me sustentando e me abençoando, sendo a estabilidade necessária nos momentos difíceis.

Aos meus pais, Teresinha Alves Freire de Avelar e Rivaldo Freire de Avelar, que sem medir esforços lutaram incansavelmente para que nada me faltasse ao longo de minha vida e em certas ocasiões tenham vindo a abrir mão de sonhos próprio para que eu pudesse atingir o meu sonho de ser Engenheiro Civil, essa vitória é para vocês, deixo o meu reconhecimento e eterna gratidão, amo vocês.

A minha irmã Mariana e minha sobrinha Leticia, pelo companheirismo e por contribuir de forma significativa para que eu tenha chegado até aqui, seja nos bons momentos e principalmente nos momentos de dificuldade, me alegrando e me incentivando.

A minha tia e segunda mãe Eliana, assim como seus filhos que tenho como irmãos Daniel, Diego, Julihermes e Débora, sempre presentes e participativo durante toda vida.

A minha namorada Janaina, por torcer e acreditar em mim, estando presente desde o início da graduação sempre empenhada e dedicada a me ajudar e me tornar uma pessoa melhor.

Meu amigo de longa data Deividy Lem, pois desde os primórdios escolares estudamos juntos até chegarmos a concluir uma graduação também juntos, agradeço ao apoio e toda ajuda ao longo dos anos.

Aos amigos adquiridos ao longo da graduação e que no que depender de mim permanecerão no meu ciclo de amizade e irmandade pro resto da vida, em especial ao grupo da “casa de vó” composto por: Caio Ribeiro, Kassia Sinhorelli, Diego Rocha, Diogo de Lima, Luan Moraes, Rejane Guedes, assim como ao amigo Lucas Leitão.

Ao meu orientador Prof. Me. Valdecir Alves, pela colaboração e pelos ensinamentos desde a sala de aula, até nas orientações do PIBIC e agora no Trabalho de Conclusão de Curso, a você a minha gratidão e respeito.

Aos meus familiares de sangue e de consideração que por vezes me ajudaram e me fortaleceram com gestos, atitudes e palavras, em especial minha prima irmã Sabrina Avelar.

Aos professores integrantes do Curso de Engenharia Civil, por colaborarem repassando os seus conhecimentos em suas respectivas áreas.

Aos membros da banca de defesa, Dr. Laércio Leal e o Prof. Pedro Filipe pelas sugestões finais.

A todos, meus sinceros agradecimentos.

*“Não é o peso da carga que o derruba. É o modo como você a carrega.”*  
C. S Lewis.

## RESUMO

AVELAR NETO, P. L. **Estudo sobre a teoria clássica das placas: influência da variação do coeficiente de Poisson sobre os momentos atuantes em lajes.** 2016. 72 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) - Universidade Estadual da Paraíba, Araruna, 2016.

Em engenharia um dos elementos estruturais mais utilizados são as placas, que tem sua maior recorrência na construção civil nas chamadas lajes, e possuem como principal função resistir aos esforços normais impostos em sua superfície transmitindo-os para seus apoios. Nesse âmbito foi desenvolvida a teoria clássica das placas delgadas, que admite um comportamento elástico-linear, com seu material isotrópico, tornando conveniente a aplicação da lei de Hooke generalizada. As lajes analisadas foram as simplesmente apoiadas em todos os seus contornos. Assim, o presente trabalho tem por objetivo detalhar, analiticamente, a equação que rege os problemas das placas, passando pelas condições de contorno, equações de equilíbrio e a solução proposta por Navier para a equação de Sophie-Germain-Lagrange. Com base nesta teoria, tornou-se possível tabelar novos valores para os coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  a partir de variações consideráveis do coeficiente de Poisson. Com isso, observa-se que as variâncias impostas a este coeficiente, acarretam alterações nos valores de  $\mu_x$  e  $\mu_y$  influenciando nos momentos atuantes nas lajes. Portanto, este trabalho também se mostra como uma grande contribuição para consultas nos casos em que as lajes apresentem propriedades mecânicas diferentes das fornecidas na literatura.

**Palavras chave:** Placas. Coeficiente de Poisson. Teoria Clássica.

## ABSTRACT

AVELAR NETO, P. L. **Study on the classical theory of plates: influence of the variation of Poisson coefficient about active moments on the slabs.** 2016. 72 f. Completion of Course Work (Undergraduate Civil Engineering) - State University of Paraíba, Araruna, 2016.

In engineering, one of the most used structural elements are plates, which has its higher recurrence in construction as called slabs and have their main function resist the load efforts on its surface and transmitting them to their support. In this context was developed the classical theory of thin plates, which admits a linear-elastic behavior, with his isotropic material, obeying Hooke's law. The analyzed slabs were supported in all its boundary. Thus, this paper aims to detail analytically, the equation governing the problems of plates, through the conditions boundary, balance equations, and the solution proposed by Navier for Sophie-Germain Lagrange's equation. Based on this theory, it became possible to grade new values for the coefficients  $\mu_x$  and  $\mu_y$  from Poisson's coefficient variation. Thus it is observed that the variance imposed on this coefficient, transmits changes in the values of  $\mu_x$  and  $\mu_y$  influencing the active moments on the slabs. Therefore, this work also shows how a great contribution to future consultations where the slabs present different mechanical properties of the literature.

**Keywords:** Slabs. Poisson's Coefficient. Classical Theory.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 01</b> - Lajes e suas possíveis vinculações .....	15
<b>Figura 02</b> - Representação de laje.....	19
<b>Figura 03</b> - Sistema de coordenadas adotados.....	20
<b>Figura 04</b> - Deslocamento no plano $x,z$ .....	21
<b>Figura 05</b> - Deslocamento no plano $y,z$ .....	22
<b>Figura 06</b> - Esforços solicitantes em placas .....	26
<b>Figura 07</b> - Condições de contorno mais usuais.....	30
<b>Figura 08</b> - Lajes contínuas com larguras muito diferentes .....	31
<b>Figura 09</b> - Fenômeno da Reação de Canto .....	32
<b>Figura 10</b> - Convenção de estilo de linhas para os vínculos: engaste perfeito, apoio simples e borda livre .....	32
<b>Figura 11</b> - Representação de uma laje retangular submetida a um carregamento uniformemente distribuído .....	36
<b>Figura 12</b> - Representação no plano de uma laje retangular submetida a um carregamento uniformemente distribuído .....	38
<b>Figura 13</b> - Representação de uma laje retangular submetida a um carregamento triangular	39
<b>Figura 14</b> - Representação no plano de uma laje retangular submetida a um carregamento triangular .....	41
<b>Figura 15</b> - Casos de vinculação das lajes.....	42
<b>Figura 16</b> - Peso próprio calculado para $1m^2$ de laje .....	43
<b>Figura 17</b> - Representação de laje sujeita a carregamento triangular .....	49
<b>Figura 18</b> - Esquematização de laje sujeita a carregamento retangular .....	54
<b>Figura 19</b> - Esquematização de laje sujeita a carregamento triangular.....	57
<b>Figura 20</b> - Laje maciça apoiada sobre vigas .....	59
<b>Figura 21</b> - Representação no plano de uma Laje retangular com suas respectivas dimensões .....	60

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 01</b> - Demonstrativo da aplicação da lei de Hooke generalizada, para o caso de placas delgadas.....	24
<b>Quadro 02</b> - Coeficientes $\mu_x$ , $\mu_y$ , $\mu'_x$ e $\mu'_y$ para cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 1,2 e 3) .....	47
<b>Quadro 03</b> - Coeficientes $\mu_x$ , $\mu_y$ , $\mu'_x$ e $\mu'_y$ para cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 4, 5 e 6) .....	48
<b>Quadro 04</b> - Coeficientes $\mu_x$ , $\mu_y$ , $\mu'_x$ e $\mu'_y$ para cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 7, 8 e 9) .....	48
<b>Quadro 05</b> - Coeficientes $\mu_x$ , $\mu_y$ , para cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares com carregamentos triangulares (casos 1) .....	49

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 01</b> – Valores mínimos das cargas verticais .....	45
<b>Tabela 02</b> - Coeficientes $\mu_x$ e $\mu_y$ para o cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas provenientes da pesquisa .....	52
<b>Tabela 03</b> - Coeficientes $\mu_x$ e $\mu_y$ para o cálculo dos momentos máximos em lajes retriangulares submetidas a carregamentos triangulares, provenientes da pesquisa .....	52
<b>Tabela 04</b> - Coeficientes $\mu_x$ e $\mu_y$ para o cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas para diferentes valores do coeficiente de Poisson .....	55
<b>Tabela 05</b> - Coeficientes $\mu_x$ e $\mu_y$ para o cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares submetidas a carregamentos triangulares para diferentes valores do coeficiente de Poisson ..	58

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\sigma$	Tensão
$\varepsilon$	Deformação
$E$	Módulo de elasticidade
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\nabla^2$	Laplaciano
$\Sigma$	Somatório
$\lambda$	Reflete a geometria da laje
$\gamma$	Peso específico

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	14
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b> .....	17
2.1	OBJETIVO GERAL .....	18
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	18
<b>3</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....	18
3.1	DESLOCAMENTOS.....	21
3.2	DEFORMAÇÕES.....	22
3.3	TENSÕES.....	23
3.4	EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.....	25
3.5	CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	30
<b>3.5.1</b>	<b>Borda perfeitamente engastada</b> .....	30
<b>3.5.2</b>	<b>Borda livre</b> .....	31
<b>3.5.3</b>	<b>Borda simplesmente apoiada</b> .....	31
3.6	SOLUÇÃO DE NAVIER .....	32
3.7	EQUACIONAMENTO DA FUNÇÃO DO CARREGAMENTO PARA QUALQUER CASO .....	34
3.8	CARREGAMENTOS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDOS .....	36
3.9	CARREGAMENTOS TRIANGULARES.....	38
3.10	PROCEDIMENTO PARA DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS EM LAJES.....	42
<b>3.10.1</b>	<b>Cargas Atuantes</b> .....	42
3.10.1.1	Peso Próprio da laje.....	43
3.10.1.2	Contra piso.....	43
3.10.1.3	Revestimento de Piso .....	44
3.10.1.4	Paredes.....	44
3.11	DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS MÁXIMOS NAS DIREÇÕES <b>X</b> E <b>Y</b> .....	45

3.12 CLASSIFICAÇÃO QUANTO À DIREÇÃO .....	46
<b>3.12.1 Laje Armada em uma Direção</b> .....	46
<b>3.12.2 Laje Armada Em Duas Direções (Ou Em Cruz)</b> .....	47
3.13 PROGRAMAÇÃO PARA CÁLCULO DE EQUAÇÕES .....	50
<b>4 METODOLOGIA</b> .....	51
<b>5 RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> .....	52
5.1 CASO DE LAJE SUBMETIDA A CARREGAMENTOS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDOS.....	53
5.2 CASO DE LAJE SUBMETIDA A CARREGAMENTOS TRIANGULARES .....	56
5.3 APLICAÇÃO: DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS EM UMA LAJE SIMPLESMENTE APOIADA, SUBMETIDA A UM CARREGAMENTO UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDO PARA DIFERENTES COEFICIENTES DE POISSON. ....	59
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	66
6.1 SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS .....	67
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	68
<b>APÊNDICES</b> .....	70
<b>APÊNDICE A</b> – Algoritmo usado na realização dos cálculos para obtenção dos coeficientes $\mu_x$ e $\mu_y$ para o caso de lajes submetidas a carregamentos uniformemente distribuídos .....	71
<b>APÊNDICE B</b> – Algoritmo usado na realização dos cálculos para obtenção dos coeficientes $\mu_x$ e $\mu_y$ para o caso de lajes submetidas a carregamentos triangulares. ....	72

## 1 INTRODUÇÃO

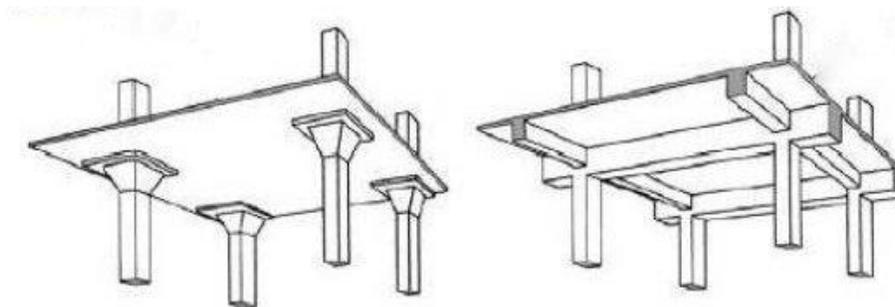
A Engenharia Civil possui uma vasta gama de áreas de atuação, destacando-se a de estruturas. A Engenharia Estrutural, é a área designada a trabalhar com o planejamento, projeto e cálculos de sistemas estruturais, estes podendo ser destinados a moradia, trabalho, transportes, entre outros. No âmbito estrutural, há muitos elementos imprescindíveis, dentre eles estão as placas com seus diferentes tipos de carregamentos e suas variadas vinculações.

De acordo com a ABNT NBR 6118 (2014) (item 14.4.2.1) placas são elementos de superfície plana, sujeitos principalmente a ações normais a seu plano. As placas de concreto são usualmente denominadas lajes.

“As lajes são classificadas como elementos planos bidimensionais, que são aqueles onde duas dimensões, o comprimento e a largura, são da mesma ordem de grandeza e muito maiores que a terceira dimensão, a espessura.” (BASTOS, 2015, p.1).

Com relação ao modo de apoio que as lajes tendem a apresentar, temos que as mesmas podem apoiar-se nos pilares ou sustentadas por vigamentos, sendo ainda possíveis diversas formas de vinculação: engastada, apoiada ou em balanço. Ficando explicitado estas considerações na figura a seguir.

**Figura 01-** Lajes e suas possíveis vinculações



Fonte: DINEV, 2013.

As lajes, na maior parte dos casos, destinam-se a suportar as cargas verticais que atuam nas estruturas de um modo geral, transmitindo-as para os respectivos apoios (MESQUITA FILHO, 2004). Bastos (2015), elucida que numa construção a maior parte das ações aplicadas nas lajes são provenientes de pessoas, móveis, pisos, paredes e os mais variados tipos de carregamentos que podem ocorrer devido a finalidade arquitetônica para a qual a laje foi projetada. Além dessas ações citadas, que são conhecidas como cargas de uso da construção, há a possibilidade de acontecer das lajes estarem sujeitas as chamadas cargas excepcionais que

são aquelas com baixa probabilidade de ocorrência e com pouca duração devidas as enchentes, incêndios, explosões, entre outros.

Para a análise de placas foram desenvolvidas algumas teorias principais, dentre elas a conhecida Teoria Clássica, esta foi proposta por Kirchhoff, trazendo suposições simplificadas, tornando-se válida apenas para placas esbeltas, admitindo quatro variáveis no entorno da placa, o que resulta em uma equação diferencial governante de quarta ordem (TAGUTI, 2010). A pesquisa é baseada na teoria citada, atentando para premissas e manipulações matemáticas que resultam na equação diferencial governante que rege os fenômenos nas placas delgadas com pequenas deformações.

Os problemas em engenharia, na sua maior parte, são regidos por equações diferenciais. Estas satisfazem as condições de compatibilidade e de equilíbrio, de forma conjunta com condições de contorno adequadas e condições iniciais (CHAVES, 1997).

A equação diferencial que governa o problema da flexão de placas finas sujeitas a pequenos deslocamentos transversais é obtida por meios de equações de equilíbrio, constitutivas e de compatibilidade. Essas equações são descritas com base no estado duplo de tensões, onde se admite que as seções transversais permaneçam planas após a deflexão (SIMONIAN, 2009, p.19)

Tendo em vista a importância de abordar e estudar as placas de forma mais aprofundada, muitos estudiosos dedicaram-se a entender as mesmas e produziram suas formulações, teorias e modelos matemáticos. Dentre os estudiosos podemos destacar Gustav Kirchhoff, conhecido por adotar premissas simplificadas sobre as placas delgadas, onde vieram a ser consideradas em estudos futuros por Augustus Love, sendo ainda desenvolvidas por Sophie-Lagrange. Os mesmos através dos seus estudos, contribuíram de forma significativa para o desenvolvimento do estudo de placas.

