Universidade Estadual da Paraíba - UEPB
Centro de Ciências Humanas e Exatas -
Campus VI - Pinto do Monteiro
Departamento de Matemática

Thaís Silva Araújo

O Teorema Fundamental do Cálculo e Aplicações

Monteiro-PB
2016

THAÍS SILVA ARAÚJO

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Cládio Odair Pereira da Silva.

Monteiro-PB
2016

A658t Araújo, Thaís Silva.
O Teorema Fundamental do Cálculo e Aplicações [manuscrito] / Thaís Silva Araújo. - 2016.
50 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em MATEMÁTICA) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2016.
"Orientação: Prof. Me. Cládio Odair Pereira da Silva, Departamento de Matemática".

1. Cálculo diferencial integral. 2.Teorema Fundamental do Cálculo - Aplicações. I. Título.

21. ed. CDD 515

THAÍS SILVA ARAÚJO

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática.

29 de Abril de 2016]

BANCA EXAMINADORA

Cládio Odair Pereira da Silva

Prof. Me. Cládio Odair Perreira da Silva - Orientador
UEPB

Stanley Borges de Oliveira

Prof. Me. Stanley Borges de Oliveira
UEPB

Robson Batista de Sousa

Prof. Me. Robson Batista de Sousa
UEPB

Dedico este trabalho a toda a minha família , que me ensinaram a transformar as pedras do caminho em escada para o meu objetivo. Dedico também este trabalho ao meu esposo, pois desde de sempre me apoiou e me sustentou quando eu queria cair.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus o autor da existência, aquele que permite que todas as coisas se concretizem. Agradeço em especial as pessoas que me fortalecem em todo amanhecer para lutar pelos meus objetivos: meus pais, meus irmãos, meu esposo, minha sobrinha.

Não vou deixar de agradecer a todos os meus amigos desta vida acadêmica, como também todos os professores por não somente, terem ensinado, mas por terem me feito aprender. Agradeço ao meu orientador prof. Me. Cládio Odair Perreira da Silva os mais sinceros agradecimentos.

A todos, os meus sinceros agradecimentos!

Lista de Figuras

Sumário

Resumo

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece a importante conexão entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Entretanto, foram Newton e Leibniz, independentemente, que exploraram essa conexão e desenvolveram o Cálculo. Em particular, eles perceberam que o Teorema permitia encontrar a área de uma figura plana de uma forma muito fácil, sem a necessidade de se calcular a soma de áreas de um número indefinidamente grande de retângulos, mas sim usando a antiderivada da função envolvida.O presente trabalho aborda a importância do teorema fundamental do cálculo para aplicações em diversos ramos do conhecimento. Apresenta também alguns conceitos prévios para um estudo aprofundado do tema abordado neste trabalho. Este trabalho constitui no estudo e na pesquisa bibliográfica, tendo como objetivo enunciar e demostrar o teorema fundamental do cálculo, e apresentar algumas aplicações.

Palavras Chaves: Cálculo diferencial Integral, Teorema Fundamental do Cálculo, aplicações.

Abstract

The fundamental theorem of calculus establishes important connection betiveen the differential calculation and integral calculus. However, were Newton and Leibniz, absolutely who explored and developed the calculus. In partivular, they realized that the theorem allowed to find the area of a plane figure in a very easy way, without the need to calculate the sum of the areas of a indefinitely large number of rectangles, but using the antiderivate of the function involved. The present work addresses the importance of the fundamental theorem of calculus for applications in several branches of knowledge. It also presents some previous concepts for a depth study of the theme approached in this work. It consistis in the study and bibliographc research, aimig to enunciate and demonstrate the fundamental theorem of calculus, and presents some applications.

Key Words: Differential and integral Calculus, Fundamental theorem o calculus, Applications.

Introdução

Historicamente o cálculo nasceu da necessidade que os matemáticos da antiguidade tiveram para resolver dois tipos de problemas, sendo estes: o cálculo das áreas de figuras planas ou volumes de sólidos e, os métodos para traçar retas tangentes em pontos de uma dada curva do plano. O primeiro tipo de problema, para o cálculo de áreas ou volumes, caracteriza um ponto crucial do cálculo integral. Já o segundo, onde se tem a necessidade do traçado de retas tangentes a um determinado ponto, representa um marco importante para o cálculo diferencial.

Na segunda metade do século XVII os trabalhos desenvolvidos pelos matemáticos Newton e Leibniz, sendo estes, uns dos maiores estudiosos na área, onde foram fundamentais para a sistematização e a unificação das duas teorias matemáticas. Esses trabalhos foram de tão grande ímpeto para a área que, atualmente, acredita-se na invenção do cálculo diferencial e integral, a partir das teorias desenvolvidas por estes cientistas.

O presente trabalho retrata a importância do Teorema Fundamental do Cálculo para aplicação em diversos ramos do conhecimento. Sendo o objetivo principal, demostrar o teorema fundamental do cálculo e apresentar algumas de suas aplicações. Esse teorema estabelece a ligação entre as operações de derivação e integração e, sendo assim é a chave de todo o cálculo diferencial e integral.

Entende-se que os conceitos a serem abordados neste trabalho requerem que o leitor esteja familiarizado com a técnica do cálculo Diferencial Integral de funções reais de um variável real. Desta forma, este trabalho passou por um processo evolutivo, onde primeiro momento apresenta-se as funções integráveis, que por sua vez, é abordado os conceitos de integral superior e inferior, funções limitadas nas quais se destacam mínimo e supremo.

Logo em seguida, é realizada uma abordagem das Somas de Riemann-Darboux. Apresentamos também a integral de Riemann e consequentemente as suas propriedades. No segundo momento, realiza-se um estudo do tema principal desta feitura, sendo este, o teorema fundamental do cálculo e suas aplicações. Assim, trata-se primeiramente em enunciar e demonstrar o teorema com aplicações na integração por partes, assim como, na mudança de variável. Desta forma, foram evidenciadas as aplicações também na fórmula do valor médio para integrais e no teorema de existência e unicidade de soluções de um problema de valor inicial de equações diferencias ordinárias e na formula de Taylor com resto integral.

Capítulo 1

Funções Integráveis

Nesta secção introduzimos os conceitos de soma de Riemann e integral superir e inferior e apresentamos alguns resultados a cerca desses conceitos, que servirão mais adiante para o nosso estudo.

1.1 Integral Superior e Inferior

Definição 1. *Definimos uma partição de um intervalo fechado e limitado* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *como sendo um subconjunto finito* $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ *de pontos de* $[a, b]$ *satisfazendo à condição* $a = x_o < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$*, onde cada subintervalo* $[x_{i-1}, x_i]$*, com* $i = 1, 2, ..., n$*, tem comprimento* $[x_i - x_{i-1}]$.

