Universidade Estadual da Paraíba

Centro de Ciências e Tecnologia

Departamento de Matemática

Curso de Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio

Alecio Soares Silva

FUNÇÕES: SUA IMPORTÂNCIA NO ESTUDO DAS DERIVADAS

Campina Grande – PB

2016

Alecio Soares Silva

FUNÇÕES: SUA IMPORTÂNCIA NO ESTUDO DAS DERIVADAS

Monografia apresentada à Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências para obtenção do título de Especialista em Educação de Matemática para Professores do Ensino Médio.

Orientador: Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva

Campina Grande – PB
2016

S586f Silva, Alecio Soares.
Funções [manuscrito] : sua importância no estudo das derivadas / Alecio Soares Silva. - 2016.
62 p. : il. color.

Digitado.
Monografia (Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva, Departamento de Matemática".

1. Funções. 2. Limites. 3. Educação matemática. 4. Matemática. I. Título.

21. ed. CDD 515.25

Alecio Soares Silva

FUNÇÕES: SUA IMPORTÂNCIA NO ESTUDO DAS DERIVADAS

Monografia aprovada em: 01/06/2016

Monografia apresentada à Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio.

Banca Examinadora

Prof. Me. Fernando Luiz Tavares da Silva
Orientador - Departamento de Matemática - UEPB

Prof.ª. Me. Maria da Conceição Vieira Fernandes
Examinador - Departamento de Matemática - UEPB

Prof. Me. Núbia Nascimento Martins
Examinador - Departamento de Matemática – UEPB

A DEUS que é maravilhoso, e por sua bondade criou este mundo tão cheio de conhecimentos para que pudéssemos evoluir adquirindo sempre novos saberes.

DEDICO

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pela sua divina misericórdia e por tudo de tão maravilhoso quanto nos tem dado.

À minha família, pai, mãe, irmãos, companheira, e todos outros familiares pelo companheirismo, apoio e admiração que transcendem nossos laços sanguíneos.

Ao Professor Fernando Luiz Tavares da Silva, meu orientador, por ter aceitado o desafio e contribuído com toda sabedoria, paciência, pelo modo respeitoso e dedicado de orientar.

As Professoras Maria da Conceição Vieira Fernandes e Núbia Maria Martins por terem aceitado participar da Banca Examinadora, assim como por toda contribuição por eles dada.

A todos meus colegas de turma pelos momentos de troca, pela grande ajuda em momentos difíceis, bem como, os momentos que pudemos compartilhar risos e tanto companheirismo.

A meus amigos Ailton Diniz, Francisco de Assis, Maria de Jesus pelo carinho, força, apoio e toda ajuda que puderam dispor.

À Escola Estadual Walnyza Borborema Cunha Lima.

Por fim, agradeço a todos os professores do programa por toda contribuição dada durante esta difícil caminhada e a Universidade Estadual da Paraíba pelo oferecimento deste curso.

Resumo

Neste trabalho considera-se o uso da operação de diferenciação, como uma ferramenta que potencializa o cálculo de áreas máximas em problemas geométricos, com o intuito de utilizá-la de forma contextualizada. Para atingir o objetivo de potencializar o ensino de funções, busca-se atingir um estudo sobre aplicação da operação de diferenciação de alguns tipos de funções, para calcular valores máximos e mínimos da imagem delas. Faz-se aqui uma abordagem sobre a história do cálculo diferencial e integral. Em seguida uma abordagem ao conteúdo de função, explorando alguns tipos de funções, bem como, trata-se a ideia de limite de uma função, algumas de suas propriedades, logo após define-se a operação de diferenciação, alguns teoremas, e por fim, foi feita uma aplicação da operação de diferenciação, no cálculo de valores maximizados ou minimizados em problemas geométricos, concluindo então com uma proposta de estudo com foco em aplicar a operação de diferenciação no cálculo de grandezas maximizadas. Atingindo uma abordagem interessante, principalmente para a prática em sala de aula do professor, dando para ele visão macroscópica sobre o tema.

Palavras-chave: Funções; Aplicação; Educação Matemática.