Com base nos conceitos e estudos mencionados e diante da necessidade de cada vez mais refinar-se os cálculos de elementos estruturais, o que proporciona resultados mais precisos e próximos da realidade, o presente estudo objetivou-se demonstrar todo equacionamento até chegar-se a solução proposta por Navier que rege os problemas de placas delgadas, obtendo-se a equação dos esforços solicitantes em função do carregamento atuante, sendo abordados os casos de lajes sujeitas a carregamentos triangulares e os uniformemente distribuídos. Com isso há a possibilidade de gerar novas tabelas para coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  com diferentes valores de Poisson em relação aos encontrados no campo teórico, contribuindo para preencher a lacuna de

como será o comportamento da estrutura para casos diferentes dos valores existentes. Assim torna-se útil para futuros estudos e análises que necessitem de maior refino nos cálculos.

O presente estudo impacta com a inexistência de uma fonte de consulta para casos diferentes dos tabelados que consideram um valor médio para o coeficiente de Poisson, que por se tratar de uma média, é evidente que exista um intervalo variante possível de acontecer, porém não há a possibilidade de consulta imediata na literatura para casos de estruturas que apresente um valor para tal parâmetro diferente da média adotada. A produção desta pesquisa tem por motivação, contribuir com o preenchimento dessa ausência e oferecer praticidade nos cálculos dos esforços atuantes nas lajes em que se conheçam o valor real para o coeficiente de Poisson, sendo este diferente do valor médio considerado, ou seja, de 0,2.

Esta pesquisa traz como justificativa em sua realização a contribuição para os casos em que se queiram e/ou necessitem de cálculos que se aproximem da realidade, sendo necessário determinar o coeficiente de Poisson real da laje trabalhada, ao invés de simplesmente adotar um valor médio como nas tabelas encontradas na literatura. Os valores tabelados provenientes do presente estudo, servem como um ponto de apoio para tais situações, bem como para os casos de estudos literários na verificação da influência exercida sobre a variação de tal parâmetro.

## 2 OBJETIVOS

### 2.1 OBJETIVO GERAL

Fazer um estudo partindo da teoria clássica das placas delgadas até a equação governante de placas, atentando para a aplicabilidade na engenharia civil, ou seja, para o estudo de lajes. Evidenciar o que está por trás de tabelas postuladas, facilmente encontradas na literatura.

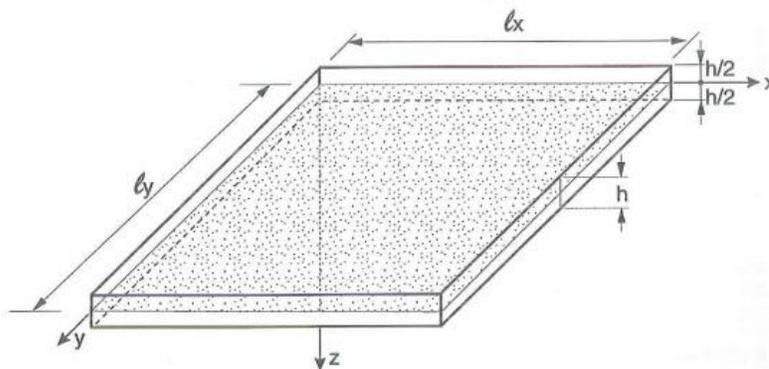
### 2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar a Equação Governante de Placas: Shopie-Germain-Lagrange;
- Estudar Lajes Retangulares simplesmente apoiadas submetidas a carregamentos retangulares e Triangulares;
- Gerar novas tabelas para coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  usados no cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares, para diversos valores do coeficiente de Poisson;
- Verificar a influência que os momentos calculados em lajes retangulares sofrem, para situações em que o coeficiente de Poisson seja diferente da média adotada nas tabelas existentes na literatura.

### 3 REFERENCIAL TEÓRICO

Muitas são as definições existentes para placas, assim como os elementos que se enquadram nesses variados conceitos. Segundo Chaves (1997), a placa pode ser definida como um corpo limitado por duas superfícies planas, cuja distância entre estas superfícies, denominada espessura, é pequena quando comparada com as outras dimensões da placa. A superfície central da placa, também chamada de superfície neutra, é equidistante às duas superfícies limites.

**Figura 02 - Representação de laje**



Fonte: FUSCO, 1994.

De acordo com o material do qual é constituída a placa, ela pode ser classificada como:

- Anisótropa - cujas propriedades são diferentes em qualquer direção;
- Ortótropa - cujas propriedades são diferentes em duas direções ortogonais;
- Isótropa - cujas propriedades são as mesmas em qualquer direção.

O estudo de placas, teve seu início com a chamada teoria clássica das placas, que foi proposta por Kirchhoff, trazendo suposições simplificadas, tornando-se válida apenas para placas esbeltas, admitindo quatro variáveis no entorno da placa, o que resulta em uma equação diferencial governante de quarta ordem.

A teoria das placas consiste em uma formulação matemática empregada na descrição do comportamento elástico de planos bidimensionais com carregamentos transversais. (ESTRUTURAS..., 2000, P. 01).

Devido a grande complexidade que envolve o estudo das placas e as limitações impostas, a Teoria de Kirchhoff induz a partir de simplificações da problemática. “Para a determinação das relações e equações diferenciais básicas das placas delgadas, são necessárias as seguintes hipóteses:” (CHAVES, 1997, p.23).

- 1) O material da placa é considerado elástico-linear, homogêneo e isótropo, obedecendo à lei de Hooke;
- 2) A espessura ( $h$ ) da placa é pequena em relação às outras dimensões;  $h \ll a, b$
- 3) A tensão na direção normal ao plano médio,  $\sigma_{zz}$  é irrelevante quando comparada com as tensões  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$  pelo que se considera:

$$\sigma_{zz} \cong 0;$$

- 4) As tensões de cisalhamento transversais são insignificantes;

$$\sigma_{xz}, \sigma_{yz} \approx 0$$

- 5) A superfície média da placa é plana e indeformável, ou seja, as deformações no plano  $(x, y)$  são nulas, para  $z = 0$ ;

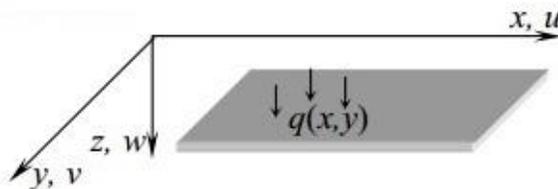
$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = 0$$

- 6) Dada uma seção plana e perpendicular à superfície média, esta permanece plana, perpendicular e indeformada em relação àquela superfície após a flexão.

Assumindo as premissas acima, podemos reduzir o problema de uma placa 3-D para uma placa 2-D, ou seja,  $W(x, y, z) = W_0(x, y)$ , é possível determinar as relações e equações fundamentais da teoria de Kirchhoff para placas finas e isótropas.

Nas relações e equações aqui estudadas serão adotados os seguintes sistemas de coordenadas, conforme a Figura 03:

**Figura 03** - Sistema de coordenadas adotados



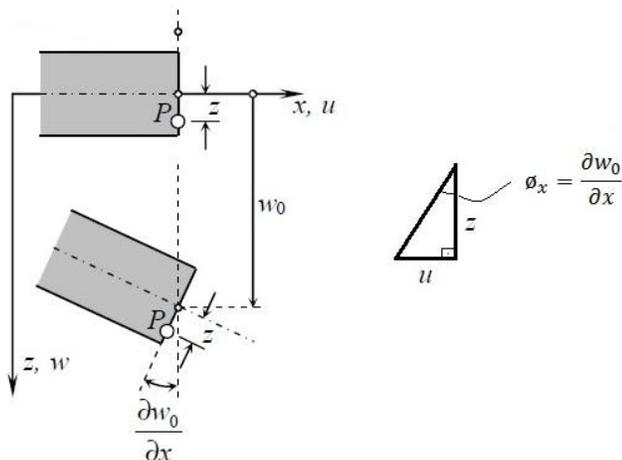
Fonte: DINEV, 2013.

Para compreender o que engloba e tomar ciência do caminho necessário para chegar a equação diferencial que rege o problema das placas delgadas, é de suma importância conhecer e analisar algumas premissas básicas, tais como: deslocamentos, deformações, tensões, equações de equilíbrio, equações de contorno, entre outros.

### 3.1 DESLOCAMENTOS

Levando em consideração a hipótese (6) os deslocamentos,  $u$  e  $v$ , de um ponto  $P$  da placa, situado a uma distância  $z$  do plano médio, podem ser calculados a partir do deslocamento transversal  $w_0(x, y)$  do ponto contido na normal que passa pelo ponto  $P$  e situado na superfície média.

**Figura 04** - Deslocamento no plano  $x, z$



Fonte: DINEV, 2013.

Assim temos que:

$$\operatorname{tg}(\phi_x) = \frac{u}{z} \quad (1)$$

Segundo Hibbeler (2010), na análise de pequenas deformações, mesmo que a deflexão de um corpo como uma placa fina seja aparentemente grande, o material que a compõe poderá estar submetido apenas a deformações muito pequenas, isso permite a seguinte aproximação da equação (1):

$$\operatorname{tg}(\phi_x) \cong \phi_x \quad (2)$$

Logo

$$\phi_x = \frac{u}{z} \quad (3)$$

E conseqüentemente

$$\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (4)$$

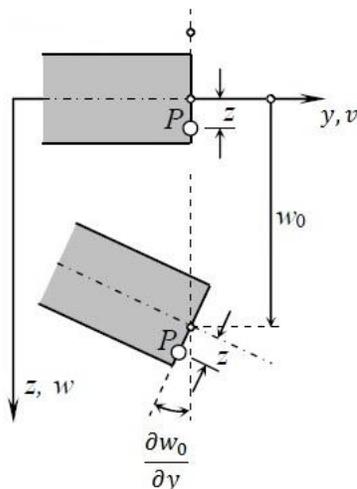
Substituindo a equação (4) em (3), isolando o termo  $u$ , temos:

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (5)$$

O sinal negativo na equação (5) se dá devido ao fato da rotação da placa ter ocorrido no sentido negativo do eixo.

Para o plano  $(y, z)$ , segue-se o mesmo procedimento, já descrito no plano  $(x, z)$ .

**Figura 05-** Deslocamento no plano  $y, z$



Fonte: Adaptado de DINEV, 2013.

De forma análoga, temos:

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (6)$$

### 3.2 DEFORMAÇÕES

De acordo com Hibbler (2010), sempre que um corpo é submetido a uma força, o mesmo tende a mudar sua forma e tamanho. Essas mudanças são chamadas de deformações e podem ser claramente visíveis ou praticamente imperceptíveis. Por definição sabemos que, com a derivada primeira dos deslocamentos obtêm-se as deformações. Como os deslocamentos já foram encontrados, pode-se chegar as suas respectivas deformações derivando-os parcialmente.

Tomando a equação (5) e derivando-a parcialmente em função de  $x$ , temos:

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (7)$$

Tomando a equação (6) e derivando-a parcialmente em função de  $y$ , temos:

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (8)$$

Já no caso da deformação transversal, devido aos esforços cisalhantes, é preciso fazer a derivação cruzada em função de  $x$  e  $y$ , com isso obtemos a seguinte deformação:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

É possível notar que as deformações nos planos paralelos ao plano médio variam de forma linear ao longo da espessura da placa, estando assim, de acordo com as hipóteses de Kirchhoff.

### 3.3 TENSÕES

As tensões seguem de acordo com a lei constitutiva chamada usualmente de Lei de Hooke, que relaciona a tensão ( $\sigma$ ) e a deformação ( $\varepsilon$ ) no plano médio. Como visto na primeira hipótese admitida, o material da placa é considerado homogêneo e isótropo, apresentando comportamento elástico-linear, ou seja, quando o mesmo é submetido a variadas ações, retorna a sua forma inicial quando as ações deixarem de atuar, estando sujeitas a Lei de Hooke.

Definindo que:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ k_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ k_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ k_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right. \quad (12)$$

Das deformações

$$\{\varepsilon\} = z \{k\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

No regime elástico

$$\{\sigma\} = E \cdot \{\varepsilon\} \quad (14)$$

Lei de Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (15)$$

Para chegar na equação (14) deve-se primeiramente analisar as relações de Poisson na fase elástica linear, assim as deformações para  $\sigma_x$  são:

$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (16)$$

$$\varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (17)$$

Sendo:

E- módulo de Young ou módulo de elasticidade;

$\nu$ - coeficiente de Poisson.

De acordo com Simonian (2009), o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) corresponde à relação entre as deformações transversal e longitudinal.

As deformações para  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são dadas de forma análoga as de  $\sigma_x$ .

Assim a composição das deformações devidas às tensões na placa é dada pelo quadro a seguir, onde as premissas das hipóteses de Kirchhoff para o caso de placas delgadas diz que  $\sigma_{zz} \cong 0$ , tornando-se:

**Quadro 1-** Demonstrativo da aplicação da lei de Hooke generalizada, para o caso de placas delgadas

Deformação →			
Tensão ↓	$\varepsilon_x$	$\varepsilon_y$	$\varepsilon_z$
$\sigma_x$	$\frac{\sigma_x}{E}$	$\frac{-\nu\sigma_x}{E}$	$\frac{-\nu\sigma_x}{E} = 0$
$\sigma_y$	$\frac{-\nu\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{-\nu\sigma_y}{E} = 0$
$\sigma_z$	0	0	0

Assim considerando a ação simultânea das tensões atuantes  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , e aplicando o princípio da superposição dos efeitos:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (18)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad (19)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \text{ como } G = \frac{E}{2(1+V)} \text{ então, } \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}(2(1+V))}{E} \quad (20)$$

Portanto, a lei de Hooke generalizada na forma matricial para o caso das placas delgadas, torna-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Tomando a forma matricial acima (21), calculando a matriz inversa da mesma, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Tomando a equação (22) e utilizando as considerações feitas na equação (13), torna-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{zE}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Sendo possível reescrever (23) de uma forma mais compacta, temos:

$$\{\sigma\} = z[E^*]\{k\} \quad (24)$$

Onde  $[E^*]$  é a matriz inversa da lei de Hooke generalizada para o caso de placas delgadas.

### 3.4 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Para considerar um corpo em equilíbrio, a somatória de todas as forças atuantes sobre o mesmo deverá apresentar uma resultante de módulo igual a zero. Para que uma estrutura esteja em equilíbrio estático, deverão ser obedecidas as leis da estática (Equações de Equilíbrio):

$$\sum FH = 0; \sum FV = 0 \text{ e } \sum Mo = 0$$

Onde:

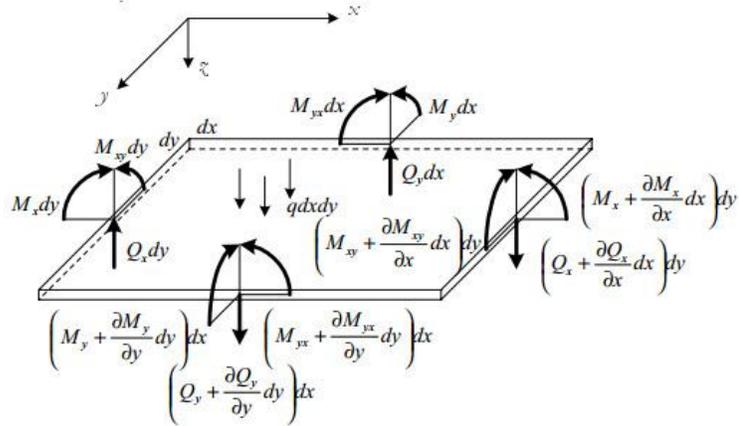
FH = Forças na horizontal;

FV = Forças na Vertical;

Mo = Momentos.

