Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências Humanas e Exatas
Curso de Licenciatura em Matemática

Cirila Djaner Lima da Silva

Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações

Monteiro - PB, Brasil
Abril de 2016

Cirila Djaner Lima da Silva

Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações

Monografia submetida à coordenação do curso de graduação em Licenciatura em Matemática como requisito para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Cládio Odair Pereira da Silva

Monteiro - PB, Brasil

Abril de 2016

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S586t Silva, Cirila Djaner Lima da

Teorema do ponto fixo de Banach [manuscrito] / Cirila Djaner Lima da Silva. - 2016.

57 p.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2016.

"Orientação: Prof. Me. Cládio Odair Pereira da Silva, Departamento de Matemática".

1. Ponto fixo. 2.Teorema do ponto Fixo. 3. Ponto Fixo de Banach. I. Título.

21. ed. CDD 510

Cirila Djaner Lima da Silva

Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações

Monografia submetida à coordenação do curso de graduação em Licenciatura em Matemática como requisito para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Trabalho aprovado. Monteiro - PB, Brasil, 06 de Abril de 2016:

Cládio Odair Pereira da Silva

Prof. Me. Cládio Odair Pereira da Silva
Orientador

Luciano dos Santos Ferreira

Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira
CCHE/UEPB

Marciel Medeiros de Oliveira

Prof. Me. Marciel Medeiros de Oliveira
CCHE/UEPB

Monteiro - PB, Brasil
Abril de 2016

Dedico este trabalho ao DEUS onipotente, onipresente e onisciente, ao qual devo minha vida, a minha família que sempre esteve ao meu lado, em especial a minha avó Maria de Lourdes Lima da Silva, que nunca me abandonou, afinal a vida não poderia ter me dado uma mãe melhor, e a minha tia irmã e fonte de incentivo Sheylla. Ainda, dedico este trabalho aos meus pais,e ao meu namorado Ivanio por todo seu apoio.

Agradecimentos

A Deus por ter me dado o dom da vida e a graça de conhecer o seu amor e a sua misericórdia, por me presentear a dádiva de lecionar, e por tudo que fez e faz em minha vida. A minha família que sempre me apoiou nos momentos mais difíceis, de modo especial a minha avó Maria de Lourdes, graças a senhora que eu alcancei essa vitória, e a minha tia irmã Sheylla que sempre me incentivou, estando ao meu lado em todos os momentos, a meu namorado Ivanio pelo seu apoio, paciência e compreensão, aos meus pais Shirlei e Márcio, que mesmo distantes me apoiaram, aos meus amigos e companheiros de luta Neto Martins e Aline Cordeiro aos quais quero levar pelo resto da vida, pois estiveram ao meu lado nos momentos mais difíceis, essa conquista não seria completa sem vocês, a meu mestre e amigo Berg, sua esposa Luciana e sua sogra Maria por terem aberto as portas de suas casas quando careci de ajuda, a Léticia Rodrigues e ao professor Brauner Coutinho, que sempre se dispuseram a me ajudar, ao professor Cládio Odair Pereira da Silva, que me orientou, auxiliando na fase final do meu curso. Finalmente agradeço a todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para que eu realizasse tamanha proeza.

"As pessoas podem fazer os seus planos,
porém é o senhor Deus quem dá a última palavra."
(Provérbios 16:1)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo estudar o Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas de suas aplicações. Este teorema estabelece condições para a existência e unicidade de pontos fixos nas soluções de algumas equações. Para tanto realiza-se um trabalho bibliográfico, dessa forma, inicialmente apresentamos definições e exemplos de Métricas, Espaços Métricos, Bolas e Esferas, Conjuntos Abertos e Conjuntos Fechados, Sequências em Espaços Métricos e Sequências de Cauchy. Em seguida estudamos as Funções Contínuas, por fim estudamos os Espaços Métricos Completos, enunciamos e demonstramos o Teorema do Ponto Fixo de Banach e expomos algumas de suas aplicações.

Palavras-chave: Ponto Fixo. Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Abstract

This work aims to study the Banach Fixed Point Theorem and some of its applications. This theorem establishes conditions for the existence and uniqueness of fixed points when resolving some equations. A bibliographical study Was carried out in order to, initially, present definitions and examples of metrics, metric spaces, balls and spheres, open and closed sets, sequences in metric spaces and Cauchy sequences. Further on, we study continuous functions and, finally, we study the complete metric spaces, we enounce and demonstrate the Banach Fixed Point Theorem and we expose some of its applications.

Key-words: Fixed point. The Banach Fixed Point Theorem.

Sumário

Introdução

O Teorema do Ponto Fixo de Banach é um importante resultado da teoria dos Espaços Métricos, estudados pela Análise Matemática. Ele é um resultado que estabelece condições para a existência e unicidade de pontos fixos nas soluções de algumas equações, ou seja, existem pontos que apesar de sofrerem uma aplicação não se alteram.

O presente estudo é fruto de um trabalho bibliográfico e foi dividido em três capítulos, os quais são compostos por definições, exemplos e resultados fundamentais para a compreensão da demonstração do teorema do Ponto Fixo de Banach, assim como de algumas de suas aplicações.

O primeiro capítulo expõe conceitos e resultados preliminares, nele são apresentados definições e exemplos de Métricas, Espaços Métricos, Bolas e Esferas, Conjuntos Abertos e Conjuntos Fechados, Sequências em Espaços Métricos e Sequências de Cauchy. O segundo capítulo aborda as Funções Contínuas. Por fim o terceiro capítulo trata dos Espaços Métricos Completos, expõe o Teorema do Ponto fixo de Banach, sua demonstração, e aplicações nas Equações Integrais de Volterra, Fredholm, no Teorema de Existência e Unicidade, e em Equações Numéricas.

Nos Apêndices, são apresentados alguns resultados utilizados nesse trabalho, os quais não foram demonstrados.

No presente trabalho, foram usados como referências os trabalhos de (DOMINGUES, 1982), (KREYSZIG, 1978), (LIMA, 2009), (LIMA, 2012), (LIMA, 2004), (MARCIEL; LIMA, 2005), (OLIVEIRA, 2012), (JUNIOR, 2013).

1 Resultados Preliminares

Nesse capítulo apresenta-se alguns conceitos e resultados preliminares como Espaços Métricos, Bolas e Esferas, Conjuntos Limitados, Conjuntos Abertos e Conjuntos Fechados, Sequências em Espaços Métricos, e Sequências de Cauchy; os quais servirão de base para o estudo que será desenvolvido nos próximos capítulos, com intuito de expor e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, bem como algumas de suas aplicações.

1.1 Espaços Métricos

Definição 1.1 *Uma métrica em um conjunto* $M \neq \varnothing$ *é uma aplicação* $d : M \times M \to \mathbb{R}$*, que associa a cada par ordenado* $(x, y) \in M \times M$ *um número real* $d(x, y)$*, chamado a distância de* x *à* y*, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas para quaisquer* $x, y, z \in M$ *:*

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
ii) Se $x \neq y$*, então* $d(x, y) > 0$;
iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Observação 1.1 *A condição (iv) é chamada de desigualdade triangular, e assegura-se no fato que, no plano cartesiano a medida de cada lado de um triângulo é menor que a soma das medidas dos outros dois lados desse triângulo.*

Um espaço métrico é um par (M, d) em que $M \neq \varnothing$ é um conjunto e d é uma métrica em M.

Observação 1.2 *Quando a métrica* d *estiver subtendida diremos simplesmente espaço métrico* M*.*

1.2 Exemplos de Espaços Métricos

Exemplo 1.1 (Métrica discreta ou Métrica zero-um) *Seja* $M \neq \varnothing$ *definamos*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ 1, & x \neq y. \end{cases} \tag{1.1}$$

Claramente, d é uma métrica e o espaço métrico assim obtido é chamado de espaço métrico discreto.

Exemplo 1.2 (A Reta Real) *Consideremos a reta $\mathbb{R}$ e a função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = |x - y|$ em que $|.|$ é o módulo usual. Claramente d é uma métrica em $\mathbb{R}$, e assim $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.*

Exemplo 1.3 (O Espaço $\mathbb{R}^n$) *Consideremos o espaço euclidiano n-dimensional*

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, ..., x_n)\,; x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\}\,. \tag{1.2}$$

Usualmente consideremos em $\mathbb{R}^n$ uma das seguintes métricas. Para $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ em $\mathbb{R}^n$ defina:

- $d(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$;
- $d_s(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;
- $d_m(x, y) = \text{máx}\{|x_i - y_i|, i = 1, 2, ..., n\}$.

d, d_s, d_m são métricas do $\mathbb{R}^n$.
Verifica-se facilmente que em d as condições i, ii e iii de métrica são claramente satisfeitas, a única condição de métrica que necessita ser vista com cuidado é a desigualdade triangular.

Para verificar a desigualdade triangular necessitamos da desigualdade de Cauchy Schwarz no $\mathbb{R}^n$, assim iremos apresentar e demonstrá-la a seguir.

Proposição 1.1 *Se $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ então*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prova 1.0.1 *Sabemos que*

$$(r - s)^2 = r^2 - 2rs + s^2 \geqslant 0 \Rightarrow r^2 + s^2 \geqslant 2rs\ \forall\ r, s \in \mathbb{R}.$$

Tomemos $p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ e $q = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, usando a desigualdade acima, com $r = \frac{|x_i|}{p}$ e $s = \frac{|y_i|}{q}$ obtemos,

$$2\frac{|x_i|}{p}\frac{|y_i|}{q} \leq \frac{{x_i}^2}{p^2} + \frac{{y_i}^2}{q^2},\ \forall\ 1 \leq i \leq n$$

$$\Rightarrow \ 2\frac{|x_1|}{p}\frac{|y_1|}{q} + ... + 2\frac{|x_n|}{p}\frac{|y_n|}{q} \ \leq \frac{{x_1}^2}{p^2} + \frac{{y_1}^2}{q^2} + ... + \frac{{x_n}^2}{p^2} + \frac{{y_n}^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow \ \frac{2}{pq}\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \ \leq 1+1 \ \Rightarrow \ \frac{2}{pq}\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \ \leq \ 2 \Rightarrow \ 2\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \ \leq \ 2pq$$

$$\Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \ \leq \ pq \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \ \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Agora, mostraremos a desigualdade triangular. Observe que

$$\begin{aligned}
[d(x,y)]^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i-y_i+z_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2 + \ 2\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)(z_i-y_i) + \sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy Schwarz, temos,

$$\begin{aligned}
[d(x,y)]^2 &\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2 + 2\ \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2 \\
&= [d(x,z)^2] + 2\ d(x,z)\ d(z,y) + [d(z,y)]^2 \\
&= [d(x,z)+d(z,y)]^2 \ \Rightarrow \ d(x,y) \ \leq d(x,z)+d(z,y).
\end{aligned}$$

Portanto, d é uma métrica em $\mathbb{R}^n$ e é chamada de métrica euclidiana.

Verifiquemos as condições de métricas para d_s e d_m . As condições $i), ii)$ e $iii)$ são triviais, portanto iremos verificar apenas a condição $iv)$. Sendo,

$$d_s(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid .$$

Para todo $i \in \{1,2,...,n\}$, temos,

$$\begin{aligned}
\mid x_i - y_i \mid &= \mid x_i - z_i + z_i - y_i \mid \leq \mid x_i - z_i \mid + \mid z_i - y_i \mid \\
&\Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid \leq \ \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - z_i \mid + \sum_{i=1}^{n} \mid z_i - y_i \mid \\
&\Rightarrow \ d_s(x,y) \ \leq \ d_s(x,z) + d_s(z,y).
\end{aligned}$$

Portanto, d_s é uma métrica em $\mathbb{R}^n$ a qual chamamos métrica da soma.
Sendo,

$$d_m(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} \mid x_i - y_i \mid .$$

Para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, temos,

$$\begin{aligned}
\mid x_i - y_i \mid &= \mid x_i - z_i + z_i - y_i \mid \leq \mid x_i - z_i \mid + \mid z_i - y_i \mid \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n} \mid x_i - z_i \mid + \max_{1\leq i\leq n} \mid z_i - y_i \mid \\
&\Rightarrow \max_{1\leq i\leq n} \mid x_i - y_i \mid \leq \max_{1\leq i\leq n} \mid x_i - z_i \mid + \max_{1\leq i\leq n} \mid z_i - y_i \mid \\
&\Rightarrow d_m(x, y) \ \leq \ d_m(x, z) + d_m(z, y).
\end{aligned}$$

Portanto, d_m é uma métrica em $\mathbb{R}^n$ a qual chamamos de métrica do máximo.

