UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

UM ESTUDO SOBRE TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

GÁBIO STALIN SOARES ALMEIDA

CAMPINA GRANDE - PB
Maio de 2016

GÁBIO STALIN SOARES ALMEIDA

UM ESTUDO SOBRE TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE-PB
Maio de 2016

A447e Almeida, Gábio Stalin Soares.
Um estudo sobre o teorema fundamental do cálculo [manuscrito] / Gábio Stalin Soares Almeida. - 2016.
49 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática".

1. Teorema Fundamental do Cálculo. 2. Integral de Riemann. 3. Funções deriváveis. 4. Funções contínuas. I. Título.
21. ed. CDD 515.25

GÁBIO STALIN SOARES ALMEIDA

UM ESTUDO SOBRE TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Aprovado em: 03/06/ 2016

COMISSÃO EXAMINADORA

Luciana R. Freitas

Profª. Dra. Luciana Roze de Freitas
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
Orientadora

José Elias da Silva

Prof. José Elias da Silva
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
Examinador

Weiller Felipe Chaves Barboza.

Prof. Weiller Felipe Chaves Barboza
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
Examinador

Dedicatória

Primeiramente, eu dedico este trabalho ao eterno Deus, a minha familia, que sempre me deu apoio e me ajudaram bastante nesta caminhada e por fim, eu dedico a minha filha, Nicole, ela é o grande motivo para nunca deixar que os problemas pudesse me afastar deste curso.

Agradecimentos

Primeiramente, agradecer à Deus, por ter me dado força para continuar, por ter me abençoado na minha escolha.

Aos meus pais, Francisco Soares Lima e Maria Nilda de Almeida Silva, que sempre esteve junto de mim, que mostrou o caminho certo, não seria nada sem ajudar deles, aos meus irmãos e minha filha, mesmo sendo pequena sempre me ajuda com seu carinho.

Agradecer também à Samilly, minha namorada, pela paciência, cobrança, ajuda e por está ao meu lado durante todo esse tempo.

A professora Luciana Roze de Freitas por ter aceitado me orientar neste trabalho, professora esta que tive a oportunidade de cursar várias disciplinas.

Agradeço também aos professores José Elias e Weiller Felipe por ter aceitado o convite para está compor a comissão examinadora.

Não posso deixar de agradecer alguns professores que passaram por minha graduação e na escola, como o professor Vandenberg Lopes Vieira, Francisco de Sá, Samuel Duarte, Juarez Dantas, Isabelle Aires, Joselma e o meu professor do ensino fundamental Inácio, quem me incentivou a estudar Matemática.

Aos meus amigos de infância (Ramon Torres, Marvin Patrick, Ricardo Neves, Paulo César, John Lennon e os demais) que sempre acreditaram em mim, aos colegas de curso (Maxwell, Eliasibe, Allan, Hemerson, Janaína, Ellen e os demais) que sempre me aguentaram, me ajudaram e passamos por muito coisas juntos nessa caminhada, aos meus amigos de movimento estudantil no qual participamos de várias lutas juntos por um educação pública e de qualidade.

Epígrafe

Não importa se só tocam
O primeiro verso da canção
A gente escreve o resto sem muita pressa
Com muita precisão
Nos interessa o que não foi impresso
E continua sendo escrito à mão
Escrito à luz de velas
Quase na escuridão
Longe da multidão

Humberto Gessinger

RESUMO

Nesse presente trabalho apresentamos o Teorema Fundamental do Cálculo e algumas de suas consequências, esse Teorema é de suma importância para a Matemática, principalmente para os estudos do Cálculo e da Análise Matemática e suas aplicações são bastantes usadas em outras ciências. Antes de abordar o Teorema Fundamental do Cálculo, faremos uma breve estudo sobre Funções Contínuas, Funções Deriváveis e Funções Integráveis.

PALAVRAS CHAVE: Teorema Fundamental do Cálculo, Integral de Riemann, Funções Deriváveis, Funções Contínuas.

ABSTRACT

In this present work we studied the Fundamental Theorem of Calculus and some of its consequences, this theorem is of paramount importance to mathematics, especially for studies of Calculus and Mathematical Analysis and its applications are quite used in other sciences. Before addressing the Fundamental Theorem of Calculus, we will make a brief study of Continuous functions, differentiable functions and Integrated functions.

KEYWORDS: Fundamental Theorem of Calculus, Integral Riemann, differentiable functions, Continuous Functions.

Sumário

Introdução

Este trabalho apresenta uma revisão bibliográfica sobre o Teorema Fundamental do Cálculo e suas aplicações. Este Teorema trata-se de uma unificação do estudo Cálculo Diferencial e Cálculo Integral, considerando as operações como inversa uma da outra, esta relação de reciprocidade se tornou o ponto de partida da Análise da Infinitesimal.

Com tudo, nosso objetivo é apresentar de maneira de didática e de fácil compreensão toda a construção deste teorema e suas consequências, tendo como referências os livros de Análise Real e quando for necessário faremos uma comparação no que é visto nos livros de Cálculos. O Teorema Fundamental do Cálculo além de ser de suma importância para a Matemática é utilizado em diversas áreas do conhecimento humano, como: Física, Engenharia, Química e outros.

A princípio os problemas envolvendo o estudo do Cálculo foram em relação a quadraturas e cubaturas, podemos dizer que resolver problemas de quadraturas era achar o valor exato de uma área bidimensional, cuja fronteira é determinada por um ou mais curvas, já para problemas de cubaturas era determinar o valor exato de um volume de um tridimensional limitado por superfícies curvas.

Os primeiros relatos sobre o estudo de quadratura foi quando *Hipócrates de Chios* (cerca de 440 A.C.) determinou a área de certas lunas, lunas são regiões parecidas com Lua no seu quarto crescente. Após isso, *Antíphon*, o Sofísta (cerca de 430 A.C.) procurou quadrar um círculo, para isso usou uma sequência infinita de polígonos regulares inscritos no círculo. Entretanto, sua maior descoberta foi o método da exaustão por muito tempo creditado à *Eudoxo* (cerca de 370 A.C.).

Por sua vez, *Arquimedes* (287 - 212 A.C.) deu sua contribuição neste tipo de problema, quando utilizou o método da exaustão para encontrar a quadratura da parábola, outra grande contribuição de Arquimedes foi quando determinou a área do círculo usando novamente o método da exaustão, que resultou nas primeiras aproximações do π. Além das quadraturas, Arquimedes descobriu o emprego das indivisíveis, que era usado para estimar o centro de gravidade de certas regiões bidimensionais e sólido tridimensionais. As descobertas de Arquimedes, foram de grande ajuda para que outros matemáticos pudessem dar continuidade chegando ao conceito moderno do Cálculo.

A partir do século XVII, surge uma nova geração de matemáticos e entre eles está *Pierre de Fermat* $(1601-1665)$, que para alguns matemáticos foi o inventor do Cálculo Diferencial. No ano de 1629, Fermat nas suas primeiras investigações matemáticas trás suas curiosidades sobre tangentes, quadraturas, volumes, comprimentos de curvas e centro de gravidade, finando sua curiosidade com a restauração da obra de *Apollonius* (cerca de 260 A.C à cerca de 190 A.C.), *Place Loci*, acabou obtendo um trabalho sobre máximos e mínimos e tangentes das linhas de uma curvas.

Ainda no século XVII, na forma geométrica, muitos cálculos foram desenvolvidos até chegar à obra *The Geometrical Lectures*(1670) de *Isaac Barrow* (1630-1677). Barrow foi o primeiro matemático a percebe de maneira plena, que diferenciação e a integração são operações inversas. No ano de 1669, Barrow, deixou de lecionar sua cadeira de Professor em Lucasiano na cidade de Cambridge para dar a vez ao seu ex-aluno *Isaac Newton* $(1642 - 1727)$ que deu continuação aos seus trabalhos, como também os trabalhos de *Galileu* $(1564 - 1642)$.

Apesar de Isaac Barrow perceber que a diferenciação e integração era inversas foi Newton que enunciou formalmente o Teorema Fundamental do Cálculo desenvolvendo as técnicas das *fluxions* (derivação) e *fluents* (integração), que lhe ajudou a fundamentar o estudo da mecânica clássica. Para obter alguns resultados sobre o Cálculo, Newton seguiu as ideias de *James Gregory* $(1638 - 1675)$ quando pensou que a área de uma região entre uma curva e o eixo horizontal como uma variável, onde o extremo a esquerda era fixo, mas o extremo a direita podia variar. O seu último trabalho sobre cálculo, e também o primeiro a ser publicado, foi *(On the Quadrature of Curves)* - (Sobre Quadraturas de Curvas), escrito entre 1691 e 1693 e publicado como uma apêndice na edição de 1704 da obra *Opticks*.