Os esforços solicitantes que surgem nas lajes, de maneira mais abrangente possível podem ser expressos através da figura a seguir, sendo equilibrados por meio das equações da estática.

**Figura 06 - Esforços solicitantes em placas**



Fonte: DINEV, 2013.

Assim, utilizando as equações de equilíbrio em termos dos esforços unitários resultantes das tensões atuantes no elemento de placa de dimensões \$dx, dy\$ e na direção \$z\$, sendo esta a espessura da placa, logo temos:

Somatório das forças na direção normal ao plano:

$$\sum F(z) = 0$$

Então,

$$-q dx dy + Q_x dy + Q_y dx + \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx = 0$$

Assim, segue que:

$$q = -\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} \quad (25)$$

Somatório dos momentos na direção \$x\$, incluindo a parcela dos momentos devido aos esforços cortantes:

$$\sum M(x) = 0 ;$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_x dy + M_{yx} dx - \left( M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - \left( M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \right) dx + (Q_x dy) dx + (Q_y dx) \frac{dx}{2} \\ - \left( \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \right) \frac{dx}{2} - (q dx dy) \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Assim desenvolvendo o somatório de momentos em relação ao eixo  $x$ , onde alguns termos tendem a zero, já que são de ordem superior, temos:

$$Q_x = \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) = 0 \quad (27)$$

Analogamente ao eixo  $y$  temos:

$$Q_y = \left( \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) = 0 \quad (28)$$

Substituindo a equação (27) e (28) na equação (25) temos:

$$q = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \right] \quad (29)$$

Sabendo que,  $M_{xy} = M_{yx}$ , a equação (29) torna-se:

$$q = -\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \quad (30)$$

Nota-se que a equação (30) é em função dos momentos e para obtermos as equações governantes em função dos deslocamentos, partiremos da definição do momento, que é:

$$\{M\} = \int A \{\sigma\} z dA \quad (31)$$

Para a faixa de 1 metro, teremos um problema ao longo do comprimento ao invés da área  $dA \cong dz$ :

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} [E^*] z dz \quad (32)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} [E^*] z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{zE}{1-v^2} z \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} dz$$

Assim

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$$

Resolvendo a integral,

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz &= \frac{z^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\ &= \frac{(h/2)^3}{3} - \frac{(-h/2)^3}{3} \\ &= 2 \cdot \frac{h^3}{24} = \frac{h^3}{12} \end{aligned} \quad (33)$$

Assim

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Sendo  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ , o modulo de rigidez à flexão da placa e os valores de  $k_{xx}$ ,  $k_{yy}$  e  $k_{zz}$ , são dados nas equações (10), (11) e (12) respectivamente.

Desenvolvendo a equação (34) e derivando seus termos, obtemos:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{Bmatrix} k_{xx} + \nu k_{yy} \\ \nu k_{xx} + k_{yy} \\ \frac{1-\nu}{2} k_{xy} \end{Bmatrix}$$

Assim,

$$M_{xx} = D (k_{xx} + \nu k_{yy}) = D \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} = -D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \quad (36)$$

$$M_{yy} = D (\nu k_{xx} + k_{yy}) = D \left( -\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \left( \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \quad (38)$$

$$M_{xy} = \frac{1-\nu}{2} k_{xy} = D \frac{1-\nu}{2} \left( -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = -D \left( \frac{1-\nu}{2} \right) 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} (1 - \nu) \quad (40)$$

Partindo das equações de equilíbrio, das leis constitutivas e das relações entre deslocamentos e deformações, executando as devidas operações matemáticas, é obtida a equação fundamental de Lagrange, que governa a problemática das deflexões das placas (SIMONIAN, 2009). Logo, substituindo as equações (36), (38) e (40) em (30) tem-se o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \nabla^4 D w &= \nabla^2 \nabla^2 D w = q \\ \nabla^2 \nabla^2 w &= \nabla^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{q}{D} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{q}{D} \end{aligned}$$

Com isso, chega-se:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2 \partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (41)$$

A equação (41) que é conhecida como a equação de Sophie-Germain-Lagrange, pode ser reescrita de maneira mais concisa do seguinte modo:

$$\nabla^4 w(x, y) = \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D} \quad (42)$$

Onde o símbolo  $\nabla^2$  designa o Laplaciano.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (43)$$

E finalmente, para se obter os esforços restantes ( $Q_x$ ,  $Q_y$  e  $q$ ), ou seja, equações (25), (27) e (28) em função do deslocamento, utiliza-se as equações (35), (37) e (39), assim:

$$Q_x = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{D \partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (44)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{D \partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (45)$$

$$q = -D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (46)$$

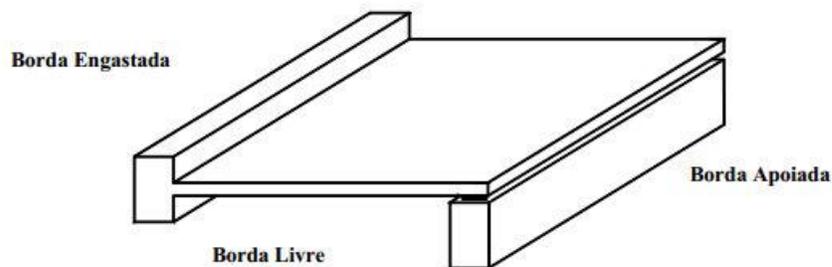
Sendo encontrada a solução para equação de Sophie-Lagrange é possível calcular os esforços unitários a partir das equações (35), (37), (39), (44) e (45). A solução da equação (41) para o domínio das placas depende das condições de contorno.

### 3.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO

É sabido que as lajes de concreto se enquadram claramente no conceito de placas delgadas. De modo geral, temos três tipos de apoio em lajes, estas podem apoiar-se sobre paredes de alvenaria ou concreto, vigas ou diretamente sobre pilares de concreto. Dentre eles, as vigas nas bordas são o tipo de apoio mais comuns nas construções. Assim, Simonian (2009) afirma ser necessário determinar algumas simplificações de modo a definir se uma laje é perfeitamente engastada, apoiada ao longo de um bordo ou apresenta bordo livre, sendo essas situações denominadas de condições de apoio ou de contorno.

Nesse tópico serão abordadas as diferentes condições dos contornos das placas, sendo as mais comuns:

**Figura 07-** Condições de contorno mais usuais

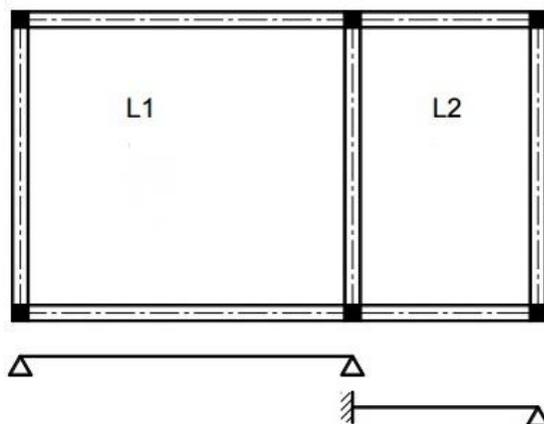


Fonte: CHAVES, 1997.

#### 3.5.1 Borda perfeitamente engastada

O engaste perfeito ocorre nos casos de lajes em balanço, como varandas, marquises e semelhantes, podendo ser considerado também, nos casos onde nas bordas existe continuidade entre duas lajes adjacentes. Para situações onde as lajes contínuas têm larguras diferentes, o adequado é considerar a laje de menor largura engastada na de maior largura, porém a laje mais larga deve ser considerada apenas apoiada na borda comum as duas lajes, como no caso da figura 8, onde L2 está engastada em L1, enquanto que L1 encontra-se apenas apoiada na borda comum a ambas as lajes:

**Figura 08-** Lajes contínuas com larguras muito diferentes



Fonte: adaptado de BASTOS, 2015.

Neste caso de engaste perfeito a borda tem os deslocamentos nulos:

Não há deslocamento transversal:

$$w = 0$$

Não há rotação na direção da borda:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

### 3.5.2 Borda livre

Os bordos livres são caracterizados pela ausência de apoio, com isso apresentam deslocamentos verticais e rotações. Nos demais tipos de vinculação não aparecem deslocamentos verticais.

$$M_x = 0 \text{ e } V_x = 0$$

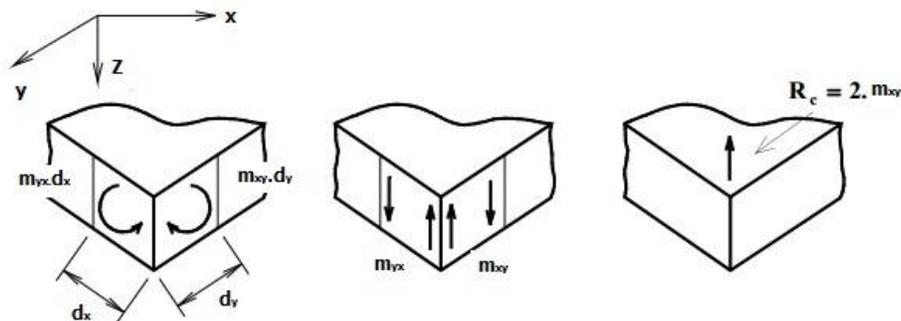
### 3.5.3 Borda simplesmente apoiada

“O apoio simples surge nas bordas onde não existe ou não se admite a continuidade da laje com outras lajes vizinhas. O apoio pode ser uma parede de alvenaria ou uma viga de concreto” (BASTOS, 2015). Os deslocamentos transversais e as rotações na direção da borda para este caso, são nulos:

$$W = 0 \text{ e } M_x = 0$$

Nos cantos da placa ocorre um fenômeno interessante, pois é onde ocorre concentrações de forças provenientes dos momentos, que podem ser substituídos por binários. Isso implica que, quando uma placa for simplesmente apoiada, as reações incluem além das cortantes equivalente ao longo da borda, a chamada reação de canto  $R_c$ . Caso não tenha suporte no canto, este tenderá a levantar ou descer (CHAVES, 1997).

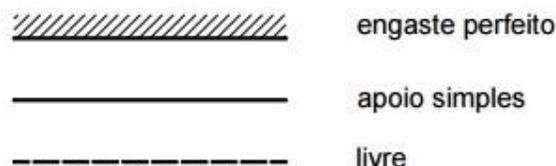
**Figura 09-** Fenômeno da Reação de Canto



Fonte: adaptado de CHAVES, 1997.

Para efeito de representatividade dos tipos de bordas supracitados, temos as seguintes representações:

**Figura 10 -** Convenção de estilo de linhas para os vínculos: engaste perfeito, apoio simples e borda livre



Fonte: BASTOS, 2015.

### 3.6 SOLUÇÃO DE NAVIER

Neste trabalho utiliza-se o tradicional processo de resolução de placas elásticas por meio de séries para o cálculo das lajes maciças de concreto armado. No cálculo por séries, substitui-se o valor de  $q(x, y)$  por uma série de Fourier dupla (superposição de carregamentos com a forma bisenoidal) do tipo: (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2014)

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{m n} \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{Lx}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{Ly}\right) \quad (47)$$

A linha elástica  $w(x, y)$  possui a mesma forma do carregamento, ou seja, é uma função do mesmo tipo:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{m n} \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{Lx}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{Ly}\right) \quad (48)$$

Em que:

$L_x$  e  $L_y$  – dimensões da placa;

$m$  e  $n$  – número de retângulos em que se divide a placa, cada um com lados  $L_x/m$  e  $L_x/n$ .

Sabe-se que a equação de Sophie-Lagrange é dada por:

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (49)$$

Portanto, nota-se que a equação (49) é uma derivada parcial de quarta ordem em função do deslocamento da linha elástica, assim desenvolvendo as respectivas derivadas, temos:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{m n} \frac{m^4 \pi^4}{L_x^4} \operatorname{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (50)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{m n} \frac{m^2 n^2 \pi^4}{L_x^2 L_y^2} \operatorname{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (51)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{m n} \frac{n^4 \pi^4}{L_y^4} \operatorname{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (52)$$

Assim, substituindo a equação (47) e as derivadas que resultaram nas equações (50), (51) e (52) em (49), temos:

$$w_{m n} \left( \frac{m^4 \pi^4}{L_x^4} + 2 \frac{m^2 n^2 \pi^4}{L_x^2 L_y^2} + \frac{n^4 \pi^4}{L_y^4} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) = \frac{q_{m n}}{D} \operatorname{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right)$$

E finalmente:

$$w_{m n} = \frac{q_{m n}}{\pi^4 D \left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^2} \quad (53)$$

Assim a equação (48), torna-se:

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{m n}}{\left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^2} \operatorname{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (54)$$

Da mesma forma que a equação (48), as equações (35), (37) e (39) que representam os momentos, e as equações (27) e (28) que designam os esforços cortantes, podem ser reescrita em função do carregamento ( $q_{mn}$ ), tornando-se:

Os momentos:

$$M_{xx} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \left[ \left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + v \left(\frac{n}{L_y}\right)^2 \right] \text{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \text{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (55)$$

$$M_{yy} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \left[ v \left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2 \right] \text{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \text{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (56)$$

$$M_{xy} = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \frac{m}{L_x} + \frac{n}{L_y} \cos \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \cos \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (57)$$

Os cortantes:

$$Q_x = \frac{1}{\pi L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)} m \cdot \cos \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \text{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (58)$$

$$Q_y = \frac{1}{\pi L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)} n \cdot \text{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \cos \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (59)$$

Obtendo-se assim as equações dos esforços em função de  $q_{mn}$  onde esse varia para cada tipo de carregamento.

### 3.7 EQUACIONAMENTO DA FUNÇÃO DO CARREGAMENTO PARA QUALQUER CASO

Recorrendo a equação (54) que exprime o deslocamento no domínio da placa e a equação (47) que representa o carregamento  $q(x, y)$

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \text{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \text{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (54)$$

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (47)$$

Impondo ainda as condições de tabulação em função das condições de contorno e do ponto de leitura dos esforços solicitantes.

$$\int_0^{L_y} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi y}{L_y}\right) dy = 0 ; \quad \text{para } n \neq n' \quad (60)$$

$$\int_0^{L_y} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi y}{L_y}\right) dy = \frac{L_y}{2} ; \quad \text{para } n = n' \quad (61)$$

Multiplicando os dois lados da igualdade na equação (47) por  $\operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi y}{L_y}\right)$  e integrando-os no intervalo compreendido de 0 a  $L_y$ , temos:

$$\int_0^{L_y} f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi y}{L_y}\right) dy = \int_0^{L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi y}{L_y}\right) dy \quad (62)$$

Resolvendo o lado direito da equação (62), tomando como base as equações (60) e (61), temos que:

$$\int_0^{L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi y}{L_y}\right) dy = \frac{L_y}{2} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn'} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \quad (63)$$

Assim,

$$\int_0^{L_y} f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi y}{L_y}\right) dy = \frac{L_y}{2} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn'} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \quad (64)$$

Da mesma forma que feito anteriormente, multiplicamos os dois lados da igualdade na equação (64) por  $\operatorname{sen}\left(\frac{m'\pi x}{L_x}\right)$ , integrando os mesmos no intervalo que varia de 0 a  $L_x$  e resolvendo o lado direito da igualdade, partindo do pressuposto nas equações (60) e (61), temos:

$$\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{m'\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi y}{L_y}\right) dx dy = \frac{L_x L_y}{4} q_{m'n'} \quad (65)$$

Isolando o  $q_{m'n'}$  chegamos a seguinte equação:

$$q_{m'n'} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{m'\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n'\pi y}{L_y}\right) dx dy \quad (66)$$

Obtendo assim a equação que rege os vários casos de carregamento sobre a placa.

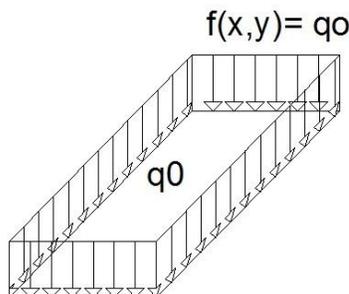
$$q_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} f(x, y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy \quad (67)$$

Sendo  $q_{mn}$  variável para cada tipo de carregamento, a equação (67) auxilia para os casos objetivados nesta pesquisa, que são os casos de placas submetidas a carregamentos uniformemente distribuídos e carregamentos triangulares.