Abstract

This work considers the use of differentiation operation as a tool that enhances the calculation of maximum areas in geometric problems, in order to use it in context. To achieve the goal of enhancing the teaching duties, seeks to achieve a study on application of the differentiation operation of some types of functions to calculate maximum and minimum values of their image. It does up here an approach to the history of differential and integral calculus. Then an approach to the function content, exploiting some types of functions as well, it is the threshold idea of a function, some of their properties after define the differentiation operation, some theorems, and finally , an application of the differentiation operation was made in the calculation maximized or minimized in geometric problems values, then concluding with a proposal for a study focusing on applying the differentiation operation in the calculation of quantities maximized. Reaching an interesting approach, especially to practice in teacher classroom, giving him macroscopic view on the subject.

Keywords: Functions; Application; Mathematics Education.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O conhecimento da operação de diferenciação é fundamental para o estudo do cálculo diferencial e integral, contudo, tal conhecimento se faz necessário em diversas áreas de aplicação da matemática, bem como, em diferentes ciências. Seu estudo foi desenvolvido ao longo de pouco mais que dois séculos, com a contribuição de diversos matemáticos. Neste trabalho teve-se como objetivo contribuir no ensino aprendizagem de funções e um de seus objetivos específicos foi mostrar algumas das aplicações das derivadas, como também, seu surgimento através da história da matemática. Nele fizemos uma abordagem de conceitos, definições e técnicas de derivação importantes para a aplicação deste conteúdo, em seguida algumas aplicações em alguns problemas geométricos, bastante genéricos, escolhidos com a intenção de evidenciar a utilidade do conteúdo estudado.

A escolha de tais problemas foi feita levando em consideração a recomendação feita por BRASIL (2006), p.73, onde se afirma que "O estudo da função quadrática pode ser motivado via problemas de aplicação, em que é preciso encontrar certo ponto de máximo (clássicos problemas de determinação de área máxima)", tal trecho, propõe que a abordagem ao estudo de funções, que possuem pontos com imagem tendo valores máximos ou mínimos, seja feita explorando justamente essa propriedade, pois tal atitude pode ser um boa estratégia motivadora no que se refere a introdução do conteúdo.

O trabalho está organizado da seguinte forma: O primeiro capítulo versa sobre a evolução histórica do cálculo, na Fundamentação Teórica faz-se um significativo estudo de funções, em seguida definem-se limites de funções, além de mostrar algumas de suas propriedades, para em seguida definir a derivada e apresentar a importância do processo de diferenciação, bem como suas definições e sua interpretação geométrica, além das derivadas de algumas funções elementares, as regras de derivação e a definição de valores máximo e mínimo de uma função, para que finalmente se possa fazer aplicações das derivadas em alguns problemas geométricos nos quais o trabalho a ser feito é o de maximizar ou minimizar alguma grandeza.

- **OBJETIVOS**

Este trabalho tem por objetivo geral potencializar o ensino de funções, com ele busca-se atingir um estudo com foco em aplicar a operação de diferenciação no cálculo de grandezas maximizadas.

- **OBJETIVOS ESPECÍFICOS:**

- Estudar alguns conceitos e propriedades sobre funções;
- Mostrar algumas aplicações das derivadas, também como seu surgimento através da história da matemática.
- Mostrar uma aplicação do conteúdo no processo de resolução de alguns problemas geométricos.
- Motivar o aluno, buscando evidenciar uma aplicação para o conteúdo estudado.

- **PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS**

Na elaboração deste trabalho, procurou-se realizar uma pesquisa de caráter bibliográfico, buscando elementos para sua fundamentação. Atentou-se para que fosse feita uma aplicação do conteúdo contextualizando em outra área da matemática para denotar sua relevância.

- **PÚBLICO ALVO**

Partindo do pressuposto de que o conteúdo de funções é tratado de maneira bastante incisiva em todo Ensino Médio, este trabalho é direcionado a professores de Matemática do Ensino Médio, bem como, para qualquer outra pessoa que se interesse pelo tema. Pois nele sugere-se uma abordagem conveniente para solução de alguns problemas geométricos escolhidos de maneira meditada, para que fossem casos mais genéricos, dos quais é possível tirar lições sobre outros problemas mais específicos.

2 UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE O CÁLCULO

Assim como qualquer invenção, o Cálculo é consequência de muito trabalho realizado por muitas mentes ao longo de vários anos. Geralmente remetem-se a invenção do Cálculo a *Isaac Newton* ou a *Gottfried Wilhelm Leibniz* no século XVII, contudo tal afirmação seja indicando Newton, seja indicando Leibniz, como inventor do Cálculo seria parcialmente duvidosa, pois mesmo não usando uma notação como as do século XVII, o grego Arquimedes de Siracusa, já usava a ideia, que podemos apontar como fundamental por trás do Cálculo, que é usar o processo de limites para derivar resultados sobre quantidades finitas.

