



Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências Humanas e Exatas
Curso de Licenciatura em Matemática

Manoela Ramos Santos

Modelagem matemática e solução numérica de lançamento de projéteis

Monteiro - PB, Brasil

Maio de 2016

Manoela Ramos Santos

**Modelagem matemática e solução numérica de
lançamento de projéteis**

Monografia submetida à coordenação do curso
de graduação em Licenciatura em Matemática
como requisito para obtenção do Título de
Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Brauner Gonçalves Coutinho

Monteiro - PB, Brasil

Maio de 2016

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S586m Santos, Manoela Ramos.
Modelagem matemática e solução numérica de lançamento de projéteis [manuscrito] / Manoela Ramos Santos. - 2016.
39 p. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em MATEMÁTICA) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2016.

"Orientação: Prof. Dr. Brauner Gonçalves Coutinho, Departamento de Matemática".

1. Projéteis. 2. Modelagem matemática. 3. Solução numérica. 4. Método de Euler. 5. Linguagem Python. I. Título.

21. ed. CDD 372.7

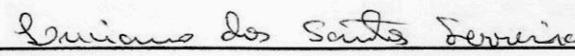
Manoela Ramos Santos

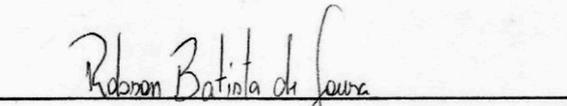
**Modelagem matemática e solução numérica de
lançamento de projéteis**

Monografia submetida à coordenação do curso
de graduação em Licenciatura em Matemática
como requisito para obtenção do Título de
Licenciado em Matemática.

Trabalho aprovado. Monteiro - PB, Brasil, 18 de maio de 2016:


Prof. Dr. Brauner Gonçalves Coutinho
Orientador


Prof. Me. Luciano dos Santos Ferreira
Banca examinadora


Prof. Me. Robson Batista de Sousa
Banca examinadora

Monteiro - PB, Brasil

Maio de 2016

Este trabalho dedico a meus pais (Maria do Socorro e Manoel) por todo o incentivo, a meu marido, a toda minha família por sempre estarem comigo e acima de tudo a Deus por ter me dado coragem e determinação.

Agradecimentos

Tudo em nossa vida é questão de interesse e dedicação. A cada dia estamos aptos a aprender coisas novas, e é isso que levo para o decorrer de minha vida: toda a aprendizagem e experiências que adquiri durante meu curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Agradeço a minha mãe Maria do Socorro, meu pai Manuel, meu marido Flávio e toda a minha família pelo amor, por todo incentivo e apoio.

Aos professores Brauner Coutinho e Robson Batista por toda a paciência e participação durante o meu processo de escrita do trabalho de conclusão do curso (TCC).

Agradeço a todos que me incentivaram durante este curso, que me deram apoio e muita força para que eu prosseguisse.

A todos que participaram direta ou indiretamente da minha formação, meu muito obrigado.

*“Pode todo mundo duvidar de você,
mas jamais desista de sua missão e capacidade de vencer.”
(Autor anônimo)*

Resumo

O lançamento de projéteis é um dos mais importantes problemas de movimentos bidimensionais estudados na Mecânica Clássica, sendo modelado por um conjunto de equações diferenciais ordinárias. O problema pode se tornar complexo se considerar parâmetros físicos como: variação da gravidade com a altitude, resistência do ar, efeito Magnus, entre outros. Nessas situações as soluções analíticas triviais amplamente conhecidas perdem validade. Para casos como estes, o uso de métodos numéricos como técnica de solução das equações diferenciais é válido. Neste trabalho, foi implementado em linguagem Python, um programa computacional baseado no método numérico de Euler para obter a solução das equações de movimento de projéteis. Foi estudada a modelagem matemática do problema envolvendo as equações de movimento sem considerar efeitos de resistência do ar e do vento. Resultados obtidos a partir das simulações para parâmetros físicos como: alcance, tempo de vôo e altura máxima, foram comparados com as soluções analíticas e com um caso relatado na literatura, mostrando-se bastante próximos.

Palavras-chave: Projéteis. Modelagem matemática. Solução numérica. Método de Euler. Linguagem Python.

Abstract

The launch projectiles is one of the most important problems of two-dimensional movements studied in classical mechanics, being modeled by a set of ordinary differential equations. The problem can become complex to consider physical parameters such as the variation of gravity with elevation, air resistance, the Magnus effect, among others. In these situations the widely known trivial analytical solutions lose validity. For cases like these, the use of numerical methods and differential equations solving technique is valid. This work was implemented in Python, a computer program based on the numerical Euler method for the solution of projectile motion equations. mathematical modeling of the problem involving the equations of motion without considering air resistance effects and the wind was studied. Results obtained from simulations for physical parameters such as range of flight and maximum height time, were compared with the analytical solutions and with a case reported in the literature, being quite close

Keywords: Projectiles. Mathematical modeling. Numerical solution. Euler method. Python language.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Motociclista dando salto de uma margem para outra de rio.	13
Figura 2 – Construção de trajetórias de projéteis para o conhecimento dos artilheiros	14
Figura 3 – Computador Integrador Numérico Eletrônico - ENIAC.	15
Figura 4 – Movimento unidimensional.	17
Figura 5 – Movimento num plano	20
Figura 6 – Deslocamento representado como um vetor	20
Figura 7 – Deslocamento resultante	21
Figura 8 – Soma comutativa	22
Figura 9 – Soma de vários deslocamentos	22
Figura 10 – Deslocamento oposto	22
Figura 11 – Diferença de deslocamento	23
Figura 12 – Componente de um vetor	23
Figura 13 – Trajetória de um projétil, apresentando sua velocidade inicial \mathbf{v}_0 e as componentes de \mathbf{v} em cinco instantes subsequentes.	25
Figura 14 – Solução numérica.	32
Figura 15 – Método de Euler.	32
Figura 16 – Esquema do lançamento a partir da origem do sistema de coordenadas, com velocidade inicial \mathbf{v}_0 formando um ângulo θ_o com o eixo do x. . . .	35
Figura 17 – Estudo de passo de tempo para $v_o = 200$ m/s e $\theta_o = 30^\circ$	36
Figura 18 – Comparação de resultados numéricos e analíticos da trajetória da partí- cula para os diversos ângulos estudados.	36

Lista de abreviaturas e siglas

MRU	Movimento Retilíneo Uniforme
SI	Sistema Internacional de Unidades
EDO	Equação Diferencial Ordinária
ENIAC	Eletronic Numerical Integrator And Computer (Computador Integrador Numérico Eletrônico)

Lista de símbolos

Δ	Delta
\int	Integral
Λ	Lambda
μ	Mi
θ	Teta
F_R	Força Resultante
Σ	Somatório
\lim	Limite
t_m	Tempo para atingir a altura máxima
A	Alcance

Sumário

	INTRODUÇÃO	13
1	MODELAGEM MATEMÁTICA	17
1.1	Movimento unidimensional	17
1.1.1	Conceitos básicos	17
1.1.1.1	Velocidade média	17
1.1.1.2	Velocidade instantânea	18
1.1.1.3	Aceleração	18
1.1.1.4	Movimento retilíneo uniformemente acelerado	19
1.2	Movimento bidimensional	19
1.2.1	Vetores	20
1.2.1.1	Componentes de um vetor	23
1.2.2	Movimento de projéteis	24
1.2.2.1	Análise cinemática do movimento de um projétil	25
1.2.2.2	Análise dinâmica do movimento de projéteis sem resistência do ar	27
2	MODELAGEM NUMÉRICA	29
2.1	Métodos numéricos	29
2.1.1	Erros em soluções numéricas	29
2.1.1.1	Erros de arredondamento	29
2.1.1.2	Erros de truncamento	30
2.1.1.3	Erro total	30
2.2	Método de Euler	31
2.2.1	Método explícito de Euler	31
2.2.2	Dedução do método de Euler usando a integração numérica	32
2.2.3	Dedução do método de Euler usando diferenças finitas	33
2.2.4	Método de Euler aplicado ao movimento de projéteis	33
2.3	Linguagem Python	34
3	RESULTADOS E DISCUSSÕES	35
	CONCLUSÃO	39
	REFERÊNCIAS	40

Introdução

Conforme escreve Drake e MacLachlan (1975 apud FAZURI; MATOS, 1997):

O estudo do movimento de projéteis lançados da superfície da terra é um problema antigo que tem a sua origem na parte final do famoso livro, *Discursos sobre duas novas Ciências* (1638), de Galileu Galilei. Neste livro Galileu demonstra que a trajetória de uma partícula viajando nas proximidades da superfície da terra e através de um meio não resistente é uma parábola.