Entretanto, para *Gottfried Wilhelm Leibniz*$(1646 - 1716)$ considerado um grande gênio universal do século XVII e o grande rival de Newton sobre a criação do Cálculo, considerou um curva como um polígono com infinitos lados. Em 1686, ele atribuiu dy para representar uma ordenada da curva e dx a distância infinitesimal de uma abscissa para a próxima, isto é, a diferença entre abscissas sucessivas, essas somas usada por *Leibniz* é bem parecida como foi apresentada por *Cavalieri*$(1598 - 1647)$. Leibniz tomou um S alongado para representar a integral do latin *summa* e *d* do latim *differentia* e desde de então esta notação é utilizada até hoje para o Cálculo Integral, pois, Newton tinha o defeito de escrever para si mesmo e isto fez que suas notações não fosse bem aceita na sociedade Matemática, apesar ter desenvolvido o Cálculo cerca de 10 anos antes de Leibniz.

No século XVIII as principais contribuições para o avanço do Cálculo foram dadas a família *Bernoulli*, *Taylor*, *Euler*, *Lagrange*, *Laplace*, *Carnot*, *d'Alembert* e *Lambert*. O termo integral, foi dado por *Johann Bernoulli* $(1667 - 1748)$, porém, foi publicado pela a primeira vez pelo seu irmão mais velho *Jakob Bernoulli* $(1654 - 1705)$ que considerou a integral com uma simples derivada inversa, usando o Teorema Fundamental do Cálculo de Newton. Outra descoberta da família *Bernoulli*, foi quando *Johann* conseguiu de maneira sistemática integrar as funções racionais, que recebeu o nome de método das frações parciais.

Quem tratou de organizar o estudo do Cálculo e deu continuidade no estudo de funções foi *Leonhard Euler* $(1707 - 1783)$ quando decidiu resumir de forma elegante algumas regras, finando com o trabalho enciclopédico de três volumes sobre o cálculo $(1768 - 1770)$, estes trabalhos causou o aumento de interesse durante o século XVIII pela a fatoração e resolução de equações polinomias de graus elevados. *Euler* também foi o responsável na criação dos fundamentos da Análise Matemática.

A ideia moderna de função contínua foi iniciada em 1791 por *Louis-François Arbogast* $(1759 - 1803)$, porém, este ideia veio de forma mais rigorosa em um panfleto publicado em 1817 por *Bernhard Bolzano* $(1781 - 1848)$ e hoje é conhecido como o

Teorema do Valor Intermediário. Já a ideia de funções descontínuas foram forçada na comunidade matemática e científica por *Joseph Fourier* $(1768 - 1830)$ na sua famosa obra *Analytical Theory of Heat* (1822).

Augustin Louis Cauchy$(1789-1857)$ definiu a integral de qualquer função contínua no intervalo $[a, b]$ sendo o limite da soma das áreas de retângulos finos, também foi o criado da noção moderna de função contínua de variável real ou complexa que é usado no estudo da Análise Matemática. A maior parte do desenvolvimento da teoria de integração foi subsequentemente do estudo de *Georg F.B. Riemann*$(1826 - 1866)$ e outros, porém, ainda havia problemas com integrais de séries infinitas que não foram trabalhadas até o inicio do século XX, sendo resolvida por *Henri Lebesgue* $(1894-1941)$ que generalizou as integrais de Riemann.

Este contexto é um pouco da história do Cálculo e do Teorema Fundamental do Cálculo, como pode notar não foi fácil chegar a este resultado conhecido atualmente, houve muita discórdia e falhas neste processo histórico da matemática, porém, vimos que grandes matemáticos deram suas contribuições para este belíssimo resultado matemático. Por isso, é de fundamental importância o seu estudo para o Cálculo e Análise Matemática.

Este trabalho está organizado em três capítulos, da seguinte maneira:

O capítulo 1, será dedicado aos resultados preliminares que serão necessários para a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo, esses resultados são: Funções Contínuas e Funções Deriváveis.

O capítulo 2, terá como enredo as Funções Integráveis, dividindo em duas partes: Integrais superior e inferior e Integral de Riemann.

O capítulo 3, será reservado para apresentação e demonstração o Teorema Fundamentaldo Cálculo e suas aplicações.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Este capítulo será reservado para apresentar os principais resultados que dão suporte para demonstrar o Teorema Fundamental do Cálculo, resultados estes: Funções contínuas e Funções Deriváveis. Todos resultados apresentados neste capítulo poderão ser encontrados nas seguintes referências: [6], [7], [1], [9], [4], [8] e [10]. Lembrando que o leitor, deve ter um conhecimento prévio de sequência e limites de funções.

1.1 Funções contínuas

O estudo de funções contínuas é de fundamental importância para o estudo de Funções Deriváveis e Integráveis.

Antes de apresentar o estudo de funções contínuas, iremos definir o que é um ponto de acumulação e adotaremos S como um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Definição 1.1 *Dado um subconjunto de $S \subset \mathbb{R}$, dizemos que um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de S, se para cada $\delta > 0$ existe $x \in S$ tal que*

$$0 < |x - x_0| < \delta.$$

Vamos denotar o conjunto de ponto de acumulação por S' chamado de derivado de S.

Definição 1.2 *Sejam $f : S \to \mathbb{R}$ uma função definida em um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $x_0 \in S$. Dizemos que f é contínua em x_0, se para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, onde δ pode depender de ϵ e x_0, tal que*

$$x \in S \text{ e } |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Diremos, que $f : S \to \mathbb{R}$ é uma função *contínua*, quando f for contínua em todos os pontos de S. A seguir faremos algumas observações sobre continuidade.

Observação 1.1

1. *Diferentemente da definição de limite, só podemos dizer que f é contínua no ponto x_0 quando $x_0 \in S$.*

2. *Se x_0 não é ponto de acumulação de S então, todas as funções $f : S \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto x_0. De fato, dado um $\epsilon > 0$, e fixando um $\delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap S = \{x_0\}$. Então, $|x - x_0| < \delta$ com $x \in S$ implica que $x = x_0$, logo $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \epsilon$.*

3. *Seja $x_0 \in S$ um ponto de acumulação de S. Logo, pela a Definição 1.2, $f : S \to \mathbb{R}$ é continua no ponto x_0 se, e somente se, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Portanto a noção de função contínua será reduzida a noção de limite.*

As observações acima sobre continuidade podem ser apresentadas como nos cursos de Cálculo, para isso basta supor que $x_0 \in S'$, sendo assim, temos que f é contínua em x_0 se:

1. f está definida em x_0;

2. Existe o limite de f em x_0;

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Observação 1.2 *A partir de agora, vamos considerar $x_0 \in S'$, para todos os resultados que envolve continuidade.*

Exemplo 1.1 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$, sendo c uma constante é contínua.*
Solução: *Se x_0 é um ponto qualquer de $\mathbb{R}$ então f é contínua em x_0. De fato, para qualquer $\epsilon > 0$, podemos adotar um $\delta > 0$, tal que*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \epsilon.$$

Exemplo 1.2 *Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ e considere x_0 um ponto arbitrário de $\mathbb{R}$, f é contínua em x_0.*
Solução: *Se $\epsilon > 0$ é dado, então podemos escolher $\delta = \epsilon$ e obtemos*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \epsilon.$$

O que mostra que, f é contínua em x_0.

Proposição 1.1 *Seja $f : S \to \mathbb{R}$ uma função real. Então f é continua em $x_0 \in S'$ se, e somente se, para qualquer sequência (x_n) de pontos de S com $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ tem-se que $(f(x_n))$ é convergente e $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap S$, tem-se $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Sendo $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap S$, para todo $n > n_0$. Portanto,

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon, \forall n > n_0.$$

Logo,
$$\lim_{n\to\infty} f(x) = f(x_0).$$

($\Leftarrow$) Supondo que f não é contínua em x_0, então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos obter $x_k \in S$ com $|x_k - x_0| < \frac{1}{k}$ e $|f(x_k) - f(x_0)| \geq \epsilon$. Então, temos $x_k \longrightarrow x_0$ e, no entanto, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) \neq f(x_0)$. O que é uma contradição.

$\blacksquare$

Exemplo 1.3 *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 0$ para $x \in \mathbb{Q}$ e $g(x) = 1$ para $x \in \mathbb{I}$. Vejamos que g não é contínua em nenhum ponto de R.*
Solução: *Se $a \in \mathbb{Q}$, podemos escolher uma sequência $(y_n) \in \mathbb{I}$ com $y_n \to a$, onde $g(y_n) = 1$, logo*
$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = 1 \neq g(a) = 0$$
De maneira análoga, se $a \in \mathbb{I}$, podemos adotar uma sequência $(x_n) \in \mathbb{Q}$ com $x_n \to a$, de modo que $g(x_n) = 0$, logo
$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 0 \neq g(a) = 1$$
Sendo assim, todo número real é ponto de descontinuidade de g.

Proposição 1.2 *Sejam $f, g : S \to \mathbb{R}$ contínuas em $x_0 \in S'$.Então:*

1. *$f + g$ é contínua em x_0.*
2. *$f \cdot g$ é contínua em x_0.*
3. *Se $g(x_0) \neq 0$ então existe uma vizinhança de x_0 $V_\eta(x_0) = (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ tal que a função $\frac{f}{g}$ está bem definida em $V_\eta(x_0) \cap S$ e é contínua em x_0.*

Demonstração: Sejam $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$ para os itens 1 e 2, e para o item 3 consideremos $g(x_0) \neq 0$.