2.1 ARQUIMEDES DE SIRACUSA

Arquimedes de Siracusa foi um grande inventor, geômetra, físico dentre outras ocupações. Filho de Fídias, um astrônomo sobre o qual sabemos apenas o que Arquimedes escreveu em seu livro *"O contador de Grãos de Areia",* nasceu e viveu na colônia grega de Siracusa na Silícia.

Arquimedes de Siracusa BOYER (1974)

Contudo, viveu um tempo e estudou em Alexandria onde manteve contato com vários matemáticos contemporâneos. Ele também ganhou reputação em Astronomia, porém grande parte da fama atribuída a ele vem de relatos sobre seus engenhosos inventos. Lemos que em BOYER (74, p. 89) que:

> ...informações tiradas da narração de Plutarco sobre a vida de Marcelo, o general romano, durante a segunda Guerra Púnica a cidade de Siracusa se viu envolvida na luta entre Roma e Cartago; tendo-se associado a esta última, a cidade foi sitiada pelos romanos durante os anos de 214 a 212 a.C. Lemos que durante o cerco Arquimedes inventou engenhosas máquinas de guerra para conservar os inimigos à distância.

Relatando as resistências de Siracusa as intentadas de Marcelo devido as grandes invenções bélicas de Arquimedes.

Diz-se que Marcelo exigiu a seus soldados que Arquimedes, sobre quem Marcelo conhecia a excelente reputação sobre sua genialidade, fosse capturado com vida, chegando a punir severamente o soldado que o assassinou e recompensar a família do inventor com vários favores e privilégios. Marcelo respeitava e admirava bastante a produção de Arquimedes chegando a guardar para si parte de seus inventos.

Não seria exagero dizer que Arquimedes é o pai da Física-Matemática por conta de seus vários trabalhos sobre alavancas e fluídos como, por exemplo, *Sobre o Equilíbrio de planos; Sobre corpos flutuantes* (trabalho em dois livros) no qual, encontramos conclusões brilhantes e resultados fantásticos, bem como o princípio hidrostático de Arquimedes.

Alguns historiadores afirmam que Arquimedes ao descobrir tal princípio correu pelado pelas ruas gritando *"Eureca, Eureca!"* (Eu achei, Eu achei!). Quando a pedido de seu amigo, segundo alguns talvez um familiar, o rei Hierão para verificar a legitimidade de uma coroa que suspeitava ter parte de prata, a mergulhou em uma banheira, na qual se banhava, e percebeu que poderia resolver o problema considerando o deslocamento de água que ocorreria.

2.2 OS TRABALHOS DE ARQUIMEDES

O trabalho de Arquimedes tem como característica ideias geniais sendo provadas e justificadas de maneira concisa, elegante, precisa e enormemente simples, mostrando resultados grandiosos sendo deduzidos a partir de simples postulados. Plutarco apud AABOE (2013, p. 89), diz que

> Não é possível encontrar em toda geometria problemas mais difíceis e complicados, ou explicações mais simples e lúcidas. Alguns atribuem isso a sua genialidade; enquanto outros acham que foram produzidos por esforços e trabalhos incríveis, embora aparentemente sejam resultados fáceis e obtidos sem esforços.

Trecho no qual o historiador refuta a grandiosidade alcançada com simplicidade nos trabalhos de Arquimedes. Sua produção contempla vários trabalhos dentre eles:

- *Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas, I;*
- *A Quadratura da Parábola;*
- *Sobre o Equilíbrio das Figuras Planas, II;*
- *Sobre a Esfera e o Cilindro, I e II;*
- *Sobre as Espirais;*
- *Sobre os Cones e os Esferóides;*

- *Sobre os Corpos Flutuantes I e II;*
- *A Medida de um Círculo;*
- *O Contador de Grãos de Areia;*

E um livro que por muito tempo foi considerado perdido e foi encontrado por J. L. Heiberg, em 1906, *O Método,* que provavelmente é o ultimo de seus trabalhos. Uma grande contribuição de Arquimedes em seus trabalhos foi o primeiro procedimento matemático, que não se resumiu apenas a medir, para calcular o valor de π. Tal procedimento baseava-se em desenhar um círculo e nele inscrever uma série de polígonos regulares, cada um destes polígonos com o perímetro menor que o círculo, porém a medida que a quantidade de lados dos polígonos vai aumentando, tem-se uma aproximação por falta para o perímetro do círculo.