O movimento de projéteis é bastante interessante e até corriqueiro em diversas situações. Uma bola de futebol, quando lançada de um determinado ponto, é um exemplo de movimento de projétil. Aliás, podemos ver exemplos de movimentos de projéteis em diversos esportes, tais como: basquete, vôlei, tênis, lançamento de dardo, arco e flecha, entre outros. Na Figura 1 está representado vários momentos do salto de um motociclista entre as margens de um rio e como o seu movimento descreve uma parábola. Até mesmo o simples lançamento de um bolinha de papel arremessada no cesto de lixo é um exemplo deste movimento.

Figura 1 – Motociclista dando salto de uma margem para outra de rio.



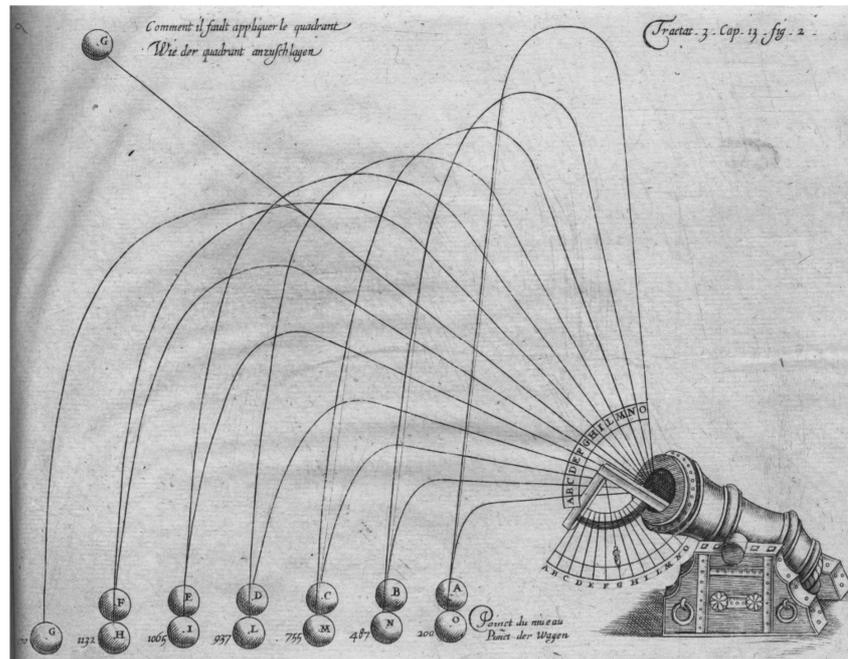
Fonte: Adaptado da imagem disponível em: <<https://goo.gl/tBc4Vt>> Acesso em mai. 2016.

A trajetória apresentada por projéteis lançados de canhões, os quais eram e ainda são muito utilizados como arma de guerra, pode ser observada na ilustração antiga apresentada na Figura 2 que, segundo Buettnera et al. (2016), era utilizada na época para instruir os artilheiros sobre a trajetória dos projéteis disparados do canhão.

Um fato curioso é que uma das primeiras utilizações do computador eletrônico, foi o cálculo de trajetórias de projéteis na Segunda Guerra Mundial, conforme podemos ver no texto abaixo, transcrito, em partes, de (FORMICE, 2009, p. 24-27):

Com a Segunda Guerra Mundial em curso, os Estados Unidos necessitavam aumentar o seu poder de fogo [...]. Para as armas de grande

Figura 2 – Construção de trajetórias de projéteis para o conhecimento dos artilheiros, retirados de livro de 1628.



Fonte: Buettnera et al. (2016).

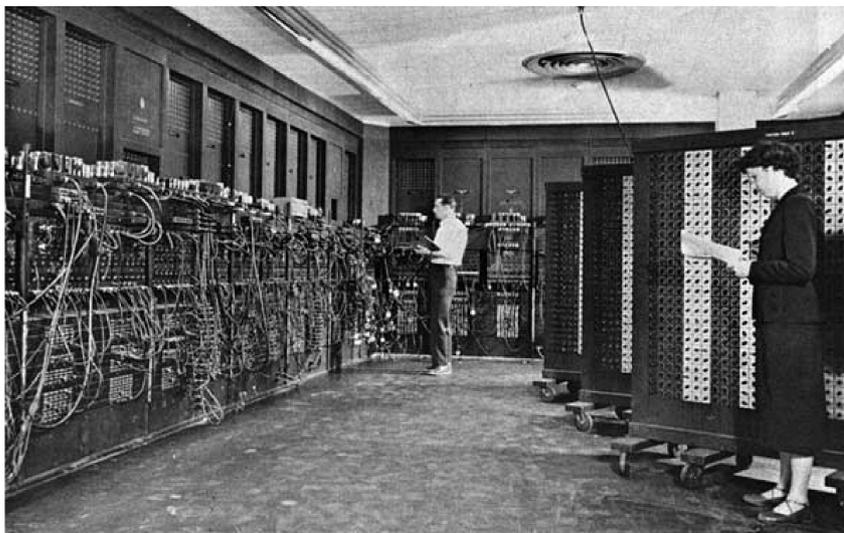
porte estava sendo testada a precisão com que um projétil poderia atingir seu alvo, foram produzidas tabelas que ilustrava o quanto longe um projétil poderia ir de acordo com a inclinação da arma. Muitos fatores deviam ser considerados ao se fazer essas tabelas, como o ângulo e a velocidade do vento, a temperatura, a pressão atmosférica, a umidade e os tipos de projéteis utilizados. Com tantas variações, muitas tabelas deviam ser feitas para cada arma. O Laboratório de Pesquisa Balística era responsável por fazer as tabelas, que eram calculadas manualmente, demorando muitas horas até que fossem prontas. Com o avanço da guerra a demanda por tais tabelas aumentou e métodos para acelerar os cálculos tiveram de ser encontrados. [...] Na busca por melhores soluções [...] elaboraram o projeto de um computador eletrônico automático para resolver as equações diferenciais [...]. Desse projeto nasceu o primeiro computador eletrônico chamado ENIAC (Eletronic Numerical Integrator And Computer, ou Computador Integrador Numérico Eletrônico) [...] O ENIAC entrou em funcionamento no dia 14 de fevereiro de 1946 e tinha como objetivo a realização de cálculos balísticos para o exército dos Estados Unidos.

Através da Figura 3 podemos ter noção das enormes dimensões que tinha o ENIAC, ocupando um grande espaço no seu local de instalação.

Ao desprezarmos os efeitos da resistência do ar sobre um projétil, a trajetória descrita por ele é uma parábola. Se considerarmos outros fatores como a resistência do ar e a presença de ventos, a trajetória muda e as equações de movimento tornam-se mais complicadas, podendo-se utilizar métodos numéricos para obter sua solução.

Um dos primeiros estudiosos a demonstrar que a trajetória descrita por um projétil

Figura 3 – Computador Integrador Numérico Eletrônico - ENIAC.



Fonte: Disponível em: <<http://goo.gl/ikLzHs>> Acesso em mai. 2016.

é uma parábola foi Galileu. Ele também concluiu que o alcance é máximo quando o ângulo θ é igual a 45° . Segundo ele: “As amplitudes das parábolas descritas por projéteis disparados com a mesma velocidade, mas em ângulos de elevação acima e abaixo de 45° e equidistantes de 45° , são iguais entre si” (NUSSENZVEIG, 2003).

Galileu também observou o fato de que todos estes resultados sobre o movimento de projéteis são bastante idealizados, uma vez que não é levado em conta o efeito da resistência do ar, que tende a diminuir o alcance e alterar o caráter do movimento (NUSSENZVEIG, 2003).

A natureza da presente pesquisa pode ser classificada como aplicada, uma vez que, conforme escreve Souza, Santos e Dias (2013, p. 64), “objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática dirigidos à solução de problemas específicos”.

Quanto aos objetivos, pode ser classificada como uma pesquisa descritiva pois visa descrever as características do fenômeno (movimento de projéteis) estabelecendo as relações entre as variáveis do problema (SOUZA; SANTOS; DIAS, 2013).