### 3.8 CARREGAMENTOS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDOS

Para os casos em que as lajes estão sujeitas a carregamentos uniformemente distribuídos em suas superfícies, temos:

**Figura 11-** Representação de uma laje retangular submetida a um carregamento uniformemente distribuído



Como visto na figura 11 o carregamento uniformemente distribuído é expresso por:

$$f(x, y) = q_0 \quad (68)$$

Substituindo a equação (68) em (67), temos:

$$q_{mn} = \frac{4}{L_x \cdot L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} q_0 \operatorname{sen}\left(m\pi \frac{x}{L_x}\right) \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{y}{L_y}\right) dx dy \quad (69)$$

Isolando os seguimentos da equação (69), a mesma toma a seguinte forma:

$$q_{mn} = \frac{4}{L_x \cdot L_y} \int_0^{L_x} q_0 \operatorname{sen}\left(m\pi \frac{x}{L_x}\right) \left[ \int_0^{L_y} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{y}{L_y}\right) dy \right] dx \quad (70)$$

Aplicando o modo de integração por substituição simples no segmento da equação (70) que está em função de  $y$ :

$$q_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} q_0 \text{sen} \left( m\pi \frac{x}{L_x} \right) \left[ -\cos \left( n\pi \frac{y}{L_y} \right) \frac{1}{\frac{n \cdot \pi}{L_y}} \right] \Big|_0^{L_y} dx \quad (71)$$

$$q_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} q_0 \text{sen} \left( m\pi \frac{x}{L_x} \right) \left[ -\frac{L_y}{n\pi} \left( \cos \left( \frac{n\pi L_y}{L_y} \right) - \cos(0) \right) \right] dx \quad (72)$$

$$q_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} q_0 \text{sen} \left( m\pi \frac{x}{L_x} \right) \left[ -\frac{L_y}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) \right] dx \quad (73)$$

$$q_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \left[ -\frac{L_y}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) \right] q_0 \int_0^{L_x} \text{sen} \left( \frac{m\pi x}{L_x} \right) dx \quad (74)$$

Integrando também por substituição simples o segmento da equação (74) que está em função de  $x$ :

$$q_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \left[ -\frac{L_y}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) \right] q_0 \left( -\cos \left( m\pi \frac{x}{L_x} \right) \frac{1}{\frac{(m\pi)}{L_x}} \right) \Big|_0^{L_x} \quad (75)$$

$$q_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \left[ -\frac{L_y}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) \right] q_0 \left[ -\frac{L_x}{m\pi} \left( \cos \left( \frac{m\pi L_x}{L_x} \right) - \cos(0) \right) \right] \quad (76)$$

$$q_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \left[ -\frac{L_y}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1) \right] q_0 \left[ -\frac{L_x}{m\pi} (\cos(m\pi) - 1) \right] \quad (77)$$

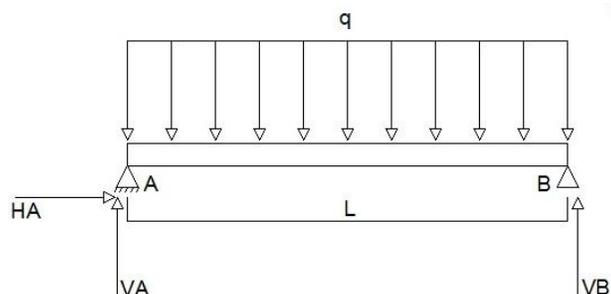
$$q_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \left[ \frac{L_y}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \right] q_0 \left[ \frac{L_x}{m \cdot \pi} (1 - \cos(m\pi)) \right] \quad (78)$$

Obtendo assim, a equação para carregamentos retangulares em função da intensidade do carregamento e de  $m$  e  $n$  que são o número de retângulos em que se divide a placa.

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{\pi^2 mn} (1 - (-1)^n) \cdot (1 - (-1)^m) \quad (79)$$

Para produzir as tabelas é imprescindível saber o ponto onde o momento será máximo na laje para o tipo de carregamento que a mesma está submetida, assim para carregamentos uniformemente distribuídos temos:

**Figura 12** - Representação no plano de uma laje retangular submetida a um carregamento uniformemente distribuído



Como existe apenas uma força na horizontal e sabendo-se que para manter-se em equilíbrio o corpo precisa apresentar somatório das forças igual a zero, com isso temos que:

$$H_A = 0$$

Somatório das forças verticais:

$$\uparrow_+ \sum F = V_A + V_B = qL$$

$$V_A = V_B$$

$$2V_A = qL$$

$$V_A = V_B = \frac{qL}{2}$$

Somatório do cortante, tendo em vista que o momento é máximo onde o cortante for igual a zero, com isso temos:

$$\uparrow_+ \sum V = \frac{qL}{2} - qx = 0$$

$$\frac{qL}{2} - qx = 0$$

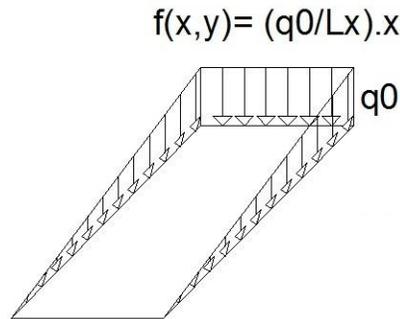
Isolando o  $x$ , obtêm-se o ponto onde o momento será máximo para o caso de carregamentos uniformemente distribuídos:

$$x = \frac{L}{2} \quad (80)$$

### 3.9 CARREGAMENTOS TRIANGULARES

Outra forma de ocorrência de carregamentos em lajes, são os carregamentos triangulares, representado na figura 13:

**Figura 13** - Representação de uma laje retangular submetida a um carregamento triangular



Na figura 13 é visto que o carregamento triangular, é representado da seguinte forma:

$$f(x,y) = \frac{q_0}{L_x} x \quad (81)$$

Substituindo a equação (81) na equação (67), obtemos:

$$q_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \iint_{00}^{L_x L_y} \frac{q_0}{L_x} x \operatorname{sen} \left( m \pi \frac{x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left( n \pi \frac{y}{L_y} \right) dx dy \quad (82)$$

$$q_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \frac{q_0}{L_x} x \operatorname{sen} \left( m \pi \frac{x}{L_x} \right) \left[ \int_0^{L_y} \operatorname{sen} \left( n \pi \frac{y}{L_y} \right) dy \right] dx \quad (83)$$

Tomando-se o seguimento da equação (83) que está em função de  $x$  e utilizando os conceitos de integral por partes, temos:

$$q_{mn(x)} = \int_0^{L_x} x \operatorname{sen} \left( m \pi \frac{x}{L_x} \right) dx \quad (84)$$

$$q_{mn(x)} = -x \cos \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \frac{L_x}{m \pi} \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} 1 \left( -\cos \left( m \pi \frac{x}{L_x} \right) \right) \frac{L_x}{m \pi} dx \quad (85)$$

$$q_{mn(x)} = \left( -L_x \cos \left( m \pi \frac{x}{L_x} \right) \right) \frac{L_x}{m \pi} + \int_0^{L_x} \frac{L_x}{m \pi} \left( \cos \left( m \pi \frac{x}{L_x} \right) \right) dx \quad (86)$$

$$q_{mn(x)} = -\frac{L_x^2}{m \pi} \cos(m \pi) + \frac{L_x}{m \pi} \operatorname{sen} \left( m \pi \frac{x}{L_x} \right) \frac{L_x}{m \pi} \Big|_0^{L_x} \quad (87)$$

$$q_{mn(x)} = -\frac{L_x^2}{m \pi} \cos(m \pi) + \frac{L_x^2}{m^2 \pi^2} \operatorname{sen}(m \pi) \quad (88)$$

Enquanto que no seguimento da equação (83) que encontra-se em função da variável  $y$ , aplica-se a integral por substituição simples, assim:

$$q_{mn(y)} = \int_0^{L_y} \text{sen}(n \pi \frac{y}{L_y}) dy \quad (89)$$

$$q_{mn(y)} = -\cos\left(n \pi \frac{y}{L_y}\right) \frac{L_y}{n \pi} \Big|_0^{L_y} \quad (90)$$

$$q_{mn(y)} = -\cos(n \pi) \frac{L_y}{n \pi} + \frac{L_y}{n \pi} \cos(0) \quad (91)$$

$$q_{mn(y)} = \frac{L_y}{n \pi} (1 - \cos(n \pi)) \quad (92)$$

Juntando os resultados das duas partes da equação, ou seja, as equações (88) e (92), obtemos:

$$q_{mn} = \frac{4}{L_x L_y L_x} q_0 \left[ -\frac{L_x^2}{m \pi} \cos(m \pi) + \frac{L_x^2}{m^2 \pi^2} \text{sen}(m \pi) \right] \left[ \frac{L_y}{n \pi} (1 - \cos(n \pi)) \right] \quad (93)$$

$$q_{mn} = \frac{4 \cdot q_0}{L_y L_x^2} \frac{L_x^2}{m \pi} \left[ -\cos(m \pi) + \frac{1}{m \pi} \text{sen}(m \pi) \right] \left[ \frac{L_y}{n \pi} [1 - \cos(n \pi)] \right] \quad (94)$$

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{m n \pi^2} (1 - \cos(n \pi)) \left( \frac{1}{m \pi} \text{sen}(m \pi) - \cos(m \pi) \right) \quad (95)$$

Se  $m, n \in N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  segue que

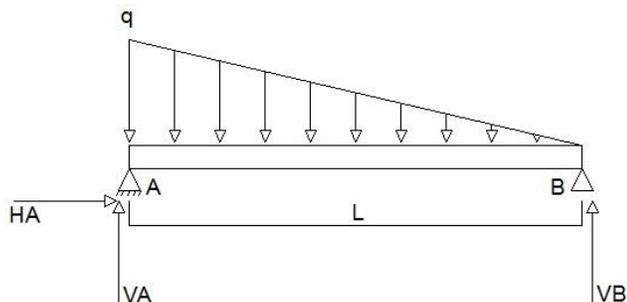
$$\cos(m\pi) = (-1)^m; \quad \text{sen}(m\pi) = 0$$

Com isso, chega-se a equação para carregamentos triangulares em função da intensidade do carregamento e de  $m$  e  $n$ .

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{m \cdot n \cdot \pi^2} ((-1)^{m+n} - (-1)^m) \quad (96)$$

Partindo do exposto na figura 14, é possível conhecermos o ponto onde o momento será máximo para os casos de carregamentos triangulares, sendo imprescindível para geração das tabelas, assim temos:

**Figura 14** - Representação no plano de uma laje retangular submetida a um carregamento triangular



Pelo fato de existir apenas uma força na horizontal, temos que:

$$H_A = 0$$

Somatório das forças verticais:

$$\sum_{FV} = 0$$

$$V_A + V_B = \frac{1}{2}qL$$

Somatório dos momentos em B:

$$\sum_{MB} = -V_A L + \frac{1}{2}qL \frac{2L}{3} = 0$$

$$V_A = q \frac{2L^2}{6L} = \frac{qL}{3}$$

Somatório dos momentos em A:

$$\sum_{MA} = V_B L - \frac{1}{2}qL \frac{L}{3} = 0$$

$$V_B = \frac{L^2}{6L} = \frac{qL}{6}$$

Somatório do esforço cortante, sabendo-se que onde o cortante for igual a zero o momento será máximo, assim temos:

$$\uparrow_+ \sum_v \frac{qL}{6} - \frac{qX^2}{2L} = 0$$

$$\frac{qL}{6} - \frac{qX^2}{2L} = 0$$

$$\frac{L^2}{3} = X^2$$

Isolando o \$x\$ é obtido o ponto onde o momento será máximo para os casos de carregamentos triangulares:

$$X = 0,577L \quad \text{ou} \quad X = \frac{L}{1,73} \quad (97)$$

### 3.10 PROCEDIMENTO PARA DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS EM LAJES

Visto como são obtidos os esforços de placas isoladas, por meio da teoria clássica das placas delgadas, temos então, que para conhecer os valores dos momentos é necessário saber as cargas que atuam sobre a laje.

Devido as várias possibilidades de combinações dos vínculos nas bordas das lajes retangulares, estas recebem numerações afim de diferenciar as combinações possíveis de vinculações, como mostra a figura 15 (BASTOS, 2015).

**Figura 15** - Casos de vinculação das lajes

Caso	Vinculação	Caso	Vinculação	Caso	Vinculação
1		2		3	
Quatro bordas simplesmente apoiadas		Uma borda menor engastada		Uma borda maior engastada	
4		5		6	
Duas bordas adjacentes engastadas		Duas bordas menores engastadas		Duas bordas maiores engastadas	
7		8		9	
Uma borda maior apoiada		Uma borda menor apoiada		Quatro bordas engastadas	

Fonte: Adaptado de Pinheiro, 2010.

#### 3.10.1 Cargas Atuantes

Para o dimensionamento de lajes é preciso conhecer as ações atuantes em sua superfície. Na ABNT NBR 8681 (2003) em seu item 3.4, as ações são definidas como causas que provam esforços ou deformações nas estruturas. De acordo com Bastos (2015) para determinação das ações que atuam nas lajes é preciso recorrer às normas ABNT NBR 6118 (2015), ABNT NBR 8681 (2003) e ABNT NBR 6120 (1980), entre outras pertinentes.

No tocante das construções de edifícios, em geral as principais ações que devem ser

consideradas são as ações permanentes e as ações de variáveis, também conhecidas na prática como sobrecargas. Estas últimas se dão em função do propósito para o qual a laje foi projetada, sendo provenientes de pessoas, móveis, equipamentos, veículos, entre outros. No dimensionamento de lajes de concreto armado é tido como ações permanentes o peso próprio da laje, contra piso, revestimento de piso e as paredes.

### 3.10.1.1 Peso Próprio da laje

Lopes (2012) afirma que o peso próprio da laje consiste no peso do concreto armado que forma a laje e em caso de lajes nervuradas há o acréscimo do peso do material de enchimento. Para o peso específico do concreto armado ( $\gamma_{conc}$ ) a ABNT NBR 6120 (1980) sugere o valor de  $25 \text{ kN/m}^3$ . O peso próprio para lajes que apresentam espessura constante é uniformemente distribuído sobre a área da laje, sendo que para um metro quadrado da laje, como mostrado na figura 14, pode ser calculado como:

$$q_{pp} = \gamma_{conc} \cdot h \quad (98)$$

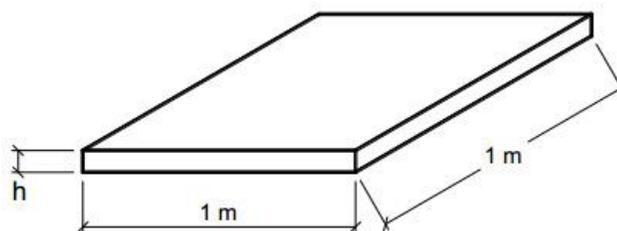
Onde:

$q_{pp}$  = peso próprio da laje ( $\text{KN/m}^2$ );

$\gamma_{conc}$  = Peso específico do concreto ( $\text{KN/m}^3$ );

$h$  = altura da laje ou espessura (m).

**Figura 16** - Peso próprio calculado para  $1\text{m}^2$  de laje



Fonte: BASTOS, 2015.

### 3.10.1.2 Contra piso

Consiste na camada de argamassa que sobrepõe o concreto na superfície superior das lajes, podendo também ser chamada de argamassa de regularização. Tem como principal função nivelar e corrigir as imperfeições da laje, deixando-a propícia para receber o revestimento de piso final (BASTOS, 2015). É recomendado que a espessura do contra piso seja no mínimo igual a 3 cm, devendo ser cuidadosamente avaliada. Conforme a ABNT NBR 6120 (1980) é

considerado o peso específico ( $\gamma_{contr}$ ) de 21 kN/m<sup>3</sup>, sendo determinada a carga do contra piso pela seguinte equação:

$$q_{cp} = \gamma_{contr} \cdot e \quad (99)$$

Sendo:

$q_{cp}$  = carga permanente do contra piso (KN/m<sup>2</sup>)

$\gamma_{contr}$  = Peso específico da argamassa do contra piso (KN/m<sup>3</sup>);

$e$  = espessura (m).