1) Note que, pelas proposições de limites, temos
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) &= \lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] \\
&= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \\
&= f(x_0) + g(x_0) \\
&= (f+g)(x_0)
\end{aligned}$$
Portanto, $(f + g)$ é contínua em x_0.

2) Observe que
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) &= \lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] \\
&= \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \\
&= f(x_0) \cdot g(x_0) \\
&= (f\cdot g)(x_0)
\end{aligned}$$

Logo, o produto de f por g é contínua em x_0.

3) Seja $g(x_0) \neq 0$, consideremos $\epsilon_0 = \frac{|g(x_0)|}{2}$ e, se g é contínua em x_0, existe $\eta > 0$ tal que se $x \in S$ e $|x - x_0| < \eta$ então $|g(x) - g(x_0)| < \epsilon_0$, isto é

$$g(x_0) - \frac{|g(x_0)|}{2} < g(x) < g(x_0) + \frac{|g(x_0)|}{2}.$$

Se $g(x_0) > 0$ acarreta que

$$0 < \frac{|g(x_0)|}{2} < g(x), \quad \forall x \in V_n(x_0) \cap S.$$

Caso seja $g(x_0) < 0$ segue que

$$g(x) < \frac{g(x_0)}{2} < 0, \quad \forall x \in V_n(x_0) \cap S.$$

Portanto, para qualquer caso, temos $g(x) \neq 0$ em $V_\eta(x_0) \cap S$, logo $\frac{f}{g}$ está bem definida em $V_n(x_0) \cap S$.
Agora provemos a continuidade de $\frac{f}{g}$, note que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) &= \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \\
&= \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \\
&= \frac{f}{g}(x_0).
\end{aligned}$$

Assim, $\frac{f}{g}$ é contínua em x_0, com $g(x_0) \neq 0$.

■

Proposição 1.3 *Sejam $f : S \to \mathbb{R}$ e $g : T \to \mathbb{R}$ com $S, T \subset \mathbb{R}$ e $f(S) \subset T$, suponha que f é contínua em $x_0 \in S$ e g contínua em $f(x_0) \in T$. Então $(g \circ f) : S \to \mathbb{R}$ é contínua em x_0.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, temos que mostrar que existe $\delta > 0$ tal que $x \in S$ e $|x - x_0| < \delta$ acarreta em

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \epsilon.$$

Como g é contínua em $b = f(x_0)$ existe $\lambda > 0$ tal que para $y \in T$ e $|y - b| < \lambda$ temos

$$|g(y) - g(b)| < \epsilon.$$

Sendo f contínua em x_0 para este $\lambda > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $x \in S$ e $|x - x_0| < \delta$

tem-se

$$|f(x) - f(x_0)| < \lambda.$$

Portanto,

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \epsilon.$$

Logo, $(g \circ f)$ é contínua em x_0.

$\blacksquare$

Proposição 1.4 *Seja $f : S \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se existe $k > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| \leq k\,|x - x_0|\,, \forall x, x_0 \in S$, então f é contínua.*

Demonstração: Dados um ponto arbitrário $x_0 \in S$ e $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{k}$, assim, temos que, se $x \in S$ e $|x - x_0| < \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k\,|x - x_0| < k\frac{\epsilon}{k} = \epsilon.$$

o que prova a continuidade.

$\blacksquare$

A função acima com tal propriedade recebe o nome de função lipschitziana em homenagem ao matemático Rudolph Lipschitz (1831 - 1904) e k é a constante de Lipschitz.

Exemplo 1.4 *Seja $S \subset \mathbb{R}$ limitado, considere $f : S \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ e seja x_0 um ponto qualquer de $\mathbb{R}$. Vamos provar que f é lipschitziana em S.*
Solução: *Para mostrar que f é lipschitziana, vamos observar que, em virtude S ser limitado, existe um $k > 0$ tal que $|x| \leq k, \forall x \in S$. Portanto, temos*

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= \left|x^2 - x_0^2\right| \\
&= |x + x_0|\,|x - x_0| \\
&\leq (|x| + |x_0|)\,|x - x_0| \\
&\leq 2k\,|x - x_0|\,.
\end{aligned}$$

Portanto, f é lispchitziana em S, e assim, é contínua.

1.1.1 Funções contínuas em intervalos

Definição 1.3 *Diz-se que uma função $f : S \to \mathbb{R}$ é contínua à direita no ponto $x_0 \in S'$ se*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0).$$

Analogamente f é contínua à esquerda em $x_0 \in S'$ se

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0).$$

Seja f uma função real definida num intervalo fechado $[a, b]$, quando dissermos que f é contínua em $[a, b]$ fica subentendido que a continuidade lateral nas extremidades do intervalo está sendo considerada.

Teorema 1.1 *Consideremos $[a, b]$ um intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$. Então toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada.*

Demonstração: Vamos supor por absurdo que f não é limitada em $[a, b]$. Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ vai existir um ponto x_n em $[a, b]$ tal que

$$|f(x_n)| > n.$$

Como $[a, b]$ é um intervalo limitado, então (x_n) seria uma sequência limitada e, pelo o Teorema de Bolzano-Weierstrass, (x_n) possui uma subsequência (x_{n_i}) que converge para um ponto $\alpha \in [a, b]$. Pela continuidade de f teríamos que $(f(x_{n_i}))$ seria convergente para $f(\alpha)$ e, em particular, seria limitada. Porém, isso não poderia ocorrer pois

$$|f(x_{n_i})| > n_i.$$

Logo, f terá que ser limitada.

$\blacksquare$

Observação 1.3 *Na demonstração do Teorema 1.1, só foi usado o argumento que $[a, b]$ é fechado e limitado, diremos que $[a, b]$ é compacto em $\mathbb{R}$. Pela a demonstração acima, podemos dizer que as funções de $\mathbb{R}$ contínuas definidas em compactos são limitadas.*

Teorema 1.2 ***(Teorema de Weierstrass)*** *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $[a, b]$ um intervalo limitada e fechado. Então existem $\alpha, \beta \in [a, b]$ tais que*

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta), \quad \forall x \in [a, b].$$

Demonstração: Pelo o Teorema 1.1, temos que $f([a, b])$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$. Portanto, existem m e M de tal maneira

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{e} \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Vamos mostrar que existem $\alpha, \beta \in [a, b]$ de modo que $f(\alpha) = m$ e $f(\beta) = M$, isto é, o mínimo e máximo são atingidos em pontos de $[a, b]$. Por contradição, vamos supor, que o mínimo m não é atingido, logo,

$$f(x) > m, \forall x \in [a, b].$$

Seja $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x) - m} > 0.$$

Temos que $\varphi(x) > 0$ e é contínua para todo $x \in [a, b]$. Pelo o Teorema 1.1 existe $K > 0$ tal que

$$0 < K \leq \varphi(x), \forall x \in [a, b].$$

Como $\varphi(x)$ é definida por $\frac{1}{f(x)-m}$, logo

$$K \leq \frac{1}{f(x) - m}, \forall x \in [a, b].$$

Ainda podemos escrever, da seguinte maneira

$$m + \frac{1}{K} \leq f(x), \forall x \in [a, b].$$

Mas, isso é uma contradição, pois $m + \frac{1}{K} > m$ e m é o ínfimo de f em $[a, b]$. Para o supremo, a demonstração é feita de maneira análoga.

$\blacksquare$

Teorema 1.3 ***(Teorema do Valor Intermediário)*** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração: Consideremos $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - d$ e seja

$$\text{S} = \{x \in [a, b]; g(x) < 0\}.$$

Notemos que S é limitado e não vazio, uma vez que $g(a) = f(a) - d < 0$. Logo existe $c = \text{Sup } S$.

Vamos mostrar que $c \in (a, b)$ e $f(c) = d$. De fato, como g é contínua à direita em a, então existe um $\delta_1 > 0$ tal que, se $x \in [a, a + \delta_1)$ então $g(x) < 0$. Ou seja, $[a, a + \delta_1) \subset S$, sendo assim $a < c \leq b$.

Por outro lado, $g(b) = f(b) - d > 0$ e como g é contínua à esquerda em b existe um $\delta_2 > 0$ tal que, se $x \in (b - \delta_2, b]$ então $g(x) > 0$, consequentemente $a < c \leq b - \delta_2 < b$.

Sendo $c = \sup S$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe

$$x_n \in S : c - \tfrac{1}{n} < x_n \leq c.$$

Assim,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = c.$$

Como g é contínua em c então

$$\lim_{n \to \infty} g(x_n) = g(c).$$

Como $g(x_n) < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então

$$\lim_{n \to \infty} g(x_n) \leq 0.$$

Deste modo, $g(c) \leq 0$.

Agora, para todo $x \in [a, b]$ e $x > c$ temos $g(x) \geq 0$. Isso resulta que

$$\lim_{x \to c_+} g(x) \geq 0.$$

Mas, como g é contínua em c temos

$$\text{g(c)} = \lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c_+} g(x) \geq 0.$$

Concluímos que $g(c) = 0$, o que implica $f(c) = d$, como queríamos demonstrar.