Observação 1.3 *Comparando as métricas d, d_s, d_m, obtemos a seguinte relação:*

$$d_m(x, y) \ \leq \ d(x, y) \ \leq \ d_s(x, y) \ \leq \ nd_m(x, y), \ \forall \ x, y \ \in \mathbb{R}^n.$$

Isto é, essas métricas são equivalentes.
De fato, temos que

$$\begin{aligned}
d_m(x, y) &= \max_{1\leq i\leq n} \{\mid x_i - y_i \mid\} = \left[\max_{1\leq i\leq n} \{\mid x_i - y_i \mid\}^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid^2\right)^{\frac{1}{2}} = d(x, y).
\end{aligned}$$

Logo, $d_m(x, y) \ \leq \ d(x, y)$. Por outro lado,

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid^2\right)^{\frac{1}{2}} \ \leq \ \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid = d_s(x, y).$$

Logo, $d(x, y) \ \leq \ d_s(x, y)$. Assim, segue que

$$\begin{aligned}
d_s(x, y) &= \mid x_1 - y_1 \mid + ... + \mid x_n - y_n \mid \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n} \mid x_i - y_i \mid + ... + \max_{1\leq i\leq n} \mid x_i - y_i \mid \\
&= n \max_{1\leq i\leq n} \mid x_i - y_i \mid = n \ d_m(x, y).
\end{aligned}$$

Assim, $d_s(x, y) \ \leq \ n \ d_m(x, y)$.

Exemplo 1.4 *Definimos a métrica no espaço de funções $C([a, b]) = \{x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}\}$ onde x é contínua dada por:*

$$d(x, y) = \max_{a\leq t\leq b} |x(t) - y(t)|$$

Mostremos que d é uma métrica em $C([a, b])$.

De fato, pelo Teorema de Weierstrass [1]*, temos que d está bem definida, assim verifiquemos as condições de métricas.*

i) Se $x = y$, $d(x,x) = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| = \max\{0\} = 0.$

ii) Se $x \neq y$*, então existe* t_0; $x(t_0) \neq y(t_0)$*. Assim,*

$$0 < |x(t_0) - y(t_0)| \leq \max |x(t) - y(t)| = d(x,y).$$

Portanto, $d(x,y) > 0$*.*

iii) Temos que, $|x(t) - y(t)| = |y(t) - x(t)|, \forall\ t \in [a,b]$*, assim,*

$$d(x,y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| = \max_{a \leq t \leq b} |y(t) - x(t)| = d(y,x).$$

iv) Temos que,

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &= |x(t) - z(t) + z(t) - y(t)| \\ &\leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \\ &\Rightarrow \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |z(t) - y(t)|. \end{aligned}$$

Exemplo 1.5 *Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \|.\| : \quad E &\to \mathbb{R}^+ = [0, +\infty] \\ u &\mapsto \|u\| \end{aligned}$$

tal que
i) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
ii) $\|\lambda u\| = |\lambda| \,.\, \|u\|\,,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall\ u \in E$;
iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|\,,\ \forall\ u, v \in E$.

O par $(E, \|.\|)$, em que E é um espaço vetorial real e $\|.\|$ é uma norma em E, é chamado de espaço vetorial normado. Neste caso, $\|.\|$ induz uma métrica em E dada por

$$d\,(u,v) = \|u - v\|\,, \forall\ u, v \in E.$$

De fato,

[1] veja resultados utilizados em apêndice A

i) $d(u,u) = \|u-u\| = \|0\| = 0$;
ii) Se $u \neq v$, temos, $d(u,v) = \|u-v\| > 0$;
iii) $d(u,v) = \|u-v\| = \|(-1)(v-u)\| = |-1|\,\|v-u\| = \|v-u\| = d(v,u)$;
iv) $d(u,v) = \|u-v\| = \|u-w+w-v\| \leq \|u-w\| + \|w-v\| = d(u,w) + d(w,v)$.

Portanto, $d(u,v) = \|u-v\|$ é métrica em E, $\forall\, u,v \in E$.

Observação 1.4 *No $\mathbb{R}^n$ defini-se as seguintes normas*

$$a)\ \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2};$$

$$b)\ \|x\|_s = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,;$$

$$c)\ \|x\|_m = \max_{1\leq i\leq n}\{|x_1|\,,...,|x_n|\}\,.$$

Essas normas induzem as seguintes métricas, respectivamente

$$a)\ d(x,y) = \|x-y\|\,;$$

$$b)\ d_s(x,y) = \|x-y\|_s\,;$$

$$c)\ d_m(x,y) = \|x-y\|_m\,.$$

Definição 1.2 *Dado um conjunto $X \neq \varnothing$, uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita limitada se existir uma constante positiva $k \in \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(x)| \leq k, \forall\ x \in X.$$

Exemplo 1.6 *Seja $B(X,\mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R};\ f$ é limitada$\}$ defina*

$$\|f\| = Sup\{|f(x)|\,;\ x \in X\}\,.$$

Temos que $B(X,\mathbb{R})$ é espaço vetorial normado.
Mostremos que $\|f\| = Sup\{|f(x)|\,; x \in X\}$ é uma norma em $B(X,\mathbb{R})$.
Sejam $f,g \in B(X,\mathbb{R})$, temos:

i) $\|f\| = 0 \Rightarrow Sup\{|f(x)|\,;\ x \in X\} = 0 \Rightarrow |f(x)| = 0,\ \forall\ x \in X \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall\ x \in X \Leftrightarrow f \equiv 0$;

$ii)\, \|\lambda f\| = Sup\{|\lambda f(x)|\,;\; x \in X\} = Sup\{|\lambda|\,|f(x)|\,;\; x \in X\} = |\lambda| Sup\{|f(x)|\,;\; x \in X\}$

$= |\lambda|\,\|f\|$ *;*

$iii)$ *Sejam* $f, g \in B(X, \mathbb{R})$ *e dado* $k > 0$ *existe* $x_0 \in X$ *tal que* :

$$\|f + g\| = Sup\{|f(x) + g(x)|;\; x \in X\} = |f(x_0) + g(x_0)| + k \leq |f(x_0)| + |g(x_0)| + k$$

$$\leq Sup\{|f(x_0)|; x \in X\} + Sup\{|g(x_0)|; x \in X\} + k = \|f\| + \|g\| + k.$$

Como k *é arbitrário temos,* $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. *Portanto,* $\|f\|$ *é uma norma em* $B(X, \mathbb{R})$.

Exemplo 1.7 *Seja* $C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R};\; f$ *contínua*$\}$. *Defina para cada* $f \in (C[a, b])$,

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt \quad e\ \|f\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Temos que $\|.\|_1$ *e* $\|.\|_\infty$ *são normas em* $C[a, b]$.

De fato, sejam $f, g \in C[a, b]$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *temos,*

$i)\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |f(t)|dt = 0 \Leftrightarrow |f(t)| = 0\ , \forall\ t \in [a, b] \Leftrightarrow f(t) = 0\ ,\ \forall\ t \in [a, b] \Leftrightarrow f \equiv 0;$

$ii)\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f(t)|dt = \int_a^b |\lambda||f(t)||dt = |\lambda| \int_a^b |f(t)|dt = |\lambda|\ \|f\|_1;$

$iii)\|f + g\|_1 = \int_a^b |(f + g)(t)|dt = \int_a^b |f(t) + g(t)|dt \leq \int_a^b |f(t)|dt + \int_a^b |g(t)|dt$

$= \|f\|_1 + \|g\|_1.$

Logo, $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

Agora, mostremos que $\|f\|_\infty$ *é uma norma em* $C[a, b]$.

$i)\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| = 0 \Leftrightarrow |f(t)| = 0,\ \forall\ t \in [a, b] \Leftrightarrow f(t) = 0,\ \forall\ t \in [a, b] \Leftrightarrow f \equiv 0;$

$ii)$*Seja* $\lambda \in \mathbb{R}$, *Temos,*

$\|\lambda f\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |\lambda f(t)| = \max_{a \leq t \leq b} |\lambda||f(t)| = |\lambda| \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| = |\lambda|\|f\|_\infty;$

$iii)$*Sejam* $f, g \in C[a, b]$, *temos,*

$$\|f+g\| = \max_{a\leq t\leq b}\{|f(t)+g(t)|\} \leq \max_{a\leq t\leq b}|f(t)| + \max_{a\leq t\leq b}|g(t)| = \|f\| + \|g\|.$$

Portanto, $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt$ *e* $\|f\|_\infty = \max_{a\leq t\leq b}|f(t)|$, *são normas em* $C[a,b]$.

Assim, $(C[a,b], \|f\|_1)$ *e* $(C[a,b], \|f\|_\infty)$ *são espaços vetoriais normados.*

Exemplo 1.8 (Espaço com Produto Interno) *Seja* E *um espaço vetorial real, um produto interno em* E *é uma função que associa a cada par ordenado* $(u,v) \in E$ *um número real indicado por* $\langle u,v\rangle$, *assim,* $\forall\ u,v,w \in E$ *e* $\forall\ \lambda\ \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle :\ & E\times E && \to \mathbb{R} \\ & (u,v) && \mapsto \langle u,v\rangle \end{aligned}$$

tal que
i) Se $u \neq 0$ *então* $\langle u,u\rangle\ > 0$, *e* $\langle u,u\rangle\ = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
ii) $\langle u,v\rangle\ =\ \langle v,u\rangle$;
iii)$\langle \lambda u,v\rangle\ =\ \lambda\langle u,v\rangle$;
iv)$\langle u+v,w\rangle\ =\ \langle u,w\rangle\ +\ \langle v,w\rangle$.
O par $(E, \langle .,.\rangle)$ *é chamado de espaço vetorial com produto interno.*

Exemplo 1.9 *Seja* $(E, \langle .,.\rangle)$ *um espaço vetorial com produto interno, defina;*

$$\begin{aligned} \|.\| :\ & E && \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & u && \mapsto \|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle} \end{aligned}$$

A função acima é uma norma. De fato,

i) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle u,u\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

ii) $\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u\rangle} = \sqrt{\lambda\lambda\langle u,u\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle u,u\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle u,u\rangle} = |\lambda|\,\|u\|$;

Para verificarmos a condição $iii)$ necessitamos da desigualdade de Cauchy Schwarz num espaço com produto interno, portanto iremos apresentar e demonstra-la a seguir

Proposição 1.2 *Em um espaço vetorial normado E tem-se*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|, \forall\ u, v \in E.$$

Prova 1.0.2 *Para $u = v = 0$ a demonstração é trivial. No caso em que $u \neq 0$ e $v \neq 0$ segue que, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u+\alpha v\|^2 &= \langle u+\alpha v,\ u+\alpha v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + \langle u, \alpha v\rangle + \langle \alpha v, u\ \rangle + \langle\ \alpha v,\ \alpha v\ \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\alpha\langle u, v\rangle + \alpha\ \alpha\langle v, v\rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\alpha\langle u, v\rangle + \alpha^2\|v\|^2. \end{aligned}$$

Dessa forma temos um trinômio do 2º grau em α cujo valor é sempre não negativo, ou seja, o discriminante tem que ser não positivo, assim:

$$\triangle = 4\ \langle u, v\rangle^2 - 4\ \|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$$

logo,

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2 \Rightarrow |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

Agora, verifiquemos a condição *iii*),

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u+v,\ u+v\rangle = \langle u,\ u\rangle + \langle u,\ v\rangle + \langle v,\ u\rangle + \langle v,\ v\rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\ \langle u,\ v\rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\ |\langle u, v\rangle| + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\ \|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \\ &\Rightarrow \|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 \Rightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|. \end{aligned}$$

Exemplo 1.10 *Em $\mathbb{R}^n$ temos que*

$$\langle x,\ y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

é um produto interno.