Com relação aos procedimentos, a pesquisa pode recair em duas classificações, descritas ainda por Souza, Santos e Dias (2013): bibliográfica e experimental. Segundo os autores, é bibliográfica pois foi elaborada a partir de material já publicado, constituído por livros, artigos e material disponibilizado na Internet. Também pode ser considerada uma pesquisa experimental pois determinou-se um objeto de estudo (o movimento de projéteis) e, com as variáveis envolvidas bem definidas, o programa simulador deve permitir a observação dos efeitos que as variáveis produzem no movimento. Pode-se dizer que o simulador computacional desempenha papel semelhante ao de um laboratório virtual na realização dos experimentos (simulações).

O objetivo deste trabalho é estudar o lançamento de projéteis partindo da análise de sua modelagem matemática e, a partir dela, desenvolver um programa computacional em linguagem Python, usando o método numérico de Euler para a solução das equações de movimento.

Este trabalho se justifica pela importância de desenvolver trabalhos de pesquisa multidisciplinares envolvendo conteúdos diversos da Física, Matemática e Computação. Além disso, ainda oferece ao discente a oportunidade de trabalhar com a Matemática Aplicada além de estudar os métodos numéricos como ferramenta alternativa de solução de problemas matemáticos complexos.

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. No capítulo um são apresentados alguns conceitos básicos (deslocamento, velocidade e aceleração) da Física e a descrição mais formal do movimento de projéteis. No capítulo dois é apresentada uma breve teoria acerca dos métodos numéricos, em particular, do método de Euler. Além disso, trata ainda dos erros em soluções numéricas. No capítulo três são apresentados dois problemas do movimento de projéteis cuja solução é fornecida através dos métodos analítico e numérico. Um destes resultados é comparado com os dados apresentados por Halliday, Resnick e Walker (1996). No final são apresentadas as conclusões do trabalho e sugestões para futuros trabalhos, além das referências bibliográficas utilizadas.

1 Modelagem matemática

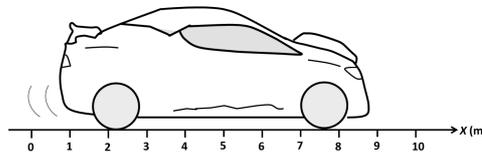
1.1 Movimento unidimensional

1.1.1 Conceitos básicos

1.1.1.1 Velocidade média

De acordo com Nussenzveig (2003), uma maneira mais simples de abordar o movimento unidimensional é considerar primeiro os conceitos de cinemática, sem considerar ainda o problema de como determinar o movimento que se produz numa dada situação física (Dinâmica). Para descrever o movimento de um corpo, faz-se necessário estabelecer um referencial que, no caso unidimensional, é uma reta orientada, em que se escolhe a origem O do mesmo. Então, a posição de uma determinada partícula no instante t é descrita pela abscissa $x(t)$. Na Figura 4 está representado o movimento de um veículo em uma dimensão.

Figura 4 – Movimento unidimensional.



Fonte: a autora.

O movimento considerado mais simples de se estudar é o Movimento Retilíneo Uniforme (MRU), devido ao fato de que, no mesmo, apenas a posição é variável com o tempo e a velocidade é constante. A posição de uma partícula que apresenta MRU é representada por uma função do primeiro grau.

$$x(t) = a + bt. \quad (1.1)$$

Este movimento caracteriza-se pelo fato de que percursos iguais $\Delta x = x_4 - x_3 = x_2 - x_1$ são descritos em intervalos de tempo iguais $\Delta t = t_4 - t_3 = t_2 - t_1$.

A velocidade média de um corpo (ou partícula) é definida pela seguinte equação:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (1.2)$$

Fisicamente, podemos entender a Equação 1.2 como a razão entre o deslocamento ($\Delta x = x_2 - x_1 = x - x_0$) e o intervalo de tempo ($\Delta t = t_2 - t_1$). No Sistema Internacional de Unidades (SI) a velocidade se mede em m/s.

Para obtermos a equação horária da posição do MRU iremos considerar $t_2 = t$ e $t_1 = t_0$ e assim, a função mostrada na Equação 1.2 assume a forma:

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0). \quad (1.3)$$

onde x_0 é a posição inicial do corpo (ou partícula).

A Equação 1.3 permite que se obtenha a posição de uma partícula ou corpo em qualquer instante de tempo.

1.1.1.2 Velocidade instantânea

A velocidade instantânea está associada a rapidez com a qual um objeto se move em um determinado instante de tempo. Segundo Halliday, Resnick e Walker (2002) a velocidade instantânea é definida como sendo:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (1.4)$$

Da Equação 1.4 podemos entender a velocidade instantânea como a taxa de variação da posição com relação ao tempo.

1.1.1.3 Aceleração

De acordo Halliday, Resnick e Walker (2002), dizemos que uma partícula sofre uma aceleração, quando sua velocidade varia de acordo com o tempo. A aceleração média é definida como sendo:

$$a_{méd} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}; \quad (1.5)$$

onde a partícula tem velocidade v_1 no instante t_1 e velocidade v_2 no instante t_2 . Daí a aceleração instantânea é dada por:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (1.6)$$

A aceleração de uma partícula em qualquer instante é a taxa com a qual a velocidade está variando nesse instante. Ou seja, a aceleração de uma partícula em qualquer instante é a derivada segunda da posição $x(t)$ em relação ao tempo, daí:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (1.7)$$

A aceleração é uma grandeza vetorial e, assim como a velocidade e o deslocamento, ela possui módulo e sentido. Então, a aceleração com um valor positivo tem o sentido positivo em um eixo e a aceleração com valor negativo tem o sentido negativo.

1.1.1.4 Movimento retilíneo uniformemente acelerado

Um movimento é denominado uniformemente acelerado quando a aceleração instantânea não varia com o tempo (independente do tempo). Assim, temos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = a = \text{constante}. \quad (1.8)$$

Considerando o movimento durante um intervalo de tempo $[t_0, t]$, onde, t_0 é o instante inicial, podemos escrever:

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t a dt = a(t - t_0). \quad (1.9)$$

A velocidade no instante inicial quando $(v(t_0) = v_0)$, chama-se velocidade inicial. Então, da Equação 1.9, temos:

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0). \quad (1.10)$$

Analisando a Equação 1.10, verifica-se que a velocidade é uma função linear do tempo no movimento uniformemente acelerado.

Define-se a lei horária do *movimento retilíneo uniformemente acelerado*, em função dos valores iniciais x_0 e v_0 da posição e da velocidade no instante inicial t_0 , da seguinte forma:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2. \quad (1.11)$$

É importante citar a velocidade no movimento uniformemente acelerado em função da posição x , para isso, utilizando as funções mostradas nas Equações 1.10 e 1.11, fazendo uma simples substituição e eliminando $t - t_0$, teremos:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0), \quad (1.12)$$

que é a expressão da velocidade no movimento uniformemente acelerado.

1.2 Movimento bidimensional

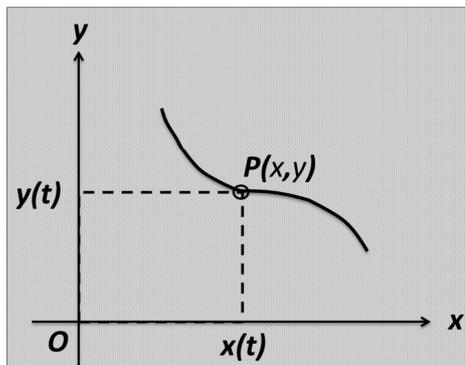
As coordenadas em relação a um dado referencial podem caracterizar a posição de um ponto num dado plano. A posição de uma partícula em movimento no plano será descrito pelo par de coordenadas (funções).

$$(x(t), y(t)), \quad (1.13)$$

em que a partícula no instante t tem a abcissa $x(t)$ e ordenada $y(t)$. Assim, podemos chamar dois movimentos unidimensionais simultâneos como movimento bidimensional.

Observe na Figura 5 que, à medida que o ponto P se move, suas projeções sobre os eixos Ox e Oy se movem correspondentemente, descrevendo movimentos unidimensionais. Assim, observa-se que podemos reduzir um movimento bidimensional a dois movimentos unidimensionais simultâneos, cuja composição resulta no movimento no plano.

Figura 5 – Movimento num plano.



Fonte: Adaptada de Nussenzweig (2003).

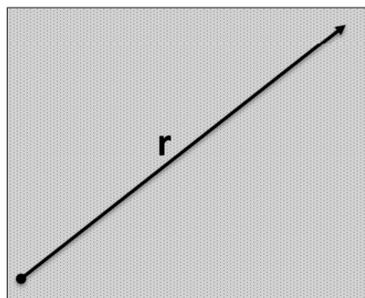
1.2.1 Vetores

Como cita Ramalho, Nicolau e Toledo (1993):

Vetor é o ente matemático caracterizado pelo que há de comum ao conjunto dos segmentos orientados que possuem: o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido. O comprimento comum dos segmentos orientados é chamado de módulo do vetor. Assim um vetor possui módulo, direção e sentido. (RAMALHO, 1993, p.124).