$\blacksquare$

Proposição 1.5 *Se $f : [a, b] \to [a, b]$ é contínua, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = c$.*

Demonstração: Considere $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x - f(x)$. Temos que g é contínua em $[a, b]$ e

$$g(a) = a - f(a) \leq 0$$

e

$$g(b) = b - f(b) \geq 0.$$

Logo, pelo o Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$. Isto é,

$$f(c) = c.$$

$\blacksquare$

1.1.2 Funções uniformemente contínuas

Definição 1.4 *Uma função $f : S \to \mathbb{R}$ é denominada uniformemente contínua em S se, para $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$\forall\ x, x' \in S; |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Observemos que, no caso das funções uniformemente contínuas, o δ depende apenas de ϵ e não levaremos em considerações as particularidades dos pontos. Podemos afirmar que toda função uniformemente contínua é contínua. No entanto, a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 1.5 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$ é uniformemente contínua.*
Solução: *Dado um $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \epsilon$ e temos que se $|x - y| < \delta$, então*

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y| < \epsilon.$$

Proposição 1.6 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então, f é uniformemente contínua.*

Demonstração: A prova desta proposição é por contradição. Suponha que f não seja uniformemente contínua. Então, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ podemos encontrar pontos x e y em $[a, b]$ com $|x - y| < \delta$ porém, $|f(x) - f(y)| > \epsilon_0$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos adotar $\delta = \frac{1}{n}$ e obtemos sequências (x_n) e (y_n) em $[a, b]$ tais que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, mas $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon_0$. Como (x_n) e (y_n) são limitadas então, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, elas possuem subsequências (x_{n_i}) e (y_{n_i}), respectivamente, que convergem para pontos de $[a, b]$. Seja então

$$r = \lim_{i\to\infty}(x_{n_i}) \text{ e } s = \lim_{i\to\infty}(y_{n_i}).$$

Temos então, que

$$0 \leq \lim_{i\to\infty} |x_{n_i} - y_{n_i}| \leq \lim_{i\to\infty} \frac{1}{n_j} = 0,$$

isto é, $0 \leq |r - s| \leq 0$, portanto, $r = s$. Pela continuidade de f temos

$$\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} f(y_{n_i}) = f(r),$$

logo

$$\lim_{i\to\infty}[f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})] = 0.$$

Mas, isto é uma contradição, pois, $|f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| > \epsilon_0$, para todo n_i.

■

1.2 Funções Deriváveis

Esta seção será reservada para o estudo de funções deriváveis, apresentamos alguns resultados importantes como: As propriedades da derivação, regra da cadeia e o Teorema do Valor Médio de Lagrange.

Definição 1.5 *Sejam $S \subset \mathbb{R}$ e $f : S \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos, que f é derivável em $x_0 \in S \cap S'$ se existe o limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1.1}$$

Quando o limite (1.1) existe denotamos $f'(x_0)$ que é denominado derivada da f no ponto x_0.

Agora tomemos $h = x - x_0$, ou seja $x = x_0 + h$, teremos que $x \to x_0$ se, e somente se, $h \to 0$. E, substituindo no limite (1.1), quando o limite existe, temos que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{1.2}$$

A notação $f'(x_0)$ foi utilizada por Lagrange, entretanto além desta notação existe outras maneiras de representar a derivada de uma função em um ponto, como

$$Df(x_0) \quad , \quad \frac{df}{dx}x_0 \quad \text{ou} \quad \dot{f}(x_0).$$

A notação $\dot{f}(x_0)$ foi usada por Newton em seus trabalhos sobre funções deriváveis, por outro lado, a notação $\frac{dx}{dy}$ foi empregada por Leibniz.

Quando h assume valores positivos em (1.2), o limite, quando existe, é denominado derivada lateral à direita de f em x_0 e denotamos por $f'_d(x_0)$, por outro lado, quando h assume valores negativos, o limite, quando existe, é denominado derivada lateral à esquerda de f em x_0 e é denotado por $f'_e(x_0)$. Sendo assim, temos

$$f'_d(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e

$$f'_e(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Assim, como no estudo de limites, dizemos que f é derivável em x_0 se, e somente se, existem as derivadas laterais em x_0, e

$$f'_d(x_0) = f'_e(x_0) = f'(x_0).$$

Quando $f'(x)$ existe em todo $x \in S$ dizemos que f é derivável em S.

Exemplo 1.6 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ constante, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então $f'(x_0) = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Solução: *Utilizando a definição de derivada temos,*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

Portanto, f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = 0$, dizemos que a derivada de uma constante é nula.

Exemplo 1.7 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = cx+d$ e seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Então $f'(x_0) = c$.*
Solução: *Basta ver que*

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \lim_{h\to\ 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to\ 0} \frac{c(x_0+h)+d-cx_0-d}{h} \\ &= \lim_{h\to\ 0} \frac{cx_0+ch-cx_0}{h} \\ &= \lim_{h\to\ 0} \frac{ch}{h} \\ &= \lim_{h\to\ 0} c = c. \end{aligned}$$

Logo, f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = c$, podemos dizer que a derivada de uma função de primeiro grau é igual ao coeficiente da variável.

Exemplo 1.8 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ e seja x_0 um ponto arbitrário de $\mathbb{R}$. Logo, $f'(x_0) = 2x_0$.*
Solução: *Aplicando a Equação (1.2), temos*

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \lim_{h\to\ 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to\ 0} \frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h\to\ 0} \frac{2x_0h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to\ 0} \frac{h(2x_0+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to\ 0} (2x_0+h) \\ &= \lim_{h\to\ 0} 2x_0 + \lim_{h\to 0} h \\ &= 2x_0 + 0 = 2x_0. \end{aligned}$$

Portanto, f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = 2x_0$.

Exemplo 1.9 *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ e x_0 um ponto arbitrário de $\mathbb{R}$. Logo, $f'(x_0) = n(x_o)^{n-1}$.*
Solução: *Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, podemos obter a seguinte expressão*

$$\begin{aligned} f(x_0+h)-f(x_0) &= (x_0+n)^n-(x_0)^n \\ &= \left[(x_0)^n+n(x_0)^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}(x_0)^{n-2}h^2+...+n(x_0)h^{n-1}+h^n\right]-(x_0)^n \\ &= h\left[n(x_0)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}(x_0)^{n-2}h+...+n(x_0)h^{n-2}+h^{n-1}\right]. \end{aligned}$$

Aplicando a Equação (1.2), temos

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to\ 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^n - f(x_0)^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h\left[n(x_0)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(x_0)^{n-2}h + ... + n(x_0)h^{n-2} + h^{n-1}\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[n(x_0)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(x_0)^{n-2}h + ... + n(x_0)h^{n-2} + h^{n-1}\right] \\
&= n(x_0)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = n(x_0)^{n-1}, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.10 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ não é derivável em $x_0 = 0$.*
Solução: *Vamos mostrar usando os limites laterais que f não é derivável, temos*

$$\lim_{x\to\ 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to\ 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to\ 0^-} (-1) = -1$$

e

$$\lim_{x\to\ 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to\ 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to\ 0^+} 1 = 1.$$

Portanto, não existe o limite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$. Então f não é derivável em x_0.

Proposição 1.7 *Seja $f : S \to \mathbb{R}$ uma função derivável em um ponto $x_0 \in S'$. Então f é contínua em x_0.*

Demonstração: Considere a igualdade

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0), x \neq x_0.$$

Então

$$\lim_{x\to\ x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x\to\ x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \lim_{x\to\ x_0} (x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0).$$

isto é,

$$\lim_{x\to\ x_0} f(x) = f(x_0)$$

o que significa dizer que f contínua em x_0.

■

A recíproca da Proposição 1.7 não é verdadeira, como podemos observar no Exemplo 1.10.

Agora, vamos estabelecer as propriedades algébricas da derivada que serão apresentada na proposição a seguir.

Proposição 1.8 *Sejam $f, g : S \to \mathbb{R}$ e deriváveis em $x_0 \in S'$. Então, vale as seguintes afirmações:*

1. *$f + g$ é derivável em x_0 e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;*
2. *seja $k \in \mathbb{R}$ uma constante, então $(kf)'(x_0) = kf'(x_0)$;*
3. *$f \cdot g$ é derivável em x_0 e $(f \cdot g)' = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)$;*
4. *se $g(x_0) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ é derivável em x_0 e*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Demonstração:

1) Vamos provar que $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
(f + g)'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f + g)(x_0 + h) - (f + g)(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\
&= f'(x_0) + g'(x_0).
\end{aligned}$$

2) Agora, mostraremos que $(kf)'(x_0) = kf'(x_0)$, pois

$$\begin{aligned}
(kf)'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{(kf)(x_0 + h) - (kf)(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{k[f(x_0 + h) - f(x_0)]}{h} \\
&= kf'(x_0).
\end{aligned}$$

3) Iremos, verificar que $(f \cdot g)' = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)$, de fato

$$(f \cdot g)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h}.$$

Adicionando e subtraindo $f(x_0 + h)g(x_0)$ no numerador do limite acima, temos

$$
\begin{aligned}
(f\cdot g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0+h)g(x_0)+f(x_0+h)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}[f(x_0+h)\frac{g(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{(f(x_0+h)-f(x_0))g(x_0)}{h}]\\
&= f(x_0)\cdot g'(x_0)+f'(x_0)\cdot g(x_0).
\end{aligned}
$$

4) Por fim, provaremos que $(\frac{f}{g})'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$, temos que

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0)f(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)}{hg(x_0+h)g(x_0)}.
\end{aligned}
$$

Adicionado e subtraindo $g(x_0)f(x_0)$ no numerador, resulta

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0)f(x_0+h)-g(x_0)f(x_0)+g(x_0)f(x_0)-f(x_0)g(x_0+h)}{hg(x_0+h)g(x_0)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x_0)[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}]-f(x_0)[\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}]}{g(x_0+h)g(x_0)}\\
&= \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.
\end{aligned}
$$

Para garantir as demonstrações da Proposição 1.8, foi utilizado o resultado da Proposição 1.7 e das propriedades de limites de funções.