De fato, sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n),\ w = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$, então,

i) Seja $x \neq 0$, ou seja existe $x_i \neq 0$ para algum i, $1 \leq i \leq n$, assim,
$\langle x, x\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 > 0.$
ii) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = \sum_{i=1}^{n} y_ix_i = \langle y, x\rangle;$

$$iii)\ \langle \alpha x,\ y\rangle = \langle (\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ ...,\ \alpha x_n),\ (y_1, y_2, ..., y_n)\rangle = (\alpha x_1)y_1 + (\alpha x_2)y_2 + \cdots + (\alpha x_n)y_n$$
$$= \alpha(x_1y_1) + \alpha(x_2y_2) + \cdots + \alpha(x_ny_n) = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$
$$= \alpha\langle x, y\rangle;$$

$$iv)\ \langle x+y,\ w\rangle = \langle (x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ ...,\ x_n+y_n), (w_1,\ w_2,\ ...,\ w_n)\rangle$$
$$= (x_1+y_1)w_1 + (x_2+y_2)w_2 + \cdots + (x_n+y_n)w_n$$
$$= x_1w_1 + y_1w_1 + x_2w_2 + y_2w_2 + \cdots + x_nw_n + y_nw_n$$
$$= (x_1w_1 + x_2w_2 + \cdots + x_nw_n) + (y_1w_1 + y_2w_2 + \cdots + y_nw_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_iw_i + \sum_{i=1}^{n} y_iw_i = \langle x, w\rangle + \langle y, w\rangle.$$

Exemplo 1.11 *Temos que $(C[a,b], \langle .,.\rangle)$ é um espaço vetorial com produto interno onde*

$$\langle f,\ g\rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

De fato, sejam f, g e $h \in C([a,b];\ \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos:

$i)$ Suponha que $\langle f,\ f\rangle = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\ f(x)\ dx = 0 \Rightarrow \int_a^b (f(x)^2) dx = 0$
$$\Rightarrow (f(x)^2) = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall\, x \in [a,b] \Rightarrow f \equiv 0;$$

$$ii)\ \langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\ g(x)\ dx = \int_a^b g(x)\ f(x)\ dx = \langle g, f\rangle;$$

$$iii)\ \langle \alpha f, g\rangle = \int_a^b \alpha f(x)\ g(x)\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ g(x)\ dx = \alpha\langle f, g\rangle;$$

$$iv)\ \langle f+g, h\rangle = \int_a^b (f+g)(x)\ h(x)\ dx = \int_a^b (f(x)+g(x))\ h(x)\ dx$$
$$= \int_a^b [f(x)\ h(x) + g(x)\ h(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ h(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ h(x)\ dx$$
$$= \langle f,\ h\rangle + \langle g,\ h\rangle.$$

Definição 1.3 (Métrica Induzida) *Seja (M, d) um espaço métrico e $S \neq \varnothing$ um subconjunto de M. Usando entre os elementos de S a mesma distância que eles possuíam como elementos de M, temos que S pode ser considerado espaço métrico. Nesse caso, diz-se que S é um subespaço métrico de M, e a métrica de S é dita induzida pela de M.*

Exemplo 1.12 *Sejam* $(M_1, d_1), (M_2, d_2), ..., (M_n, d_n)$ *espaços métricos e* $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$. *Definimos as métricas,* $d,\ d_m,\ d_s : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *por,*

a) $d(x, y) = [d_1^2(x_1, y_1) + \cdots + d_n^2(x_n, y_n)]^{\frac{1}{2}}$;

b) $d_s(x, y) = d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_n(x_n, y_n)$;

c) $d_m(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{d_1(x_1, y_1), ..., d_n(x_n, y_n)\}$;

com $x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n)$.

1.3 Conjunto Aberto e Conjunto Fechado

Definição 1.4 (Bolas e Esferas) *Seja a um ponto no espaço métrico M. Dado um número real* $r > 0$, *definimos,*

i) A bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B_r(a)$ *dos pontos de M cuja a distância ao ponto a é menor do que r, ou seja;*

$$B(a, r) = B_r(a) = \{x \in M;\ d(x, a) < r\}.$$

ii) A bola fechada de centro a e raio r é o conjunto $B_r(a)$ *dos pontos de M cuja distância ao centro a é menor ou igual do que r, ou seja;*

$$B[a, r] = B_r[a] = \{x \in M; d(x, a) \leqslant r\}.$$

iii) A esfera de centro a e raio r é o conjunto $S_r(a)$, *dos pontos de M cuja distância ao centro a é igual a r. Ou seja;*

$$S(a, r) = S_r(a) = \{x \in M; d(x, a) = r\}.$$

Exemplo 1.13 *Seja M um espaço métrico, munido da métrica zero-um, então para todo* $a \in M$, *há dois casos a considerarmos;*

Se $0 < r \leq 1$ *temos,*

$$B(a, r) = \{x \in M; d(x, a) < r\} = \{a\}$$

pois o único ponto cuja distância à a é menor que 1, é o próprio a.

Se $r > 1$ *temos,*

$$B(a,r) = \{x \in M; d(x,a) < r\} = M$$

pois todos os pontos de M *estão a uma distância de* a *menor que* r.

Exemplo 1.14 *No* $\mathbb{R}^2$, *consideraremos três casos. Sejam* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, *e* $a = (a_1, a_2)$ *um ponto fixo do* $\mathbb{R}^2$ *utilizando a métrica euclidiana temos que, a bola de centro* a *e raio* $r > 0$, *é o conjunto*

$$B(a,r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; d\left((x_1, x_2), (a_1, a_2)\right) < r\},$$

ou seja,

$$d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r \Rightarrow (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2.$$

Graficamente teríamos um círculo de centro a *e raio* r *sem a borda.*

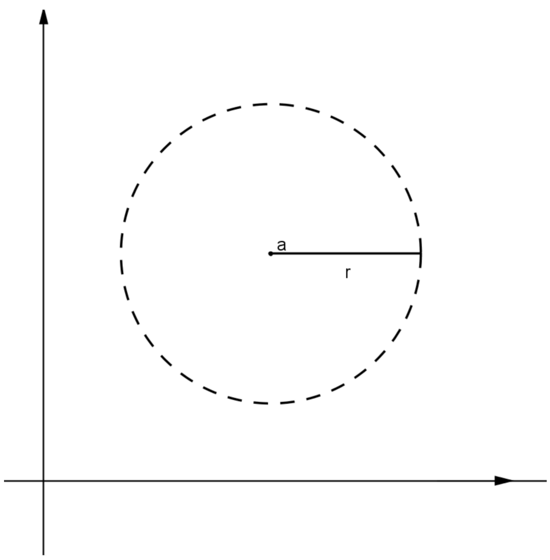

Figura 1 – Círculo de centro a e raio r sem a borda.

Agora utilizando a métrica da soma temos que a bola de centro a *e raio* r, *é o conjunto*

$$d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r.$$

Graficamente temos o interior de um quadrado de centro a, *lados com medida igual a* $2r$ *e diagonais paralelas aos eixos coordenados.*

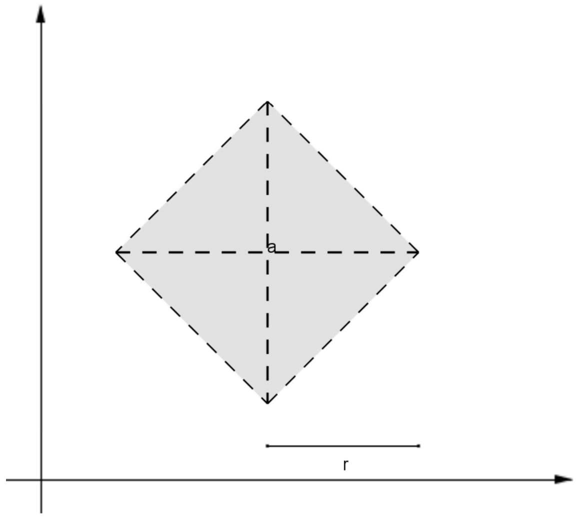

Figura 2 – Quadrado de centro a lados com medidas $2r$ e diagonais paralelas aos eixos coordenados.

Utilizando a métrica do máximo temos que a bola de centro a e raio $r > 0$, é o conjunto

$$d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = \max_{1 \le i \le n} \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}/d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) < r\}$$

ou seja,

$$d((x_1, x_2), (a_1, a_2)) = \max_{1 \le i \le n} \{|x_1 - a_1|; |x_2 - a_2|\} < r \Rightarrow |x_1 - a_1| < r \ e \ |x_2 - a_2| < r.$$

Graficamente teríamos o interior de um quadrado de centro a, lados com medida igual a $2r$ paralelos aos eixos coordenados.

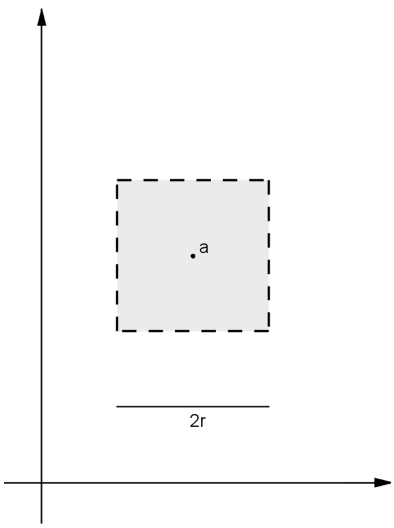

Figura 3 – Interior de um quadrado de centro a lados com medidas $2r$ paralelos aos eixos coordenados.

Definição 1.5 (Conjuntos limitados) *Seja (M, d) um espaço métrico, um subconjunto não vazio $S \subset M$, diz-se limitado se existir uma constante $k > 0$ tal que*

$$d\,(x, y) \leq k, \forall\ x, y \in S.$$

O menor desses números k será chamado o diâmetro de S. Assim, se

$$x, y \in S \Rightarrow d(x, y) \leq k,$$

ou seja k é uma cota superior do conjunto das distâncias $d(x, y)$ entre os pontos de S. Sabemos que a menor das cotas superiores de um conjunto de números reais é chamado de supremo. Então podemos definir o diâmetro de um conjunto limitado $S \subset M$ como o número real

$$diam(S) = Sup\{d(x, y);\ x, y \in S\}.$$

Se $\{d(x, y);\ x, y \in S\}$ for ilimitado superiormente, diz-se que S é não limitado.

Observação 1.5 *O conjunto vazio é limitado e seu diâmetro é zero.*

Exemplo 1.15 *Toda bola $B(a, r)$, é um conjunto limitado e seu diâmetro não excede $2r$. Com efeito sejam $x, y \in B(a, r)$ temos que $d(x, a) < r$. De acordo com a desigualdade triangular temos,*

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < r + r = 2r.$$

O mesmo se aplica a bola fechada $B[a, r]$. Assim, como $B[a, r] = B(a, r) \cup S(a, r)$. Temos que $S(a, r)$ também é limitado.

Definição 1.6 *Seja A um subconjunto de um espaço métrico M. O ponto $a \in A$ é dito ponto interior à A se existir $r > 0$ tal que*

$$B_r\,(a) \subset A.$$

O conjunto de todos os pontos inteiros à A é chamado de interior de A e é denotado por $int(A)$. Segue-se da definição que $int(A) \subset A$. Se $int(A) = (A)$, então diz-se que A é um conjunto aberto.

Exemplo 1.16 *O conjunto vazio é aberto, pois não há nenhum ponto nele que viole a definição de ponto interior.*

Exemplo 1.17 *O espaço métrico M é um conjunto aberto.*

Proposição 1.3 *Toda bola aberta é um conjunto aberto.*

Prova 1.0.3 *Seja M um espaço métrico, $a \in M$ e $r > 0$. Mostraremos que $B_r(a)$ é um conjunto aberto. Para isto, tomemos $b \in B_r(a)$ e $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < r - d(a,b)$. Temos que*

$$B_\varepsilon(b) \subset B_r(a).$$

Com efeito, se $x \in B_\varepsilon(b)$, então temos $d(x,b) < \varepsilon$. Logo,

$$d(x,a) \leq d(x,b) + d(b,a) < \varepsilon + d(a,b) < r$$

daí, $x \in B_r(a)$, isto é, $B_\varepsilon(b) \subset B_r(a)$.

Proposição 1.4 *A união qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

Prova 1.0.4 *Se $a \in A$ então existe $\alpha_0 \in I$ tal que $a \in A_{\alpha_0}$ e, pelo fato de A_{α_0} ser aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset A_{\alpha_0} \subset A$, de onde concluímos que A é um conjunto aberto.*

Proposição 1.5 *A interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

Prova 1.0.5 *Seja $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, onde A_i, para todo $i = 1, ..., n$ são conjuntos abertos. Se $a \in A$, então $a \in A_i$, $\forall\ i = 1, ..., n$.*
Como os A_i são abertos, então existe $r_i > 0$ tal que $B_{r_i}(a) \subset A_i$, $\forall\ i = 1, ..., n$. Tome $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i > 0$, logo $B_r(a) \subset B_{r_i}(a) \in A_i$, $\forall\ i = 1, ..., n$. Assim, $B_r(a) \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ e daí A é aberto.