Arquimedes percebeu que usando o mesmo procedimento com polígonos circunscritos ao círculo ele obteria uma aproximação, por excesso, para o perímetro do círculo. E dividindo o valor do perímetro desses polígonos (inscritos ou circunscritos) ele teria uma aproximação (por falta ou por excesso) para o valor de π.

Contudo, o círculo não foi a única curva estudada por Arquimedes, a parábola, a elipse e a hipérbole também figuram em seus trabalhos, mesmo com o estudo das duas últimas não tendo o mesmo sucesso da parábola e do círculo. Arquimedes calculou a área do setor parabólico utilizando um método brilhante, tal método ficou conhecido como Método da Exaustão, é conveniente, porém, ressaltar que Eudoxo cerca de um século antes de Arquimedes nascer já usava um método semelhante.

Tal método se resume no seguinte: o setor era dividido em uma série de triângulos, de modo que suas áreas estivessem em progressão geométrica. A soma dos termos desta progressão geométrica se aproxima de $\frac{4}{3}$ do valor da área do triângulo, quão maior seja o número de triângulos inseridos no setor, porém Arquimedes nunca usou o termo infinito em seus trabalhos, como era natural nos trabalhos dos gregos de sua época.

Ratificando essa dificuldade dos gregos desta época o filósofo **Zenão de Eléia** formulou um paradoxo (ou argumento, como ele preferia) que tinha como objetivo, mostrar a incapacidade dos gregos de lidar com o infinito. Seu argumento dizia que:

"Para que um corredor que parte de um ponto A chegar até um ponto B ele precisará passar pelo ponto médio entre A e B, assim este corredor nunca chegaria ao seu destino".

Atualmente, explicar este paradoxo é uma tarefa simples, bastando para isso, utilizarmos o conceito de limite e percebemos facilmente que a série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

converge para 1.

2.3 AS CONTRIBUIÇÕES DE VIÈTE E KEPLER

Pouco depois do fim da Idade Média, quase dois mil anos depois de Arquimedes, o jurista, francês Francois Viète, em um trabalho que versava sobre trigonometria expôs a seguinte relação:

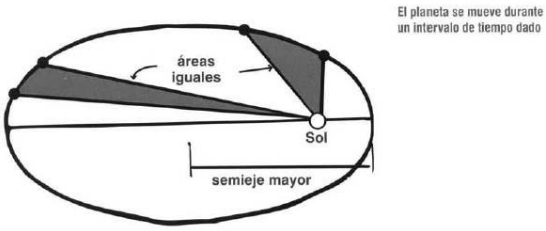
$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

Um produto com infinitos fatores seguindo um padrão matemático simples. Tal fórmula chegou quebrando a dura barreira de lidar com o infinito, pelo uso dos três pontinhos significando que o produto segue até o infinito. Porém não existia novidade alguma nessa ideia, uma vez que já se conhecia este resultado como afirma Boyer 74, “Seu produto aparece facilmente se inscrevermos um quadrado num círculo e depois aplicarmos a fórmula trigonométrica recursiva, $a_{2n} = a_n \cdot \sec\ \frac{\pi}{2}$, onde a_né área do polígono regular inscrito de n lados e fizermos n tender a infinito”. Contudo, Viète foi o primeiro a escrever uma expressão analítica para representar o número $\pi,$ dando um grande passo em relação a acabar com o impasse de lidar com o infinito.

O alemão Johannes Kepler é considerado por muitos historiadores como um dos homens mais estranhos de toda ciência. Ele fez grandes aplicações matemáticas em Astronomia, havia estudado Astronomia na Universidade de Tubinga com Michael Maestlin onde teve contato com o sistema Ptolemaico, desenvolvendo depois as três leis planetárias, dentre as quais, a primeira nos diz que os planetas giram ao redor do sol em uma trajetória elíptica, com o sol em um dos focos (a palavra foco deriva do latim focus que significa fogo).

A Johannes Kepler BOYER (1974).