Observação 1.1.1. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada e seja* $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *uma partição do intervalo* $[a, b]$*. Tendo que* f *é limitada em cada subintervalo* $[x_{i-1}, x_i]$ *de* P*, desta forma existe o* ***ínfimo*** *e o* ***supremo*** *de* f *em* $[x_{i-1}, x_i]$ *que denotaremos respectivamente por* m_i *e* M_i*. Desta forma,*

$$m_i = Inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$M_i = Sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Definição 2. *Definimos a* ***soma inferior*** *de* f *relativamente à partição* P*, denotada por,* $s(f, P)$ *como sendo:*

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Definição 3. *Definimos a* ***soma superior*** *de f relativamente à partição P, denotada por $S(f,P)$, como sendo:*

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Observação 1.1.2. *Os números $s(f,P)$ e $S(f,P)$ são chamados* ***Somas de Riemann- Darboux****, respectivamente inferior e superior, da função f, referente a partição P.*

Observação 1.1.3. *Como $m \leq m_i \leq M_i \leq M$, com $i = 1,2,...,n$, então multiplicamos então essa desigualdade por $(x_i - x_{i-1})$ e somando de 1 até n e utilizando o fato de que $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a$, temos o resultado.*

Observação 1.1.4. *Se f é uma função contínua e positiva em todo intervalo $[a,b]$, cada soma inferior é um valor aproximado por falta do que devemos entender por área da figura geométrica delimitada pelo gráfico de f, pelos eixos dos x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Da mesma forma, a soma superior é um valor aproximado por excesso da mesma área.*

Lema 1.1.1. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada então, para qualquer partição, tem-se:*

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M$$

ou seja,

$$m(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M(b-a).$$

Tal que

$$m = Inf\{f(x); x \in [a,b]\} \text{ e } M = Sup\{f(x); x \in [a,b]\}.$$

Demonstração. Como $m \leq m_i \leq M_i \leq M$, com $i = 1,2,...,n$, então multiplicamos essa desigualdade por $(x_i - x_{i-1})$ e somando de 1 até n e utilizando o fato de que $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a$, temos o resultado. □

Definição 4. *Sejam P e Q partições de $[a,b]$. Dizemos que Q é um refinamento (ou refina P) se $P \subset Q$.*

Lema 1.1.2. *Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e sejam P e Q duas partições de $[a,b]$. Se Q é um refinamento de P então:*

i) $s(f,P) \leq s(f,Q)$

ii) $S(f,Q) \leq S(f,P)$.

Demonstração. Seja $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$. Vamos supor que Q possui os mesmos elementos de P acrescentamos apenas um ponto, ou seja, podemos dizer que $Q = \{P \cup \{r\}\}$, com $x_{j-1} < r < x_j$ para algum $j = 1, 2, ..., n$. Sejam m' e m'', respectivamente os ínfimos de f nos subintervalos $[x_{j-1}, r]$ e $[r, x_j]$ de Q.

É notório perceber que $m_j \leq m'$, $m_j \leq m''$ e

$$x_j - x_{j-1} = (x_j - r) + (r - x_{j-1}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} s(f,Q) - s(f,P) &= m'(r - x_{j-1}) + m''(x_j - r) - m_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= m'(r - x_{j-1}) + m''(x_j - r) - m_j(x_j - r) - m_j(r - x_{j-1}) \\ &= (m' - m_j)(r - x_{j-1}) + (m'' - m_j)(x_j - r) \geq 0. \end{aligned}$$

Onde $s(f,P) \leq s(f,Q)$. A passagem para o caso geral é feita repetindo-se o argumento anterior um número finito de vezes.

□

Analogamente prova-se o item **ii).**

Observação 1.1.5. *Este lema nos mostra que os refinamentos de uma partição tendem a aumentar as somas inferiores e diminuir as superiores.*

Lema 1.1.3. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada e P e Q partições de $[a,b]$. Então*

$$s(f,P) \leq S(f,Q).$$

Demonstração. Note que $P \cup Q$ refina P e Q. Assim pelo lema 1.1.2, temos,

$$s(f,P) \leq s(f, P \cup Q) \leq S(f, P \cup Q) \leq S(f,Q).$$

□

Definição 5. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos a* ***integral inferior*** *de f como sendo,*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = sup_{p \in P}\{s(f,P)\};$$

e a ***integral superior*** *de f como sendo,*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = inf_{p \in P}\{S(f,P)\}.$$

A seguir será apresentado algumas propriedades que caracterizam as integrais superior e inferior:

Observação 1.1.6. *Decore da definição de supremo que:*

1- Para qualquer partição P de $[a,b]$, tem-se:

$$s(f;P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

2-Dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx - \varepsilon < s(f,P)$$

Observação 1.1.7. *Decore da definição de ínfimo que:*

1-Para qualquer partição P de $[a,b]$, tem-se:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,P).$$

2- Dado $\varepsilon > 0$, existe P tal que:

$$S(f,P) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon.$$

Observação 1.1.8. *A partir das definições e do lema 1.1.1, temos que $m \leq f(x) \leq M$ para qualquer $x \in [a,b]$, então*

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq M(b-a)$$

Proposição 1.1.4. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada, para qualquer $c \in \mathbb{R}$ temos,*

i) $\underline{\int_a^b}(f(x)+c)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx + c(b-a)$

ii) $\overline{\int_a^b}(f(x)+c)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx + c(b-a)$

Demonstração. **i)** Seja P uma partição qualquer de $[a,b]$. Denotada por

$$\mu_i = inf\{f(x)+c; x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

e por $m_i = inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Temos que $\mu'_i = m_i + c$, assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}(m_i + c)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + c\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + c(b - a)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
s(f + c, P) &= s(f, P) + c(b - a) \\
\Rightarrow SupS(f + c, P) &= S(f, P) + c(b - a) \\
\Rightarrow \underline{\int_a^b}(f(x) + c)dx &= \underline{\int_a^b} f(x)dx + c(b - a).
\end{aligned}$$

$\square$

Proposição 1.1.5. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Dado $c \in [a, b]$, tem-se que:*

i) $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx$

ii) $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx.$

Demonstração. Sejam S_a^b, S_a^c, S_c^b as somas superiores de f relativamente as partições de $[a, b]$, $[a, c]$ e $[c, b]$, respectivamente. Seja P uma partição qualquer de $[a, b]$.

Note que $c \in P$ ou $c \notin P$. Se $c \notin P$ consideremos $P' = P \cup \{c\}$. Então P' é uma partição de $[a, b]$ que induz as partições $P_1 = P' \cap [a, c]$ e $P_2 = P' \cap [c, b]$ de $[a, c]$ e $[c, b]$, respectivamente. Assim

$$S_a^b(f, P) \geq S_a^b(f, P) \;=\; S_a^c(f, P') + S_c^b(f, P') \geq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx$$

Portanto

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \geq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx \tag{1.1}$$

Por outro lado dado $\varepsilon > 0$, existem P_1 e P_2, partições de $[a, c]$ e $[c, b]$ respectivamente, tais que:

$$S_a^c(f, P_1) < \overline{\int_a^c} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$S_c^b(f, P_2) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

Note que $P = P_1 \cup P_2$ é uma partição de $[a, b]$ tal que:

$$S_a^b(f, P) = S_a^c(f, P_1) + S_c^b(f, P_2)$$

Logo

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f(x)dx &\leq S_a^c(f, P_1) + S_c^b(f, P_2) \\ &\leq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx + \varepsilon \end{aligned} \tag{1.2}$$

Assim da equação 1.2, e como ε é arbitrário temos:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} dx.$$

Portanto das equações 1.1 e 1.2 temos **i)**.