Observação 1.6 *Observamos que a intersecção de uma família qualquer de conjuntos abertos nem sempre é um conjunto aberto. De fato, se consideramos a reta $\mathbb{R}$ com a métrica usual e se tomarmos a família de conjuntos abertos*

$$A_n = \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, ..., \quad \text{então} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} = \{0\}$$

que não é aberto na métrica usual em $\mathbb{R}$.

Definição 1.7 *Sejam (M, d_1) e (M, d_2) dois espaços métricos. Diz-se que as métricas d_1 e d_2 são equivalentes se se existirem constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que*

$$\alpha \leq \frac{d_2(x,y)}{d_1(x,y)} \leq \beta;\ \forall\ x, y \in M,\ x \neq y.$$

Proposição 1.6 *Sejam d_1 e d_2 métricas equivalentes em M. Então $A \subset M$ é aberto em (M, d_1) se, e somente se, A for aberto em (M, d_2).*

Prova 1.0.6 *Como d_1 e d_2 são métricas equivalentes então existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que*

$$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y), \forall\ x, y \in M.$$

Seja $a \in A$, sendo A aberto em (M, d_1), então existe $r_1 > 0$ tal que $B_{r_1}(a) \subset A$, ou seja $d_1(x,a) < r_1$, $\forall\ x \in A$. Mas

$$d_2(x,a) \ \leq \ \beta\ d_1(x,a) \ < \ \beta\ r_1 = r_2 \Rightarrow d_2(x,a) < r_2\ , \forall\ x \in A.$$

Logo, $B_{r_2}(a) \subset A$. Assim, A é aberto em (M, d_2).

Por outro lado, sendo A aberto em (M, d_2), então existe $r_2 > 0$ tal que $B_{r_2}(a) \subset A$, ou seja, $d_2(x,a) < r_2$, $\forall\ x \in A$. Mas

$$\alpha\ d_1(x,a) \ \leq d_2(x,a) \Rightarrow \ \alpha d_1(x,a) < r_2 \Rightarrow d_1(x,a) < \frac{r_2}{\alpha} = r_1 \Rightarrow d_1(x,a) < r_1 \Rightarrow B_{r_1}(a) \subset A.$$

Mostrando que A é aberto em (M, d_1).

Proposição 1.7 *Seja M um espaço métrico, então $A \subset M$ é aberto se, e somente se, A é a união de bolas abertas.*

Prova 1.0.7 *Suponha que A é aberto, então para todo $a \in A$ existe $B_{r_a}(a) \subset A$. Logo $\bigcup\limits_{a \in A} B_{r_a}(a) \subset A$. Por outro lado, se $a \in A$ então $a \in B_{r_a}(a)$, logo $a \in \bigcup\limits_{a \in A} B_{r_a}(a)$, daí, $A \subset \bigcup\limits_{a \in A} B_{r_a}(a)$ portanto, $A = \bigcup\limits_{a \in A} B_{r_a}(a)$. Reciprocamente, se $A = \bigcup\limits_{a \in A} B_{r_a}(a)$, temos que A é aberto, por ser a união qualquer de abertos.*

Proposição 1.8 *O interior de um subconjunto A de um espaço métrico M é o maior conjunto aberto contido em A.*

Prova 1.0.8 *Se A não tiver pontos interiores, então seu interior é o conjunto vazio, que é aberto e portanto A não contém nenhum outro conjunto aberto.*
Suponhamos que $int(A) \neq \varnothing$. Seja $a \in int(A)$, assim existe $r_1 > 0$ tal que $B_{r_1}(a) \subset A$. Se $b \in B_{r_1}(a)$, existe $r_2 > 0$ tal que $B_{r_2}(b) \subset B_{r_1}(a)$ e portanto $B_{r_2}(a) \subset A$. Logo, $b \in int(A)$ e daí segue que $int(A)$ é a união de bolas abertas e consequentemente é um conjunto aberto.
Se $B \subset A$ for aberto, então $B \subset int(A)$. Com efeito note que, todo $b \in B$ é interior a $B\,(b \in intB)$ e portanto (com $B \subset A$) é interior a $A\,(b \in intA)$.

Definição 1.8 *Seja $A \subset M$, diz-se que $a \in M$ é aderente à A se para todo $r > 0$ tem-se $B_r(a) \cap A \neq \varnothing$.*

Os pontos aderentes são de dois tipos: Pontos isolados e Pontos de acumulação. Um ponto aderente $a \in M$ é dito isolado se existir $r > 0$ tal que

$$B_r(a) \cap A = \{a\}.$$

Se $a \in M$ for um ponto aderente à A que não seja isolado, então a é um ponto de acumulação. Isso significa que, para todo $r > 0$, tem-se

$$(B_r(a) - \{a\}) \bigcap A \neq \varnothing.$$

Observação 1.7 *Se um subconjunto $A \subset M$, possuir ponto de acumulação, então A é um conjunto infinito.*

Definição 1.9 *Seja $A \subset M$, definimos o fecho ou aderência de A como sendo o conjunto formado pelos pontos aderentes à A, e denotamos $\bar{A}$.*

Proposição 1.9 *O ponto $a \in M$ é aderente à $A \subset M$ se, e somente se, $d(a, A) = 0$*

Prova 1.0.9 *Suponhamos que $d(a, A) = inf\,\{d(a, x)\,;\ x \in A\} = 0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in A$ tal que $0 < d(a, x_\varepsilon) < \varepsilon$, ou seja, $x_\varepsilon \in B_\varepsilon(a)$ e daí $x_\varepsilon \in B_\varepsilon(a) \cap A$ de onde $B_\varepsilon(a) \bigcap A \neq \varnothing$, e assim a é valor aderente à A. Reciprocamente, se $a \in \bar{A}$ então, para todo $r > 0$ tal que $B_r(a) \cap A \neq \varnothing$. Logo, toda bola aberta $B_r(a)$ contém um $x_r \in A$ e assim para todo $r > 0$ existe $x_r \in A$ tal que $d(a, x_r) < r$. Ou seja, $d(a, A) = 0$.*

Definição 1.10 *Diz-se que um subconjunto $A \subset M$ é fechado se $A = \bar{A}$.*

Observação 1.8 *Como $A \subset \bar{A}$, para provar que A é fechado é suficiente mostrar que $\bar{A} \subset A$.*

Exemplo 1.18 *Todo subconjunto finito $F = \{a_1, ..., a_n\} \subset M$ é fechado em M. Assim, se $a \notin F$ então $d(a, F)$ é o menor dos números $d(a, a_1), \ldots, d(a, a_n)$ e portanto $d(a, F) > 0$. Em particular, todo ponto $a \in M$ é um subconjunto fechado de M.*

Proposição 1.10 *O fecho de um subconjunto é um conjunto fechado.*

Prova 1.0.10 *Seja A um subconjunto de um espaço métrico M. Denotamos por $\bar{\bar{A}}$ o fecho de $\bar{A}$. Como $\bar{A} \subset \bar{\bar{A}}$, mostremos que $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$. Seja $a \in \bar{\bar{A}}$, então dado $\epsilon > 0$ existe $b \in \bar{A}$ tal que $d(a,b) < \epsilon$, mas desde que $b \in \bar{A}$, existe $c \in A$ tal que $d(b,c) < \epsilon - d(a,b)$. Logo,*

$$d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c) < d(a,b) + \epsilon - d(a,b) = \epsilon$$

e assim $a \in \bar{A}$. Portanto, $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$ e $\bar{A}$ é fechado.

Proposição 1.11 *O complementar de um conjunto fechado é um conjunto aberto. O complementar de um conjunto aberto é um conjunto fechado.*

Prova 1.0.11 *Seja F um conjunto fechado e seja F^c seu complementar. mostremos que F^c é aberto. Seja $a \in F^c$ então $a \notin F$, como $F = \bar{F}$ logo $a \notin \bar{F}$, assim existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \cap F = \varnothing$, daí $B_r(a) \subset F^c$, mostrando que F^c é aberto.*
Agora, seja A um conjunto aberto e seja A^c seu complementar. Mostremos que A^c é fechado, isto é $\bar{A}^c = A^c$. Sabemos que $A^c \subset \bar{A}^c$. Por outro lado, seja $a \in \bar{A}^c$ então para todo $r > 0$ tem-se $B_r(a) \cap A^c \neq \varnothing$, daí $a \notin int(A)$. Como $int(A) = A$ tem-se $a \notin A$ donde segue que $a \in A^c$. Assim $\bar{A}^c \subset A^c$ mostrando que A^c é fechado.

1.4 Sequências em Espaços Métricos

Definição 1.11 *Seja M um espaço métrico, definimos uma sequência em M como sendo uma aplicação*

$$\begin{aligned} x : \mathbb{N}^* &\longrightarrow M. \\ n &\longrightarrow x_n \end{aligned}$$

Usaremos as notações $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ ou (x_n) para denotar uma sequência. Dada a sequência (x_n), cada imagem x_n é chamada termo da sequência, assim para indicar o conjunto dos termos da sequência, escrevemos $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Exemplo 1.19 *A sequência (1,2,1,2,1,2,...) é uma sequência de elementos de $\mathbb{R}$, onde o conjunto dos termos é $\{1, 2\}$.*

Definição 1.12 *Dada uma sequência (x_r) em M, se $\{r_1, r_2, ...\} \subset \mathbb{N}^*$ e $\{r_1 < r_2 < ...\}$ então a aplicação dada por $r_i \longrightarrow x_{r_i}$ recebe o nome de subsequência de (x_r) e é denotada por $(x_{r_1},\ x_{r_2}, ...)$.*

Exemplo 1.20 *Seja a sequência* $(1, 2, 3, 1, 2, 3, ...)$ *de elementos de* $\mathbb{R}$*, assim* $(1, 1, 1, ...)$ *é uma subsequência da sequência dada, pois, temos que,*

$$(1, 1, 1, ...) = (x_1, x_4, x_7, x_{10}, ...)$$

sendo $(1, 2, 3, 1, 2, 3, ...) = (x_1, x_2, x_3, x_4, ...)$.

Definição 1.13 *Uma sequência* (x_n) *de pontos de um espaço métrico M se diz limitada, se o conjunto* $\{x_n; n = 1, 2, ...\}$ *dos termos dessa sequência é limitada, isto é, existe* $k > 0$ *tal que* $d(x_r, x_s) < k$*, para quaisquer* x_r *e* x_s *da sequência dada.*

Exemplo 1.21 *Se a é um número real com* $|a| \leq 1$*, temos que a sequência dos números* $x_n = a^n$ *é limitada, pois* $|x_n| \leq 1$ *para todo n.*

Definição 1.14 *Seja* (x_n) *uma sequência num espaço métrico M. Dizemos que o ponto* $a \in M$ *é limite da sequência* (x_n) *quando, para todo* $\varepsilon > 0$ *dado arbritáriamente, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n > n_0 \;\Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Assim, para indicar que a é limite da sequência (x_n) *usa-se a notação* $\lim x_n = a$*, ou ainda* $x_n \longrightarrow a$ *(*x_n *tende para a). Quando existe* $a = \lim x_n \in M$*, dizemos que a sequência de pontos* $x_n \in M$ *é convergente em M, e converge para a. Caso contrário dizemos que a sequência diverge.*

Observação 1.9 *Seja* (x_n) *uma sequência no espaço métrico M. Dizer que* $\lim x_n = a \in M$ *significa que, dada uma bola aberta B, de centro a, tem-se* $x_n \in B$ *para todo n suficientemente grande.*

Proposição 1.12 (Unicidade do Limite) *Seja* (x_n) *uma sequência de um espaço métrico M. Se* (x_n) *é convergente, então seu limite é único.*

Prova 1.0.12 *Suponhamos que* $\lim x_n = p$ *e* $\lim x_n = q$*. Se* $p \neq q$*, então dado* $\varepsilon = \dfrac{d(p, q)}{2} > 0$*, existem* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *tais que,*

$$n \geq n_1 \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon, \;\text{ e } n \geq n_2 \Rightarrow d(x_n, q) < \varepsilon.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$*, então temos*

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(p, q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(p, q)$$

o que é um absurdo. Portanto $p = q$.

Observação 1.10 *Se uma sequência (x_n) converge para dois limites distintos dizemos que essa sequência é divergente.*

Proposição 1.13 *Se uma sequência (x_n) de pontos de um espaço M converge para $p \in M$, então toda subsequência de (x_n) também converge para p.*

Prova 1.0.13 *Seja $(x_{r_1}, x_{r_2}, ..., x_{r_k}, ...)$ uma subsequência de (x_n). Dado $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que*

$$n \geq k \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon$$

assim, como $r_i \in \mathbb{N}$ e $r_i \geq r_k$ vale que $d(x_{r_i}, p) < \varepsilon$. Portanto $\lim x_{r_i} = \lim x_n = p$.