■

Após aplicações sucessivas do Exemplo 1.9 e Proposição 1.8, resulta que os polinômios são funções deriváveis em todos os pontos $\mathbb{R}$ assim como as funções racionais nos pontos onde o denominador é diferente de zero.

Proposição 1.9 ***(Regra da Cadeia)*** *Sejam $f : S \to \mathbb{R}$ e $g : T \to \mathbb{R}$ funções deriváveis definiadas nos intervalos abertos $S, T \subset \mathbb{R}$ quaisquer com $f(S) \subset J$. Se f é derivável em x_0 e g é derivável em $f(x_0)$, então $g \circ f$ é derivável em x_0 e*

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Demonstração: Vamos supor que $f(x) \neq f(x_0)$ para todo x que esteja suficiente próxima de x_0. Portanto,

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Passando o limite quando $x \to x_0$, obtemos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Logo,

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Entretanto, se para todo x próximo de x_0, tem-se que $f(x) = f(x_0)$, logo, $g(f(x)) = g(f(x_0))$ e $f'(x_0) = 0$, ou seja,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = 0 = g'(f(x_0)) \cdot 0 = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

■

Exemplo 1.11 *Seja $f : S \to \mathbb{R}$ uma função derivável em S e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida $g(y) = y^n$, para $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ fixo. Então,*

$$(f^n)'(x_0) = n[f(x_0)]^{n-1} f'(x_0).$$

Solução: *Observe que $g'(y) = ny^{n-1}$ e aplicando a regra da cadeia obtemos*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0),$$

para todo $x_0 \in S$. Daí,

$$(f^n)'(x_0) = n[f(x_0)]^{n-1} f'(x_0).$$

Exemplo 1.12 *Seja $f : S \to \mathbb{R}$ uma função derivável em S tal que $f(x_0) \neq 0$ e $f'(x_0) \neq 0$, para todo $x_0 \in S$. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $g(y) = \frac{1}{y}$. Então,*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}.$$

Solução: *Como podemos observar, usando a Proposição 1.8*

$$g'(y) = -\frac{1}{y^2}$$

Portanto, para todo $x_0 \in S$, temos

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}.$$

Teorema 1.4 ***(Teorema de Rolle)*** *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) com $f(a) = f(b)$. Então, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração: Como f é contínua, então, pelo o Teorema de Weierstrass, admite no intervalo $[a, b]$ um máximo M e um mínimo m.
Se $M = m$ então f implica que $m \leq f(x) \leq M = m, \forall x \in [a, b]$, assim, f é constante no intervalo considerado, logo $f'(x) = 0$, portanto, é válido o teorema.

Agora, vamos considerar $M \neq m$. Se $M = f(a)$ e $m = f(b)$, então f é constante. Logo, podemos supor que M ou m é atingido em (a, b) Consideremos que f admite o valor máximo M, no ponto x_0 tal que $a < x_0 < b$. Então, para $x < x_0$ temos $x - x_0 < 0$ e também $f(x) - f(x_0) \leq 0$ e portanto,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Como f é derivável, então

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0$$

e se $x_0 < x$,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0.$$

Então,

$$f'(x_0) \geq 0 \quad \text{e} \quad f'(x_0) \leq 0.$$

Portanto,

$$f'(x_0) = 0.$$

Se consideramos a existência de um ponto mínimo de vez do ponto máximo a demonstração seria análoga.

■

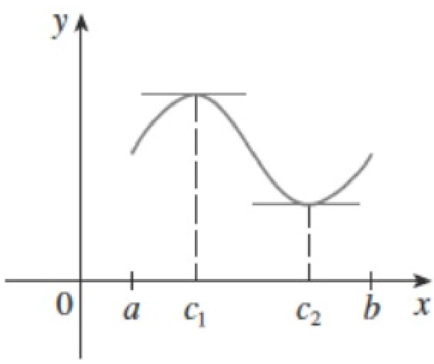

Figura 1.1: Teorema de Rolle

Teorema 1.5 ***(Teorema do Valor Médio de Lagrange)*** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ um função que é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e é diferenciável no intervalo aberto (a, b). Então, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração: Seja $g(x)$ um função definida por

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) - f(a), \forall x \in [a, b].$$

Como $g(a) = g(b) = 0$. Então existe um x_0 tal que $g'(x_0) = 0$, logo

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

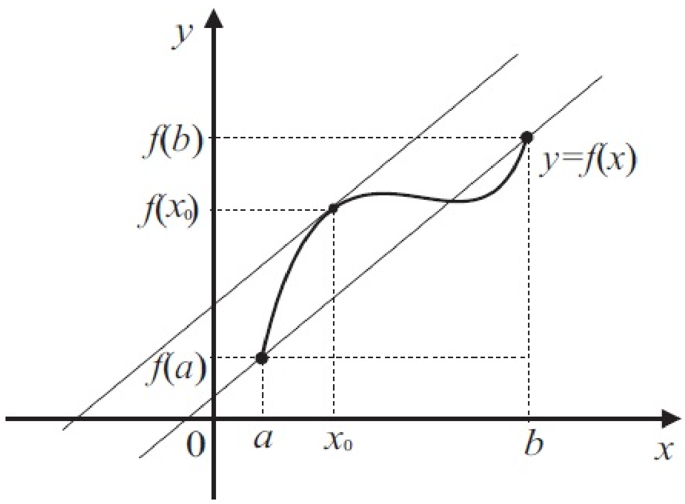

Figura 1.2: Teorema do Valor Médio de Lagrange

Capítulo 2

Funções integráveis

Neste Capítulo faremos um estudo da teoria das funções integráveis e este estudo é mais antigo do que estudo do Cálculo Diferencial. Seu desenvolvimento foi a partir dos estudos feitos por Arquimedes, a integral surgiu pra suprir a necessidade de calcular área à baixo de uma ou mais curvas.

Sendo assim, esta seção tem como seu principal objetivo definir a Integral de Riemann e suas propriedades para que possamos apresentar o Teorema Fundamental do Cálculo. Todos resultados apresentados neste capítulo pode ser visto nas seguintes referências: [6], [8],[4] e [9].

2.1 Integral superior e integral inferior.

Seja $[a,b]$ um intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$ e $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ um conjunto de pontos de $[a,b]$, que satisfaça a seguinte condição $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, então P é chamado de partição do intervalo $[a,b]$. Cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, com i variando de 1 até n, tem comprimento $x_i - x_{i-1}$ e é chamado de i-ésimo intervalo da partição P.

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ uma partição de $[a,b]$. Sabendo que f é limitada em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de $[a,b]$, existem m_i que é o ínfimo f e M_i o supremo de f em $[x_{i-1}, x_i]$. Logo,

$$m_i = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{e} \quad M_i = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Podemos definir a soma inferior de f relativa à partição P da seguinte maneira

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \tag{2.1}$$

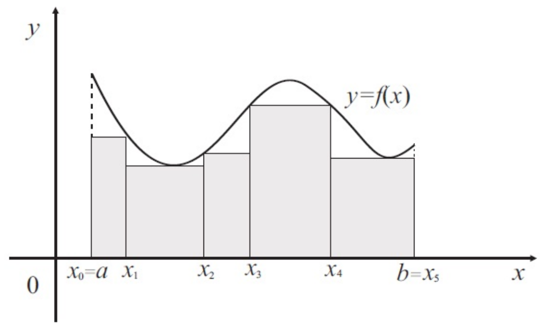

Figura 2.1: Soma inferior

e, de maneira análoga, definimos a soma superior de f relativa à partição P, como

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}). \tag{2.2}$$

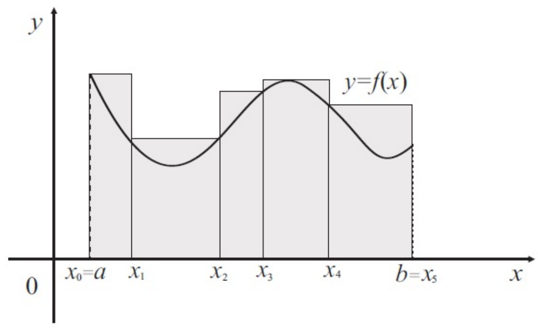

Figura 2.2: Soma superior

As somas apresentada anteriormente, são denominadas de somas de Riemann-Darboux inferior e superior de *f*, relativamente à partição P.

Para podemos definir a integral superior e inferior de um função limitada *f*, vamos apresentar a seguir três lemas importantes a respeito a soma inferior e superior.