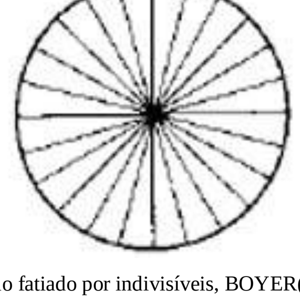
A segunda lei de Kepler afirma que a linha que une um planeta ao sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais, portanto se fez necessário e imprescindível o cálculo de áreas de segmentos elípticos. Como sabemos que a tentativa de Arquimedes de calcular áreas de elipses, e hipérboles pelo Método da Exaustão havia dado errado, Kepler e os outros matemáticos de sua época precisaram desenvolver outro método para calcular tais áreas.



Segunda lei de Kepler STWERT (2007).

A maneira que eles encontraram foi uma espécie de improvisação grosseira e rude, longe da elegância lógica do método grego da exaustão e sem muito rigor matemático, mas que parecia funcionar sempre que necessário para uma quantidade infinita, método este que ficou conhecido como o Método dos Indivisíveis e consistia no seguinte:

Imagine um círculo e inscrito nele vários (tente imaginar um número cada vez maior) triângulos cujos vértices estão no centro do círculo e os outros dois sobre a sua circunferência. Cada um destes triângulos seria uma fatia muito pequena do círculo sendo chamada de ***indivisível****.*



Círculo fatiado por indivisíveis, BOYER(1974).

Este procedimento calculava a área do círculo somando as áreas dos triângulos indivisíveis tomados em seu interior. Perceba que para um número muito grande de indivisíveis (triângulos infinitamente finos), tem-se que a altura de cada um deles se aproxima do valor do raio do círculo, e suas bases são infinitamente pequenas situadas sobre a circunferência. Logo a soma das áreas desses triângulos indivisíveis será:

$$\frac{1}{2}b_1r+\frac{1}{2}b_2r+\frac{1}{2}b_3r+\cdots+\frac{1}{2}b_nr+\cdots \text{ ou } \frac{1}{2}r\ \ b_1+b_2+b_3+\cdots\ \ .$$

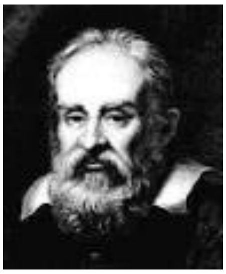
Como a soma dessas bases é igual ao valor do perímetro da circunferência segue que a área do círculo é $\frac{1}{2}Cr$, resultado do teorema provado por Arquimedes, de maneira brilhante.

Mas estes indivisíveis eram muito difíceis de serem entendidos, pois não existia uma definição precisa para eles, pois, a depender do problema, a forma de tomar os indivisíveis mudava e mesmo assim, com todas as limitações deste método, na prática, ele funcionava.

Assim pode-se dizer que o Método dos Indivisíveis não havia se tornado uma ferramenta capaz de resolver qualquer problema de quadratura, apenas servia para resolver alguns problemas, mas não como um algoritmo matemático. Uma das formas geométricas que resistia às tentativas de quadratura era a hipérbole, curva que representa o lugar geométrico de todos os pontos que pertencem ao corte de um cone por um plano com ângulo maior do que o ângulo existente entre a base do cone e seu lado.

2.4 GALILEU GALILEI

Galileu Galilei, foi um físico e matemático, que pode ser considerado como personalidade fundamental na revolução científica. Foi o mais velho dos sete filhos do alaudista Vincenzo Galilei e de Giulia Ammannati. Viveu grande parte de sua vida na cidade italiana de Pisa e em Florença.



Galileu Galilei, BOYER(1974).

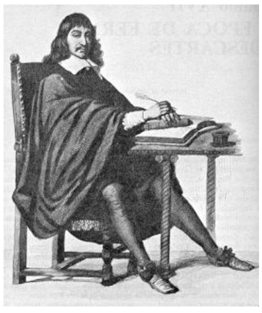
Em seus trabalhos desenvolveu os primeiros estudos sistemáticos do movimento uniformemente acelerado e do movimento do pêndulo. Descobriu também a lei dos corpos e enunciou o princípio da inércia e o conceito de referencial inercial, ideias bases da mecânica de Newton. Estas descobertas contribuíram decisivamente na defesa do heliocentrismo. Contudo, a principal contribuição de Galileu foi para o método científico, pois a ciência assentava numa metodologia aristotélica.