Exemplo 1.22 *Se uma sequência (x_n) possui duas subsequências convergindo para limites distintos, então ela é divergente, pois pela proposição 1.13, se existisse $\lim x_n = a$ então toda subsequência de (x_n) convergiria para a, e portanto pela proposição 1.12 nenhuma subsequência possuiria um limite diferente de a.*

Observação 1.11 *Toda sequência contante, $x_n = a$, é convergente e $\lim x_n = a$.*

Proposição 1.14 *Toda sequência convergente é limitada.*

Prova 1.0.14 *Seja $\lim x_n = a$ num espaço métrico M. Tomando $\varepsilon = 1$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(a; 1)$. Portanto o conjunto dos valores da sequência está contido na reunião $\{x_1, ..., x_{n_0}\} \cup B(a; 1)$ de dois conjuntos limitados, logo é limitado.*

Observação 1.12 *A recíproca da proposição 1.14 é falsa.*

Exemplo 1.23 *A sequência de números reais $x_n = (-1)^{n+1}$ é limitada, mais não é convergente.*

Proposição 1.15 *Um ponto a, num espaço métrico M, é limite de uma subsequência de (x_n) se, e somente se, toda bola aberta de centro a contém termos x_n com índices n arbitrariamente grandes.*

Prova 1.0.15 *Se uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...)$ converge para a então, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$k > k_0 \Rightarrow x_{n_k} \in B(a; \varepsilon).$$

Logo toda bola $B(a; \varepsilon)$ de centro a contém termos x_n com índices arbitrariamente grandes, a saber, todos os índices n_k com $k > k_0$.
Reciprocamente, supondo cumprida esta condição, a bola $B(a; 1)$ contém um termo x_{n_1},

a bola $B(a; \frac{1}{2})$ contém um termo x_{n_2} com índices $n_2 > n_1$, e assim por diante; para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos achar $x_{n_k} \in B(a; \frac{1}{k})$ com $n_k > n_{k-1} > ... > n_2 > n_1$. Isso define um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ e uma subsequência (x_{n_k}) tal que $d(x_{n_k}, a) < \dfrac{1}{k}$. Segue-se que $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} x_{n_k} = a$.

1.5 Sequência de Cauchy

Definição 1.15 *Uma sequência (x_n) num espaço métrico M é de Cauchy quando, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se, $m, n > n_0$ tem-se $d(x_m, x_n) < \epsilon$.*

Observação 1.13 *Toda subsequência de uma sequência de Cauchy é também de Cauchy.*

Proposição 1.16 *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Prova 1.0.16 *Seja $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ no espaço métrico M, então dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ temos $d(x_n, a) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Se $m, n > n_0$ temos*

$$d(x_m, x_n) < d(x_m, a) + d(a, x_n) = d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Observação 1.14 *Nem toda sequência de Cauchy é convergente. Para ver isto tomemos uma sequência de números reais (x_n) tal que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Como (x_n) converge em $\mathbb{R}$ (ou seja o limite existe) pela proposição 1.16 (x_n) é de Cauchy no espaço métrico $\mathbb{R}$, e em particular $\mathbb{Q}$. Porém (x_n) não é convergente em $\mathbb{Q}$.*

Proposição 1.17 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Prova 1.0.17 *Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M. Dado $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < 1$. Logo o conjunto $\{x_{n_0+1},\ x_{n_0+2}, \ldots\}$ é limitado e tem diâmetro menor ou igual a 1. Assim temos que,*

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_1, \ldots, x_{n_0}\} \cup \left\{x_{n_{0+1}},\ x_{n_{0+2}}, \ldots\right\}$$

é limitada.

Observação 1.15 *Nem toda sequência limitada é de Cauchy. Basta ver o exemplo na reta dado por $(x_n) =\ (1, 0, 1, 0, ...)$. Embora seja limitada, está sequência não é de Cauchy, pois $d(x_n, x_{n+1}) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Basta você tomar $\epsilon = \dfrac{1}{2}$, daí $1 > \dfrac{1}{2}$. Logo não é de Cauchy.*

Exemplo 1.24 *A sequência de números reais* $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ *não é de Cauchy, porque não é limitada.*

Proposição 1.18 *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente e tem o mesmo limite da subsequência.*

Prova 1.0.18 *Seja* (x_n) *uma sequência de Cauchy no espaço métrico* M *e seja* (x_{n_k}) *uma subsequência de* (x_n)*, tal que o* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a \in M$*. Afirmamos que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$*. De fato dado* $\epsilon > 0$*, existe* $p \in \mathbb{N}$*, tal que se*

$$n_k > p \Rightarrow d\left(x_{n_k}, a\right) < \frac{\epsilon}{2}$$

e existe também $q \in \mathbb{N}$*, tal que se* $m, n > q$ *tem-se*

$$d\left(x_m, x_n\right) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $n_0 = \max\{p, q\}$*. Para todo* $n > n_0$ *existe* $n_k > n_0$ *e então*

$$d\left(x_n, a\right) \leq d\left(x_n, x_{n_k}\right) + d\left(x_{n_k}, a\right) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Proposição 1.19 *Toda sequência monótona limitada de números reais é convergente.*

Antes de iniciarmos a demonstração é necessário fixarmos a ideia de sequência monótona, assim, uma sequência (x_n) de números reais diz-se crescente quando se tem $x_1 < x_2 < ... < x_n < ...$, ou seja $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando vale apenas $x_n \leq x_{n+1}$, a sequência diz-se não decrescente. Analogamente define-se a sequência decrescente quando $x_{n+1} < x_n$, para qualquer $n \geq 1$. Quando vale apenas $x_{n+1} \leq x_n$ para todo n, a sequência diz-se não crescente. Esses são os tipos de sequências monótonas compreendidas no espaço $\mathbb{R}$. Agora prosseguiremos com a demonstração da proposição 1.19.

Prova 1.0.19 *Seja a sequência limitada* $(x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq ...)$*. Tomemos* $a = \sup(x_n)$ *com* $n \in \mathbb{N}$*. Afirmamos que* $a = \lim x_n$*. Com efeito, dado arbitrariamente* $\varepsilon > 0$*, o número* $a - \varepsilon$*, sendo menor que* a*, não pode ser cota superior do conjunto dos valores* x_n*. Logo existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$*. Então*

$$n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

2 Funções Contínuas

Este capítulo exibe alguns resultados e definições de um estudo acerca das funções contínuas. Intuitivamente nas aplicações contínuas ao tomarmos pontos do domínio que sejam próximos obtemos correspondentes na imagem também próximos.

2.1 Funções Contínuas

Definição 2.1 *Sejam $(M, d_1), (N, d_2)$ espaços métricos, diz-se que uma aplicação $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ se, dado $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que*

$$d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Diz-se que f é contínua se for contínua em todo ponto de M. Se f não é contínua no ponto a, diz-se que f é descontinua nesse ponto. Isto significa que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, pode-se obter $x_\delta \in M$ com $d(x_\delta, a) < \delta$ mas

$$d(f(x_\delta), f(a)) \geq \epsilon.$$

Observação 2.1 *Costuma-se denotar as métricas d_1 e d_2 por d.*

Exemplo 2.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função dada por $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que f é contínua.*
De fato, dado $a \in \mathbb{R}$ para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, tomando $\delta = \varepsilon$ temos,

$$d(x, a) =\mid x - a \mid< \delta \Rightarrow\mid f(x) - f(a) \mid = \mid x - a \mid < \delta \ = \ \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua.

Exemplo 2.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função constante dada por $f(x) = k$. Para todo $k \in \mathbb{R}$ temos que f é contínua.*
De fato, dado $a \in \mathbb{R}$ para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) =\mid x - a \mid< \delta \Rightarrow\mid f(x) - f(a) \mid = \mid k - k \mid = \mid 0 \mid = \ 0 \ < \epsilon.$$

Logo, f é contínua.

Proposição 2.1 *Uma função $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ se, e somente se, dada uma bola aberta $B_\epsilon(f(a))$ existir uma bola aberta $B_\delta(a)$ tal que $f(B_\delta(a)) \subset B_\epsilon(f(a))$.*

Prova 2.0.1 *Suponhamos que* $f : M \to N$ *seja contínua em* $a \in M$. *Assim, dado* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon$$

o que é equivalente a $x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\epsilon(f(a))$ *ou seja,* $f(B_\delta(a)) \subset B_\epsilon(f(a))$.
Por outro, lado suponhamos que dada uma bola aberta $B_\epsilon(f(a))$ *exista uma bola aberta* $B_\delta(a)$ *tal que* $f(B_\delta(a)) \subset B_\epsilon(f(a))$. *Isto significa que se* $x \in B_\delta(a)$ *então* $f(x) \in B_\epsilon(f(a))$, *ou seja*

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon$$

logo f *é contínua em* a.

Exemplo 2.3 *Uma aplicação* $f : M \to N$ *é uma imersão isométrica se*

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y), \forall\ x, y \in M.$$

Notemos que f *é contínua. Com efeito, dado* $\epsilon > 0$, *basta tomar* $\delta = \epsilon$, *pois se* $a \in M$ *com* $d(x, a) < \delta$ *tem-se*

$$d(f(x), f(a)) = d(x, a) < \delta = \epsilon.$$

Observação 2.2 *Sabemos que uma imersão isométrica é injetora pois*

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow d(f(x), f(y)) = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

não necessariamente sobrejetora, caso contrário é o que chamamos de isometria.

Exemplo 2.4 *Uma aplicação* $f : M \to N$ *é dita Lipschitziana quando existe* $\lambda > 0$ *(chamada de constante de Lipschitz) tal que*

$$d(f(x), f(a)) \leq \lambda d(x, a), \forall\ x, a \in M.$$

Neste caso f *é contínua (em cada ponto* $a \in M$*). De fato, dado* $\epsilon > 0$, *tomemos* $\delta = \dfrac{\epsilon}{\lambda}$, *pois se* $d(x, a) < \delta$ *tem-se*

$$d(f(x), f(a)) \leq \lambda\ d(x, a) < \lambda\ \delta = \lambda\ \frac{\epsilon}{\lambda} = \epsilon.$$

Exemplo 2.5 *A função característica* $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$I(x) = \begin{cases} 1, & se\ \ x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & se\ \ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

é descontínua em todo $a \in \mathbb{R}$.
Com efeito, tomemos $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. *Dado* $\delta > 0$ *tomemos* $x_\delta \in \mathbb{R}$ *tal que,* $|x_\delta - a| < \delta$, *sendo* $x_\delta \in \mathbb{Q}$ *e* $a \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ *temos,* $|I(x_\delta) - I(a)| = 1 > \dfrac{1}{2}$.

Exemplo 2.6 *Uma função $f : M \to N$ satisfaz a condição de Holder de ordem $k > 0$ se existir $c > 0$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq \ c \ [d(x,y)]^k \ \forall \ x, y \in M.$$

Notemos que f é contínua. De fato, dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{\frac{1}{k}}$. Se $d(x,y) < \delta$ tem-se

$$d(f(x), f(y)) \ \leq \ c \ \left[\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{\frac{1}{k}}\right]^k = \ c \ \frac{\epsilon}{c} = \epsilon.$$

Proposição 2.2 *Uma função $f : M \to N$ é contínua em $a \in M$ se, e somente se, o fato de uma sequência $x_n \subset M$ com $x_n \to a$ implicar $f(x_n) \to f(a)$.*

Prova 2.0.2 *Suponhamos que f seja contínua em $a \in M$, considere $(x_n) \subset M$ com $x_n \to a$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Como $x_n \to a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ $d(x_n, a) < \delta$, e assim

$$d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$$

ou seja, $f(x_n) \to f(a)$.
Reciprocamente, se f não fosse contínua em a, existiria $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existiria $x_\delta \in B_\delta(a)$ tal que $d(f(x_\delta), f(a)) \geq \epsilon$. Assim, tomando $\delta = 1$ existe $x_1 \in B_1(a)$ com

$$d(f(x_1), f(a)) \geq \epsilon.$$

Tomando $\delta = \frac{1}{2}$, existe $x_2 \in B_{\frac{1}{2}}(a)$ com

$$d(f(x_2), f(a)) \geq \epsilon.$$

Tomando $\delta = \frac{1}{3}$ existe $x_3 \in B_{\frac{1}{3}}(a)$ com

$$d(f(x_3), f(a)) \geq \epsilon.$$

Prosseguindo desta maneira para $\delta = \frac{1}{n}$, encontramos $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a)$ com

$$d(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon.$$

Isto implica que $x_n \to a$ mas $f(x_n) \nrightarrow f(n)$ o que contradiz a hipótese.