Lema 2.1 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada, então, para qualquer partição de P de $[a,b]$, tem-se*

$$m(b-a) \leq s(f;P) \leq S(f;P) \leq M(b-a)$$

onde

$$m = inf\{f(x); x \in [a,b]\} \quad e \quad M = sup\{f(x); x \in [a,b]\}.$$

Demonstração: Para provar este lema, basta o fato de que para cada $i = 1, 2, ..., n$ tem-se que $m \leq m_i \leq M_i \leq M$ e portanto, temos

$$m(x_i - x_{i-1}) \leq m_i(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1}) \leq M(x_i - x_{i-1}).$$

Aplicando soma em todos os termos, temos

$$\sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1}).$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a.$$

Então,

$$m(b-a) \leq s(f;P) \leq S(f;P) \leq M(b-a).$$

■

Iremos utilizar $\mathcal{P}([a,b])$ para denotar a coleção de todas partições de $[a,b]$. Se P e Q pertecem a $\mathcal{P}([a,b])$, dizemos que Q é um refinamento de P, se $P \subset Q$.

Lema 2.2 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e P e Q duas partições de $[a,b]$. Se Q é um refinamento de P então:*

a) $s(f;P) \leq s(f;Q)$;
b) $S(f;Q) \leq S(f;P)$.

Demonstração: Seja $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ uma partição e suponhamos Q como uma partição que possui um acréscimo de um ponto em relação a P, ou seja, $Q = P \cup \{r\}$, com $x_{i-1} < r < x_i$, para algum i entre $1, 2, 3, ..., n$. Sejam m' e m'', respectivamente, os ínfimos de f nos intervalos $[x_i, r]$ e $[r, x_i]$. Evidentemente que

$$m_i \leq m' \quad , \quad m_i \leq m'' \quad \text{e} \quad x_i - x_{i-1} = (x_i - r) + (r - x_{i-1}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} s(f;Q) - s(f;P) &= m'(r - x_{i-1}) + m''(x_i - r) - m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= m'(r - x_{i-1}) - m_i(x_i - r) - m_i(r - x_{i-1}) + m''(x_i - r) \\ &= (m' - m_i)(r - x_{i-1}) + (m'' - m_i)(x_i - r) \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, $(f;P) \leq s(f;Q)$. De forma geral para este caso, basta repetir o argumento utilizado anterior para um número finito de vezes. Analogamente se demonstra que $P \subset Q$ acarreta que $S(f;Q) \leq S(f;P)$.

■

Através do lema anterior percebemos que os refinamentos de um partição tendem a aumentar as somas inferiores e diminuir as superiores.

Lema 2.3 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e sejam P e Q duas partições quaisquer de $[a,b]$. Então $s(f;P) \leq S(f;Q)$.*

Demonstração: Seja $P \cup Q$ um refinamento comum de P e Q. De modo que, pelos dois lemas anteriores, temos

$$s(f;P) \leq s(f;P \cup Q) \leq S(f;P \cup Q) \leq S(f;Q).$$

$\blacksquare$

Com este terceiro lema para uma função limitada em $[a,b]$, podemos dizer que, as somas inferiores são cotas inferiores para a somas superiores e que as somas superiores são cotas superiores para a somas inferiores. Assim, podemos estabelecer a seguinte definição.

Definição 2.1 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos a integral inferior de f como*

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \sup_{P \in \mathcal{P}} \{s(f;P)\}$$

e a integral superior de f por

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx = \inf_{P \in \mathcal{P}} \{S(f;P)\}.$$

Proposição 2.1 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e sejam m e M tais que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a,b]$. Então,*

$$m(b-a) \leq \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx \leq M(b-a).$$

Demonstração: Utilizando o Lema 2.1 e Lema 2.3, temos que

$$m(b-a) \leq s(f;P) \leq S(f;Q) \leq M(b-a)$$

para quaisquer $P, Q \in \mathcal{P}$. Logo,

$$m(b-a) \leq \sup_{P \in \mathcal{P}} \{s(f;P)\} \leq \inf_{P \in \mathcal{P}} \{S(f;P)\} \leq M(b-a).$$

Portanto,

$$m(b-a) \leq \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{\overline{b}} \leq M(b-a).$$

$\blacksquare$

Proposição 2.2 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua limitada. Então, para qualquer $c \in \mathbb{R}$, tem-se que*

i) $\displaystyle\int_{\underline{a}}^{b} [f(x)dx + c]dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx + c(b-a)$;

ii) $\displaystyle\int_{a}^{\overline{b}} [f(x) + c]dx = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx + c(b-a)$.

Demonstração: Seja P uma partição qualquer de $[a, b]$ para os itens $i)$ e $ii)$, sendo assim, temos :

$i)$ Denotando $\mu_i = inf\{f(x) + c : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ e por $m_i = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Temos $\mu_i = m_i + c$. Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}(m_i + c)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + c(b - a).\end{aligned}$$

Ou seja, $s((f + c); P) = s(f; P) + c(b - a)$, portanto

$$\begin{aligned}\sup_{P\in\mathcal{P}}\{s((f + c); P)\} &= \int_{\underline{a}}^{b} [f(x) + c]dx \\ &= \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx + c(b - a).\end{aligned}$$

$ii)$ Agora, denotemos $\mu_i = sup\{f(x) + c : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ e $M_i = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Temos que $\mu_i = M_i + c$. Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i + c)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) + c(b - a).\end{aligned}$$

Ou seja, $S((f + c); P) = S(f; P) + c(b - a)$, portanto

$$\begin{aligned}\inf_{P\in\mathcal{P}}\{S((f + c); P)\} &= \int_{a}^{\bar{b}} [f(x) + c]dx \\ &= \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx + c(b - a).\end{aligned}$$

■

2.2 A integral de Riemann

Após apresentamos o estudo integral superior e inferior, podemos definir a integral de Riemann, que são as funções nas quais o supremo das somas inferiores é a igual ao ínfimo das somas superiores do intervalo $[a,b]$.

Definição 2.2 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, dizemos que f é integrável à Riemann em $[a,b]$ quando*

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(t)dt = \int_{a}^{\overline{b}} f(t)dt$$

e o valor comum denotaremos por

$$\int_{a}^{b} f(t)dt.$$

Observação 2.1 *Por convenção, temos*

$$\int_{a}^{a} f(t)dt = 0.$$

Exemplo 2.1 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = k$, para todo $x \in [a,b]$. Então f é integrável em $[a,b]$ e*

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = k(b-a).$$

Solução: *Para qualquer partição P do intervalo $[a,b]$, temos que $m_i = M_i = k$, para qualqueis subintervalos, temos $s(f;P) = S(f;P) = k(b-a)$. Portanto,*

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(t)dt = \int_{a}^{\overline{b}} f(t)dt = k(b-a).$$

Exemplo 2.2 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{I}$ e $f(x) = 1$, se $x \in \mathbb{Q}$.*
Solução: *Seja P uma partição qualquer do intervalo $[a,b]$, temos $m_i = 0$ e $M_i = 1$ para todo $i = \{1,2,..n\}$ pois, todos os intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ de $[a,b]$ contém números racionais e irracionais. Logo,*

$$s(f;P) = 0 \quad e \quad S(f;P) = b-a$$

para qualquer partição P. Portanto,

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = 0, \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx = b-a.$$

Portanto, f não é integrável em $[a,b]$.

Teorema 2.1 ***(Critérios de integrabilidade de Riemann)*** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, f é integrável se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existir $P \in \mathcal{P}$ tais que*

$$S(f;P) - s(f;P) < \epsilon.$$

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Suponhamos que f é integrável a Riemann, então

$$\begin{aligned} sup\{s(f;P) : P \in \mathcal{P}\} &= inf\{S(f;P) : P \in \mathcal{P}\} \\ \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx &= \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx. \end{aligned}$$

Usando as definições do supremo e do ínfimo temos que, dado $\epsilon > 0$, obtemos duas partições P_ϵ e Q_ϵ tais que

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} < s(f;P_\epsilon)$$

e

$$\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx + \frac{\epsilon}{2} > S(f;Q_\epsilon).$$

Sendo assim, temos

$$S(f;Q_\epsilon) < \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx + \frac{\epsilon}{2} = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx + \frac{\epsilon}{2} < s(f;P_\epsilon) + \epsilon.$$

Portanto,

$$S(f;Q_\epsilon) - s(f;P_\epsilon) < \epsilon.$$

Agora, consideremos $P = P_\epsilon \cup Q_\epsilon$ um refinamento tanto de P_ϵ e para Q_ϵ. Então

$$S(f;Q_\epsilon) \geq S(f;P)$$

e

$$s(f;P_\epsilon) \leq s(f;P)$$

de maneira que

$$S(f;P) - s(f;P) < \epsilon.$$

$(\Leftarrow)$ Agora, suponhamos que, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \epsilon.$$

temos que

$$\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx \leq S(f;P) \quad \text{e} \quad \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \geq s(f;P),$$

de modo que

$$\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx - \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \leq S(f;P) - s(f;P) < \epsilon,$$

assim,

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx - \int_{\underline{a}}^b f(x)dx < \epsilon,$$

como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx \leq \int_{\underline{a}}^b f(x)dx.$$

e de maneira geral, temos

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx \geq \int_{\underline{a}}^b f(x)dx.$$

podemos concluí que,

$$\int_a^{\bar{b}} f(x)dx = \int_{\underline{a}}^b f(x)dx.$$

Portanto, f é integrável à Riemann em $[a, b]$.