Galileu em um de seus trabalhos *Duas novas ciências,* um tratado sobre dinâmica, aplica o termo "infinitamente pequeno" a um ponto de fantasia e cita que é fácil decompor um segmento de reta em infinitas partes. Para tal, basta flexionar este segmento pra que forme um círculo. Observemos que, caso formemos um quadrado estamos dividindo o segmento em quatro partes, para um pentágono estamos o dividindo em cinco partes, para um icoságono estamos o dividindo em vinte partes, como um círculo é um polígono com infinitos lados estaríamos dividindo o segmento em infinitas partes.

É sabido que Galileu desejava publicar um tratado sobre infinito, entretanto tal tratado nunca foi encontrado, talvez nem tenha sido publicado. Um de seus discípulos, Cavaliere, estimulado pelos estudos de Galileu e Kepler, publicou em 1635, *Geometria indivisiibilibus continuorum*, que fala sobre uma área poder ser pensada como indivisíveis e que um volume pode ser pensado como um composto de áreas que são volumes indivisíveis.

2.5 O SURGIMENTO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Descartes foi um filósofo, matemático e fisiologista, que também se formou em direito, mas nunca exercera a profissão, francês ele é considerado o pai da matemática e da filosofia moderna. Nasceu na cidade francesa de La Haye, província de Touraine, em 1596. Seu pai era advogado, juiz, conselheiro do parlamento da província de Rennes. A mãe de Descartes morreu quando ele tinha apenas um ano.



René Descartes, BOYER(1974).

Ainda criança estudou no colégio jesuíta La Flèche, no qual estudou gramática, poética, retórica, Filosofia e Matemática. Problemas de saúde fizeram com que ele se habituasse deitado em sua cama até tarde, a meditar, costume levado durante toda sua vida.

Em 1618 viajou à Holanda, onde se alistou para combater os espanhóis ao lado das tropas holandesas de Maurício de Nassau, carreira a qual ele renuncia em 1621.

Em novembro de 1619, Descartes tem três sonhos que ele próprio interpreta como uma premunição de seu destino: inventar uma "ciência admirável", na qual estariam unificados todos os conhecimentos humanos. A partir de então, passa a redigir vários esboços e mesmo obras que não chegou a publicar em vida. Algumas se perderam.

Entre 1629 e 1633, Descartes redige o Tratado do Mundo, mas não o publica por receio da Inquisição, que acabara de condenar Galileu. A primeira obra de Descartes teve como título “Essays Philosophiques”. A introdução ficou mais famosa que a própria obra: O discurso do método, onde, na quarta seção, encontra-se sua frase mais famosa - "Penso, logo existo".

No frio da Suécia, Descartes passou a sair da cama cedo (ao contrário do que fez a vida toda), pois ministrava aulas para a Rainha às 5 horas da manhã. Fragilizado pela mudança de hábitos e pelo frio intenso, uma gripe acabou se transformando em pneumonia, doença que causou sua morte em 11 de fevereiro de 1650.

O estudo da quadratura de tais curvas se potencializou com o surgimento da geometria analítica por volta de 1628, não sendo possível precisar o ano de tal invenção, mas podemos ler em vários historiadores que ocorreu próximo a esse período, segundo Boyer (74, p.247) “Se Descartes em 1628 estava ou não em completa posse de sua geometria analítica não é claro, mas a data efetiva da invenção da geometria cartesiana não pode ser muito posterior a isso”. Pode-se ler também em STWERT (2007, p.93)

> En 1628 Descartes se estableció en Holanda, y comenzó su primer libro, Le monde ou Traité de la Lumière, sobre la física de la luz. La publicación fue retrasada cuando Descartes se enterró del arresto domiciliario de Galileo Galilei yy sintió miedo. El libro se publicó, de forma incompleta, duespués de su mueerte, en 1637: Discours de la Méthode.

Assim, a partir desse período a matemática ganhara uma ferramenta para resolução dos problemas de quadratura, abrindo a possibilidade de se criar um algoritmo que pudesse ser usado para o cálculo da quadratura da hipérbole.

Com a geometria analítica se tornou possível representar as hipérboles (curvas que os gregos trataram como secções de um cone duplo) como uma equação quadrática. Percebemos que existe uma característica bem peculiar na hipérbole em relação ao círculo e a elipse. Uma hipérbole é uma curva que segue ao infinito.