Exemplo 2.7 *Seja $M = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ com a métrica induzida de $\mathbb{R}$. A função $f : M \to \mathbb{R}$ definida por,*

$$f(x) = \begin{cases} n, se & x = \dfrac{1}{n}; \\ 0, se & x = 0. \end{cases}$$

é contínua em todo $\dfrac{1}{n} \in M$, *porém não é contínua em zero.*
De fato, note que o conjunto $\left\{\dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ *é discreto, isto é, todo ponto* $\dfrac{1}{n}$ *é isolado, daí existe* $\delta > 0$ *tal que* $B_\delta\left(\dfrac{1}{n}\right) = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$. *Assim, dado* $\epsilon > 0$ *tome* $\delta = \delta_{\frac{1}{n}}$ *tal que,*

$$d\left(x, \frac{1}{n}\right) < \delta \Rightarrow x = \frac{1}{n} \Rightarrow d\left(f(x), f\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0 \ < \ \varepsilon.$$

Agora, mostremos que f não é contínua em zero. Basta tomar $x_n = \frac{1}{n}$. *Note que* $(x_n) \subset M$ *e* $x_n \longrightarrow 0$, *mas,*

$$f(x_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = n \nrightarrow 0 = f(0).$$

Proposição 2.3 *Dada uma função* $f : M \to N$, *as seguintes afirmações são equivalentes:*
a) f é contínua;
b) Para todo $q \in N$ *e* $\lambda > 0$, $f^{-1}(B_\lambda(q))$ *é aberto em M;*
c) Para todo aberto $G \subset N$, $f^{-1}(G) \subset M$ *é aberto;*
d) Se $F \subset N$ *é fechado, então* $f^{-1}(F) \subset M$ *é fechado.*

Prova 2.0.3 $(a) \Rightarrow (b)$ *Seja* $p \in f^{-1}(B_\lambda(q))$. *Assim* $f(p) \in B_\lambda(q)$ *e como* $B_\lambda(q)$ *é aberto, existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $B_\epsilon(f(p)) \subset B_\lambda(q)$. *Desde que f é contínua em p, existe* $\delta > 0$ *tal que,*

$$f(B_\delta(p)) \subset B_\epsilon(f(p)),$$

ou seja,

$$B_\delta(p) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(p))) \subset f^{-1}(B_\lambda(q))$$

assim se $p \in f^{-1}(B_\lambda(q))$ *então p é ponto interior de* $f^{-1}(B_\lambda(q))$, *isto é,* $f^{-1}(B_\lambda(q))$ *é aberto em M.*

$(b) \Rightarrow (c)$ *Como G é aberto em N, segue-se que* $G = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ *em que* B_α *é uma bola aberta em N, para cada* α. *Segue-se que,*

$$f^{-1}(G) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha),$$

desde que $f^{-1}(B_\alpha)$ *é aberto então* $\bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$ *é aberto.*

$(c) \Rightarrow (d)$ *Como* $F \subset N$ *é fechado,* $F^c = G$ *é aberto. Daí,* $f^{-1}(F^c) = \left[f^{-1}(F)\right]^c$ *é aberto.*

Logo, $f^{-1}(F)$ *é fechado.*

$(d) \Rightarrow (a)$ *Seja* $p \in M$ *e consideremos* $\epsilon > 0$. *Como* $B_\epsilon(f(p))$ *é aberta, tem-se que* $[B_\epsilon(f(p))]^c$ *é fechada em* N *tal que* $f(p) \notin [B_\epsilon(f(p))]^c$ *e daí*

$$f^{-1}([B_\epsilon(f(p))]^c) = \left[f^{-1}(B_\epsilon(f(p)))\right]^c$$

é fechado em M *que não contém* p.
Logo, $f^{-1}(B_\epsilon(f(p)))$ *é aberta e* $p \in f^{-1}(B_\epsilon(f(q)))$. *Dessa maneira, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$B_\delta(p) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(p))), \text{ ou seja, } f(B_\delta(p)) \subset B_\epsilon(f(p))$$

mostrando que f *é contínua em* p.

Definição 2.2 *Sejam* M *e* N *espaços métricos. Uma aplicação* $f : M \longrightarrow N$ *diz-se uniformemente contínua quando para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que para quaisquer* $x, y \in M$, *tem-se*

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Exemplo 2.8 *Toda aplicação Lipschitziana é uniformemente contínua. De fato, seja* $f : M \longrightarrow N$ *Lipschiziana, isto é, existe* $k > 0$ *tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq k\ d(x,y)\ \forall\ x, y \in M.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ *tome* $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$, *se* $d(x,y) < \delta$ *tem-se*

$$d(f(x), f(y)) \leq k\ d(x,y) < k\ \delta = k\ \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Mostrando que f *é uniformemente contínua.*

Proposição 2.4 *Toda aplicação uniformemente contínua transforma sequências de Cauchy em sequência de Cauchy.*

Prova 2.0.4 *Sejam* $f : M \to N$ *uniformemente contínua e* (x_n) *uma sequência de Cauchy em* M. *Vamos mostrar que a sequência* $(f(x_n))$ *é de Cauchy, assim, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que se* $x, y \in M$ *tem-se*

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Por sua vez se $\delta > 0$ *então existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\text{se } m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \delta \Rightarrow d(f(x_m), f(x_n)) < \epsilon.$$

2.2 Homeomorfismo

Definição 2.3 *Sejam M e N espaços métricos. Uma função $f : M \longrightarrow N$ é dita um homeomorfismo se,*
$(i) f$ é bijetora;
$(ii) f$ e sua inversa f^{-1} são contínuas.
Nesse caso, diz-se que os espaços métricos M e N são homeomorfos.

Exemplo 2.9 *Seja $f : M \longrightarrow N$ uma função contínua. O gráfico de f, definido por $G(f) = \{(x, f(x)); x \in M\}$ é homeomorfo a M.*
De fato, temos que $G(f) \subset M \times N$, assim defina

$$f_1 : M \longrightarrow G(f) \subset M \times N$$
$$x \rightsquigarrow f_1(x) = (x, f(x))$$

Note que f_1 é contínua, já que suas funções coordenadas o são, e f_1 é injetora, pois

$$f_1(x) = f_1(y) \Rightarrow (x, f(x)) = (y, f(y)) \Rightarrow x = y.$$

E para todo $(x, f(x)) \in G(f)$ existe um único $x \in M$ tal que $f(x) = (x, f(x))$. Assim f_1 é sobrejetora. Consequentemente bijetora.
Agora defina,

$$f_1^{-1} : G(f) \longrightarrow M$$
$$(x, f(x)) \rightsquigarrow f_1^{-1}(x, f(x)) = x$$

que é contínua. Assim f_1 é homeomorfismo entre M e $G(f)$, donde são homeomorfos.

3 Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações

Esse capítulo apresenta a principal ênfase apontada por esse trabalho o Teorema do Ponto fixo de Banach, também conhecido como o Teorema da Contração Uniforme. O mesmo institui condições para a existência e unicidade de pontos fixos em algumas aplicações. Nas aplicações que iremos apresentar, ele nos ajudará a mostrar à existência das soluções de algumas equações. Inicialmente, o capítulo traz alguns resultados provenientes de um estudo acerca dos Espaços Métricos Completos, os quais serão fundamentais para a compreensão do Teorema do Ponto Fixo de Banach, assim como o de sua demonstração.

3.1 Espaços Métricos Completos

Definição 3.1 *Dizemos que o espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

Exemplo 3.1 *A reta $|\mathbb{R}|$ é um espaço métrico completo.*

De fato, Toda sequência de Cauchy é limitada, assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass[1]*, toda sequência limitada de números reais, possui subsequência convergente. Portanto, pela proposição 1.18, toda sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente também é convergente.*

Exemplo 3.2 *O espaço de funções $C([a,b])$ é completo.*

De fato seja (x_n) qualquer sequência de Cauchy em $C([a,b])$. Então dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que para todo $m, n > n_0$ temos:

$$d(x_m, x_n) = \max_{a \leq t \leq b} |x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon.$$

Consequentemente, para todo $t \in [a,b]$ fixo,

$$|x_m(t) - x_n(t)| < \epsilon \ \forall \ n, m \ \geq n_0.$$

Assim, temos que $(x_1(t), x_2(t), ...)$ é uma sequência de Cauchy de números reais. Como $\mathbb{R}$ é completo, a sequência converge, ou seja, $x_m(t) \longrightarrow x(t)$, quando $m \longrightarrow \infty$.
Deste modo, pela unicidade do limite, para cada $t \in [a,b]$ existe um único número real

[1] Veja resultados utilizados.

$x(t)$, o que define uma função x em $[a, b]$. Mostremos que $x \in C([a, b])$ e $x_m \longrightarrow x$. Portanto, quando $n \longrightarrow \infty$, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_m, x_n) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \max_{a\leq t\leq b} |x_m(t) - x_n(t)| \\
&= \max_{a\leq t\leq b} |\lim_{n\longrightarrow\infty} x_m(t) - \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n(t)| \\
&= \max_{a\leq t\leq b} |x_m(t) - x_n(t)| \\
&= d(x_m, x).
\end{aligned}$$

Deste modo, para todo $t \in [a, b]$,

$$|x_m(t) - x(t)| \leq \epsilon, \quad com \quad m > n_0$$

Ou seja, x_m converge uniformemente em $[a, b]$, pois x_m é contínua em $[a, b]$ e a convergência é uniforme, portanto, a função $\lim x$ é contínua em $[a, b]$. De forma que $x \in C([a, b])$ e $x_m \longrightarrow x$. Portanto, $C([a, b])$ é completo.

Exemplo 3.3 *O espaço $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é completo.*

Exemplo 3.4 *Todo espaço métrico com a métrica zero-um é completo. Pois qualquer sequência de Cauchy em M é constante a partir de um certo índice, e portanto converge.*

Proposição 3.1 *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo.*

Prova 3.0.1 *Seja $F \subset M$ fechado com M completo. Dado uma sequência de Cauchy (x_n) em F, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in M.$$

Como F é fechado em M, tem-se que $a \in F$. Logo, F é completo.

Proposição 3.2 *O produto cartesiano $(M \times N)$ é completo se, e somente se, M e N são completos.*

Prova 3.0.2 *Dada uma sequência de Cauchy (z_n) em $M \times N$, seja $z_n = (x_n, y_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como as projeções*

$$P_1 : M \times N \to M \quad e \quad P_2 : M \times N \to N$$

são uniformemente contínuas, temos que (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy em M e N respectivamente, logo existe $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in M$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = b \in N$.
Tomando $C = (a, b) \in M \times N$ temos que $\lim_{n\to\infty} z_n = c$. Assim $M \times N$ é completo.

Por outro lado, se $M \times N$ é completo, então fixando $b \in N$, vemos que a aplicação $x \longrightarrow (x, b)$ é uma isometria de M sobre o subespaço fechado $M \times \{b\} \subset M \times N$. Pela proposição anterior M é completo. Analogamente, mostra-se que N é completo.

Observação 3.1 *O produto cartesiano $M_1 \times ... \times M_n$ é completo se, e somente se, $M_1, \ldots, M_n$ são completos.*

Exemplo 3.5 *O espaço euclidiano n-dimensional é completo, pois $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n}$.*

3.2 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Definição 3.2 *Um ponto fixo de uma aplicação $f : M \longrightarrow M$ é um ponto $x \in M$ tal que*

$$f(x) = x.$$

Exemplo 3.6 *A aplicação definida por $f(x) = -x$ só possui a origem como ponto fixo no espaço $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 3.7 *A aplicação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ possui 0 e 1 como pontos fixos.*
De fato, observe que

$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Definição 3.3 *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma aplicação $f : M \longrightarrow M$ é uma contração sobre M se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ com $0 \leq \lambda < 1$, tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \; d(x, y), \forall \; x, y \in M.$$

No caso em que $\lambda = 1$, dizemos que f é uma contração fraca.