### 3.10.1.3 Revestimento de Piso

É o revestimento final, assentado sobre o contra piso na superfície superior da laje, geralmente é determinado no projeto arquitetônico, onde consta o tipo de material que compõe o piso a depender de cada ambiente da construção (BASTO, 2015). A ABNT NBR 6120 (1980) apresenta em sua tabela 1 os pesos específicos de diversos materiais, que auxiliam na determinação da carga do revestimento de piso por metro quadrado de área da laje.

### 3.10.1.4 Paredes

As paredes são maciços de alvenaria, que comumente formam as fachadas dos edifícios e servem para divisões internas. Lopes (2012) afirma que para determinar a carga das paredes é preciso saber o peso específico da mesma, onde este é dado de acordo com o material que a constitui (tijolo, bloco, entre outros), além disso é necessário conhecer a espessura e a altura da parede. O Peso da parede que é considerado como uma força distribuída linearmente na direção da parede sobre a laje, é determinado por:

$$P = \gamma_{alv} \cdot e \cdot h \quad (100)$$

Onde:

$P$  = Força concentrada representativa da parede (KN/m);

$\gamma_{alv}$  = Peso específico da parede (KN/m<sup>3</sup>);

$e$  = espessura (m);

$h$  = altura da parede (m)

Há ainda as cargas variáveis que estas dependem da finalidade para a qual a laje está sendo dimensionada, dentre outros valores a ABNT NBR 6120 (1980) mostra em sua tabela 2, os seguintes valores de cargas para seus respectivos locais:

**Tabela 01**– Valores mínimos das cargas verticais

Local		Carga (KN/m <sup>2</sup> )
Bancos	Escritórios e banheiros	2
	Sala de diretoria e gerência	1,5
Cinemas	Plateia com assentos fixos	3
	Estúdio e plateias com assentos móveis	4
	Banheiros	2
Corredores	Com acesso ao público	3
	Sem acesso ao público	2
Cozinhas não residenciais	A ser determinada em cada caso, porém com o mínimo de	3
Edifícios residenciais	Dormitório, sala, copa, cozinha e banheiro	1,5
	Dispensa, área de serviço e lavanderia	2
Escolas	Anfiteatro com assentos fixos	3
	Corredor e sala de aula	2
	Outras salas	2
Escritórios	Salas de uso geral e banheiro	2

Fonte: ABNT NBR 6120 (1980), P.3.

### 3.11 DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS MÁXIMOS NAS DIREÇÕES *X* E *Y*

Conhecendo as cargas “Os momentos fletores máximos, sendo os positivos designados pela letra *m* e os negativos, pela letra *x*, são determinados pelas equações (101) a (104), em que:” (CARVALHO E FIGUEIREDO FILHO, 2014, p.304).

$l_x$  = menor lado da placa;

$\mu_x, \mu_y, \mu'_x$  e  $\mu'_y$  = Coeficientes para o cálculo dos momentos máximos em lajes.

- Momentos máximos positivos, por unidade de comprimento, nas direções *x* e *y*

$$m_x = \mu_x \cdot \frac{P \cdot l_x^2}{100} \quad (101)$$

$$m_y = \mu_y \cdot \frac{P \cdot l_x^2}{100} \quad (102)$$

- Momentos máximos negativos, por unidade de comprimento, nas direções  $x$  e  $y$

$$x_x = \mu'_x \cdot \frac{P \cdot l_x^2}{100} \quad (103)$$

$$x_y = \mu'_y \cdot \frac{P \cdot l_x^2}{100} \quad (104)$$

É importante destacar que os momentos são determinados para uma faixa unitária da laje e para lajes isoladas. Também é válido ressaltar que os coeficientes  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ ,  $\mu'_x$  e  $\mu'_y$  levam a valores extremos dos momentos e, portanto, não expressam a variação dos esforços ao longo da laje.

### 3.12 CLASSIFICAÇÃO QUANTO À DIREÇÃO

Para encontrar o coeficiente correto para os valores de  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ ,  $\mu'_x$  e  $\mu'_y$  é preciso calcular o parâmetro  $\Lambda$ , que reflete a geometria da laje, expresso por:

$$\Lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad (105)$$

Sendo  $l_x$  a menor dimensão da superfície da placa e  $l_y$  a maior.

As lajes maciças podem ser classificadas segundo diferentes critérios, como em relação à forma geométrica, dos tipos de vínculos nos apoios, quanto à direção, etc. As formas geométricas podem apresentar-se de variados formatos possíveis, porém, a forma retangular é a grande maioria dos casos da prática. Uma classificação muito importante das lajes maciças é aquela referente à direção ou direções da armadura principal. Existem dois casos: laje armada em uma direção ou laje armada em duas direções, onde quem determina em qual dessas classificações referente a armadura encontra-se a laje é o parâmetro  $\Lambda$ , isso se da seguinte maneira:

#### 3.12.1 Laje Armada em uma Direção

As lajes armadas em uma direção têm relação entre o lado maior e o lado menor superior a dois, isto é:

$$\Lambda = \frac{l_y}{l_x} > 2$$

Com:

$l_x$  = menor lado;

$l_y$  = maior lado.

### 3.12.2 Laje Armada Em Duas Direções (Ou Em Cruz)

Nas lajes armadas em duas direções os esforços solicitantes são importantes segundo as duas direções principais da laje. A relação entre os lados é menor que dois, tal que:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \leq 2$$

Com:

$l_x$  = menor lado;

$l_y$  = maior lado.

Em diversas bibliográficas é encontrado os quadros a seguir, que trazem os valores dos coeficientes relacionados aos seus valores de  $\lambda$  para cálculos dos momentos máximos em lajes retangulares. Os quadros 02, 03 e 04 são para o caso de lajes submetidas a carregamentos uniformemente distribuídos.

**Quadro 02** - Coeficientes  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ ,  $\mu'_x$  e  $\mu'_y$  para cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 1,2 e 3)

$\lambda$	Caso 1		Caso 2			Caso 3		
	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu'_y$	$\mu_x$	$\mu'_x$	$\mu_y$
1,00	4,41	4,41	3,07	3,94	8,52	3,94	8,52	3,07
1,05	4,80	4,45	3,42	3,78	8,79	4,19	8,91	2,84
1,10	5,18	4,49	3,77	3,90	9,18	4,43	9,30	2,76
1,15	5,56	4,49	4,14	3,97	9,53	4,64	9,63	2,68
1,20	5,90	4,48	4,51	4,05	9,88	4,85	9,95	2,59
1,25	6,27	4,45	4,88	4,10	10,16	5,03	10,22	2,51
1,30	6,60	4,42	5,25	4,15	10,41	5,20	10,48	2,42
1,35	6,93	4,37	5,60	4,18	10,64	5,6	10,71	2,34
1,40	7,25	4,33	5,95	4,21	10,86	5,51	10,92	2,25
1,45	7,55	4,30	6,27	4,19	11,05	5,64	11,10	2,19
1,50	7,86	4,25	6,60	4,18	11,23	5,77	11,27	2,12
1,55	8,12	4,20	6,90	4,17	11,39	5,87	11,42	2,04
1,60	8,34	3,14	7,21	4,14	11,55	5,98	11,55	1,95
1,65	8,62	4,07	7,42	4,12	11,67	6,07	11,7	1,87
1,70	8,86	4,00	7,62	4,09	11,79	6,16	11,80	1,79
1,75	9,06	3,96	7,66	4,05	11,88	6,24	11,92	1,74
1,80	9,27	3,91	7,69	3,99	11,96	6,31	12,04	1,68
1,85	9,45	3,83	8,22	3,97	12,03	6,38	12,14	1,64
1,90	9,63	3,75	8,74	3,94	12,14	6,43	12,24	1,59
1,95	9,77	3,71	8,97	3,88	12,17	6,47	12,29	1,54
2,00	10,00	3,64	9,18	3,80	12,20	6,51	12,34	1,48

Fonte: Carvalho e Figueiredo Filho, 2014.

**Quadro 03** - Coeficientes  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ ,  $\mu'_x$  e  $\mu'_y$  para cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 4, 5 e 6)

$\lambda$	Caso 4				Caso 5			Caso 6		
	$\mu_x$	$\mu'_x$	$\mu_y$	$\mu'_y$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu'_y$	$\mu_x$	$\mu'_x$	$\mu_y$
1,00	2,81	6,99	2,81	6,99	2,15	3,17	6,99	3,17	6,99	2,15
1,05	3,05	7,43	2,81	7,18	2,47	3,32	7,43	3,29	7,20	2,07
1,10	3,30	7,87	2,81	7,36	2,78	3,47	7,87	3,42	7,41	1,99
1,15	3,53	8,28	2,80	7,50	3,08	3,58	8,26	3,52	7,56	1,89
1,20	3,76	8,69	2,79	7,63	3,38	3,70	8,65	3,63	7,70	1,80
1,25	3,96	9,03	2,74	7,72	3,79	3,80	9,03	3,71	7,82	1,74
1,30	4,16	9,37	2,69	7,81	4,15	3,90	9,33	3,79	7,93	1,67
1,35	4,33	9,65	2,65	7,88	4,50	3,96	9,69	3,84	8,02	1,59
1,40	4,51	9,93	2,60	7,94	4,85	4,03	10,00	3,90	8,11	1,52
1,45	4,66	10,41	2,54	8,00	5,19	4,09	10,25	3,94	8,13	1,45
1,50	4,81	10,62	2,47	8,06	5,53	4,14	10,49	3,99	8,15	1,38
1,55	4,93	10,82	2,39	8,09	5,86	4,16	10,70	4,03	8,20	1,34
1,60	5,06	10,99	2,31	8,12	6,18	4,17	10,91	4,06	8,25	1,28
1,65	5,16	11,16	2,24	8,14	6,48	4,14	11,08	4,09	8,28	1,23
1,70	5,27	11,30	2,16	8,15	6,80	4,12	11,24	4,12	8,30	1,18
1,75	5,36	11,43	2,11	8,16	7,11	4,12	11,39	4,14	8,31	1,15
1,80	5,45	11,55	2,04	8,17	7,41	4,10	11,43	4,15	8,32	1,11
1,85	5,53	11,57	1,99	8,17	7,68	4,08	11,65	4,16	8,33	1,08
1,90	5,60	11,67	1,93	8,18	7,95	4,04	11,77	4,17	8,33	1,04
1,95	5,67	11,78	1,91	8,19	8,21	3,99	11,83	4,17	8,33	1,01
2,00	5,74	11,89	1,88	8,20	8,47	3,92	11,88	4,18	8,33	0,97

Fonte: Carvalho e Figueiredo Filho, 2014.

**Quadro 04** - Coeficientes  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ ,  $\mu'_x$  e  $\mu'_y$  para cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 7, 8 e 9)

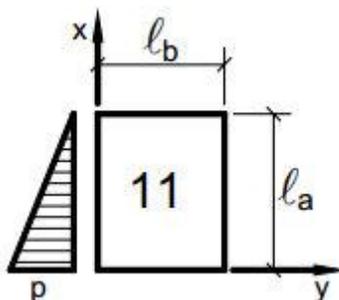
$\lambda$	Caso 7				Caso 8				Caso 9			
	$\mu_x$	$\mu'_x$	$\mu_y$	$\mu'_y$	$\mu_x$	$\mu'_x$	$\mu_y$	$\mu'_y$	$\mu_x$	$\mu'_x$	$\mu_y$	$\mu'_y$
1,00	2,13	5,46	2,60	6,17	2,60	6,17	2,13	5,46	2,11	5,15	2,11	5,15
1,05	2,38	5,98	2,66	6,46	2,78	6,47	2,09	5,56	2,31	5,50	2,10	5,29
1,10	2,63	6,50	2,71	6,75	2,95	6,76	2,04	5,65	2,50	5,85	2,09	5,43
1,15	2,87	7,11	2,75	6,97	3,09	6,99	1,98	5,70	2,73	6,14	2,06	5,51
1,20	3,11	7,72	2,78	7,19	3,23	7,22	1,92	5,75	2,94	6,43	2,02	5,59
1,25	3,43	8,81	2,79	7,36	3,34	7,40	1,85	5,75	3,04	6,67	1,97	5,64
1,30	3,56	8,59	2,77	7,51	3,46	7,57	1,78	5,76	3,13	6,90	1,91	5,68
1,35	3,76	8,74	2,74	7,63	3,55	7,70	1,72	5,75	3,25	7,09	1,86	5,69
1,40	3,96	8,88	2,71	7,74	3,64	7,82	1,64	5,74	3,38	7,28	1,81	5,70
1,45	4,15	9,16	2,67	7,83	3,71	7,91	1,59	5,73	3,48	7,43	1,73	5,71
1,50	4,32	9,44	2,63	7,91	3,78	8,00	1,53	5,72	3,58	7,57	1,66	5,72
1,55	4,48	9,68	2,60	7,98	3,84	8,07	1,47	5,69	3,66	7,68	1,60	5,72
1,60	4,63	9,91	2,55	8,02	3,89	8,14	1,42	5,66	3,73	7,79	1,54	5,72
1,65	4,78	10,13	2,50	8,03	3,94	8,20	1,37	5,62	3,80	7,88	1,47	5,72
1,70	4,92	10,34	2,45	8,10	3,98	8,25	1,32	5,58	3,86	7,97	1,40	5,72
1,75	5,04	10,53	2,39	8,13	4,01	8,30	1,27	5,56	3,91	8,05	1,36	5,72
1,80	5,17	10,71	2,32	8,17	4,04	8,34	1,20	5,54	3,95	8,12	1,32	5,72
1,85	5,26	10,88	2,27	8,16	4,07	8,38	1,17	5,55	3,98	8,18	1,26	5,72
1,90	5,36	11,04	2,22	8,14	4,10	8,42	1,14	5,56	4,01	8,24	1,21	5,72
1,95	5,45	11,20	2,14	8,13	4,11	8,45	1,11	5,60	4,04	8,29	1,19	5,72
2,00	5,55	11,35	2,07	8,12	4,13	8,47	1,08	5,64	4,07	8,33	1,16	5,72

Fonte: Carvalho e Figueiredo Filho, 2014.

Na literatura há também tabelas com os coeficientes mostrados nos quadros acima, para

o caso de carregamentos triangulares, para fins comparativos, a seguir consta apenas a tabela para o caso aqui estudado, que são o de lajes simplesmente apoiadas em suas bordas, como representado na figura 17:

**Figura 17** - Representação de laje sujeita a carregamento triangular



Fonte: Pinheiro, 2007.

**Quadro 05** - Coeficientes  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ , para cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares com carregamentos triangulares (casos 1)

$\lambda$	Caso 1	
	$\mu_x$	$\mu_y$
0,50	5,14	1,60
0,55	4,83	1,72
0,60	4,52	1,83
0,65	4,21	1,92
0,70	3,90	2,00
0,75	3,63	2,05
0,80	3,35	2,09
0,85	3,11	2,12
0,90	2,86	2,14
0,95	2,64	2,13
1,00	2,41	2,12
1,05	2,47	2,32
1,10	2,53	2,51
1,15	2,58	2,71
1,20	2,64	2,90
1,25	2,66	3,10
1,30	2,70	3,28
1,35	2,73	3,46
1,40	2,76	3,64
1,45	2,79	3,81
1,50	2,81	3,97
1,55	2,84	4,12
1,60	2,87	4,27
1,65	2,85	4,43
1,70	2,83	4,59
1,75	2,84	4,72
1,80	2,85	4,85
1,85	2,84	4,98
1,90	2,84	5,11
1,95	2,80	5,24
2,00	2,78	5,36

Fonte: Pinheiro, 2007.