Nussenzweig (2003), representa o deslocamento como um vetor, onde usamos a notação \mathbf{r} para nos referirmos ao deslocamento, isto pode ser observado na Figura 6.

Figura 6 – Deslocamento representado como um vetor.



Fonte: Adaptada de Nussenzweig (2003).

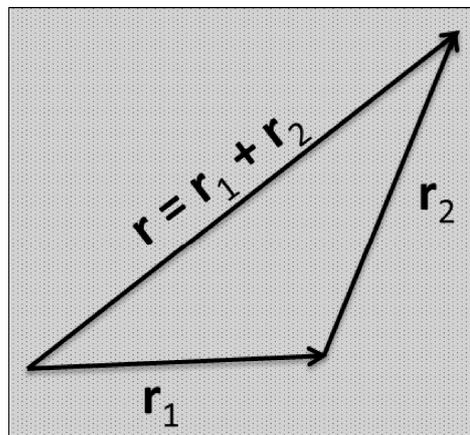
Então, para caracterizar o deslocamento de uma partícula em sua trajetória em relação a origem, é necessário também especificar sua direção e seu sentido.

Considere os deslocamentos \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 exibidos na Figura 7. Pela “regra do paralelogramo”, unindo-se \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 através da origem do primeiro e da extremidade do segundo, tem-se o deslocamento \mathbf{r} , mesmo que não estejam em direções perpendiculares. Então, o deslocamento resultante se resume na “soma” dos deslocamentos \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2. \quad (1.14)$$

Observando a Figura 7, quando tomada a diagonal do paralelogramo construído sobre \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , achamos a soma do deslocamento.

Figura 7 – Deslocamento resultante.



Fonte: Adaptada de Nussenzveig (2003).

Percebemos também, observando a Figura 8, que a soma é comutativa

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1, \quad (1.15)$$

e associativa também:

$$\mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) + \mathbf{r}_3. \quad (1.16)$$

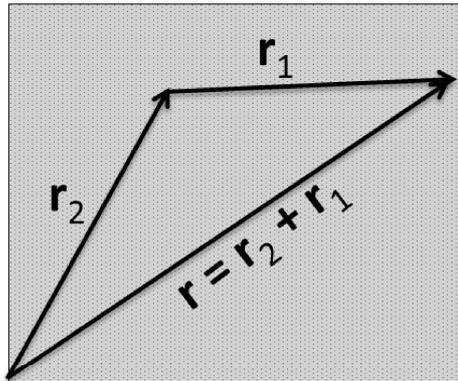
Como pode-se observar na Figura 9, a soma de um número qualquer de deslocamentos obtém-se, unindo-se a origem do primeiro à extremidade do último.

Da Figura 10 tem-se que $\mathbf{r} + \mathbf{0} = \mathbf{r}$, pois $\mathbf{0}$ é um deslocamento nulo. E, para cada deslocamento \mathbf{r} , existe um deslocamento oposto, que chamamos por $-\mathbf{r}$, que difere de \mathbf{r} apenas pelo sentido, daí: $\mathbf{r} + (-\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

Podemos escrever também a diferença de dois deslocamentos, veja na Figura 11 como:

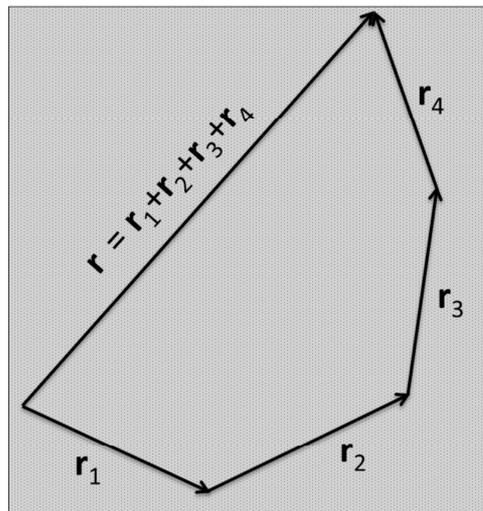
$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + (-\mathbf{r}_1). \quad (1.17)$$

Figura 8 – Soma comutativa.



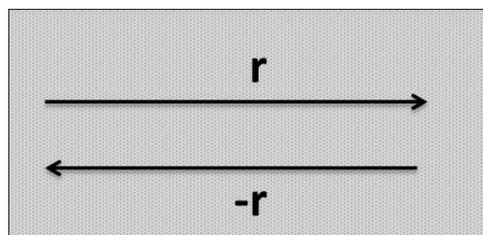
Fonte: Adaptada de Nussenzweig (2003).

Figura 9 – Soma de vários deslocamentos.



Fonte: Adaptada de Nussenzweig (2003).

Figura 10 – Deslocamento oposto.

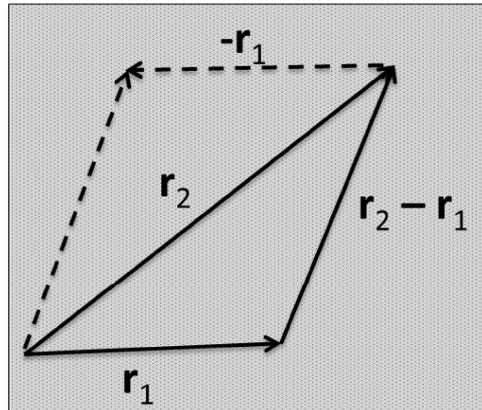


Fonte: Adaptada de Nussenzweig (2003).

Supondo que λ e μ são dois deslocamentos, se $\lambda > 0$, o deslocamento $\lambda \mathbf{r}$ é um deslocamento de mesma direção e sentido que \mathbf{r} , mas de magnitude λ vezes maior; se $\lambda < 0$, o sentido muda. Com esta definição, é imediato que $\lambda(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \lambda \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{r}_2$, e que

$$(\lambda + \mu)\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r} + \mu\mathbf{r}.$$

Figura 11 – Diferença de deslocamento.



Fonte: Adaptada de Nussenzveig (2003).

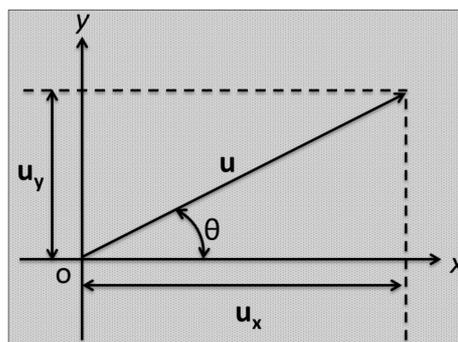
De acordo com Nussenzveig (2003), a estas propriedades de deslocamento acima citadas, damos o nome de *vetores*. Deste modo, existem as *grandezas escalares*, que são as grandezas físicas representadas apenas por um número, e as *grandezas vetoriais*, que são as representadas por vetores. Como frisa o mesmo autor:

É importante notar que não basta que uma grandeza física seja caracterizada por sua magnitude, direção e sentido para que ela tenha caráter vetorial. É preciso ainda que ela obedeça às leis de composição, com todas as suas propriedades (NUSSENZVEIG, 1999, p.43).

1.2.1.1 Componentes de um vetor

Seja \mathbf{u} um vetor qualquer, chamamos componentes de \mathbf{u} segundo os eixos Ox e Oy as projeções \mathbf{u}_x e \mathbf{u}_y de \mathbf{u} sobre esses eixos. Observe na Figura 12.

Figura 12 – Componentes de um vetor.



Fonte: Adaptada de Nussenzveig (2003).