Observação 3.2 *Claramente as contrações são funções contínuas, já que todas as contrações são casos particulares de funções Lipschitzianas.*

Teorema 3.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) *Seja $f : M \longrightarrow M$ uma contração, em que M é um espaço métrico completo. Então f possui um único ponto fixo.*

Prova 3.1.1 ***Existência:*** *A existência do ponto fixo será demonstrada por um processo iterativo. Para isto, fixemos $x_0 \in M$ e construímos iterativamente a sequência (x_n) dada por,*

$$x_1 = f(x_0), \; x_2 = f(x_1), \; ... \; , \; x_{n+1} = f(x_n), \; \text{para } n = 0, 1, 2, ...$$

Observemos que se $f : M \longrightarrow M$ *for contração, existe* $0 \leq \lambda < 1$ *tal que*

$$d\left(f(x), f(y)\right) \leq \lambda\ d(x, y),\ \forall\ x, y \in M.$$

Se $\lambda = 0$, *a função* f *será constante e não há nada a demonstrar.*

Suponhamos, então, que $0 < \lambda < 1$. *Mostremos que* (x_n) *é uma sequência de Cauchy. Inicialmente observe que*

- $d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq \lambda\ d(x_0, x_1)$;
- $d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda\ d(x_1, x_2) \leq \lambda^2 d(x_0, x_1)$;
- $d(x_3, x_4) = d(f(x_2), f(x_3)) \leq \lambda\ d(x_2, x_3) \leq \lambda^3 d(x_0, x_1)$.

De modo generalizado temos que:

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1) \tag{3.1}$$

Por indução finita, mostremos que a desigualdade 3.1 é verdadeira. Para $n = 1$, *temos que 3.1 é verdadeira. Suponha que para* $n \in \mathbb{N}$ *3.1 seja verdadeira; assim*

$$d(x_{n+1},\ x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq \lambda\ d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^{n+1} d(x_0,\ x_1).$$

Concluindo a demonstração de 3.1.
Consideremos $m, n \in \mathbb{N}$ *com* $n > m$, *assim, pela desigualdade triângular temos,*

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_n) \\
&\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + d(x_{m+2}, x_n) \\
&\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + ... + d(x_{n-1}, x_n) \\
&\leq \lambda^m d(x_0, x_1) + \lambda^{m+1} d(x_0, x_1) + ... + \lambda^{n-1} d(x_0, x_1) \\
&\leq \lambda^m d(x_0, x_1) \left[1 + \lambda + ... + \lambda^{n-1-m}\right].
\end{aligned}$$

Observe que

$$\left[1 + \lambda + ... + \lambda^{n-1-m}\right]$$

é a soma dos termos de uma progressão geométrica, desse modo podemos escrever

$$\left[1 + \lambda + ... + \lambda^{n-1-m}\right] = \frac{1}{1 - \lambda}$$

pois a soma dos termos de uma progressão geométrica é dada pela expressão $\frac{1}{1-r}$ *onde* r *é a razão da P.G. Assim,*

$$d(x_m, x_n) \leq \lambda^m d(x_0, x_1) \frac{1}{1 - \lambda} \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq \lambda^m \left[\frac{d(x_0, x_1)}{1 - \lambda}\right].$$

Como $0 < \lambda < 1$*, tem-se que* $\lambda^m \longrightarrow 0$ *se* $m \longrightarrow \infty$*. Consequentemente dado* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se* $m \geq n_0$*, então,*

$$\left[\frac{d(x_0, x_1)}{1-\lambda}\right] \lambda^m < \varepsilon.$$

Portanto, para $n > m \geq n_0$ *temos*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

O que mostra que (x_n) *é uma sequência de Cauchy.*
Como M *é completo, temos que* x_n *é convergente, assim, existe* $p \in M$*, tal que* $\lim x_n = p$*, donde* $f(\lim x_n) = f(p)$*. Como* f *é contração e portanto contínua* $f(\lim x_n) = \lim f(x_n)$*, mas* $f(x_n) = x_{n+1}$ *assim* $f(\lim x_n) = \lim x_{n+1}$*, ou seja,* $f(p) = \lim x_{n+1} \ = \ p$*.*

Unicidade: *Sejam* $p, q \in M$ *tais que* $f(p) = p$ *e* $f(q) = q$*. Assim,*

$$d(p, q) = d(f(p), f(q)) \leq \lambda \ d(p, q)$$

daí

$$d(p, q) - \lambda d(p, q) \leq 0 \Rightarrow d(p, q)(1 - \lambda) \leq 0.$$

Como $1 - \lambda > 0$ *conclui-se que* $d(p, q) = 0$*, pois trata-se de distância que deve ser sempre não negativa. Portanto,* $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$*.*

3.3 Aplicações

Nessa seção apresentaremos aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach em Equações Integrais, no Teorema de Existência e Unicidade, e em Equações Numéricas.

3.3.1 Aplicações em Equações Integrais

Teorema 3.2 ***(Equação Integral de Volterra)*** *Sejam* $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua no intervalo* $[a, b]$ *e* $k : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua no retângulo* $[a, b] \times [a, b]$*. Então para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $|\lambda|$ *suficientemente pequeno, a equação de Volterra*

$$x(s) = \phi(s) + \lambda \int_a^s k(s, t)x(t)dt, \ \ a \leq s, t \leq b$$

possui uma única solução contínua.

Prova 3.2.1 *De fato, seja* $X = C([a, b])$ *munido com a métrica*

$$d(x, y) = \max_{a \leq t \leq b}\{|x(t) - y(t)|\}$$

temos que (X, d) *é um espaço métrico completo*[2]*. Para cada* $x \in X$ *defina o operador* $T : X \longrightarrow X$ *por*

$$Tx(s) = \phi(s) + \lambda \int_a^s k(s,t)x(t)dt, \ a \leq s, t \leq b.$$

Observe que Tx *é uma função real definida em* $[a, b]$*. Além disso* Tx *é contínua. Para ver isso, é suficiente mostrar que*

$$\begin{aligned} S : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightsquigarrow \int_a^s k(s,t)x(t)dt \end{aligned}$$

é contínua, pois ϕ *é contínua.*
Com efeito, se $s_1, s_2 \in [a, b]$ *teremos*

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^{s_1} k(s_1,t)\ x(t)\ dt - \int_a^{s_2} k(s_2,t)\ x(t)\ dt \right| \\ = & \left| \int_a^{s_1} k(s_1,t)\ x(t)\ dt - \int_a^{s_1} k(s_2,t)\ x(t)\ dt - \int_{s_1}^{s_2} k(s_2,t)\ x(t)\ dt \right| \\ \leq & \left| \int_a^{s_1} [k(s_1,t) - k(s_2,t)]\ x(t)\ dt \right| + \left| \int_{s_1}^{s_2} k(s_2,t)\ x(t)\ dt \right|. \end{aligned}$$

Como k *é contínua em* $[a, b] \times [a, b]$*, e* $[a, b] \times [a, b]$ *é completo, segue que* k *é uniformemente contínua, assim dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta_1 > 0$ *tal que se* $|s_1 - s_2| < \delta_1$ *tem-se*

$$|k(s_1,t) - k(s_2,t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)\ \|x\|_\infty}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^{s_1} k(s_1,t)\ x(t)\ dt - \int_a^{s_2} k(s_2,t)\ x(t)\ dt \right| \\ \leq & \frac{\varepsilon}{2(b-a)\ \|x\|_\infty} \int_a^{s_1} |x(t)|\ dt + \ M \left| \int_{s_1}^{s_2} |x(t)|\ dt \right| \\ < & \frac{\varepsilon}{2(b-a)\ \|x\|_\infty}\ (b-a)\ \|x\|_\infty + \ M\ \|x\|_\infty\ |s_1 - s_2| \\ = & \frac{\varepsilon}{2}\ +\ M\ \|x\|_\infty\ |s_1 - s_2| \end{aligned}$$

em que $M = \max\limits_{a \leq t,s \leq b} |k(s,t)|$ *e* $\|x\|_\infty = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)|$.

Tomando $0 < \delta < \min\{\delta_1,\ \frac{\varepsilon}{2\ M\|x\|_\infty}\}$*. Dessa maneira, se* $|s_1 - s_2| < \delta$*, temos,*

$$\left| \int_a^{s_1} k(s_1,t)\ x(t)\ dt - \int_a^{s_2} k(s_2,t)\ x(t)\ dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ +\ \frac{\varepsilon}{2}\ =\ \varepsilon$$

[2] Veja exemplo 3.2.

Portanto, $T : X \longrightarrow X$ está bem definida.
Mostremos que, se $|\lambda|$ for suficientemente pequeno, T é contração. Com efeito, se $x, y \in X$, teremos,

$$\begin{aligned} |Tx(s) - Ty(s)| &= |\lambda| \left| \int_a^s k(s,t)\ [x(t) - y(t)]\ dt \right| \\ &\leq |\lambda|\ M \int_a^s |x(t) - y(t)|\ dt \leq |\lambda|\ M(b-a)\ d(x,y),\ \forall\ s \in [a,b] \\ &\Rightarrow \max_{a \leq s \leq b} |Tx(s) - Ty(s)| \leq |\lambda|\ M(b-a) d(x,y). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$d(Tx, Ty) \leq |\lambda|\ M(b-a)\ d(x,y).$$

Se

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

então T é contração e pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach existe um único $x \in X$ tal que $Tx = x$ isto é, $Tx(s) = x(s), \forall\ s \in [a,b]$. O que é equivalente a

$$x(s) = \phi(s) + \lambda \int_a^s k(s,t)\ x(t) dt.$$

Teorema 3.3 (Equações Integrais de Fredholm) *Seja $k : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua dada na região $Q = [a,b] \times [a,b] \times [a,b]$ que satisfaz a condição de Lipschitz, isto é, existe $L > 0$ tal que*

$$|k(t,s,u) - k(t,s,v)| \leq L|u - v|, \forall\ (t,s,u), (t,s,v) \in Q.$$

Se $\varphi \in C([a,b])$ a equação integral não linear de Fredholm

$$\psi(t) = \varphi(t) + \int_a^b k(t,s,\psi(s)) ds, t \in [a,b]$$

possui uma única solução $\psi \in C\left([a,b]\right)$ se $L(b-a) < 1$.

Prova 3.3.1 *De fato, temos que $C([a,b])$ é um espaço métrico completo, onde*

$$d(\psi, \varphi) = \max_{a \leq t \leq b} |\psi(t) - \varphi(t)|.$$

Para cada $\psi \in C([a,b])$ defina o operador $T : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$ por

$$T\psi(t) = \varphi(t) + \int_a^b k(t,s,\psi(s)) ds.$$

Note que como k é contínua, e φ é contínua então $T\psi$ é contínua. Assim basta verificar que T é contração em $C([a,b])$. Se $\psi, \varphi \in C([a,b])$, então para todo $t \in [a,b]$, temos,

$$\begin{aligned}
|T\psi(t) - T\varphi(t)| &= \left|\varphi(t) + \int_a^b k(t,s,\psi(s)) - \left[\varphi(t) + \int_a^b k(t,s,\varphi(s))\right] ds\right| \\
&= \left|\int_a^b [k(t,s,\psi(s)) - k(t,s,\varphi(s))]\, ds\right| \\
&\leq \int_a^b |k(t,s,\psi(s)) \ - k(t,s,\varphi(s))|\, ds \\
&\leq \int_a^b L\ |\psi(s) - \varphi(s)| ds \\
&\leq L \int_a^b \max_{a \leq s \leq b} |\psi(s) - \varphi(s)| ds \\
&= L \int_a^b d(\psi, \varphi) ds \\
&= \ L\ d(\psi,\varphi) \int_a^b ds \\
&= L\ d(\psi,\varphi)\ (b-a) \\
&\Rightarrow \max_{a \leq t \leq b} |T\psi(t) - T\varphi(t)| \leq L\ d(\psi,\varphi)\ (b-a) \\
&\Rightarrow d(T\psi, T\varphi) \leq L(b-a) d(\psi,\varphi).
\end{aligned}$$

Assim, $d(T\psi, T\varphi) \leq L(b-a)\ d(\psi,\varphi)$. Portanto T é uma contração se $L(b-a) < 1$. Então, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único $T\psi(t) = \psi(t)\ \forall\ t \in [a,b]$. Logo,

$$\psi(t) = \varphi(t) + \int_a^b k(t,s,\psi(s)) ds,\ \ t \in [a,b].$$

Possui uma única solução.