Para o caso de lajes sujeitas a carregamentos triangulares, o parâmetro  $\lambda$  será dado também pela equação (105), porém sem a particularidade de  $l_x$  e  $l_y$  serem necessariamente a menor e maior dimensão respectivamente.

Nos quadros 02, 03, 04 que são usados para carregamentos uniformemente distribuídos quanto no quadro 05 usado para carregamentos triangulares, não há a possibilidade de consulta para casos com coeficientes de Poisson diferentes, ficando a lacuna de como seria o comportamento da estrutura para tal.

### 3.13 PROGRAMAÇÃO PARA CÁLCULO DE EQUAÇÕES

De acordo com Gaelzer (2010), programação nos primórdios dos computadores para solucionar problemas de física, matemática, engenharia e outras áreas da ciência, era um processo bastante complexo e tedioso. Tomando este fato como motivação, foram desenvolvidas as chamadas linguagens de programação de alto-nível, tendo o FORTRAN como a pioneira deste segmento. Com isso os computadores foram se tornando cada vez acessíveis para cientistas e engenheiros, não ficando mais restrita a tarefa de programar apenas pra um pequeno grupo de programadores especialistas.

A palavra FORTRAN descende de FORmula TRANslation que em português quer dizer tradução de fórmulas. Como o próprio nome remete, ele possibilita uma tradução direta de fórmulas, isso através de uma simbologia de variáveis e operadores algébricos com uma linguagem simples, cujo vocabulário é composto de um conjunto de palavras, conhecidas como “palavras-chave”, fazendo do FORTRAN uma linguagem voltada para problemas que possam ser formulados matematicamente, especialmente nos campos de engenharia, estatística, física, entre outros. As palavras-chaves postas em uma determinada ordem, configuram um algoritmo que consiste em um conjunto de instruções passo-a-passo para resolver um problema, com uma codificação de cima para baixo, linha por linha, aproximando-se do procedimento manual de resolução dos problemas, resultou em um amplo sucesso do FORTRAN nos meios acadêmicos e científicos (ANDREOLI E CARVALHO, 2001).

#### 4 METODOLOGIA

Neste trabalho é apresentado um estudo no campo teórico a respeito da teoria clássica das placas delgadas, esta toma como base as hipóteses simplificadoras de Kirchhoff que dentre outras premissas considera o material para as placas sendo isotrópico com o comportamento elástico-linear.

No estudo consta a equação que rege a problemática das lajes finas sujeitas a pequenos carregamentos, que foi desenvolvida por Sophie-Lagrange e é mostrado ainda a solução proposta por Navier para esta referida equação, evidenciando o que está por trás de tabelas postuladas encontradas na literatura que são usadas no dimensionamento de lajes.

De posse das equações dos momentos, sabendo-se o ponto onde o momento será máximo e isolando os coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  nas equações (101) e (102), foram gerados dois algoritmos na linguagem de programação Fortran (Apêndices A e B), com auxílio do aplicativo Plato IDE, um compreendendo o caso de carregamentos uniformemente distribuídos e outro para carregamentos triangulares, possibilitando a geração de tabelas para variados valores do coeficientes de Poisson. Os valores abordados para essa variação dos coeficientes foram 0,0 , 0,1 , 0,3 e 0,4, haja vista que as tabelas já existentes levam em consideração  $\nu = 0,2$ . Para verificação da compatibilidade dos algoritmos feitos, inicialmente foram reproduzidas as tabelas que já constam na literatura para o caso 01 que consiste em lajes retangulares simplesmente apoiadas em todas as suas bordas, submetidas tanto a carregamentos uniformemente distribuídos quanto a carregamentos triangulares.

A laje trabalhada na aplicação é de autoria própria produzida no AutoCad e por se tratar de uma laje fictícia não há considerações de cargas variáveis, já que a mesma não tem uma finalidade de execução, sendo apenas para estudo e verificação da influência causada aos momentos atuantes em sua superfície, devido a variação feita no coeficiente de Poisson.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

As lajes aqui analisadas são as simplesmente apoiadas em todos os seus contornos, chamadas na literatura como Caso 1. Para os resultados obtidos os cálculos foram realizados através de algoritmos na linguagem de programação Fortran, estes seguem no Apêndice. Primeiramente foram geradas tabelas para valores que já constam no campo teórico, afim de observar a compatibilidade dos resultados obtidos com os já existentes. E chegou-se as seguintes tabelas:

**Tabela 02-** Coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  para o cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas provenientes da pesquisa.

$\lambda$	Caso 1	
	$\mu_x$	$\mu_y$
1,00	4,42	4,42
1,05	4,81	4,46
1,10	5,19	4,48
1,15	5,56	4,49
1,20	5,92	4,48
1,25	6,28	4,47
1,30	6,61	4,44
1,35	6,94	4,40
1,40	7,25	4,36
1,45	7,55	4,31
1,50	7,84	4,26
1,55	8,11	4,20
1,60	8,37	4,14
1,65	8,61	4,08
1,70	8,84	4,02
1,75	9,06	3,96
1,80	9,27	3,90
1,85	9,47	3,84
1,90	9,65	3,78
1,95	9,83	3,73
2,00	9,99	3,67

**Tabela 03 -** Coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  para o cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares submetidas a carregamentos triangulares, provenientes da pesquisa

$\lambda$	Caso 1	
	$\mu_x$	$\mu_y$
0,50	5,20	1,85
0,55	4,88	1,96
0,60	4,56	2,05
0,65	4,24	2,12
0,70	3,93	2,18
0,75	3,64	2,23
0,80	3,36	2,26
0,85	3,10	2,27
0,90	2,86	2,27
0,95	2,63	2,27
1,00	2,43	2,25
1,05	2,47	2,45
1,10	2,49	2,65
1,15	2,51	2,85
1,20	2,53	3,04
1,25	2,53	3,23
1,30	2,53	3,41
1,35	2,53	3,59
1,40	2,52	3,48
1,45	2,50	3,93
1,50	2,49	4,09
1,55	2,47	4,24
1,60	2,45	4,39
1,65	2,43	4,53
1,70	2,40	4,67
1,75	2,38	4,80
1,80	2,35	4,92
1,85	2,32	5,04
1,90	2,30	5,15
1,95	2,27	5,26
2,00	2,24	5,36

Comparando as tabelas 02 e 03 resultantes dos algoritmos produzidos, com os quadros 02 e 05 disponibilizadas na literatura, pode-se observar que ambas apresentaram aproximações consideráveis em seus valores, assegurando que o algoritmo está correto, o que possibilita a produção segura de novas tabelas com variações no coeficiente de Poisson, tendo em vista que a literatura considera um valor médio de 0,2.

O coeficiente de Poisson, apresenta usualmente valores correspondidos entre 0,1 a 0,4 dependendo do material (CARVALHO E FIGUEIREDO FILHO, 2014). Sabendo-se deste intervalo, foram geradas outras tabelas variando o coeficiente de Poisson dentro do referido intervalo para o mesmo caso das tabelas acima, onde a placa encontra-se apoiada em todos os seus bordos, tanto para carregamentos uniformemente distribuídos quanto para carregamentos triangulares.

## 5.1 CASO DE LAJE SUBMETIDA A CARREGAMENTOS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDOS

Recorrendo as equações dos momentos (55) e (56), sabendo-se  $q_{mn}$  para o caso de placas sujeitas a carregamentos uniformemente distribuídos, que consiste na equação (79) e conhecendo o ponto onde o momento é máximo mostrado na equação (80), temos:

- Momento na direção de x

$$M_{xx} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \left[ \left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \nu \left(\frac{n}{L_y}\right)^2 \right] \text{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \text{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (55)$$

- Momento na direção de y

$$M_{yy} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \left[ \nu \left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2 \right] \text{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \text{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (56)$$

- $q_{mn}$  para carregamentos distribuídos uniformemente

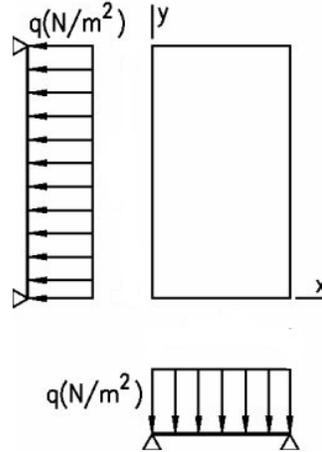
$$q_{mn} = \frac{4q_0}{\pi^2 mn} (1 - (-1)^n) \cdot (1 - (-1)^m) \quad (79)$$

- Ponto onde o momento é máximo em carregamentos retangulares

$$x = \frac{L}{2} \quad (80)$$

A figura 18 apresenta uma esquematização do carregamento para as lajes carregadas uniformemente.

**Figura 18** - Esquematização de laje sujeita a carregamento retangular



Fonte: adaptado de SOARES, 2004.

Pela figura 18, percebe-se que em ambas as direções o carregamento assume uma forma retangular, assim tanto na direção de  $x$  quanto na direção de  $y$ , o ponto de momento máximo será dado pela equação (80), com isso para os momentos temos:

$$M_x \left( \frac{l_x}{2}, \frac{l_y}{2} \right) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^2} \left[ \left( \frac{m}{L_x} \right)^2 + v \left( \frac{n}{L_y} \right)^2 \right] \text{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \text{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (106)$$

$$M_y \left( \frac{l_x}{2}, \frac{l_y}{2} \right) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^2} \left[ v \left( \frac{m}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{n}{L_y} \right)^2 \right] \text{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \text{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (107)$$

Em seguida, substitui-se a equação (79) nas equações (106) e (107) para obter-se os momentos nos pontos de máximo. Para realização dos cálculos foi gerado um algoritmo (Apêndice A), onde é considerado um valor unitário para carga. Obtidos os referidos momentos, toma-se as equações (101) e (102), evidenciando os coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  para obter-se os seus valores.

Na direção de  $x$ , isolando o coeficiente  $\mu_x$  na equação (101), temos:

$$\mu_x = m_x \cdot \frac{100}{P \cdot l_x^2} \quad (108)$$

De forma análoga se dá na direção de  $y$  para a equação (102), assim temos:

$$\mu_y = m_y \cdot \frac{100}{P \cdot l_x^2} \quad (109)$$

Onde:

$$m_x = M_x \left( \frac{l_x}{2}, \frac{l_y}{2} \right) \text{ e } m_y = M_y \left( \frac{l_x}{2}, \frac{l_y}{2} \right)$$

Os cálculos provenientes deste procedimento, resultou na tabela que se segue, onde constam valores para os coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  para carregamentos uniformemente distribuídos, com variados coeficientes de Poisson e seus respectivos parâmetros  $\lambda$ .

**Tabela 04-** Coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  para o cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas para diferentes valores do coeficiente de Poisson

$v \rightarrow$	0,0		0,1		0,2		0,3		0,4	
$\lambda \downarrow$	$\mu_x$	$\mu_y$								
1,00	3,68	3,68	4,05	4,05	4,41	4,41	4,79	4,79	5,16	5,16
1,05	4,08	3,65	4,44	4,05	4,80	4,45	5,17	4,87	5,54	5,28
1,10	4,47	3,59	4,83	4,04	5,18	4,49	5,55	4,93	5,91	5,38
1,15	4,86	3,52	5,21	4,01	5,56	4,49	5,91	4,98	6,27	5,46
1,20	5,24	3,44	5,58	3,96	5,90	4,48	6,27	5,01	6,61	5,53
1,25	5,61	3,34	5,94	3,91	6,27	4,45	6,61	5,03	6,94	5,59
1,30	5,97	3,24	6,29	3,84	6,60	4,42	6,94	5,03	7,26	5,63
1,35	6,31	3,14	6,63	3,77	6,93	4,37	7,25	5,03	7,57	5,66
1,40	6,65	3,03	6,95	3,69	7,25	4,33	7,55	5,02	7,86	5,69
1,45	6,97	2,92	7,26	3,61	7,55	4,30	7,84	5,01	8,13	5,70
1,50	7,28	2,80	7,56	3,53	7,86	4,25	8,12	4,98	8,40	5,71
1,55	7,57	2,69	7,84	3,44	8,12	4,20	8,38	4,96	8,65	5,72
1,60	7,85	2,57	8,11	3,36	8,34	3,14	8,62	4,93	8,88	5,71
1,65	8,12	2,46	8,37	3,27	8,62	4,07	8,86	4,90	9,10	5,71
1,70	8,37	2,35	8,61	3,19	8,86	4,00	9,08	4,86	9,31	5,70
1,75	8,62	2,24	8,84	3,10	9,06	3,96	9,29	4,83	9,51	5,69
1,80	8,84	2,14	9,06	3,02	9,27	3,91	9,49	4,79	9,70	5,67
1,85	9,06	2,03	9,27	2,94	9,45	3,83	9,67	4,75	9,87	5,66
1,90	9,27	1,93	9,46	2,86	9,63	3,75	9,85	4,71	10,04	5,64
1,95	9,46	1,84	9,65	2,78	9,77	3,71	10,01	4,67	10,20	5,62
2,00	9,65	1,74	9,82	2,71	10,00	3,64	10,17	4,64	10,34	5,60

Na tabela (04) constam os valores dos coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  para carregamentos uniformemente distribuídos, tanto os resultados obtidos com esta pesquisa, quanto os valores para tais coeficientes já existentes no campo teórico e utilizados comumente no dimensionamento de lajes. Comparando-os de forma sequencial para seus respectivos valores, estes atrelados ao parâmetro  $\lambda$  correspondente, foi encontrada uma variação média para  $\mu_x$  igual a 0,280 com um desvio padrão de  $\pm 0,069$  e para  $\mu_y$  uma média de variação de 0,728 com desvio padrão de  $\pm 0,191$ , com isso afirma-se que os momentos calculados sofrerão influência caso a laje apresente coeficientes de Poisson diferentes de 0,2.

## 5.2 CASO DE LAJE SUBMETIDA A CARREGAMENTOS TRIANGULARES

Da mesma forma como feito anteriormente, também recorre-se as equações dos momentos (55) e (56), porém o  $q_{mn}$  será o da equação (96) onde esta é a equação do carregamento para o caso de placas submetidas a carregamentos triangulares e neste caso o ponto onde o momento será máximo é dado pela equação (97), com isso temos:

- Momento na direção de x

$$M_{xx} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \left[ \left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + v \left(\frac{n}{L_y}\right)^2 \right] \text{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \text{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (55)$$

- Momento na direção de y

$$M_{yy} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \left[ v \left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2 \right] \text{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \text{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (56)$$

- $q_{mn}$  para carregamentos triangulares

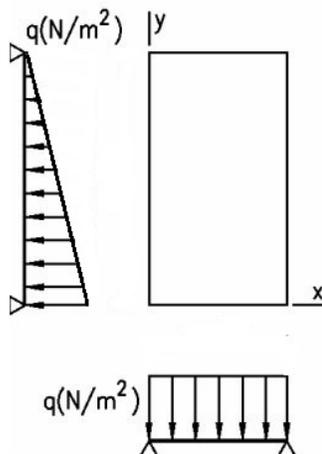
$$q_{mn} = \frac{4q_0}{m \cdot n \cdot \pi^2} (1 - (-1)^n) \cdot (-(-1)^m) \quad (94)$$

- Ponto onde o momento é máximo em carregamentos retangulares

$$X = \frac{L}{1,73} \quad \text{ou} \quad X = 0,577L \quad (97)$$

A Figura 19 evidencia a esquematização de como está disposto o carregamento triangular na laje.

**Figura 19** - Esquemática de laje sujeita a carregamento triangular



Fonte: adaptado de SOARES, 2004.