□

ii)A demostração do **ii** é análoga.

Observação 1.1.9. *Note que, até o presente momento consideramos $a < b$. Então para efeito do cálculo e extensão de alguns resultados incluiremos os casos $a = b$ e $a > b$. Assim podemos considerar:*

i) $a = b$ $\underline{\int_a^a} f(x)dx = 0 = \underline{\int_a^a} f(x)dx$

ii)$a > b$ $\underline{\int_a^b} f(x)dx = -\underline{\int_b^a} f(x)dx$ *e* $\overline{\int_a^b} f(x)dx = -\underline{\int_b^a} f(x)dx$

Proposição 1.1.6. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Defina as funções F e G em $[a, b]$ do seguinte modo:*

$$F(a) = G(a) = 0 \ e \ para \ x \in (a,b)$$

$$F(x) = \overline{\int_a^x} f(t)dt$$

$$e$$

$$G(x) = \underline{\int_a^x} f(t)dt$$

Então para $x_0 \in [a,b]$ onde f é continua temos $F'(x_0) = f(x_0) = G'(x_0)$.

Demonstração. Seja $x_0 \in (a,b)$ e $h \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 + h \in (a,b)$. Note que:

$$\begin{aligned} F(x_0+h) - F(x_0) &= \overline{\int_a^{x_0+h}} f(t)dt - \overline{\int_a^{x_0}} f(t)dt \\ &= \overline{\int_a^{x_0}} f(t)dt + \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)dt - \overline{\int_a^{x_0}} f(t)dt \\ &= \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)dt \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)dt$$

Então, pela proposição 1.1.4 temos que:

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} \frac{f(t)}{h} dt - f(x_0) \right| = \left| \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} \frac{f(t) - f(x_0)}{h} \right| dt$$

Temos pela observação 1.1.7, temos que:

$$\begin{aligned} |h| inf_{|t-x_0| \leq |h|} \left[f(t) - f(x_0) \right] | &\leq \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} (f(t) - f(x_0)dt \\ &\leq |h| Sup_{|t-x_0| \leq |h|} (f(t) - f(x_0)) \end{aligned}$$

Logo

$$inf_{|t-x_0|\leq|h|}(f(t)-f(x_0)\leq\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|$$
$$\leq Sup_{|t-x_0|\leq|h|}(f(t)-f(x_0)$$

Como f é contínua em x_0 então

$$inf_{|t-x_0|\leq|h|}(f(t)-f(x_0)\overset{h\to0}{\to}0$$

$$Sup_{|t-x_0|\leq|h|}(f(t)-f(x_0)\overset{h\to0}{\to}0$$

Daí

$$\lim_{h\to0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)\Rightarrow F'(x_0)=f(x_0)$$

Para $G'(x_0)=f(x)$ é análogo. □

1.2 A integral de Riemman

Nesta secção apresentaremos a integral de Riemann e caracterizamos as funções integráveis.

Definição 6. *Seja* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$*, uma função limitada. Dizemos que f é* ***integrável a Riemam*** *[a,b] quando:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Este valor comum é a integral de f o qual denotamos por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Exemplo 1. *Seja* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$*, dada por* $x\to f(x)=c$*. Então f é integrável em [a,b] e*

$$\int_a^b f(x)dx=c(b-a).$$

De fato, para qualquer partição P, de [a,b], temos que $m_i=c=M_i$ *em todos os subintervalos, logo:*

$$S(f,P)=s(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=c(b-a)$$

Assim,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = c(b-a) = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Portanto,

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

Exemplo 2. *A função escada e* $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n C_i(x_i - x_{i-1})$ *é integrável*

$$\begin{cases} \alpha, & a \leq x \leq c \\ \beta, & c \leq x \leq b \end{cases}$$

Exemplo 3. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ 0, & x \in [a,b] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Então f *não é integrável em* $[a,b]$ *pois qualquer partição* $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ *de* $[a,b]$ *em cada subintervalo* $[x_{i-1}, x_i]$ *existem números racionais e irracionais, portanto* $m_i = 0$ *e* $M_i = 1$. *Logo,*

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = 0$$

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = (b-a)$$

Daí

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = 0$$

e

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = (b-a).$$

Definição 7. *Dada uma partição* $P = \{a = x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ *de* $[a,b]$, *definimos a* ***norma de*** P, *denotada por* $||P||$ *como sendo*

$$||P|| = max\{x_1 - x_{i-1}, i = 1, ..., n\}$$

Proposição 1.2.1. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona então é integrável.*

Demonstração. Suponha que f é não decrescente. Para qualquer partição P de [a,b], temos:

$$\begin{aligned}
\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx &\leq S(f,P) - s(f,P) \\
&= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq ||p|| \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i).
\end{aligned}$$

Como f é não decrescente, em cada subintervalo $[x_{i-1} - x_i]$, temos que $m_i = f(x_{i-1})$ e $M_i = f(x_i)$. Donde

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - (fx_{i-1})) \\
&= f(b) - f(a)
\end{aligned}$$

Logo temos:

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq ||P|| \left(f(b) - f(a)\right)$$

Assim, se *f(a)* = *f(b)* então *f* é constante, e portanto é integrável.

Se $f(a) \neq f(b)$, então dado $\varepsilon > 0$ seja: $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$, pois se $||P|| < \delta$, temos

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon.$$

Daí,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

e assim f é integrável. □

Proposição 1.2.2. *Se $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ é continua, então f é integrável.*

Demonstração. Consideremos F e G como na proposição 1.1.6, temos que

$$F'(x) = f(x) = G'(x), \forall x \in [a,b].$$

Logo $F(x) = G(x) + c$, para todo $x \in [a,b]$ e para algum $c \in \mathbb{R}$. Como $F(a) = 0 = G(a)$, segue que $c = 0$. Ou seja, $F(x) = G(x), \forall x \in [a,b]$. Em particular para x=b, temos:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = F(b) = G(b) = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Portanto f é integrável em $[a,b]$

□

Proposição 1.2.3. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Então f é integrável se, e somente se, dando $\varepsilon > 0$ existe uma partição P de $[a,b]$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que f é integrável em $[a,b]$. Então

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ existem partições $P_1 e P_2$ de $[a,b]$, tais que:

$$S(f, P_1) - \int_a^b f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\int_a^b f(x)dx - s(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

($\Leftarrow$) Daí temos, $S(f,P_1) - s(f,P_2) < \varepsilon$. Tome $P = P_1 \cup P_2$ e então $S(f,P_1) \geq S(f,P) \geq s(f,P) \geq s(f,P_2)$.

Desse modo, segue

$$S(f,P) - s(f,P) \leq S(f,P_1) - s(f,P_2) < \varepsilon$$

Suponha que dado $\varepsilon > 0$ existe P de [a,b] tal que:

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon,$$

desde que

$$S(f,\ P) \geq \overline{\int_a^b} f(x)dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)dx \geq s(f, P)$$

então

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário segue que:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Portanto f é integrável.