Teorema 3.4 (Teorema de Existência e Unicidade) *Seja $f : R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua sobre o retângulo $R = \{(t,x);\ \ |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$ e assim limitada sobre R, isto é, existe $M > 0$ tal que*

$$|f(t,x)| \leq M, \forall\ (t,x) \in R.$$

Suponha que f seja Lipschiziana na segunda variável, isto é, existe $L > 0$ tal que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|,\ \ \forall\ (t,x),(t,y) \in R.$$

Então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x); \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

possui uma única solução. Esta solução existe sobre o intervalo $I = [t_0 - \beta,\ t_0 + \beta]$, onde $\beta < min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}$.

Prova 3.4.1 *De fato, precisamos converter 3.2 em uma equação integral que define uma aplicação T, e mostrar que T é uma contração e depois usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach.*
Seja $C(I)$ o espaço métrico das funções contínuas sobre o intervalo $I = [t_0 - \beta,\ t_0 + \beta]$ munido com a métrica

$$d(x, y) = \max_{t \in I}\{|x(t) - y(t)|\}.$$

Temos que $(C(I), d)$ é um espaço métrico completo. Seja $\tilde{C}(I) \subset C(I)$ um subespaço fechado de todas as funções de $C(I)$ tais que

$$|x(t) - x_0| \leq M\ \beta < b.$$

Segue do Teorema Fundamental do Cálculo[3] *que 3.2 pode ser escrito da seguinte maneira.*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\ x(s))ds. \tag{3.3}$$

Defina a aplicação $T : \tilde{C} \longrightarrow \tilde{C}$ dada por

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\ x(s))ds, \forall\ t \in I.$$

Note que se $t \in I = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ então,

$$|Tx(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds\right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))|ds \leq M|t - t_0| \leq M\beta < b.$$

Assim, $Tx \in \tilde{C}(I)$. Mostrando que T está bem definida.
Vejamos que T é uma contração sobre $\tilde{C}$. Para isto seja $x, y \in \tilde{C}$ logo,

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} [f(s, x(s)) - f(s, y(s))]ds\right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|\, ds \\ &\leq \left|\int_{t_0}^{t} L|x(s) - y(s)|\ ds\right| \leq L\ d(x, y)\ |t - t_0| \leq L\ \beta\ d(x, y)\ \forall\ t \in I \\ &\Rightarrow \max_{t \in I} |Tx(t) - Ty(t)| \leq L\beta\ d(x, y). \end{aligned}$$

Logo,

$$d(Tx,\ Ty) \leq \lambda\ d(x, y)$$

onde $\lambda = L\beta < 1$. Daí, T é uma contração pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach T possui um único $x \in \tilde{C}$, tal que $Tx = x$, isto é $Tx(t) = x(t),\ \forall\ t\ \in I$. Logo,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\ x(s))ds.$$

Novamente usando o Teorema Fundamental do Cálculo, a equação 3.3 satisfaz o Problema de Cauchy, mostrando a unicidade da solução.

[3] Veja resultados utilizados.

3.3.2 Aplicações em Equações Numéricas

Exemplo 3.8 *Considere a seguinte equação*

$$x = \lambda \cos(x) \tag{3.4}$$

onde $0 < \lambda < 1$.
Mostremos que esta equação possui solução em $\mathbb{R}$ *e que tal solução é única.*
De fato, seja $f(x) = \lambda \cos(x)$, *como* f *é uma função de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$, *adotando a métrica usual, temos que* $\mathbb{R}$ *é completo.*
Seja,

$$d\left(f(x), f(y)\right) = |f(x) - f(y)| = |\lambda \cos(x) - \lambda \cos(y)| = \lambda |\cos(x) - \cos(y)|.$$

Pelo Teorema do Valor Médio[4], *temos que* $\cos(x) - \cos(y) = f'(t)(x - y)$ *para algum* t *entre* x *e* y. *Assim,*

$$|\cos(x) - \cos(y)| = |-sen(t)|.|x - y| \leq |x - y|$$

pois $|sen(t)| \leq 1$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Daí,*

$$\lambda |\cos(x) - \cos(y)| \leq \lambda |x - y| = \lambda d(x, y).$$

Portanto f *é contração. Deste modo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x$, *ou seja,* $x = \lambda \cos(x)$ *têm solução única.*

Exemplo 3.9 *Considere a seguinte equação*

$$x = \lambda\ sen(x) + c \tag{3.5}$$

onde $0 < \lambda < 1$ *e* $c \in \mathbb{R}$. *Mostremos que esta equação possui solução em* $\mathbb{R}$ *e que tal solução é única.*
De fato, seja $f(x) = \lambda\ sen(x) + c$, *como* f *é uma função de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$, *adotando a métrica usual, temos que* $\mathbb{R}$ *é completo.*
Seja,

$$d\left(f(x), f(y)\right) = |f(x) - f(y)| = |\lambda\ sen(x) + c - \lambda\ sen(y) - c\ | = \lambda\ |\ sen(x) - sen(y)\ |.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, temos que $sen(x) - sen(y) = f'(t)(x - y)$ *para algum* t *entre* x *e* y. *Assim,*

$$|sen(x) - sen(y)| = |\cos(t)|.|x - y| \leq |x - y|$$

pois $|\cos(t)| \leq 1$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$. *Daí,*

$$\lambda |sen(x) -\ sen(y)| \leq \lambda |x - y| = \lambda\ d(x, y) \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \lambda\ d(x, y).$$

Portanto f *é contração. Deste modo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x$, *ou seja,* $x = \lambda\ sen(x) + c$ *possui solução única.*

[4] Veja resultados utilizados.

Exemplo 3.10 *Seja f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(a) = -ln(1+e^a)$, mostre que f possui um único ponto fixo.*
Seja f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, adotando a métrica usual, $\mathbb{R}$ é completo.
Mostremos que a função é uma contração. Seja,

$$d(f(a), f(b)) = d(-ln(1+e^a), -ln(1+e^b)) = |-ln(1+e^a) - (-ln(1+e^b))|$$

$$= |-ln(1+e^a) + ln(1+e^b)|,$$

Pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$f(a) - f(b) = f'(t)(a-b)$$

para algum t entre a e b. Como, $f(t) = -ln(1+e^t)$, segue que $f'(t) = -\frac{e^t}{1+e^t}$, assim,

$$|-ln(1+e^a) + ln(1+e^b)| = \left|\frac{-e^t}{1+e^t}\right| |a-b| = \left|\frac{-e^t}{1+e^t}\right| d(a,b).$$

Logo,

$$d(f(a), f(b)) = \left|\frac{-e^t}{1+e^t}\right| d(a,b).$$

Daí, como $\left|\frac{-e^t}{1+e^t}\right| < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que f é uma contração. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, f possui um único ponto fixo.

Exemplo 3.11 *Considere a seguinte equação*

$$x = arctg(x) + c \tag{3.6}$$

onde $c \in \mathbb{R}$.
Mostremos que esta equação possui solução e que tal solução é única.
De fato, seja $f(x) = arctg(x) + c$, como f é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, adotando a métrica usual, temos que $\mathbb{R}$ é completo. Assim, segue que

$$d\left(f(x), f(y)\right) = |f(x) - f(y)| = |arctg(x) + c - arctg(y) - c| = |arctg(x) - arctg(y)|.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, temos que $arctg(x) - arctg(y) = f^{'}(t)(x-y)$ para algum t entre x e y. Assim,

$$|arctg(x) - arctg(y)| = \left|\frac{1}{t^2+1}\right| |x-y| = \left|\frac{1}{t^2+1}\right| d(x,y).$$

Como $\left|\frac{1}{t^2+1}\right| < 1$, para todo $t \in \mathbb{R}^*$. Segue que f é contração. Deste modo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$, ou seja $x = arctg(x) + c$ possui solução única.

Considerações Finais

Com esse trabalho tínhamos como principal objetivo apresentar e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach , e por fim mostrar algumas de suas aplicações. Este teorema é um importante resultado da teoria dos espaços métricos, que estabelece condições para a existência e unicidade de pontos fixos em determinadas aplicações. O primeiro capítulo desse trabalho apresentou o conceito de espaço métrico que está estritamente ligado a noção de distância entre dois pontos que neste caso podem ser até mesmo uma função. Para tanto o mesmo constitui-se de uma linguagem simples, visto que o estudo da análise funcional não é obrigatório nos currículos de licenciatura em matemática. Mais adiante o capítulo traz o conceito de bolas e esferas que apresentam um papel fundamental na teoria dos espaços métricos. Posteriormente apresenta a teoria dos conjuntos abertos e fechados, das sequências em espaços métricos e das sequências de Cauchy. O capítulo seguinte abordou a teoria das funções contínuas.

O último capítulo exibiu o Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas de suas aplicações. Nessas aplicações foi possível constatar que as condições exigidas pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach para que uma aplicação possua um ponto fixo no seu domínio, é que a mesma seja uma contração definida em um espaço métrico completo. Nesse sentido podemos dizer que embora existam diversos resultados que mostrem a existência de pontos fixos em determinadas aplicações o Teorema do Ponto Fixo de Banach está entre os resultados mais simples de ser aplicado.

Nas aplicações em equações numéricas apesentadas nesse trabalho nos limitamos a mostrar a existência do ponto fixo, pois o nosso objetivo foi aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Porém para o leitor que desejar se aprofundar mais no assunto e almejar determinar esse ponto fixo, um dos artifícios que poderá utilizar é o método das aproximações sucessivas ou método de iteração linear. Com tudo acreditamos que o objetivo desse trabalho foi alcançado, pois conseguimos apresentar e demostrar de forma sucinta o teorema foco desse estudo e algumas de suas aplicações.

Referências

DOMINGUES, H. H. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*. [S.l.]: Atual - São Paulo, 1982. Citado na página 10.

JUNIOR, P. A. S. *Sobre a Existência de Soluções para Equações*. Tese (Doutorado) — Unesp, 2013. Disponível em: <http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/92418/silvajunior_pa_me_rcla.pdf?sequence=1>. Acesso em: 15 dez. 2014. Citado na página 10.

KREYSZIG, E. *Introductory Funtional Analysis With Applications*. United States of America: Whiley Classics Library, 1978. Citado na página 10.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, Volume 1, 2004. Citado na página 10.

LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 4 edição, 2009. Citado na página 10.

LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de uma Variável*. Rio de Janeiro: IMPA, Volume 1, 2012. Citado na página 10.

MARCIEL, A. B.; LIMA, O. A. *Introdução à Análise Real*. Campina Grande - PB: EDUEP, 2005. Citado na página 10.

OLIVEIRA, C. R. *Introdução à Análise Funcional*. Rio de Janeiro: IMPA, 1 ed., 2012. Citado na página 10.

Apêndices

APÊNDICE A – Resultados

A seguir apresentaremos alguns resultados que foram utilizados nesse trabalho, os quais não iremos demonstrar.

Definição A.1 (Espaço Métrico Compacto) *Seja (M, d) um espaço métrico. Diz-se que X contido em M é compacto se, para toda sequência (x_n) de pontos de X, existe uma subsequência (x_{n_j}) que converge para um ponto de X.*

Teorema A.1 (Espaço Métrico Compactos) *Um espaço métrico é compacto se for fechado e limitado.*

Proposição A.1 (Conjuntos Compactos) *Todo subconjunto fechado de um espaço métrico compacto é compacto. Reciprocamente, um subconjunto compacto de qualquer espaço métrico é fechado.*

Proposição A.2 (Conjuntos Compactos) *Todo intervalo $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ é compacto.*

Proposição A.3 (Teorema de Weierstrass) *Se M é compacto, toda função real contínua $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo em M. Mais precisamente, existem $x_0, x_1 \in M$ tais que*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \ \forall \ x \in M.$$

Teorema A.2 (Teorema de Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Definição A.2 (Convergêrncia Uniforme) *Diz-se que uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow R$ converge uniformemente para uma função $f : X \longrightarrow R$ quando para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in N$, tal que $\forall \ n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \ \forall \ x \ \in \ X$.*

Teorema A.3 (Convergência Uniforme) *Se uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow R$ converge uniformemente para $f : X \longrightarrow R$ e cada f_n é contínua no ponto $a \in X$, então f é contínua no ponto a.*

Teorema A.4 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Seja $f : I \longrightarrow R$ contínua no intervalo I. As seguintes afirmações a respeito de uma função $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ são equivalentes:*

1. $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt, \ \forall \ x \in I.$
2. F *é uma primitiva de f, isto é* $F^{'}(x) = f(x), \ \forall \ x \in I.$

Teorema A.5 (Teorema do Valor Médio) *Se* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua e derivável no intervalo* (a, b) *então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(a) - f(b) = f'(c).(b - a).$