O módulo de \mathbf{u} é dado da seguinte maneira:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}. \quad (1.18)$$

Vetor unitário é um vetor de módulo = 1. Designa-se um vetor unitário da direção de \mathbf{u} por $\hat{\mathbf{u}}$, de maneira que

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}. \quad (1.19)$$

Os vetores unitários nas direções de Ox e Oy são designados por \mathbf{i} e \mathbf{j} . Daí,

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j}. \quad (1.20)$$

Se θ é o ângulo ente \mathbf{u} e Ox , temos:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= |\mathbf{u}| \cos \theta \\ u_y &= |\mathbf{u}| \sin \theta \end{aligned} \right\}. \quad (1.21)$$

Pela Equação 1.20, podemos dizer que as componentes da soma de dois vetores são as somas das componentes correspondentes, daí tem-se:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_x + v_x) \mathbf{i} + (u_y + v_y) \mathbf{j}. \quad (1.22)$$

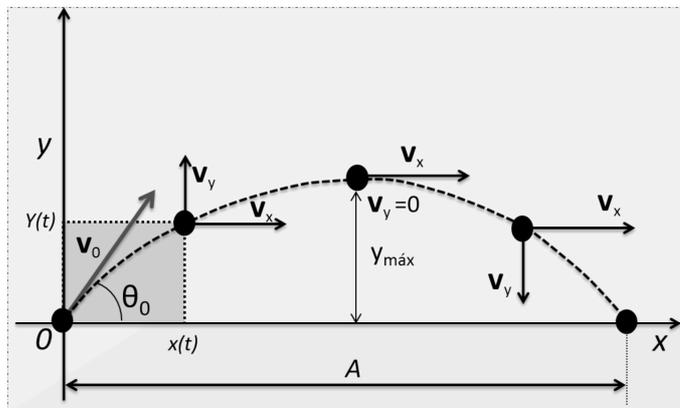
Percebemos também que, pela Equação 1.20, o vetor \mathbf{u} só fica definido quando são dados também os vetores unitários (\mathbf{i}, \mathbf{j}) que definem as direções dos eixos do sistema de coordenadas, o que permite construir o vetor como entidade característica, representável geometricamente de forma independente do sistema de coordenadas (NUSSENZVEIG, 2003).

1.2.2 Movimento de projéteis

Um exemplo de movimento bidimensional é o movimento de projéteis que se movem próximo à superfície da Terra. O projétil pode ser uma bola de golfe ou de beisebol, lançada em uma direção arbitrária (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2002).

O lançamento de projéteis é muito útil, principalmente em algumas situações de nosso dia-a-dia, por exemplo, em treinamentos militares, testes de instrumentos para guerra e em várias outras situações. Podemos dizer que este conteúdo forma uma interdisciplinaridade, pois é uma junção da física com a matemática. Na Figura 13, observa-se o lançamento de projéteis em cinco instantes subsequentes, o projétil é lançado com uma velocidade inicial v_0 , na qual o vetor velocidade forma um ângulo θ com o eixo do x , representa-se também a altura máximo por $y_{máx}$ e as componentes da velocidade por v_x e v_y nos cinco instantes diferentes.

Figura 13 – Trajetória de um projétil, apresentando sua velocidade inicial \mathbf{v}_0 e as componentes de \mathbf{v} em cinco instantes subsequentes.



Fonte: a autora.

O movimento de projéteis pode ser estudado incluindo ou não a resistência do ar. No caso em que a resistência do ar é incluída, as equações de movimento tornam-se mais complicadas, dificultando portanto suas soluções.

Um projétil pode ser uma partícula que se move em um plano vertical com velocidade inicial \mathbf{v}_0 , como podemos observar na Figura 13, e com uma aceleração constante, dirigida para baixo. Então, chamamos o movimento realizado por este projétil de movimento balístico.

Vamos explorar o movimento dos projéteis neste momento desprezando a influência do ar. Se um projétil é lançado a uma velocidade inicial \mathbf{v}_0 , podemos escrever:

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x}\hat{\mathbf{i}} + v_{0y}\hat{\mathbf{j}}. \quad (1.23)$$

Se conhecermos o ângulo θ_0 entre \mathbf{v}_0 e o semi-eixo x positivo, podemos calcular as componentes v_{0x} e v_{0y} , da mesma forma:

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 \quad e \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta_0. \quad (1.24)$$

No movimento bidimensional, o vetor posição \mathbf{r} e a velocidade \mathbf{v} do projétil mudam constantemente, mas o vetor \mathbf{g} é constante e está sempre dirigido verticalmente para baixo.

1.2.2.1 Análise cinemática do movimento de um projétil

Para falarmos de movimento em duas dimensões precisamos analisar duas situações: movimento horizontal e movimento vertical de um projétil.

Movimento Horizontal

De acordo com Halliday, Resnick e Walker (2002), na direção horizontal não existe aceleração, a componente horizontal \mathbf{v}_x da velocidade de um projétil permanece inalterada e igual ao valor inicial v_{0x} durante a trajetória. O deslocamento horizontal de um projétil em relação à posição inicial $\Delta x = x - x_0$, no instante t é definido por:

$$x - x_0 = v_{0x}t. \quad (1.25)$$

Daí, temos que:

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t, \quad (1.26)$$

pois, $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$.

Movimento Vertical

Na direção vertical, a aceleração é constante, logo, aplicando a Equação 1.11 para a direção vertical, temos:

$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (1.27)$$

onde a componente vertical da velocidade inicial, v_{0y} , é substituída pela expressão equivalente $v_0 \sin \theta_0$.

Podemos ainda escrever a equação da velocidade dependente do tempo e a equação da velocidade dependendo da posição, assim, temos:

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \theta_0 - gt; \quad (1.28)$$

$$v_y^2 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \quad (1.29)$$

Na Equação 1.28 temos a componente vertical da velocidade que se comporta como a de uma bola atirada verticalmente para cima. Podemos observar isto na Figura 13.

Combinando as Equações 1.26 e 1.27, obtêm-se a equação da trajetória do movimento de um projétil é a seguinte:

$$y = tg \theta_0 x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0}. \quad (1.30)$$

A altura máxima atingida pelo projétil origina a equação abaixo, onde t_m é o instante em que v_y se anula.

$$t_m = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}. \quad (1.31)$$

Substituindo a Equação 1.31 na Equação 1.27, obtém-se:

$$y_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}. \quad (1.32)$$

que é a equação para a altura máxima.

Observe as equações abaixo;

$$y = v_0 \text{sen} \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (1.33)$$

e,

$$x = v_0 \text{cos} \theta_0 t. \quad (1.34)$$

Substituindo $y = 0$ na Equação 1.33, chegamos em uma equação do 2º grau em t , com uma das raízes sendo $t = 0$. E a outra recai no dobro do tempo que leva para atingir a altura máxima, o que resulta na seguinte equação:

$$t = t_A = \frac{2v_0 \text{sen} \theta_0}{g} = 2t_m. \quad (1.35)$$

Utilizando a Equação 1.28, fazendo $t = t_A$, temos:

$$v_y(t_A) = -v_0 \text{sen}(\theta_0) \quad (1.36)$$

Daí, ao atingir o solo a velocidade do projétil tem o mesmo módulo $|v(t_A)| = |v_0|$, só diferencia da velocidade inicial por causa da inversão da componente vertical ($v_y \rightarrow -v_y$).

Usando a Equação 1.12, podemos gerar as componentes da velocidade diretamente em função da altura y , logo:

$$v_y = \pm \sqrt{v_0^2 \text{sen}^2 \theta_0 - 2gy} \quad (1.37)$$

e,

$$v_x = v_0 \text{cos} \theta_0, \quad (1.38)$$

onde os sinais + ou - nos diz se o projétil está descendo ou subindo.

Já, a partir das Equações 1.35 e 1.34, encontramos o “alcance do projétil”:

$$A = v_0 \text{cos} \theta_0 \frac{2v_0 \text{sen} \theta_0}{g} = \frac{v_0^2}{g} \text{sen}(2\theta_0). \quad (1.39)$$

Nesta equação usamos a relação trigonométrica, $\text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}\theta\text{cos}\theta$. E o alcance é máximo quando θ vale 45° .

1.2.2.2 Análise dinâmica do movimento de projéteis sem resistência do ar

A Segunda Lei de Newton é escrita como:

$$\mathbf{F}_R = m\mathbf{a}, \quad (1.40)$$

em que F_R , é a força resultante, que nada mais é do que a soma de todas as forças que agem no corpo ou partícula. Assim, aplicando a Segunda Lei de Newton nas direções x e y , respectivamente, obtém-se:

$$\sum F_X = ma_x \Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\sum F_x}{m} = 0 \quad (1.41)$$

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\sum F_y}{m} = -g. \quad (1.42)$$

Note que, na direção horizontal não há forças atuando sobre o projétil e na direção vertical a única força que age no mesmo é o peso.