$\square$

Exemplo 4. *Considere $c, d \in \mathbb{R}$, definimos $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, por*

$$f(x) = \begin{cases} c, & a < x \leq b \\ d, & x = a. \end{cases}$$

Então f é integrável em $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

De fato, sem perda de generalidade, suponha que $c<d$. Então qualquer que seja $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ de $[a, b]$ temos que:

$$m_1 = c \text{ e } M_1 = d$$

e

$$m_i = M_i = c, \forall_i = 2, ..., n$$

Então

$$S(f,P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = (d-c)(x_1 - x_0).$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$ tomemos uma partição P_0 de $[a, b]$ tal que

$$x_1 - x_0 < \frac{\varepsilon}{d-c}$$

e teremos que $S(f,P_0)-s(f,P_0)<\varepsilon$*, logo* f *é integrável. Além disso para qualquer* P *de* $[a,b]$ *temos que*

$$s(f,p)=c(b-a)\Rightarrow \int_a^b f(x)dx=c(b-a).$$

1.3 A Integral como Limite da Soma de Riemann

Nesta secção, vamos afirmar a integral como limite de somas de Riemann.

Proposição 1.3.1. *Seja* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *limitada. Então dado* $\varepsilon>0$ *existe* $\delta>0$ *tal que*

$$S(f,P)<\overline{\int_a^b} f(x)dx+\varepsilon$$

e

$$s(f,P)>\underline{\int_a^b} f(x)dx-\varepsilon$$

para qualquer partição P *de* $[a,b]$ *com* $||P||<\delta$*.*

Demonstração. Suponha que $f(x)\geq 0$ para todo x pertencente a $[a,b]$. Dado $\varepsilon>0$ existem uma partição $P_0=\{a=x_0,...,x_n=b\}$ de $[a,b]$ tal que

$$S(f,P_0)<\overline{\int_a^b} f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.3}$$

Seja $M=Supf(x);x\in[a,b]$, e tomemos $0<\delta<\frac{\varepsilon}{2Mn}$. Se P é qualquer partição de $[a,b]$ com $||P||<\delta$, identifiquemos com $[y_{j-1}-y_1]$ os subintervalos de P tal que $[y_{j-1}-y_j]\subset[x_{i-1}-x_i]$, onde $[x_{i-1},x_i]$ são os subintervalos de P_0 e $[y_{k-1,y_k}]$ os intervalos restante de P. Cada um dos intervalos $[y_{k-1},y_k]$ contém pelo menos um ponto x_i. Assim, há no máximo n intervalos do tipo $[y_{k-1},y_k]$. Desde que $[y_{j-1},y_j]\subset[x_{i-1},x_i]$, logo $M_j\leq M_i$ e $y_j-y_{j-1}\leq(x_i-x_{i-1})$.

Além disso, $M_k(y_k-y_{k-1})\leq M\delta$. Então

$$S(f,P)=\sum_j M_j(y_j-y_{j-1})+\sum_k M_k(y_k-y_{k-1})\leq\sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1})+M\delta n<S(f,P_0)+\frac{\varepsilon}{2}$$

por 1.3, temos que

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon$$

Para o caso geral, como f é limitada, existe $c > 0$ tal que $f(x) + c \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$.

Tome $g(x) = f(x) + c$, pelo o que acabamos de provar, temos:

$$S(g, P) \leq \overline{\int_a^b} g(x)dx + \varepsilon.$$

Logo $M_j(y_1 - y_{j-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1})$

Para qualquer partição P de $[a, b]$ tal que $||P|| < \delta$, segue que $S(g, P) = S(f, P) + c(b - a)$. Portanto,

$$\overline{\int_a^b} g(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx + c(b - a);$$

daí,

$$S(f, P) + c(b - a) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + c(b - a) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow S(f, P) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon.$$

$\square$

Analogamente prova-se a outra desigualdade.

Observação 1.3.1. *A proposição acima significa que :*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{||P|| \to 0} S(f, P)$$

e

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{||P|| \to 0} s(f, P).$$

Definição 8. *Seja $P = \{a = x_o, x_1, ..., x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ escolhemos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e denotamos por $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$. Considerando $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definimos a **soma de Riemann** de f por*

$$S(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Observação 1.3.2. *Quando* $\lim_{||P||\to 0} S(f,P,\xi) = I \in \mathbb{R}$, *temos que para qualquer* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$, *tal que*

$$|S(f,P,\xi) - I| < \varepsilon.$$

Para qualquer partição P *de* $[a,b]$ *com* $||P|| < \delta$ *e para qualquer que seja a escolha de* ξ *associada a* P.

Teorema 1.3.2. *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada. Então* f *é integrável a Riemann se, e somente se,*

$$\lim_{||P||\to o} S(f,P,\xi) = \int_a^b f(x)dx.$$

No caso afirmativo tem-se $I = \int_a^b f(x)dx$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que f é integrável á Riemann. Dada uma partição

$$P = \{a = x_o, x_1, ..., x_n = b\}$$

qualquer que seja $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ com $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ temos

$$s(f,P) \leq S(f,P,\xi) \leq S(f,P)$$

Como f é integrável à Riemann em [a,b], então pela observação 1.3.1, temos

$$\lim_{||P||\to 0} s(f,P) = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{||P||\to 0} S(f,P)$$

Logo ,

$$\lim_{||P||\to 0} S(f,P,\xi) = \int_a^b f(x)dx$$

$(\Leftarrow)$ Suponha que $\lim_{||P||\to 0} S(f,P,\xi) = I \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$ consideremos uma partição

$$P = \{a = x_o, x_1, ..., x_n = b\}$$

de $[a,b]$. Para cada $i = 1,2,...,n$ escolhemos $\xi_i, N_i \in [x_{i-1,x_i}]$ tais que:

$$f(\xi_i) > M_i - \varepsilon$$

e

$$f(N_i) < m_i + \varepsilon,$$

onde $M_i = Supf(x), x \in [x_{i-1}, x_i]$, tal que e $m_i = Inff(x)$ com $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$f(\xi)(x_i - x_{i-1}) > M_i(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) > \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}).$$

Então $S(f, P, \xi) > S(f, P) - \varepsilon(b - a)$ e $S(f, P, N) < s(f, P) + \varepsilon(b - a)$ logo

$$S(f, P, N) - \varepsilon(b - a) < s(f, P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

$$\leq \int_a^b f(x)dx \leq S(f, P) \leq S(f, P, \xi) + \varepsilon(b - a)$$

Passando o limite $||P|| \to 0$

$$I - \varepsilon(b - a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq I + \varepsilon(b - a)$$

Como ε é arbitrário, concluímos que:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = I = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Portanto, f é integrável e

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

$\square$

Exemplo 5. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dado por* $x \to f(x) = x$.

Note que f *é integrável já que* f *é contínua no intervalo* $[a, b]$. *Considere uma partição* $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ *de* $[a, b]$ *e para cada* $i = 1, 2, ..., n$ *escolha*

$$\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

Temos que $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e

$$
\begin{aligned}
S(f, P+\xi) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\tfrac{x_i + x_{i-1}}{2} \right)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_1^2 - x_{i-1}^2) \\
&= \frac{1}{2}[x_1^2 - x_0^2 + x_2^2 - x_1^2, ..., x_n^2 - x_{n-1}^2] \\
&= \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) \\
&= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \Rightarrow \lim_{||P|| \to o} S(f, P, \xi) \\
&= \int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}
$$

1.4 Propriedades da Integral de Riemann

Como conhecemos a integral de Riemann, vejamos agora suas propriedades.