■

Proposição 2.3 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e integrável. Dado qualquer $c \in [a, b]$, podemos dizer que*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Demonstração: Vamos denotar as somas superiores de f, por S_a^b,S_a^c e S_c^b para as suas recepctivas partições de $[a, b]$,$[c, a]$ e $[b, c]$. Seja P uma partição qualquer de $[a, b]$. Temos as seguintes partições $P^1 = P \cap [a, c]$ e $P^2 = P \cap [c, b]$ de $[a, c]$ e $[c, b]$, respectivamente. Assim,

$$S_a^b(f; P) = S_a^c(f; P^1) + S_c^b(f; P^2) \geq \int_a^{\bar{c}} f(x)dx + \int_c^{\bar{b}} f(x)dx. \tag{2.3}$$

Portanto,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx \geq \int_a^{\bar{c}} f(x)dx + \int_c^{\bar{b}} f(x)dx. \tag{2.4}$$

Tomemos $\epsilon > 0$ arbitrário. Então, existem partições P^1 de $[a, c]$ e P^2 de $[c, b]$, tais que

$$S_a^c(f; P^1) < \int_a^{\bar{c}} f(x)dx + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad S_c^b(f; P^2) < \int_c^{\bar{b}} f(x)dx + \frac{\epsilon}{2}.$$

$$S_a^b(f; P) = S_a^c(f; P^1) + S_c^b(f; P^2) < \int_a^{\bar{c}} f(x)dx + \int_c^{\bar{b}} f(x)dx + \epsilon$$

Logo,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\bar{b}} f(x)dx \leq \int_a^{\bar{c}} f(x)dx + \int_c^{\bar{b}} f(x)dx. \tag{2.5}$$

E das Equações (2.4) e (2.5), temos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

■

Observe que estamos usando a integração sempre da "esquerda para à direita", entretanto, é conveniente que tenhamos uma versão para da "direita à esquerda". Então, usando a Observação 2.1 e Proposição 2.3, temos que

$$0 = \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^a f(t)dt.$$

Logo,

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$$

Proposição 2.4 *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções integráveis e $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Então*

i) $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

ii) cf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b (cf)(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

iii)Se $f(x) \leq g(x)$ em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Demonstração: i) Consideremos uma partição P do intervalo $[a, b]$, então por definições já apresentadas, temos

$$\int_a^{\bar{b}} (f(x) + g(x))dx \leq S((f + g), P) \leq S(f, P) + S(g, P)$$

e

$$\int_{\underline{a}}^b (f(x) + g(x))dx \geq s((f + g), P) \geq s(f, P) + s(g, P)$$

Sejam P e Q duas partições quaisquer tal que $P \cup Q$ é um refinamento de P e Q. Logo,

$$\begin{aligned} \int_a^{\bar{b}} (f(x) + g(x))dx &\leq S(f + g; P \cup Q) \\ &\leq S(f; P \cup Q) + S(g; P \cup Q) \\ &\leq S(f; P) + S(g; Q). \end{aligned}$$

de maneira que

$$\begin{aligned}
\overline{\int_a^b} f(x)dx + \overline{\int_a^b} g(x)dx &= \inf_P S(f;P) + \inf_Q S(g;Q) \\
&= \inf_{P,Q} [S(f;P) + S(g;Q)] \\
&\geq \overline{\int_a^b} (f(x)+g(x))dx.
\end{aligned}$$

Anagolamente, temos

$$\begin{aligned}
\underline{\int_a^b} (f(x)+g(x))dx &\geq s(f+g; P\cup Q) \\
&\geq s(f;P\cup Q) + s(g;P\cup Q) \\
&\geq s(f;P) + s(g;Q).
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx &= \sup_P s(f;P) + \sup_Q s(g;Q) \\
&= \sup_{P,Q} [s(f;P) + s(g;Q)] \\
&\leq \underline{\int_a^b} (f(x)+g(x))dx.
\end{aligned}$$

acarreta que,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx+\underline{\int_a^b} g(x)dx \leq \underline{\int_a^b}(f(x)+g(x))dx \leq \overline{\int_a^b}(f(x)+g(x))dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx+\overline{\int_a^b} g(x)dx.$$

logo, como f e g são integráveis, temos

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

portanto, concluímos que $f+g$ é integrável.

ii) Caso $c = 0$ o resultado é imediato. Vamos supor que $c > 0$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe uma partição P_ϵ do intervalo de $[a,b]$ tal que

$$S(f,P_\epsilon) - s(f,P_\epsilon) < \frac{c}{\epsilon}.$$

Observe que,

$$S(cf,P_\epsilon) = cS(f,P_\epsilon) \quad \text{e} \quad s(cf,P_\epsilon) = cs(f,P_\epsilon).$$

Logo por consequência, temos

$$S(cf,P_\epsilon) - s(cf,P_\epsilon) = c(S(f,P_\epsilon) - s(f,P_\epsilon)) < \epsilon.$$

Então,
$$\int_a^b (cf)(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \quad \text{para todo} \quad c>0.$$
Portanto, a função cf é integrável, para $c>0$. Para $c<0$, temos
$$s(cf, P_\epsilon) = cS(f, P_\epsilon).$$
Portanto,
$$\int_a^b cf(x)dx = \underline{\int_a^b} cf(x)dx = \overline{\int_a^b} cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

iii) Consideremos que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, obtemos que $m_i(f) \leq m_i(g)$ para toda partição de $[a,b]$, acarretando que
$$s(f;P) \leq s(g;P)$$
Aplicando o ínfimo naa desigualdadea, temos
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} g(x)dx.$$
Logo,
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$
■

Teorema 2.2 ***(Teorema do valor médio para integrais)*** *Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe $c\in[a,b]$ tal que*
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$
Demonstração: Como f é contínua em $[a,b]$, então existem $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que
$$f(x_1) = \min_{x\in\ [a,b]} f(x)$$
e
$$f(x_2) = \max_{x\in\ [a,b]} f(x)$$
Assim,
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \text{para todo} \quad x\in[a,b].$$
Aplicando a integral em todos os termos da desigualdade, temos
$$\int_a^b f(x_1)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x_2)dx.$$

E pelo do fato de que $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são constantes, temos

$$f(x_1)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(x_2)(b-a)$$

Daí,

$$f(x_1) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(x_2).$$

Agora, aplicando o Teorema do Valor Intermediário, obtemos $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

■

Proposição 2.5 *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função derivável tal que* f' *é limitada e integrável em* $[a,b]$. *Então*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Demonstração: Seja P uma partição $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$ qualquer do intervalo $[a,b]$ temos

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})]. \tag{2.6}$$

Aplicando O Teorema do Valor Médio de Lagrange para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, existe $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Sendo assim, temos

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{2.7}$$

Como f' é limitada, então consideremos para cada $i = 1, 2, ..., n$

$$M_i' = sup\{f'(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

e

$$m_i' = inf\{f'(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Portanto, para cada $i = 1, 2, ..., n$

$$m_i'(x_i - x_{i-1}) \leq f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i'(x_i - x_{i-1})$$

Adicionando cada $i = 1, 2, ..., n$ e usando a Equação 3.4, temos

$$\sum_{i=1}^{n} m_i'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq f(b) - f(a) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Isto é, para qualquer que seja a partição P de $[a, b]$, temos

$$s(f'; P) \leq f(b) - f(a) \leq S(f'; P).$$

Logo,

$$\underline{\int_a^b} f'(x)dx \leq f(b) - f(a) \leq \overline{\int_a^b} f'(x)dx.$$

Como f' é integrável em $[a, b]$, temos que

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

$\blacksquare$

Capítulo 3

O Teorema Fundamental do Cálculo e aplicações

Através dos tempos, a humanidade teve a necessidade de solucionar problemas relacionado com áreas e volumes. Os primeiros problemas apresentados foram em relações as quadraturas e cubaturas, outro problema que ajudou o desenvolvimento deste estudo estava ligado a traçar as tangentes em ponto de uma curva do plano, sendo assim, vários matemáticos deram suas contribuições.

Entretanto, o Teorema Fundamental do Cálculo tem como base a unificação de duas teorias matemáticas, teorias estas apresentadas por Isaac Newton(1642 - 1727) e Gottfried Leibniz(1646 - 1716), dando a eles os créditos de inventores do Cálculo Diferencial e Integral.

Neste capítulo iremos mostrar a ligação entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral e suas principais aplicações.

Uma característica do Teorema Fundamental do Cálculo é o fato que se conhecemos uma das primitivas de uma função, podemos calcular sua integral no intervalo $[a, b]$, sendo assim, definiremos o que é uma primitiva. Todos os resultados utilizados neste capítulo pode ser encontrado nas seguintes referências: [6], [7], [8], [9], [4] e [10]

Definição 3.1 *Seja $F : S \to \mathbb{R}$ uma função derivável, diz que F é uma primitiva de uma função $f : S \to \mathbb{R}$ se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in S$.*

Este processo de calcular a primitiva de função é de fato a inversa da derivada, também conhecida como antiderivada.