2 Modelagem numérica

2.1 Métodos numéricos

Métodos numéricos são técnicas usadas na solução de problemas matemáticos que não podem ser resolvidos ou que são difíceis de se resolver analiticamente. Enquanto a solução analítica corresponde a solução exata por meio de uma expressão matemática, a solução numérica é um valor aproximado, que pode ter boa precisão. Apesar de algumas técnicas numéricas terem sido desenvolvidas há muito tempo, foi com a utilização de computadores digitais que ganharam força, uma vez que, na maioria dos casos, a utilização dessas técnicas envolve cálculos tediosos e repetitivos. Os computadores permitem a realização de grande quantidade de cálculos em curto espaço de tempo (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008).

A importância dos métodos numéricos na solução de equações diferenciais, sejam ordinárias ou parciais, é bastante aceita na literatura, conforme afirma Madureira (2013), “cada vez mais frequentemente os métodos numéricos são necessários para a resolução de equações diferenciais para as quais não se consegue determinar uma solução analítica”.

Ainda neste sentido, Stein (2008) diz que a resolução de equações diferenciais é de grande importância pois estas modelam com bastante eficiência os processos físicos, mas é muito difícil obter as soluções exatas. Daí, surge a necessidade da utilização dos métodos numéricos pois eles geram soluções bem próximas a solução real, sendo mais eficientes quando utilizados em computadores.

2.1.1 Erros em soluções numéricas

Ainda segundo Gilat e Subramaniam (2008), as soluções numéricas podem ser bem precisas, mas em geral são inexatas. Então, quando utilizamos o método numérico na solução de um problema são introduzidos dois tipos de erros: o erro de arredondamento e o erro de truncamento. Os métodos numéricos usam aproximações para resolver problemas, estas aproximações resultam em erros chamados de truncamento. Então, unindo estes dois erros, resulta no **erro total** da solução numérica que é a diferença entre a solução verdadeira e a solução numérica aproximada.

2.1.1.1 Erros de arredondamento

Seguindo Gilat e Subramaniam (2008), os números são representados em um computador através de um número finito de bits¹. Conseqüentemente, números reais que

¹ Dígitos binários, ou seja, menor unidade de informação que pode ser armazenada ou transmitida.

têm uma mantissa² mais longa do que o número de bits disponíveis para representá-los têm que ser encurtados. Esse requisito se aplica aos números irracionais, que devem ser encurtados em qualquer sistema, aos números finitos que são muito longos e aos números finitos na forma decimal que não podem ser representados de forma exata na forma binária. Um número pode ser encurtado seja cortando, ou descartando, os algarismos a mais, ou fazendo-se um arredondamento. No corte, os algarismos na mantissa além do comprimento que pode ser armazenado são simplesmente deixados de fora. No arredondamento, o último algarismo armazenado é arredondado.

2.1.1.2 Erros de truncamento

Gilat e Subramaniam (2008) os erros de truncamento ocorrem quando os métodos numéricos usados na solução de um problema matemático adotam um procedimento matemático aproximado. Este erro é dependente do método numérico específico ou do algoritmo usado na solução do problema. O erro de truncamento é independente do erro de arredondamento; ele existe mesmo quando as operações matemáticas são exatas.

2.1.1.3 Erro total

Sabendo que a solução numérica é uma aproximação, de acordo com Gilat e Subramaniam (2008) a solução numérica sempre inclui erros de arredondamento e também pode incluir erros de truncamento, dependendo do método numérico utilizado. Estes dois erros juntos resultam no erro numérico total. Esse erro total, que também é chamado de erro real, é a diferença entre a solução verdadeira e a solução numérica:

$$\textit{Erro Real} = \textit{Solução Exata} - \textit{Solução Numérica}. \quad (2.1)$$

O valor absoluto da razão entre o erro real e a solução exata é chamado de erro relativo real:

$$\textit{Erro Relativo Real} = \left| \frac{\textit{Solução Exata} - \textit{Solução Numérica}}{\textit{Solução Exata}} \right|. \quad (2.2)$$

Os erros das Equações 2.1 e 2.2 não podem ser determinados em problemas cuja solução requer o uso de métodos numéricos, já que a solução verdadeira não é conhecida. Contudo, essas grandezas podem ser úteis na verificação da precisão de diferentes métodos numéricos. Isso é feito com o emprego do método numérico na solução de problemas que têm solução analítica, avaliando-se com isso os erros reais (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008).

² Parte decimal de um logaritmo.

2.2 Método de Euler

Segundo Gilat e Subramaniam (2008) “o método de Euler é a mais simples técnica de solução de um EDO de primeira ordem”:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ com a condição inicial : } y(x_1) = y_1. \quad (2.3)$$

Este método pode ainda ser formulado de duas maneiras na forma explícita ou implícita.

2.2.1 Método explícito de Euler

Segundo Gilat e Subramaniam (2008), “o método explícito de Euler também chamado como método de Euler progressivo, é uma técnica numérica de passos simples usada na solução de EDOs de primeira ordem”. Nele usamos as equações:

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad (2.4)$$

e,

$$y_{i+1} = y_i + \textit{inclinação} \cdot h. \quad (2.5)$$

onde, na Equação 2.5, a *inclinação* é uma constante e é uma inclinação de $y(x)$ no ponto (x_i, y_i) . Esta inclinação é calculada a partir da equação diferencial:

$$\textit{Inclinação} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} = f(x_i, y_i). \quad (2.6)$$

Segundo Gilat e Subramaniam (2008), vemos no método de Euler que a função $y(x)$ tem um inclinação constante e igual à inclinação em (x_i, y_i) , mas isto em uma pequena distância h na vizinhança de (x_i, y_i) . Sendo assim, o próximo ponto da solução numérica é calculado como:

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad (2.7)$$

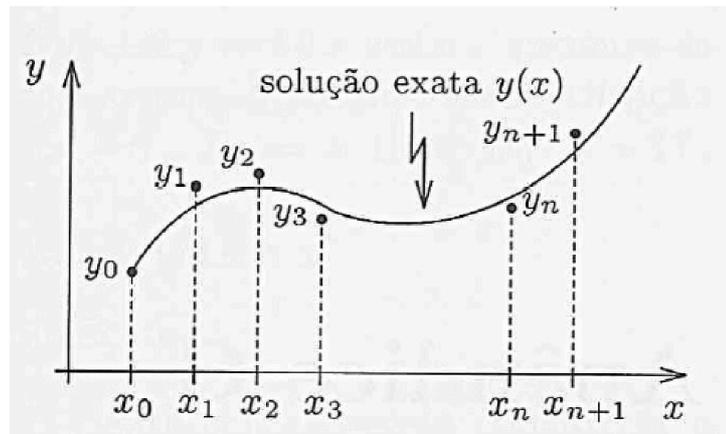
e,

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h. \quad (2.8)$$

Um das formas de deduzir a Equação 2.8 pode ser através da Equação 2.3, pois podemos obter um solução aproximada por meio da sua integração numérica ou por meio de uma aproximação por diferenças finitas para a derivada.

Na Figura 14, podemos observar a representação da distância h (que é a distância entre cada ponto) e do próximo ponto da solução numérica, que é calculado através da Equação 2.7, ou seja, nesta figura, temos uma representação de valores aproximados y_0, \dots, y_n, \dots da solução exata $y(x)$ nos pontos x_0, \dots, x_n, \dots . Logo, quanto menor o valor de h , menor será o erro ou mais precisa será a solução.

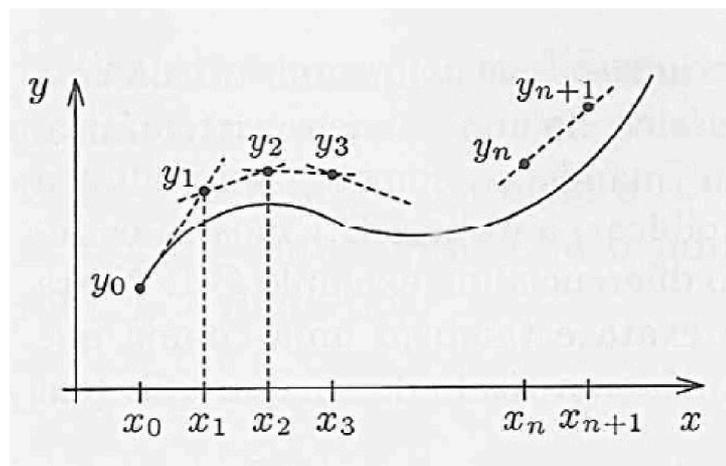
Figura 14 – Solução numérica.



Fonte: Watari, 2004, pág.138.

Na Figura 15, segundo Watari (2004), “uma vez calculado o coeficiente angular, constrói-se uma reta tangente à solução y no ponto x_0 . Seguindo sobre a reta tangente até encontrar a reta $x = x_1$, temos o valor aproximado y_1 , de y , em x_1 ”.