Proposição 1.4.1. *Sejam $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então:*

i) $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b ((f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

ii) cf é integrável no intervalo $[a, b]$ e $\int_a^b (cf)(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

Demonstração. **i)** Dado $\varepsilon > 0$ sendo f e g integráveis em $[a, b]$ exitem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$\left| S(f, P, \xi) - \int_a^b f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sempre que

$$||P|| < \delta_1$$

e

$$\left| S(g, P, \xi) - \int_a^b g(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sempre que

$$||P|| < \delta_2$$

e

Como P é partição de $[a,b]$. Tome $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ tomemos P uma partição de $[a,b]$, tal que $||P|| < \delta$.

Assim,

$$\begin{aligned}\left|S(f+g,P+\xi) - \left(\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\right)\right| &= \left|S(f,P,\xi) + S(g,P,\xi) - \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(\right. \\ &\leq \left|S(f,P,\xi) - \int_a^b f(x)dx| + |S(g,P,\xi) - \int_a^b g\right. \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}\lim_{||P||\to 0}(f+g,P,\xi) &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \Rightarrow \int_a^b (f(x)+g(x))dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

ii) Se $c = 0$, é imediato.

Vamos supor que $c \neq 0$. Dado $\varepsilon > 0$ sendo f integrável em $[a,b]$ existe $\delta > 0$ tal que $||P|| < \delta$ tem-se:

$$\left|S(f,P,\xi) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

Assim se $||P|| < \delta$, temos:

$$\begin{aligned}\left|S(cf,P,\xi) - c\int_a^b f(x)dx\right| &= \left|cS(f,P,\xi) - c\int_a^b f(x)dx\right| \\ &= |c|\left|S(f,P,\xi) - \int_a^b f(x)dx\right| \\ &< |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon,\end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\lim_{||P||\to 0} S(cf,P,\xi) &= c\int_a^b f(x)dx \\
\Rightarrow \int_a^b cf(x)dx &= c\int_a^b f(x)dx
\end{aligned}
$$

□

Proposição 1.4.2. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável e $[c,d] \subset [a,b]$ então f é integrável em $[c,d]$.*

Demonstração. Sendo f integrável temos que $\varepsilon > 0$, então existe uma partição P de $[a,b]$ tal que

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$$

Considerando $P^* = P \cup \{c,d\}$. Note que P^* refina P. Logo

$$s(f,P) \leq s(f,P^*) \leq S(f,P^*) \leq S(f,P)$$

onde

$$S(f,P^*) - s(f,P^*) \leq S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$$

Considere $P' = P^* \cap [c,d]$. Então

$$S_c^d(f,P') - s_c^d(f,P') \leq S(f,P^*) - s(f,P^*) < \varepsilon$$

Portanto f é integrável no intervalo $[c,d]$ □

Proposição 1.4.3. *Se f é integrável no intervalo $[a,b]$ e $c \in (a,b)$ então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Demonstração. Pela proposição 1.4.2 temos que f é integrável nos intervalos $[a,c]$ e $[c,d]$. E pela proposição 1.1.5, segue o resultado.

□

Proposição 1.4.4. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ então*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Demonstração. Para cada partição P de [a,b] temos que $S(f,P,\xi) \geq 0$, logo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P||\to 0} S(f,P,\xi) \geq 0$$

□

Corolário 1.4.5. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis tais que $(g(x) \leq f(x))$, para qualquer que seja $x \in [a, b]$, então:*

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$

Demonstração. Sendo f e g integráveis segue da proposição 1.4.1 que $f+(-g)$ é integrável e

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Mas, por hipótese temos que $f(x) - g(x) \geq 0$, para qualquer que seja $x \in [a, b]$. Logo, pela proposição 1.4.4

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0.$$

Desta forma

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

□

Definição 9. *Dada uma função qualquer $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definimos as seguintes funções $f^+ : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $f^- : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & se f(x) \geq 0 \\ 0, & se f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & se f(x) \leq 0 \\ 0, & se f(x) > 0 \end{cases}$$

que são chamada parte positiva e parte negativa respectivamente de f.

Observação 1.4.1. *Quando $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada, então f^+ e f^- são funções limitadas não negativas tais que*

$$|f| = f^+ + f^- e f = f^+ - f^-$$

Observação 1.4.2. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada e P é uma partição qualquer de $[a, b]$, então para cada $i = 1, 2, ..., n$, vamos denotar*

$$M_i^+ = Sup\{f^+(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

e

$$m_i^+ = Inf\{f^+(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Lema 1.4.6. *Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é limitada, então* $M_i - m_i \geq M_i^+ - m_i^+$*, para* $i = 1, 2, ..., n$*.*

Demonstração. **1º Caso:** Se $m_i \geq 0$ então $f(x) \geq 0$, para qualquer $x \in [x_{i-1}, x_i]$ e neste caso $f^+(x) = f(x)$, para qualquer $x \in [x_i, x_{i-1}]$. Logo $M_i^+ = M_i$ e $m_i^+ = m_i^+$, donde $M_i - m_i = M_i^+ - m_i^+$.

2º Caso: Se $M_i \leq 0$ então $f(x) \leq 0$ para qualquer que seja $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Neste caso $f^+(x) = 0$ para qualquer $x \in [x_{i-1}, x_i]$, logo $M_i^+ = m_i^+ = 0$. Podemos notar que $m_i < 0 < M_i$ então como $f^+(x) \geq 0$ temos $M_i^+ \geq 0$, logo $m_i^+ > m_i$. Donde $-m_i > -m_i^+$ e como neste caso $M_i^+ = M_i$ temos que $M_i - m_i > M_i^+ - m_i^+$. □

Proposição 1.4.7. *Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é integrável então* f^+ *e* f^- *também são integráveis.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ existe uma partição $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$, tal que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

Assim,

$$\begin{aligned} S(f^+,P) - s(f^+,P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i^+ - m_i^+)(x_i - x_{i-1}) \\ \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) &= S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon. \end{aligned}$$

portanto f^+ é integrável. Note que $f^- = f^+ - f$ e da proposição 1.4.1 que concluímos que f é integrável.

□

Proposição 1.4.8. *Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é integrável então* $|f|$ *é integrável e*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Demonstração. Da proposição anterior 1.4.7 temos que f^+ e f^- são integráveis em $[a,b]$. Como $|f| = f^+ + f^-$ e pela proposição 1.4.1 $|f|$ é integrável em $[a,b]$.

Note que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$para qualquer $x \in [a,b]$ e pelo corolário 1.4.5 temos:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\Rightarrow |\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

. $\square$

Proposição 1.4.9. *Sejam* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *e* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é integrável então* $fg : [a,b] \to \mathbb{R}$ *dado por* $(fg)(x) = f(x)g(x)$ *é integrável.*

Demonstração. 1º Caso:Vamos supor que, $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ para qualquer que seja $x \in [a,b]$. Seja $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$.