Exemplo 3.1 *Podemos dar alguns exemplos de primitivas.*

a) $F(x) = \frac{x^3}{3}$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$.

b) $F(x) = -cosx + c$ é uma primitiva de $f(x) = senx$, onde c é uma constante.

c) $F(x) = senx + c$ é uma primitiva de $f(x) = cosx$, com $c \in \mathbb{R}$.

3.1 O Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema 3.1 *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua em x_0 e $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função dada por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \forall x \in [a,b].$$

Então, F é derivável em x_0 e $F'(x_0) = f(x_0), \forall x \in [a,b]$.

Demonstração: Se $x_0, x_0 + h \in [a,b]$, então

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

e

$$hf(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt.$$

Portanto,

$$\frac{F(x_0 + h) + F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt.$$

Como f é uniformemente contínua, então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $t \in [a,b]$,

$$|t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Logo, para $0 < |h| < \delta, x_0 + h \in [a,b]$, isso acarreta que

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) + F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt \right| \\ &< \frac{1}{|h|} \epsilon |h| = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $F'(x_0) = f(x_0)$.

■

Portanto, para todas as funções contínuas no intervalo $[a,b]$, o Teorema 3.1 diz que, uma função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uma primitida de f.

Teorema 3.2 ***(Teorema Fundametal do Cálculo)*** *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e G é uma primitiva de f, então*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \tag{3.1}$$

Demonstração: Seja $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma primitiva da forma

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Temos que $F'(x) = G'(x) = f(x)$, logo, $G(x) = F(x) + c$, para alguma c constante. Como $F(a) = 0$ então $c = G(a)$ isto é,

$$F(x) = G(x) - G(a).$$

Em particular,

$$F(b) = G(b) - G(a)$$

ou seja

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

$\blacksquare$

É bastante comum em alguns livros de Cálculo adotar a seguinte notação

$$G(x)|_a^b = G(b) - G(a).$$

A notação acima é conhecida como a fórmula de Barrow. Sendo assim, sempre que for necessário iremos utilizar notação acima.

Através deste Teorema 3.3, obtemos a seguinte informação, que tendo uma primitiva podemos calcular a integral de qualquer função contínua num intervalo [a,b].

Exemplo 3.2 *Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, definida por $f(x) = x^2$, mostre que*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}.$$

Solução: De fato, como f é contínua e $G(x) = \frac{x^3}{3}$ é uma primitiva de f, do Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = G(x)|_0^1 = \frac{x^3}{3}|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Logo,

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}.$$

3.2 Aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo

Nesta seção será reservada as aplicações do Teorema Fundamental do Cálculo.

Proposição 3.1 ***(Integração por Substituição)*** *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $v : [c,d] \to [a,b]$ com derivada contínua. E suponhamos que $y = v(x)$, então, $v(c) = a$ e $v(d) = b$. Sabendo que,*

$$(f(y))' = (f(v(x)))' = f'(v(x)) \cdot v'(x), integrando$$

$$\int_a^b f(y)dy = \int_c^d f(v(x)) \cdot v'(x)dx.$$

Demonstração: Seja $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(y) = \displaystyle\int_a^y f(t)dt$.

Temos que $F'(y) = f(y)$, $F(a) = 0$ e $F(b) = \displaystyle\int_a^b f(y)dy$. Entretanto, pela Regra da Cadeia, temos,

$$[F(v(x))]' = F'(v(x)) \cdot v'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x).$$

Agora, utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\int_c^d f(v(x))v'(x)(dx) = F(v(x))|_c^d = F(v(d)) - F(v(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(y)dy.$$

■

Exemplo 3.3 *Calculemos a integral*

$$\int_2^4 (x^2+1)^{10} 2xdx.$$

Solução: Sejam $c = 4$, $d = 2$, $f(y) = y^{10}$, $G(y) = \frac{y^{11}}{11}$, $v(x) = (x^2+1)$, $v(2) = 5$, $v(4) = 17$ e $v'(x) = 2x$, aplicando método da integração por substituição, temos

$$\int_2^4 (x^2+1)^{10} 2xdx = \int_5^{17} y^{10}dy = \frac{y^{11}}{11}|_5^{17} = \frac{17^{11} - 5^{11}}{11}.$$

Exemplo 3.4 *Seja $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ uma função integrável e par. Mostre que*

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Solução: Primeiramente, vamos observar que

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

Adotemos a integral $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ como o ponto de partida para aplicamos o método da integração por substutuição. Desta forma, temos $v : [0,a] \to [-a,0]$ dada por $v(x) = -x$, então, $v(0) = 0$ e $v(a) = -a$. Portanto,

$$\int_{0}^{a} f(v(x))v'(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

logo,

$$\int_{0}^{a} f(-x)(-1)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

Como a função f é par, ou seja, $f(-x) = f(x)$ de modo que

$$\int_{a}^{0} f(x)dx = -\int_{-a}^{0} f(x)dx$$

sendo assim, teremos

$$\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx.$$

Então

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Proposição 3.2 ***(Integração por Partes)*** *Consideremos $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis com derivadas u' e v' integráveis em $[a,b]$. Então,*

$$\int_{a}^{b} u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)u'(x)dx.$$

Demonstração: Usando o fato da regra de derivação de um produto, que

$$(uv)' = uv' + u'v.$$

Portanto $(uv)'$ é integrável em $[a,b]$. Pela a Proposição 3.1, segue

$$\int_{a}^{b} [u(x)v(x)]'dx = \int_{a}^{b} u'(x)v(x)dx + \int_{a}^{b} u(x)v'(x)dx.$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_{a}^{b} u'(x)v(x)dx + \int_{a}^{b} u(x)v'(x)dx.$$

Portanto,

$$\int_{a}^{b} u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)u'(x)dx.$$

■

Exemplo 3.5 *Calculemos a integral*

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} xsen2xdx.$$

Solução: Sejam $u(x) = x$, $v'(x) = sen(2x)$, $u'(x) = 1$ e $v(x) = -\frac{1}{2}cos(2x)$, logo

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} xsen2xdx &= \left[x\left(-\frac{1}{2}cos(2x)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{2}cos2x\right)dx \\
&= \left[\left(-\frac{1}{2}xcos(2x)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos(2x)dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}xcos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}sen(2x)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= -\frac{1}{2}\left[xcos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\left[sen(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{4}cos\frac{\pi}{2}\right\} + \frac{1}{4}\left\{sen\frac{\pi}{2} - sen0\right\} \\
&= -\frac{1}{2}(0-0) + \frac{1}{4}(1-0) \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.6 *Determine a primitiva da função* $f(x) = x \cdot cosx \cdot senx$, *definida no intervalo* $[0, b]$.

Solução: Sejam $u(x) = x$, $v'(x) = cosx \cdot senx$, $u'(x) = 1$ e $v(x) = \frac{1}{2}sen^2x$.

Usando o método da integração por partes, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^b x \cdot cosxsenxdx &= \frac{x}{2}sen^2x|_0^b - \frac{1}{2}\int_0^b sen^2xdx \\
&= \frac{1}{2}bsen^2b - \frac{1}{2}\int_0^b \frac{1-cos2x}{2}dx \\
&= \frac{1}{2}\left(bsen^2b - \frac{b}{2} + \frac{1}{4}sen2b\right).
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, Doherty.*Propriedades de Funções Contínuas.* Maringá: UEM, Departamento de Matemática, 2005. Disponível em: <http://www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos_pdf/continuas.pdf>. Acesso em: 13 de janeiro 2016.

[2] ABRANTES, Janildo.*A História do Cálculo Diferencial e Integral.*Natal: 2009. Disponível em : <http://professorjanildoarantes.blogspot.com.br/2009/08/historia-do-calculo-diferencial-e.html>. Acesso em: 20 de novembro 2015.

[3] BOYER, Carl Benjamin.*História da matemática*; Tradução Elza F. Gomide. 1 ed. São Paulo: Editora da USP, 1974.

[4] CORRÊA, Francisco Júlio Sobreira de Araújo.*Introdução à Análise Real.* Belém:UFPA, Faculdade de Matemática, Matemática a Distância, 2008. Disponível em: <www.mat.unb.br/furtado/homepage/verao/livro_de_analise-novo.pdf>. Acesso em: 13 de janeiro 2016.

[5] EVER, Howard.*Introdução à história da matemática*; Tradução Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

[6] LIMA, Elon Lages.*Curso de Análise*;v.1. 14 ed. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 2013.

[7] LIMA, Elon Lages.*Análise Real*;v.1 Funções de uma variável. 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[8] MACIEL, Aldo Bezerra; LIMA, Osmundo Alves.*Introdução à Análise Real.* 1 ed. Campina Grande: EDUEPB, 2005.

[9] STEWART, James.*Cálculo*; volume I. 5 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning,2006.

[10] WEIRS, Maurice D.; FINNEY, Ross L.; GIORDINO, Frank R.*Cálculo(George B. Thomas Jr.)*; volume I. São Paulo: Addison Wesley, 2009.