Pela figura 19, percebe-se que em uma das direções o carregamento assume uma forma retangular, enquanto que na outra apresenta-se na forma triangular, assim na direção onde há a apresentação retangular do carregamento o ponto de momento máximo será dado pela equação (80), já para direção onde o formato do carregamento é triangular, o ponto de momento máximo será dado pela equação (97), com isso para os momentos temos:

$$M_x \left( \frac{l_x}{2}, \frac{l_y}{1,73} \right) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{m n}}{\left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^2} \left[ \left( \frac{m}{L_x} \right)^2 + v \left( \frac{n}{L_y} \right)^2 \right] \text{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \text{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (110)$$

$$M_y \left( \frac{l_x}{2}, \frac{l_y}{1,73} \right) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{m n}}{\left( \frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)^2} \left[ v \left( \frac{m}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{n}{L_y} \right)^2 \right] \text{sen} \left( \frac{m \pi x}{L_x} \right) \text{sen} \left( \frac{n \pi y}{L_y} \right) \quad (111)$$

Prosseguindo-se com as manipulações matemáticas, substitui-se a equação (94) nas equações (110) e (111) obtendo-se os momentos nos pontos de máximo. Assim como no caso de carregamentos uniformemente distribuídos, para realização dos cálculos foi gerado um algoritmo com auxílio da linguagem de programação Fortran para este caso (Apêndice B), sendo considerado um valor unitário para carga. Obtidos os referidos momentos, tomamos as equações (108) e (109) obtendo-se os coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$ , de forma análoga como feito anteriormente.

Os cálculos resultantes do procedimento descrito acima, possibilitou a produção da tabela a seguir, onde são expressos os valores dos coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  para carregamentos

triangulares, com variados coeficientes de Poisson e seus respectivos parâmetros  $\lambda$ .

**Tabela 05** - Coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  para o cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares submetidas a carregamentos triangulares para diferentes valores do coeficiente de Poisson

$\nu \rightarrow$	0,0		0,1		0,2		0,3		0,4	
$\lambda \downarrow$	$\mu_x$	$\mu_y$								
0,50	5,03	0,85	5,11	1,35	5,20	1,85	5,28	2,36	5,37	2,86
0,55	4,68	1,02	4,78	1,49	4,88	1,96	4,98	2,42	5,08	2,89
0,60	4,32	1,18	4,44	1,62	4,56	2,05	4,68	2,48	4,80	2,91
0,65	3,98	1,33	4,11	1,73	4,24	2,12	4,37	2,52	4,51	2,92
0,70	3,64	1,45	3,79	1,82	3,93	2,18	4,08	2,55	4,22	2,91
0,75	3,33	1,56	3,48	1,89	3,64	2,23	3,80	2,56	3,95	2,89
0,80	3,03	1,65	3,20	1,95	3,36	2,26	3,53	2,56	3,69	2,86
0,85	2,76	1,72	2,93	1,99	3,10	2,27	3,27	2,55	3,44	2,82
0,90	2,51	1,77	2,68	2,02	2,86	2,27	3,04	2,52	3,21	2,77
0,95	2,27	1,81	2,45	2,04	2,63	2,27	2,82	2,49	3,00	2,72
1,00	2,06	1,84	2,24	2,04	2,43	2,25	2,61	2,46	2,79	2,66
1,05	2,06	2,04	2,26	2,25	2,47	2,45	2,67	2,66	2,87	2,86
1,10	2,05	2,24	2,27	2,45	2,49	2,65	2,72	2,86	2,94	3,06
1,15	2,03	2,44	2,27	2,65	2,51	2,85	2,76	3,05	3,00	3,25
1,20	2,00	2,64	2,26	2,84	2,53	3,04	2,79	3,24	3,06	3,44
1,25	1,97	2,84	2,25	3,04	2,53	3,23	2,82	3,43	3,10	3,62
1,30	1,93	3,03	2,23	3,22	2,53	3,41	2,84	3,61	3,14	3,80
1,35	1,88	3,22	2,21	3,40	2,53	3,59	2,85	3,78	3,17	3,97
1,40	1,84	3,40	2,18	3,58	2,52	3,48	2,86	3,95	3,20	4,13
1,45	1,79	3,57	2,15	3,75	2,50	3,93	2,86	4,11	3,22	4,29
1,50	1,74	3,74	2,11	3,92	2,49	4,09	2,86	4,26	3,24	4,44
1,55	1,87	3,91	2,08	4,08	2,47	4,24	2,86	4,41	3,25	4,58
1,60	1,64	4,07	2,04	4,23	2,45	4,39	2,85	4,56	3,26	4,72
1,65	1,58	4,22	2,00	4,38	2,43	4,53	2,85	4,69	3,27	4,85
1,70	1,53	4,36	1,96	4,52	2,40	4,67	2,84	4,82	3,27	4,97
1,75	1,48	4,50	1,93	4,65	2,38	4,80	2,83	4,95	3,28	5,09
1,80	1,42	4,64	1,89	4,78	2,35	4,92	2,81	5,06	3,28	5,21
1,85	1,37	4,77	1,85	4,90	2,32	5,04	2,80	5,18	3,28	5,31
1,90	1,32	4,89	1,81	5,02	2,30	5,15	2,79	5,29	3,27	5,42
1,95	1,27	5,01	1,77	5,13	2,27	5,26	2,77	5,39	3,27	5,51
2,00	1,22	5,12	1,73	5,25	2,24	5,36	2,75	5,85	3,27	5,61

A tabela 05 expressa os resultados de  $\mu_x$  e  $\mu_y$  obtidos com o presente estudo e também aos achados na literatura, estes coeficientes são utilizados para determinação dos momentos

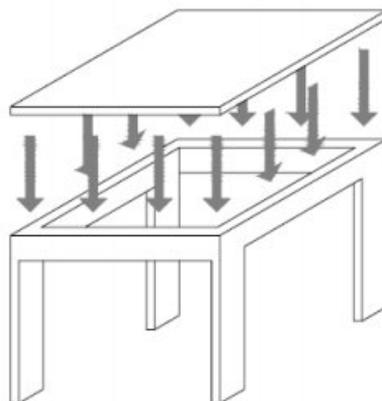
máximos em lajes submetidas a carregamentos triangulares. Calculando-se a variação média dos coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  para seus respectivos parâmetros  $\mathcal{L}$ , em seguida fazendo-se uma média geral dessas variações, chega-se aos seguintes valores médios e seus desvios padrão:  $0,291 \pm 0,135$  para  $\mu_x$  e  $0,235 \pm 0,102$  para  $\mu_y$ . Assim, como no caso dos carregamentos uniformemente distribuídos, os coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  variam a medida que o coeficiente de Poisson é alterado, com isso os momentos máximos atuantes nas lajes também sofrerão alterações em seus valores quando calculados.

Essas tabelas provenientes da presente pesquisa, apresentam-se como alternativas, de forma a contribuir com estudos futuros, assim como para casos onde se queiram ou precise determinar o coeficiente de Poisson real da estrutura e este venha a ser diferente do valor médio considerado de 0,2.

### 5.3 APLICAÇÃO: DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS EM UMA LAJE SIMPLEMENTE APOIADA, SUBMETIDA A UM CARREGAMENTO UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDO PARA DIFERENTES COEFICIENTES DE POISSON.

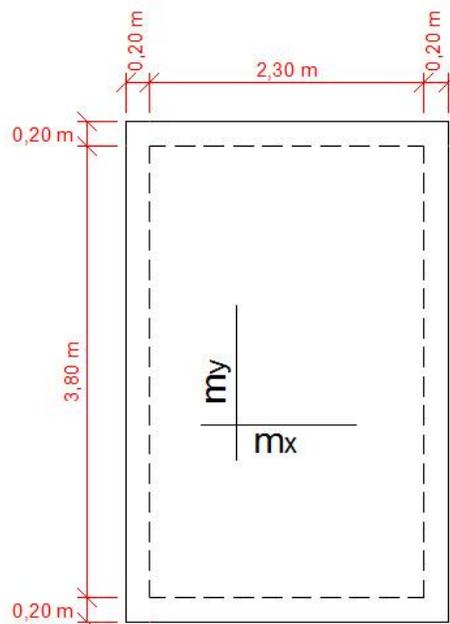
Adotando uma laje simplesmente apoiada em seus bordos (figura 20) e apresentando as dimensões mostradas na figura 21, temos o seguinte procedimento para se calcular os momentos atuantes sobre a mesma:

**Figura 20** - Laje maciça apoiada sobre vigas



Fonte: Lopes, 2012.

**Figura 21** - Representação no plano de uma Laje retangular com suas respectivas dimensões



Primeiramente é preciso conhecer as cargas que estão atuando sobre a laje, para isso leva-se em consideração as seguintes contribuições:

- Peso próprio da laje;
- Contra piso;
- Revestimento de piso;
- Paredes.

A ABNT NBR 6120 (1980) expõe valores para os pesos específicos de alguns materiais de construção, é atribuído para o concreto armado um valor de  $25 \text{ KN/m}^3$  enquanto que para argamassa de cimento e areia é apresentado um peso específico de  $21 \text{ KN/m}^3$ . Sabendo-se destes valores, é possível determinar a contribuição de cada item supracitados, como é visto a seguir.

Para o peso próprio, adotando uma espessura de  $0,12 \text{ m}$ , sabendo-se o peso específico do concreto e recorrendo a equação (98), temos:

$$\text{Peso próprio } (e = 0,12 \text{ m}) = 0,12 \text{ m} \times 25 \text{ KN/m}^3 = 3,00 \text{ KN/m}^2$$

O contra piso é determinado através da equação (99), considerando uma espessura de  $0,03 \text{ m}$  e o peso específico da argamassa de cimento e areia, assim:

$$\text{Contra piso } (e = 0,03 \text{ m}) = 0,03 \text{ m} \times 21 \text{ KN/m}^3 = 0,63 \text{ KN/m}^2$$

No revestimento do piso que depende do tipo de material aplicado, foi adotado o seguinte valor para a carga:

$$\text{Revestimento de piso} = 1 \text{ KN/m}^2$$

Além desses valores é preciso determinar a carga proveniente das paredes que virão a estar sobre a laje, acarretando em mais carga sobre a mesma, para isso é necessário saber a área da laje como também o peso da parede. Para os cálculos a seguir é considerado que a parede será executada com tijolos furados, onde a ABNT NRB 6120 (1980) sugere um peso específico de  $13 \text{ KN/m}^3$ , adotando-se uma largura de 0,12 m, um pé direito com altura de 2,8 m e para cada 1,0 m de comprimento, é possível chegar a contribuição de carga da parede da seguinte forma:

$$\text{Área da laje: } 2,7 \text{ m} \times 4,2 \text{ m} = 11,34 \text{ m}^2$$

$$\text{Peso da parede: } (0,12 \text{ m} \times 2,8 \text{ m} \times 1,0 \text{ m}) \times 13 \text{ KN/m}^3 = 4,37 \text{ KN}$$

A carga atuante na laje proveniente das paredes é obtida dividindo o peso da mesma pela área total da laje, assim temos:

$$\text{Carga de parede} = \frac{\text{Peso da parede}}{\text{Área da laje}} = \frac{4,37 \text{ KN}}{11,34 \text{ m}^2} = 0,385 \text{ KN/m}^2$$

O carregamento total ao qual está submetida a laje, é resultado da soma de todas as cargas atuantes, ou seja:

$$q_{pp} = 3,00 \text{ KN/m}^2$$

$$q_{contr} = 0,63 \text{ KN/m}^2$$

$$q_{rev} = 1,00 \text{ KN/m}^2$$

$$q_{par} = 0,385 \text{ KN/m}^2$$

Resultando em uma carga total de  $q_{total} = 5,02 \text{ KN/m}^2$

Encontrada a carga total atuante sobre a laje, é possível determinar os momentos máximos em lajes retangulares com auxílio da tabela 04. Celeste (2011) reforça que para a aplicação das tabelas, deve-se considerar que o vão menor é sempre  $l_x$ . Os momentos nas duas direções das lajes são obtidos a partir dos coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  contidos nas referidas tabelas, estes em função do parâmetro  $\lambda$ , que reflete a geometria da placa. Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2014), para encontrar o coeficiente correto é imprescindível calcular o parâmetro  $\lambda$ , que é expresso por:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad (105)$$

Sendo,  $l_x$  a menor dimensão da superfície da placa, enquanto que  $l_y$  é a maior.

É recomendado que as dimensões de  $l_x$  e  $l_y$  sejam consideradas de eixo a eixo dos seus respectivos apoios, assim no caso que se segue, tem-se os seguinte valor para o parâmetro  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} = \frac{4,0 \text{ m}}{2,5 \text{ m}} = 1,6$$

Calculada a carga total atuante, conhecendo-se a dimensão de  $l_x$  e consultando na tabela 04 os respectivos valores de  $\mu_x$  e  $\mu_y$  estando estes atrelados ao parâmetro  $\lambda$ , é possível determinar os momentos  $m_x$  e  $m_y$  através das equações (101) e (102).

Dados:

$$q_{total} = 5,02 \text{ KN/m}^2$$

$$l_x = 2,5 \text{ m}$$

$$\lambda = 1,6$$

Consultando o quadro 01 disponibilizado na literatura por Carvalho e Figueiredo (2014) que considera um valor de 0,2 para o coeficiente de Poisson, verifica-se para  $\lambda = 1,6$  os valores de 8,34 e 3,14 para os coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  respectivamente. Substituindo os referidos valores nas equações (101) e (102), temos:

- Momento máximo na direção  $x$ :

$$m_x = \mu_x \cdot \frac{P \cdot l_x^2}{100} = 8,34 \cdot \frac{5,02 \cdot 2,5^2}{100} = 2,62 \text{ KN/m}$$

- Momento máximo na direção  $y$ :

$$m_y = \mu_y \cdot \frac{P \cdot l_x^2}{100} = 3,14 \cdot \frac{5,02 \cdot 2,5^2}{100} = 0,99 \text{ KN/m}$$

Os momentos máximos nas direções  $x$  e  $y$  calculados acima, serão refeitos considerando diferentes valores do coeficiente de Poisson onde estes são contemplados na tabela 04, isso para fins comparativos dos valores de momentos máximos obtidos.