Assim denotaremos:

$$\begin{aligned}
M_{fg} &= Sup\{f(x)g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\
m_{fg} &= Inf\{f(x)g(x) : x \in [x_{i-1,x_i}]\} \\
M_f &= Sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\
m_f &= Inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\
M_g &= Sup\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\
m_g &= Inf\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\
M &= Sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \\
N &= Sup\{g(x) : x \in [a,b]\}
\end{aligned}$$

Temos $M_{fg} \leq M_f M_g$ e $m_j m_g \leq m_{fg}$ em $[x_{i-1}, x_i]$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
M_{fg} - m_{fg} \leq M_f M_g - m_g m_f &= M_f M_g - M_f m_g + M_f m_g \\
-m_f m_g &= M_f(M_g - m_g) + m_g(M_f - m_f) \\
\leq M(M_g - m_g) + N(M_f - m_f)
\end{aligned}$$

O que implica em,

$$\sum_{i=1}^{n}(M_{fg}-m_{fg})(x_i-x_{i-1}) \leq M\sum_{i=1}^{n}(M_g-m_g)(x_i-x_{i-1})+N\sum_{i=1}^{n}(M_f-m_f)(x_i-x_{i-1})$$

$\Rightarrow S(fg,P) - s(fg,P) \leq M[S(g,P) - s(g,P)] + N[S(f,P) - s(f,P)].$

Mas, por hipótese, dado $\varepsilon > 0$ existe uma partição P de $[a,b]$ tal que

$$S(f,P) - s(f,P) < \frac{\varepsilon}{2(1+N)}$$

$$S(g,P) - s(g,P) < \frac{\varepsilon}{2(1+M)}$$

Portanto,

$$S(fg,P) - s(fg,P) < \frac{M\varepsilon}{2(1+M)} + \frac{N\varepsilon}{2(1+N)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Mostrando que fg é integrável no intervalo $[a,b]$.
Para o caso geral, note que

$$fg = (f^+ - f^-)(g^+ - g^-) = f^+g^+ - f^+g^- - f^-g^+ + f^-g^-$$

e pelo que acabamos de mostrar temos que

$$f^+g^+, -f^+g^-, -f^-g^+, f^-g^-$$

são integráveis e assim fg é integrável. $\square$

Capítulo 2

Teorema Fundamental do Cálculo

2.1 Nota Histórica

Para realizar uma abordagem sobre o teorema fundamental do cálculo, é necessário acima de tudo explicar alguns fatos sobre o seu surgimento. O cálculo surgiu no século XVII, por um desenvolvimento gradativo, podendo esse processo ser dividido em duas fase. A primeira fase destaca-se pelo trabalho de Kepler (1571-1630), onde sua linha de pesquisa era calcular o volume dos tonéis, tendo como apoio o livro de Galileu (1564-1642),intitulado Diálogos sobre Duas novas Ciências, que contém diversas ideias da nova matemática. No entanto, não podemos deixar de ressaltar alguns matemáticos que contribuíram para a primeira fase, tais como: Pierre de Fermat(1601-1663), René Descartes(1638-1675), Issac Barrow(1630-1677), James Gregory(1638-1675), entre outros que tiveram importância significativa.

Na segunda fase, destaca-se o processo de sistematização e unificação dos métodos pelo Teorema Fundamental, tendo como principais contribuintes Newton e Leibniz. Assim cabe expor o teorema fundamental do cálculo a partir das teorias desenvolvidas por Newton.

Primeiro devemos considerar uma curva no primeiro quadrante, que seja representada por uma função y de x. Seguindo as ideias de Newton, imagina-se que a curva passa pela origem e adota-se z como a área ABC sobre a curva, seguindo o que esta ilustrado na figura 2.1.

Supondo concretamente que $z = 2x^{3/2}/3$. Diante da figura 2.1, $AB = x$, $BC = y$ e $BE = v$ é tal que a área do retângulo $BEFG$.

Dando a x um acréscimo infinitesimal $o = BG$, z sofrerá o acréscimo infinitesimal v_0 (igual à área do retângulo $BEFG$). Daí,

$$z^2 = \frac{4}{9}x^3$$

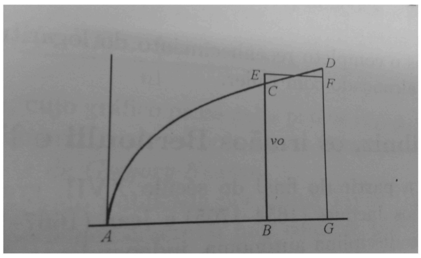

Figura 2.1: Área ABC sobre a curva

e

$$(z + v_0)^2 = \frac{4}{9}(x + 0)^3$$

Desta forma despreza-se os termos que contendo o fator infinitesimal o e igualamos v a y, já que a diferença $v - y$ também é infinitesimal. Como $2x^{3/2}/3$, o resultado é $2zy = 4/3x^2$, donde $y = x^{1/2}$. Utilizando uma linguagem moderna, Newton expõe que a derivada da área z e a ordenada y e que a integral de y é z. Analogamente usa-se o mesmo argumento para aplicar, a situação geral em que, $y = ax^{m/n}$ e $z = [na/(m + n)]x^{(m+n)/n}$.

Desta forma Newton amplia esse resultado para funções mais gerais, desenvolvendo-as em séries de potências.

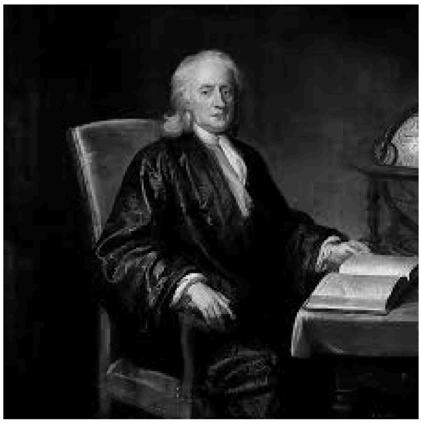

Figura 2.2: Imagem de Newton

A partir das teorias de Leibniz sobre o Teorema Fundamental do cálculo pode-se interpretar a área da figura 2.1, com valor igual a z. Como a soma das áreas infinitesimais $dz = ydx$ de uma infinidade de retângulos de base dx e altura y. Usando como notação para indicar essa soma, Leibniz no ano de 1875 utilizou o símbolo$\int$, que simboliza um das formas da letra S usada naquela época.

Assim utilizando a notação, teremos

$$\int ydx = \int zdz = z.$$

Pode-se observar, que a própria notação e a concepção intuitiva de área como somatória de elementos infinitesimais levam naturalmente à expressão do teorema fundamental. Adotando $y = f(x)$ e $z = F(x)$, de sorte que $dz/dx = F'(x) = f(x)$, e subtraindo uma da outra duas aplicações da fórmula anterior, obtemos o teorema fundamental em sua forma que é bem familiar, também exposta:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Figura 2.3: Imagem de Leibniz

2.2 O Teorema Fundamental do Cálculo e Aplicações

Nesta secção encontra-se a parte principal do trabalho, onde será enunciado e demostrado o Teorema Fundamental do Cálculo, expondo também algumas aplicações.