Figura 15 – Método de Euler.



Fonte: Watari, 2004, pág.139.

2.2.2 Dedução do método de Euler usando a integração numérica

Com a multiplicação da Equação 2.3 por dx , esta pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx, \quad (2.9)$$

onde, depois de realizado o processo de integração no lado esquerdo e isolando y_{i+1} , temos o seguinte resultado:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx. \quad (2.10)$$

Usando o método do retângulo, que de acordo com Gilat e Subramaniam (2008), diz o seguinte:

A aproximação mais simples para $\int_a^b f(x) dx$ consiste em assumir que $f(x)$ ao longo do intervalo $x \in [a, b]$ seja uma constante igual ao valor de $f(x)$ em qualquer um dos pontos finais desse intervalo. A integral pode ser calculada das seguintes maneiras: $I(f) = \int_a^b f(a) dx = f(a)(b - a)$ ou $I(f) = \int_a^b f(b) dx = f(b)(b - a)$ (GILAT, 2008, p. 290).

Assim, a Equação 2.10 pode ser reescrita como:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i), \quad (2.11)$$

que resulta em uma equação idêntica a Equação 2.8, pois $h = (x_{i+1} - x_i)$.

2.2.3 Dedução do método de Euler usando diferenças finitas

Na Equação 2.3 a derivada $\frac{dy}{dx}$ pode ser aproximada pela fórmula de diferença progressiva com a avaliação da EDO no ponto $x = x_i$, como podemos ver a seguir:

$$\frac{dx}{dy} \Big|_{x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = f(x_i, y_i). \quad (2.12)$$

A solução desta equação resulta na Equação 2.8 do método de Euler, também chamado de método de Euler progressivo.

2.2.4 Método de Euler aplicado ao movimento de projéteis

De acordo com Fazuri e Matos (1997), podemos resolver numericamente as Equações 1.4 e 1.6 transformando-as em um conjunto de equações lineares que possam ser resolvidas passo a passo. Dessa forma, temos:

$$a = \frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{[v(t + \Delta t) - v(t)]}{\Delta t}. \quad (2.13)$$

Assumindo que $a = -g$ (onde g é a constante da gravidade), e que Δt é pequeno e constante, temos as equações do movimento escritas como:

$$v_x^{n+1} = v_{0x} \quad \forall n. \quad (2.14)$$

$$v_y^{n+1} = v_y^n - g\Delta t. \quad (2.15)$$

$$x^{n+1} = x^n + v_x^n \Delta t. \quad (2.16)$$

$$y^{n+1} = y^n + v_y^n \Delta t, \quad (2.17)$$

onde, n é o número de intervalos de tempo Δt decorridos desde o início do movimento e a^n , v^n , x^n e y^n representam a aceleração, a velocidade e as coordenadas da posição respectivamente, ao fim de n intervalos de tempo. Estas equações foram obtidas via Método de Euler ou Método do Primeiro Ponto.

2.3 Linguagem Python

Python é uma linguagem de programação de alto nível, ela é fácil de aprender e fácil de ensinar. De acordo com Downey, Elkner e Meyers (2002, p. 6):

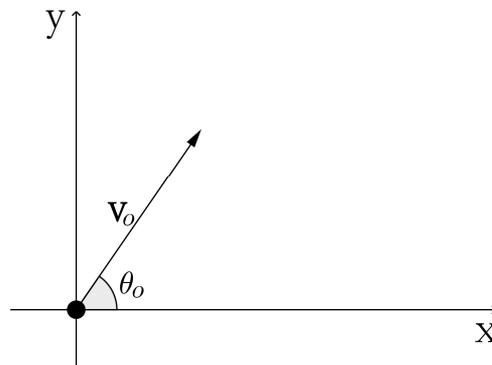
Python é uma linguagem de programação divertida e extremamente fácil de usar que tem ganho forte popularidades nos últimos anos. Desenvolvida dez anos atrás por Guido van Rossum, a sintaxe simples do Python e seu sentido geral são grandemente derivados do ABC, uma linguagem didática que foi desenvolvida no anos 80. Entretanto, Python também foi criado para solucionar problemas reais e tomou emprestado uma grande quantidade de características de linguagens de programação como C++, Java, Modula-3 e Scheme.

A linguagem de programação Python é interessante para uso de simulações físicas que não exigem muito tempo para execução do programa, como no caso aqui estudado. Por este motivo e por ser relativamente fácil de aprender, foi escolhida para utilização na presente pesquisa.

3 Resultados e discussões

Para validar o programa desenvolvido a partir da modelagem numérica apresentada neste trabalho, foram obtidos resultados de lançamentos de projéteis para o problema apresentado na Figura 16, com velocidade inicial $v_o = 200$ m/s, formando um ângulo θ_o com o eixo x, assumindo os seguintes valores: 15° , 30° , 45° , 60° e 75° . Considera-se que a partícula é lançada da origem do sistema de coordenadas, ou seja, $x_o = 0$ e $y_o = 0$. Também levamos em consideração nas simulações o valor da gravidade como sendo $9,81$ m/s^2 .

Figura 16 – Esquema do lançamento a partir da origem do sistema de coordenadas, com velocidade inicial v_o formando um ângulo θ_o com o eixo do x.

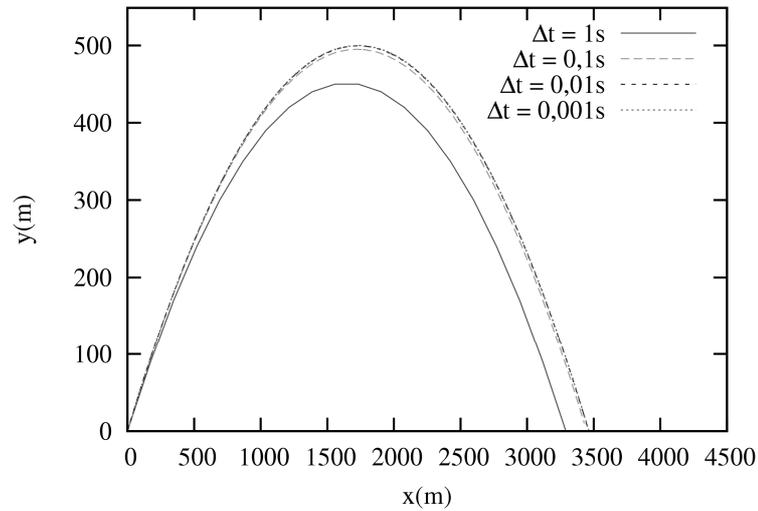


Fonte: a autora.

Com o objetivo de encontrar um passo de tempo válido para as simulações, foram usados vários valores para Δt no problema mencionado no parágrafo anterior, fixando o ângulo θ_o em 30° . Os resultados para os valores de Δt testados são apresentados na Figura 17. Observando o gráfico, percebe-se que, à medida que o valor do passo de tempo diminui, a solução passa a ficar mais próxima uma da outra, ou seja, mais exata será a solução. Quando é usado um $\Delta t = 1$ s o resultado é bem distante de quando é usado um $\Delta t = 0,1$ s. Já quando comparamos os resultados obtidos com $0,01$ s e $0,001$ s, notamos que as soluções são bem próximas uma da outra. Um fator negativo de usar um passo de tempo muito pequeno é que o programa demorará bem mais tempo para chegar ao resultado final. Comparando visualmente as curvas da Figura 17, vemos que um $\Delta t = 0,01$ s já é suficiente para obter a solução, sendo este o valor utilizado nos demais resultados apresentados no presente capítulo.

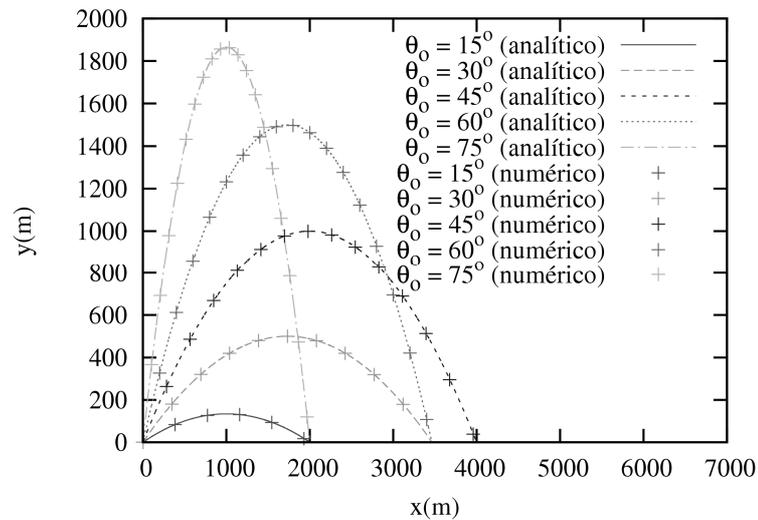
Os resultados obtidos para os ângulos estudados, são comparados com as soluções analíticas correspondentes, dadas pelas Equações 1.33 e 1.34. Na Figura 18, vemos com clareza os resultados gerados para cada ângulo tanto pelas expressões analíticas como pelo método numérico. Pode-se perceber que ambos os resultados são bastante próximos para todos os ângulos considerados.