Adotando os mesmos dados supracitados, entretanto considerando o coeficiente de Poisson nulo, ou seja 0,0 e para  $\lambda = 1,6$ , temos  $\mu_x = 7,85$  e  $\mu_y = 2,57$  de acordo com a tabela 04, proveniente da presente pesquisa, aplicando estes valores nas equações (101) e (102), temos:

- Momento máximo na direção  $x$ :

$$m_x = \mu_x \cdot \frac{P \cdot l_x^2}{100} = 7,85 \cdot \frac{5,02 \cdot 2,5^2}{100} = 2,46 \text{KN/m}$$

- Momento máximo na direção  $y$ :

$$m_y = \mu_y \cdot \frac{P \cdot l_x^2}{100} = 2,57 \cdot \frac{5,02 \cdot 2,5^2}{100} = 0,81 \text{KN/m}$$

De forma análoga ao feito anteriormente para o cálculo dos momentos nas direções de  $x$  e  $y$ , porém considerando o coeficiente de Poisson igual a 0,1 para  $\lambda = 1,6$  a tabela 04 remete os valores de 8,11 e 3,36 para os coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  respectivamente, assim:

- Momento máximo na direção  $x$ :

$$m_x = \mu_x \cdot \frac{P \cdot l_x^2}{100} = 8,11 \cdot \frac{5,02 \cdot 2,5^2}{100} = 2,54 \text{KN/m}$$

- Momento máximo na direção  $y$ :

$$m_y = \mu_y \cdot \frac{P \cdot l_x^2}{100} = 3,36 \cdot \frac{5,02 \cdot 2,5^2}{100} = 1,05 \text{KN/m}$$

Tomando novamente as equações (101) e (102) que determinam os momentos positivos máximos nas lajes, para os mesmos dados a cima mencionados nos casos em que a laje apresente  $\nu = 0,3$ , a tabela 04 exprime  $\mu_x = 8,62$  e  $\mu_y = 4,93$  para  $\lambda = 1,6$ , resultando nos seguintes valores de momentos:

- Momento máximo na direção  $x$ :

$$m_x = \mu_x \cdot \frac{P \cdot l_x^2}{100} = 8,62 \cdot \frac{5,02 \cdot 2,5^2}{100} = 2,70 \text{KN/m}$$

- Momento máximo na direção  $y$ :

$$m_y = \mu_y \cdot \frac{P \cdot l_x^2}{100} = 4,93 \cdot \frac{5,02 \cdot 2,5^2}{100} = 1,55 \text{KN/m}$$

A tabela 04 enuncia ainda valores dos coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  para situações em que a laje possua um coeficiente de Poisson de 0,4, portanto tomando os dados que constam nos cálculos anteriores, consultando a referida tabela para  $\lambda = 1,6$  verificamos o valor de  $\mu_x = 8,88$  e

$\mu_y = 5,71$ , deste modo os momentos positivos para esse caso serão:

- Momento máximo na direção  $x$ :

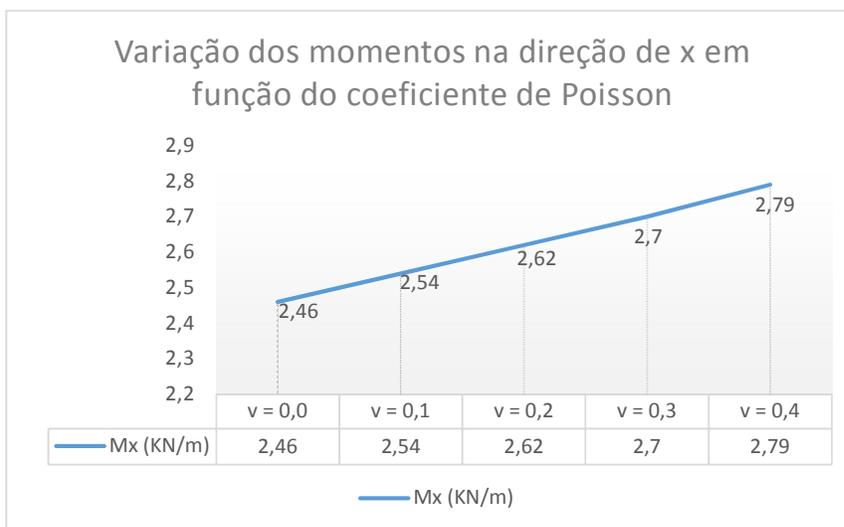
$$m_x = \mu_x \cdot \frac{P \cdot l_x^2}{100} = 8,88 \cdot \frac{5,02 \cdot 2,5^2}{100} = 2,79 \text{KN/m}$$

- Momento máximo na direção  $y$ :

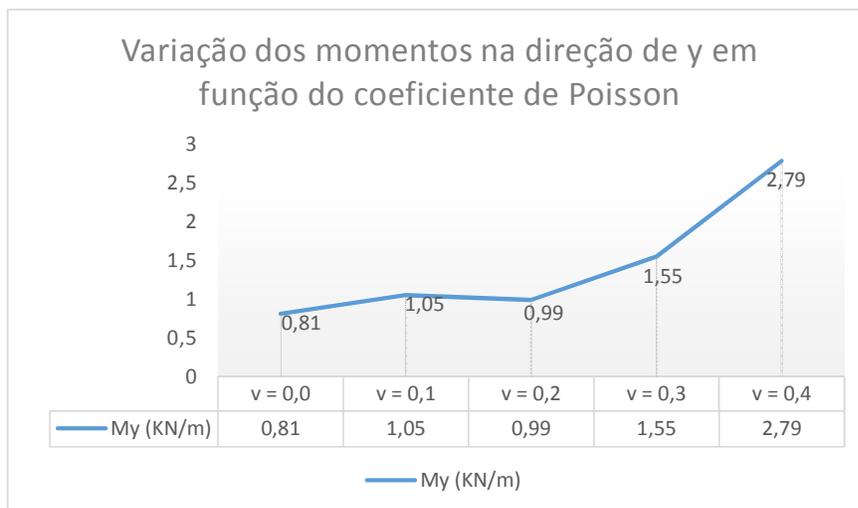
$$m_y = \mu_y \cdot \frac{P \cdot l_x^2}{100} = 5,71 \cdot \frac{5,02 \cdot 2,5^2}{100} = 1,79 \text{KN/m}$$

Diante dos cálculos expostos e dos seus respectivos resultados, pode-se observar que a medida que o coeficiente de Poisson varia os momentos positivos acompanham essa variação, os gráficos 01 e 02 exprimem melhor o modo que se dão essas variações.

**Gráfico 01** - Variação dos momentos na direção de  $x$  em função e  $\nu$  .



Os momentos na direção de  $x$  apresentaram uma variação média de 0,082 KN/m. Como é possível ver no gráfico 01 a variação ocorreu de forma linear, diretamente proporcional ao coeficiente de Poisson, com isso pode-se afirmar que a medida que o coeficiente de Poisson de uma laje apresente variações para mais com relação ao valor médio de 0,2 adotado nas tabelas postuladas na literatura, o momento positivo na direção  $x$  será acrescido, da mesma forma ocorrerá caso a variação do referido coeficiente for para menos neste caso o momento será decrescido, em ambos os casos poderá exercer influências nos cálculos subsequentes para dimensionamentos das estruturas.

**Gráfico 02:** Variação dos momentos na direção de  $y$  em função e  $\nu$ 

Já para o caso dos momentos na direção de  $y$  representado no pelo gráfico 02 a variação média foi em torno de 0,275 KN/m, maior do que na direção de  $x$ . Uma possibilidade para se dar tal fato, é por tratar-se da maior dimensão estudada, podendo ocorrer maior erro associado ao montante final, com isso a medida que a laje for tomando proporções maiores os momentos apresentariam maiores médias de variações, atreladas a mudança no coeficiente de Poisson, sendo este um caso cabível de estudos futuros. O gráfico 02 apresentou uma discrepância em relação ao gráfico 01, não obtendo uma regularidade a medida que os valores do coeficiente de Poisson sejam alterados, porém como os valores não repetem os que são provenientes da tabela usual, que leva em consideração o valor médio de 0,2 para ao coeficiente de Poisson, é possível que os cálculos posteriores para dimensionamento estrutural onde levam em conta esses momentos, apresentem variâncias em seus resultados.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nas estruturas dos edifícios, as lajes desempenham importantes funções, além de serem responsáveis pelo consumo da maior parte do volume de concreto requerido. Portanto, a proximidade cada vez mais fidedigna da realidade que se encontra a estrutura trabalhada faz-se necessária, visando os aspectos econômicos no quesito redução de custo e otimização de materiais, de funcionamento sabendo-se o comportamento real de suas propriedades mecânicas, a interação com os demais componentes da edificação e da segurança a fim de eliminar possíveis tragédias provenientes de cálculos sem considerações fideis de cada caso.

Chegado ao fim da pesquisa, pode-se concluir que a análise aprofundada da teoria das placas delgadas, apresenta-se como um estudo de alto grau de complexidade, mas diante do exposto, foi possível obter resultados aceitáveis dentro do que é usual. Os objetivos propostos foram alcançados no que diz respeito aos equacionamentos, na produção das tabelas com valores diferentes para o coeficiente de Poisson e na aplicação onde foram determinados os momentos atuantes na laje, tanto para os coeficientes existentes na literatura, quanto para os encontrados com o presente estudo.

Pôde-se observar que a medida com que o coeficiente de Poisson varia, os valores de  $\mu_x$  e  $\mu_y$  também se alteram e conseqüentemente os resultados encontrados para os momentos atuantes são diferentes daqueles que foram determinados através da tabela já existente na literatura.

No exemplo feito, onde consta o caso de uma laje submetida a um carregamento uniformemente distribuído, nota-se uma linearidade na variação obtida dos momentos na direção de  $x$ , sendo diretamente proporcional a medida com que varia o coeficiente de Poisson, já para os momentos na direção de  $y$ , não houve um padrão em sua variação. Uma causa para essa discrepância entre os comportamentos na direção de  $y$  em relação aos apresentados na direção  $x$ , pode ser por se tratar da maior dimensão, estando sujeito a um maior erro associado à medida com que se aumente o vão estudado.

A partir dos resultados obtidos, conclui-se que o coeficiente de Poisson exerce influência sobre os momentos solicitantes, que atuam nas lajes retangulares, porém o campo teórico não fornece coeficientes para valores diferentes de 0,2. Com isso o presente estudo vem a ser uma contribuição considerável para casos em que se precisem refinar os cálculos de acordo com as características reais, apresentadas pela estrutura trabalhada, sendo um aliado de extrema importância na engenharia.

Portanto, o presente estudo se apresenta como uma grande contribuição para consultas

tendo em vista que os estudos que compreendem lajes, são dados para propriedades mecânicas bem definidas do material estudado ficando a lacuna de como será a distribuição dos esforços, e em consequente, das tensões para estruturas com propriedades distintas das tabeladas.

## 6.1 SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS

Por se tratar de um tema amplo e complexo não sendo possível esgotá-lo em um trabalho de conclusão de curso, ficam alguns itens que poderiam ser estudados, com o intuito de enriquecer o tema, como:

- Seguir com o dimensionamento da estrutura utilizando as tabelas aqui apresentadas;
- Verificar a influência no resultado final, atentando para possíveis mudanças nas ferragens e cobrimento de concreto requerido;
- Estudar outros tipos de vinculações, carregamentos e formatos de lajes.

## REFERÊNCIAS

ANDREOLI, R. V.; CARVALHO, J. C. **Apostila de Fortran**. INPE, 2001. 24 p. (Apostila)

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT. **NBR 6120**: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 1980.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT. **NBR 8681**: Ações e segurança nas estruturas - Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

BASTOS, P. S. S. **Estruturas de concreto I**. 2015. São Paulo. 115 p. Notas de Aula.

CARVALHO, Roberto Chust; FIGUEIREIDO FILHO, Jasson Rodrigues. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado**: Segundo a NBR 6118:2003. 3. ed. São Carlos: Edufscar, 2014.

CELESTE, A. P. **Análise de lajes retangulares à flexão considerando o acréscimo de armadura devido aos momentos volventes**. 2011. 84 f. Monografia (Trabalho de conclusão de curso) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

CHAVES, E. W. V. **Análise De Placas Com Variação De Espessura Através Do Método Dos Elementos De Contorno**. 1997. 171 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

DINEV, D. **Plate Analysis: Floor and deck slabs**. Department of structural mechanics. UACEG. 2013.

Disponível em: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfNW8AL/teoria-placas?part=4#>>.  
Acesso em: 5 maio 2016

FUSCO, Péricles Brasiliense. **Técnica de Armar as Estruturas de Concreto**. 1. ed. São Paulo: Pini, 1995.

GAELZER, R. **Introdução ao Fortran 90/95**. Pelotas: IFM/UFPel, 2010. 150 p. (Apostila).

HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos Materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

LOPES, A. F. O. **Estudo técnico comparativo entre lajes maciças e nervuradas com diferentes tipos de materiais de enchimento**. 2012. 102 f. Monografia (Trabalho de conclusão de curso) - Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2012.

MESQUITA FILHO, J. **Estudo das Lajes**. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - Universidade Estadual Paulista, São Paulo, p. 59, 2004.

PINHEIRO, L. M. Tabelas de lajes. São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, agosto, 2007.

SIMONIAN, D. **Análise Estrutural De Lajes De Concreto Armado Em Edifícios**. 2009. 59 f. TGI (Graduação em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia, Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 2009.

SOARES, A. M. **Análise comparativa de esforços e deflexões em placas retangulares finas**. 2004. 87 f. Dissertação (Mestrado em engenharia mecânica) -Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2004.

TAGUTI, Y. **Método Dos Elementos De Contorno Na Resolução Do Problema De Segunda Ordem Em Placas Delgadas**. 2010.189 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica – área de projetos) – Faculdade de Engenharia do Campus Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2010.

## **APÊNDICES**

**APÊNDICE A** – Algoritmo usado na realização dos cálculos para obtenção dos coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  para o caso de lajes submetidas a carregamentos uniformemente distribuídos

```

program uniforme
implicit none
integer:: n,m
real:: x,y,lx,ly,mx,mx1,my,my1,nx,ny,v,k1,k2,pi,q0,z,la,lb
real::a1
pi= 3.1415926535897932384626433832795028841971
mx= 1 ; ny= 1 ; mx1=0 ; my1=0
print *, "Informe as dimensoes da laje: "
read *, la,lb
print *, "Informe o valor do Poisson(v): "
read *, v
if (la<lb) then !lx sera a menor dimensao da laje
  lx=la
  ly=lb
else
  lx=lb
  ly=la
end if
x= lx/2 ; y= ly/2 ; n= 1 ; m= 1 ; nx=0 ; q0=1

do while (m < 110)
  k1= (m*pi*x)/lx

  do while (n < 110)
    a1= (1-((-1)**n))*1-((-1)**m) !1-((-1)**n se (n=par=0) (n=impar=2)
    k2= ((n*pi*y)/ly)
    mx=(((m/lx)**2)+(v*((n/ly)**2)))/(m*n*(((m**2)/(lx**2))+((n**2)/(ly**2))**2))*sin(k1)*sin(k2)*a1
    mx= mx*(4)/(pi**4)
    mx1= mx1+mx
    my=(((n/ly)**2)+(v*((m/lx)**2)))/(m*n*(((m**2)/(lx**2))+((n**2)/(ly**2))**2))*sin(k1)*sin(k2)*a1
    my= my*(4)/(pi**4)
    my1= my1+my
    n= n+1
  end do

  m= m+1 ; n=1
end do

n=m ; z=ly/lx
nx=mx1*(100)/(q0*(lx**2))
ny=my1*(100)/(q0*(lx**2))

print *, "numero de subdivisoes da placa em x",m
print *, "numero de subdivisoes da placa em y",n
print *, "mx1",mx1
print *, "my1",my1
print *, "lx",lx
print *, "ly",ly
print *, "lambida",z
print *, "nx",nx
print *, "ny",ny

end program uniforme

```

**APÊNDICE B** – Algoritmo usado na realização dos cálculos para obtenção dos coeficientes  $\mu_x$  e  $\mu_y$  para o caso de lajes submetidas a carregamentos triangulares.

```

Program triangular
implicit none
integer:: n,m
real::x,y,lx,ly,mx,mx1,my,my1,nx,ny,v,k1,k2,pi,q0,l,z
real::a1
pi= 3.1415926535897932384626433832795028841971
mx= 1 ; ny= 1 ; mx1=0 ; my1=0
print *, "Informe a dimensao da laje: "
read *, lx,ly
print *, "Informe o valor do poisson(v): "
read *, v
x= lx/1.72 ; y= ly/2 ; nx=0 ; n= 1 ; q0=1 ; m= 1

do while (m < 110)
  k1= ((m*pi*x)/lx)

  do while (n < 110)
    ! (1-((-1)**n)) se (n=par=0)se (n=impar=2)
    a1= (1-((-1)**n))*(-1)**m ! ((-1)**m) se (m=par=1)se (m=impar=-1)
    k2= ((n*pi*y)/ly)
    mx= (((m/lx)**2)+(v*((n/ly)**2)))/(m*n*(((m**2)/(lx**2))+((n**2)/(ly**2))**2))* (sin(k1))* (sin(k2))*a1
    mx= mx*((4)/(pi**4))
    mx1= mx1+mx
    my= (((n/ly)**2)+(v*((m/lx)**2)))/(m*n*(((m**2)/(lx**2))+((n**2)/(ly**2))**2))* (sin(k1))* (sin(k2))*a1
    my= my*((4)/(pi**4))
    my1= my1+my ; n= n+1
  end do

  m= m+1 ; n=1
end do
n=m ; z=lx/ly

if (lx<ly) then !para o calculo de nx e ny o l sera o menor valor entre lx e ly
  l=lx
else
  l=ly
end if
nx=mx1*(100)/(q0*(l**2)) ; ny=my1*(100)/(q0*(l**2))
print *, "numero de subdivisoes da placa em x" , m
print *, "numero de subdivisoes da placa em y" , n
print *, "mx1", mx1
print *, "my1", my1
print *, "lx", lx
print *, "ly", ly
print *, "lambida", z
print *, "nx", nx
print *, "ny", ny

end program triangular

```