Suponha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e pela proposição 1.4.3, se f é continua em $[a, b]$, então

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Definição 10. *Dizemos que $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma **primitiva** ou podemos chamar de **integral indefinida** de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, se F é **derivável** e $F' = f$.*

Exemplo 6. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada,*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uma primitiva de f.

Exemplo 7. *Se $c \in \mathbb{R}$ e F é a função definida no exemplo anterior então $F + c$ também é uma primitiva de f.*

Teorema 2.2.1. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e G é uma primitiva de f, então*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Demonstração. Seja $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Note que $F'(x) = f(x) = G'(x)$, logo $G(x) = F(x) + c$, para alguma constante c. Como $F(a) = 0$, logo $G(a) = c$. Isto é, $F(x) = G(x) - G(a)$, ou seja , $F(b) = G(b) - G(a)$. Daí,

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

□

Observação 2.2.1. *Podemos denotar $G(b) - G(a)$ por $G(x)|_a^b$*

Observação 2.2.2. *Como vimos no início dessa secção sempre que a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, tem-se*

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x), \forall x \in [a, b]$$

No entanto, nem sempre podemos integrar toda derivada para retornar a função original. Basta considerar o contra exemplo abaixo.

Exemplo 8. *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen(\frac{1}{x^2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Note que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}(\frac{1}{x^2}) - (\frac{2}{x}) \cos(\frac{1}{x^2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Observe que f' não é limitada em nenhuma vizinhança de origem e portanto não é integrável em qualquer intervalo contendo a origem.

Teorema 2.2.2. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que f' é limitada e integrável em $[a, b]$. Então*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Demonstração. Dada uma partição $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ de [a,b], temos

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \tag{2.1}$$

Pelo **Teorema do Valor Médio** aplicado em cada $[x_{i-1}, x_i]$ existe $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Assim pela equação 2.1 fica

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Sendo f' limitada, considere

$$M_i' = sup\{f'(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

e

$$m_i' = inf\{f'(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

com $i = 1, 2, ..., n$ e daí,

$$m_i'(x_i - x_{i-1}) \leq f'(\xi)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i'(x_i - x_{i-1}).$$

Logo

$$\sum_{i=1}^{n} m_i'(x_i - x_{i-1}) \leq f(b) - f(a) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i'(x_i - x_{i-1}),$$

e assim

$$s(f', P) \leq f(b) - f(a) \leq S(f', P)$$

para qualquer partição P de $[a,b]$. Daí

$$\underline{\int_a^b} f'(x)dx \leq f(b) - f(a) \leq \overline{\int_a^b} f'(x)dx$$

Como f' é integrável em $[a,b]$, temos

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

$\square$

Teorema 2.2.3. ***(Mudança de Variável)****Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ diferenciável com g' integrável e $g([c,d]) \subset (a,b)$. Então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

.

Demonstração. Sendo f contínua, ela possui uma primitiva $F : [a,b] \to \mathbb{R}$. E pelo **Teorema Fundamental do Cálculo** temos

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = F(g(d)) - F(g(c))$$

Por outro lado, pela regra da cadeia

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t)g'(t); \forall t \in [a,b]$$

Assim $F \circ g : [c,d] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de uma função integrável em $t \to f(g(t))g'(t)$ temos portanto

$$\begin{aligned}
\int_c^d f(g(t))g'(t)dt &= (F \circ g)(d) - (F \circ g)(c) \\
&= F(g(d)) - F(g(c)) \\
&= \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx \\
&= \int_c^d f(g(t))g'(t)dt
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.2.4. ***(Integração por Partes)*** *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui derivadas integráveis então*

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

Demonstração. Observe que $f.g$ é uma primitiva de $f.g' + g.f$ isto é

$$(f(t)g(t))' = f(t)g'(t) + g(t)f'(t).$$

Daí

$$\int_a^b (f(t)g(t))'dt = \int_a^b f(t)g'(t)dt + \int_a^b g(t)f'(t)dt$$

Pelo **Teorema Fundamental do Cálculo**, temos:

$$\begin{aligned} f(b)g(b) - f(a)g(a) &= \int_a^b f(t)g'(t)dt + \int_a^b f'(t)g(t)dt \\ \Rightarrow \int_a^b f(t)g'(t)dt &= f(x)g(x)\,|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.5. ***(Fórmulas do Valor Médio para Integrais)*** *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $p : [a, b] \to \mathbb{R}$, com f contínua. Então*

a)*Existe $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$*
b)*Se p é integrável e não muda de sinal, existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(c)\int_a^b p(x)dx$$

c)*Se p é positiva decrescente, com derivada integrável, existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = p(a)\int_a^c f(x)dx$$

Demonstração. **a)** Seja F uma primitiva de f, isto é, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Sabemos que F é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Assim pelo **Teorema do valor médio** existe $c \in (a, b)$, tal que

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b - a)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a)$$

b) Como f é contínua em $[a,b]$ então para todo $x \in [a,b]$ temos

$$m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a,b] M; \forall x \in [a,b]$$

onde m é o inf e M é o sup de f. Sem perda de generalização suponha que $p(x) \geq 0$. Então

$$mp(x) \leq f(x)p(x) \leq Mp(x)$$

Segue-se

$$m\int_a^b p(x)dx \leq \int_a^b f(x)p(x)dx \leq M\int_a^b p(x)dx$$

Logo existe $d \in [m,M]$ tal que

$$d\int_a^b p(x)dx = \int_a^b f(x)p(x)dx \Rightarrow p = \frac{\int_a^b f(x)p(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}$$

onde d é chamado de média ponderada da função p. Como f é contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário existe $c \in [a,b]$ tal que $d = f(c)$, daí

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(c)\int_a^b p(x)dx$$

c) Defina $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Então $F' = f$ e $F(a) = 0$. Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)p(x)dx &= \int_a^b F'(x)p(x)dx \\
&= F(x)p(x)|_a^b - \int_a^b F(x)p'(x)dx \\
&= F(b)p(b) - \int_a^b F(x)p'(x)dx.
\end{aligned}$$

Pelo item **b**, existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$F(\xi)\int_a^b p'(x)dx = \int_a^b F(x)p'(x)dx.$$

Logo, pelo **Teorema Fundamental do Cálculo**,

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = F(b)p(b) - F(\xi)\int_a^b p'(x)dx$$

Usando novamente o mesmo teorema,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)p(x)d(x) &= F(b)p(b) - F(\xi)p(b) + F(\xi)p(a) \\ &= \left[F(\xi)\frac{p(a)-p(b)}{p(a)} + F(b)\frac{p(b)}{p(a)}\right]p(a) \\ &= dp(a)\end{aligned}$$

Tomando $\alpha = \frac{p(a)-p(b)}{p(a)}$ e $\beta = \frac{p(b)}{p(a)}$, vemos que $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = L$. Logo $d = \alpha F(\xi) + \beta F(b)$ pertence ao intervalo cujos extremos são $F(\xi) e F(b)$. Pela continuidade de F, existe c entre ξ e b (donde $c \in [a, b]$) tal que $F(c) = d$. Concluímos então que

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = p(a)F(c) = p(a)\int_a^c f(x)dx$$

Para algum $c \in [a, b]$.