Figura 17 – Estudo de passo de tempo para $v_o = 200$ m/s e $\theta_o = 30^\circ$.



Fonte: a autora.

Figura 18 – Comparação de resultados numéricos e analíticos da trajetória da partícula para os diversos ângulos estudados.



Fonte: a autora.

As Tabelas 1, 2, 3, 4, 5 apresentam, respectivamente, os parâmetros físicos alcance, altura máxima e tempo de vôo, calculados numericamente e analiticamente para cada um dos ângulos estudados. Os valores analíticos são dados pelas Equações 1.31, 1.35 e 1.39, respectivamente. Os valores apresentados mostram que os resultados apresentam sempre erros relativos inferiores a 1%, sendo em geral menores para o alcance e maiores para o tempo de vôo.

Outra comparação foi feita com dados retirados da literatura, apresentados por Halliday, Resnick e Walker (1996, p. 63) para a trajetória no vácuo de uma bola

Tabela 1 – Cálculo do erro para os resultados numéricos e analíticos do alcance, altura máxima e tempo de voo para $\theta_o = 15^\circ$.

Parâmetros físicos	Analítico	Numérico	Erro relativo (%)
Alcance (m)	2040,81633	2040,80809	0,00040
Altura máxima (m)	136,70877	136,68289	0,01893
Tempo de voo (s)	10,56400	10,56404	0,01127

Tabela 2 – Cálculo do erro para os resultados numéricos e analíticos do alcance, altura máxima e tempo de voo para $\theta_o = 30^\circ$.

Parâmetros físicos	Analítico	Numérico	Erro relativo (%)
Alcance (m)	3534,79757	3534,76929	0,00080
Altura máxima (m)	510,20408	510,15408	0,00980
Tempo de voo (s)	20,40800	20,40816	0,08330

Tabela 3 – Cálculo do erro para os resultados numéricos e analíticos do alcance, altura máxima e tempo de voo para $\theta_o = 45^\circ$.

Parâmetros físicos	Analítico	Numérico	Erro relativo (%)
Alcance (m)	4081,63265	4081,56176	0,00174
Altura máxima (m)	1020,40816	1020,33745	0,00693
Tempo de voo (s)	28,86100	28,86150	0,36169

Tabela 4 – Cálculo do erro para os resultados numéricos e analíticos do alcance, altura máxima e tempo de voo para $\theta_o = 60^\circ$.

Parâmetros físicos	Analítico	Numérico	Erro relativo (%)
Alcance (m)	3534,79757	3534,70000	0,00276
Altura máxima (m)	1530,61224	1530,52564	0,00566
Tempo de voo (s)	35,34700	35,34798	0,86219

Tabela 5 – Cálculo do erro para os resultados numéricos e analíticos do alcance, altura máxima e tempo de voo para $\theta_o = 75^\circ$.

Parâmetros físicos	Analítico	Numérico	Erro relativo (%)
Alcance (m)	2040,81633	2040,78817	0,00138
Altura máxima (m)	1904,10755	1904,01096	0,00507
Tempo de voo (s)	39,42500	39,42554	0,53612

lançada com $v_o = 160$ km/h e $\theta_o = 60^\circ$. Todos os valores são apresentados na Tabela 6. Assim como no caso anterior, os dados analíticos referentes aos três parâmetros físicos considerados foram obtidos pelas Equações 1.31, 1.35 e 1.39, respectivamente.

Como pode-se observar na Tabela 6, as diferenças são pequenas quando os resultados numérico e analítico são comparados entre si. Estes também são bastante próximos daqueles encontrados em Halliday, Resnick e Walker (1996). As pequenas diferenças podem ser ocasionadas das fontes de erro citadas na Seção 2.1.1.

Tabela 6 – Comparação de resultados numéricos e analíticos com dados da literatura.

Parâmetros físicos	Halliday*	Numérico	Analítico
Alcance (m)	175,0	174,44	174,55
Altura máxima (m)	75,0	75,39	75,58
Tempo de voo (s)	7,9	7,85	7,85

*Halliday, Resnick e Walker (1996).

Conclusão

Estudamos os conceitos teóricos deste movimento bidimensional bem como sua modelagem matemática envolvendo expressões para cálculo de parâmetros físicos importantes como: tempo de voo, alcance e altura máxima.

Também apresentamos uma segunda opção de solução: o método numérico de Euler. A partir do estudo deste método, foi elaborado um programa computacional em linguagem Python que gerou resultados bastante satisfatórios, quando comparados com a solução exata dada por expressões da modelagem matemática e com resultados retirados da literatura.

Observamos que existem duas maneiras de chegar a soluções no movimento de projéteis: uma pelo método numérico que nos dá soluções aproximadas e o outro pelo método analítico que nos dá as soluções exatas.

O método numérico de Euler, que mostrou-se eficiente na obtenção dos resultados, exige a realização de muitos cálculos, que devem ser realizados para cada passo de tempo da solução. Ficou claro que o método é melhor aplicado em um programa de computador, pois este pode fazer muitos cálculos, com precisão, em um curto espaço de tempo.

Os resultados obtidos foram bem positivos e podemos dizer que, com a ajuda da linguagem de programação, é bem interessante de se trabalhar a física por meio da solução via métodos numéricos. Pois assim teremos os resultados com mais agilidade.

Para um entendimento mais realista sobre o movimento de projéteis sugere-se para trabalhos futuros incluir nas equações de movimento forças proporcionais a velocidade ou ao quadrado da velocidade, efeitos devido ao vento, variação da gravidade com altura, entre outros.

Referências

- BUETTNERA, J. et al. *Expansion of Theoretical Mechanics in the Early Modern Period*. 2016. Disponível em: <<https://goo.gl/75Dxne>>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.
- DOWNEY, A.; ELKNER, J.; MEYERS, C. *Como pensar como um cientista da Computação usando Python*. [S.l.]: Cyaneus.net, 2002. Citado na página 34.
- DRAKE, S.; MACLACHLAN, J. *Scientific american*. 1975. Citado na página 13.
- FAZURI, J.; MATOS, J. M. O. Estudo numérico do movimento de projéteis. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 20, n. 4, p. 327, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 33.
- FORMICE, C. *História Da Era Da Informática*. [S.l.]: Clube de Autores, 2009. Citado na página 13.
- GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. *Métodos numéricos para engenheiros e cientistas*. [S.l.]: Editora Bookman, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 29, 30, 31 e 33.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *FUNDAMENTOS DE FÍSICA, V.1: MECÂNICA*. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 18, 24 e 26.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. E. *Fundamentos da Física*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Livros Tecnicos e Científicos, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 16, 36, 37 e 38.
- MADUREIRA, M. *Problemas de equações diferenciais ordinárias e transformadas de Laplace - 4a Edição*. [S.l.]: FEUP EDIÇÕES, 2013. Citado na página 29.
- NUSSENZVEIG, M. *Curso de Física Básica: Mecânica*. [S.l.]: Editora Edgard Blucher, 2003. Citado 7 vezes nas páginas 15, 17, 20, 21, 22, 23 e 24.
- RAMALHO, J.; NICOLAU, F.; TOLEDO, P. *Os fundamentos da física 1*. [S.l.]: Editora Moderna, 1993. Citado na página 20.
- SOUZA, G. S.; SANTOS, A. R. dos; DIAS, V. B. *Metodologia da pesquisa científica: a construção do conhecimento e do pensamento científico no processo de aprendizagem*. [S.l.]: Animal, 2013. Citado na página 15.
- STEIN, J. *Como a Matemática Explica O Mundo*. [S.l.]: Campus, 2008. Citado na página 29.
- WATARI, K. *Mecânica Básica*. [S.l.]: Livraria da Física, USP, 2004. Citado na página 32.