□

Teorema 2.2.6. ***(Fórmula de Taylor com Resto Integral)*** *Considere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua juntamente com suas derivadas até ordem $n+1$. Então, para x e x_0 no intervalo $[a, b]$, temos*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)(x - x_0)^j + R_{n+1},$$

onde

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x - z)^n f^{n+1}(t)dt$$

Demonstração. Pelo **Teorema Fundamental do Cálculo**

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt$$

Escolha $\varphi(t) = x - t$ e $g(t) = f'(t)$ de modo que $\varphi'(t) = -1$ e

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} \varphi'(t)g(t)dt,$$

daí,

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)(x-t)'dt = f'(t)(x-t)]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)dt$$

Onde foi utilizado Integração por Partes. Logo temos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x - t)f"(t)dt$$

Suponha que vale para n, isto é,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)(x - x_0)^j + R_{n+1}$$

Onde

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

Assim

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt &= -\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]' dt \\
&= -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \\
&= f^{(n+1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução temos que

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)(x-x_0)^j + f^{(n+1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

Logo

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)(x - x_0)^j + R_{n+2}$$

onde

$$R_{n+2} = \frac{1}{n+1} \int_{x_0}^{x} (x - t)^{n+1} f(t)^(n + 2)dt.$$

Portanto, por indução temos o resultado. □

A próxima aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo, onde o mesmo auxilia na demostração do Teorema de Existência e Unicidade de soluções de um problema de valor inicial, cujo teorema é um dos mais importantes na teoria das Equações Diferenciais Ordinárias.

Teorema 2.2.7. *Considerando o Problema de Valor Inicial* $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *Tendo que* $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ *com* f *contínua. Uma função* $\varphi = I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *diferenciável é solução do* PVI*, se e somente, se for solução da equação Integrável*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Demonstração. Seja φ diferenciável e solução do PVI. Então

$$\begin{cases} \varphi' = f(t, \varphi(t)) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Integrando a Equação diferenciável acima de $s = t_0$ a $s = t$, temos

$$\int_{t_0}^{t} \varphi'(s)ds = \int_{\varepsilon_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$$

aplicando o **Teorema Fundamental do Cálculo**, obtemos

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$$

e daí,

$$\Rightarrow \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$$

Por outro lado suponha que φ diferenciável é solução da equação integral, isto é,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$$

Novamente utilizando o **Teorema Fundamental do Cálculo**,

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

e

$$\varphi(t_0) = x_0.$$

E portanto φ é solução do PVI.

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

□

2.3 Considerações Finais

Esse trabalho foi de suma relevância, pois buscou retrata a importância do Teorema Fundamental do Cálculo para aplicação em diversos ramos do conhecimento. Sendo o objetivo principal, enunciar e demostrar o teorema fundamental do cálculo e apresentar algumas de suas aplicações. Esse teorema estabelece a ligação entre as operações de derivação e integração e, sendo assim é a chave de todo o cálculo diferencial e integral.

Desta forma foi possivel enunciar e demonstrar o teorema com aplicações na integração por partes, assim como, na mudança de variável. Desta forma, foram evidenciadas as aplicações também na fórmula do valor médio para integrais e no teorema de existência e unicidade de soluções de um problema de valor inicial de equações diferencias ordinárias e na formula de Taylor com resto integral.

Apêndice

Neste apêndice apresentamos algumas definições e resultados que foram de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho. Omitimos as demostrações disponibilizamos toda referência.

Definição 11. *Seja f uma função definida no intervalo aberto I. Dizemos que f é derivável em $x_0 \in I$ se existe o limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{2.2}$$

Quando o limite 2.2 existe é denotado por $f'(x_0)$ é chamado de derivada de f no ponto x_0. Outras notações são utilizadas para a derivada de um ponto $Df(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)|_{x=x_0}$. Pondo $h = x - x_0$ e $x = x_0 + h$, podemos escrever 2.2 da seguinte maneira

$$f1(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2.3}$$

Esta é uma derivada no sentido ordinário, o ponto x_0 sendo interior ao domínio da função. Quando em 2.3 nos restringimos a valores positivos de h, o limite, quando existe, é chamado de derivada lateral à direita de f em x_0 e denotado por $f'_d(x_0)$ e quando nos restringimos a valores negativos de h, o limite, quando existe é chamado de derivada lateral a esquerda de f em x_0 eé denotado por $f'_e(x_0)$. Assim

$$f'_d(x_0) = lim_{h \to o^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'_e(x_0) = \lim_{h \to o^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Evidentemente que f é derivável em x_0 se, e somente se, existem as derivadas laterais em x_0 e $f'_d(x_0) = f'_e(x_0) = f'(x_0)$
Quando $f'(x)$ existe em todo intervalo xI dizemos que f é derivável em I.

Teorema 2.3.1. *Seja uma função f satisfazendo as condições:*

a) f é contínua no intervalo [a,b]
b) f é derivável no intervalo (a,b)

Então existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema 2.3.2. *Seja f uma função real de variável real contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se $f(a) \leq n \leq f(b)$ então existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = s$.*

Teorema 2.3.3. *Suponha que as funções f e f' y são funções contínuas em um retângulo $\alpha < t < \beta < y < \delta$, contendo o ponto (t_0, y_0). Então em algum intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$ contido em $\alpha < t < \beta$, existe uma única solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial*

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$$

Teorema 2.3.4. *Sejam f e g funções reais contínuas em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então existe $x_0 \in (a, b)$ tal que*

$$(f(a) - f(b))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$$

Teorema 2.3.5. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e contínua, então qualquer ponto d tal que $f(a) \leq d \leq f(b)$ ou $f(a) \geq d \geq f(b)$ é da forma $f(c)$, para algum ponto c do intervalo $[a, b]$.*

Definição 12. *Se uma função f é definida em um intervalo aberto contendo x_0, então a derivada de f em x_0, denotada por $f'(x_0)$, é dada por:*

$$f'(x_0) = \lim_{(\Delta x \to 0)} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

se este limite existir. Δx representa uma pequena variação em x, próximo de x_0, ou seja, tomando $x = x_0 + \Delta x$, onde colocamos $\Delta x = x - x_0$, a derivada de f em x_0 pode também se expressa por

$$f'(x_0) = \lim_{(\Delta x \to 0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Teorema 2.3.6. *Se $f(u)$ é derivável no ponto $u = g(x)$ e $g(x)$ é derivável em x, então a função composta (f.g)(x) = f(g(x)) é derivável em x e*

$$(f.g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

onde $\frac{dy}{du}$ é calculada em $u = g(x)$.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo Severo de Souza.**Introdução à análise matemática-** São Paulo- Ed.:Blucher, 1999.

[2] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise I**. 2º edição. Rio de Janeiro - Ed.: LTC, 1996.

[3] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**V.1-IMPA-2004.

[4] MACIEL, Aldo Bezerra.; LIMA, Osmundo Alves. **Introdução a Aanálise**-Campina Grande, EDUEP- 2005.

[5] THOMAS, George B. **Cálculo**. 10º edição- São Paulo. Pearson Addioson Wesley, 2002.

[6] WILLIAM E. Boyce.; RICHARDR C. DiPrima. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. - Rio de Janeiro: LTC, 2006.