A grande sacada da geometria cartesiana foi a possibilidade de revelar a unidade algébrica relacionada com as seções cônicas (curvas que os gregos haviam construído como seções de um cone duplo). Fazendo uso dela se tornou possível identificar por uma relação única o par ordenado que representa um ponto desejado ou até qual equação algébrica representa uma curva.

2.6 PIERRE DE FERMAT

Pierre de Fermat foi um jurista Francês, servidor público nomeado conselheiro do parlamento de Toulouse, nascido em 1601, filho de um rico mercador de peles. Tinha por hobby formular problemas matemáticos dos quais quase nunca apresentava as soluções para desafiar que matemáticos profissionais de sua época os resolvessem. Fermat apesar de não ser matemático de ofício publicou vários trabalhos sobre matemática além de alguns não publicados como em 1629 quando descreveu as suas ideias num trabalho não publicado intitulado *Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos*, que circulou na sociedade francesa apenas na forma de manuscrito e é considerado por alguns historiadores como a invenção da geometria analítica. A tradução da Arithmética feita por Bachet tinha largas margens e uma anotação feita em uma destas margens carregou o nome por bastante tempo de O Último Teorema de Fermat.

Esta anotação foi feita no livro dois da Arithmética, em uma seção onde Diofanto havia feito várias observações sobre o Teorema de Pitágoras e os trios pitagóricos. Fermat escreveu a seguinte anotação na margem desta página:

É impossível para um cubo ser escrito como a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como a soma de dois números elevados a quatro, ou em geral, para qualquer número que seja elevado a uma potência maior que dois ser escrito como a soma de duas potências semelhantes.

O problema pode ser reformulado como “não existem soluções com números inteiros para equação $X^n + Y^n = Z^n$, onde n seja qualquer inteiro maior que dois”. Esta equação diofantina se tornou um problema que com certeza é um dos maiores problemas de matemática de todos os tempos. Tornando-se pesadelo para muitos matemáticos que tentaram resolvê-lo.

Para um olhar mais rigoroso o Último Teorema de Fermat era na verdade apenas uma conjectura já que Fermat apenas sugere em uma nota feita ainda na margem onde fizera a anotação anterior dizendo:

Eu tenho uma demonstração realmente maravilhosa para esta proposição, mas esta margem é muito estreita para contê-la.

Alguns historiadores duvidam se Fermat realmente tinha uma demonstração para tal conjectura e, além disso, é discutível também se, caso Fermat tivesse realmente uma demonstração, estaria esta correta, já que este problema foi solucionado quase quinhentos anos depois?

Fermat estava interessado na quadratura de curvas que correspondem a equação $y = x^n$, na qual tem-se$n$ como inteiro positivo. Ele fez a aproximação para áreas de curvas desse tipo usando uma série de retângulos os quais tem suas bases formando uma progressão geométrica, de forma bastante semelhante ao método da exaustão, porém Fermat não se intimidou a recorrer a uma série infinita.

Modificando ligeiramente seu procedimento, Fermat mostrou que caso usasse um valor menor que zero para o n, considerando os valores de x maiores que zero obtem-se uma curva do tipo $y = \frac{1}{x^n}$, ou seja, obteremos uma hipérbole generalizada, e mesmo assim poderemos fazer sua quadratura.

2.7 NEWTON E LEIBNIZ

Isaac Newton foi um inglês nascido no dia de natal justamente no ano do falecimento do Galileu Galilei (1642). Estudou durante grande parte de sua infância na escola da vizinhança até que um tio por parte de mãe, que havia estudado em Cambridge convenceu sua mãe de matriculá-lo na mesma escola, estudando de acordo com o currículo tradicional, com abordagem muito forte aos idiomas e a religião. Pouco se sabe sobre o que possa o ter motivado para estudar matemática.

Isaac Newton, BOYER(1974).

Por volta de 1664 Newton começou a estudar Matemática. Sua primeira grande descoberta foi a expansão do binômio $(a + b)^n$, que para $n$positivo será uma soma de $n + 1$ termos e para n negativo tem-se uma série infinita. Assim ele usou este Teorema binomial para expressar as equações de várias curvas como séries infinitas na variável x. Ao aplicar a fórmula de Fermat a cada termo de uma dessas séries ele conseguiu fazer a quadratura de várias curvas.

Outro estudo feito por Newton foi sobre a taxa de variação ou fluentes, tais como as grandezas comprimento, volume, tempo, temperatura, etc. Tais estudos foram aprofundados após ter passado um período, por volta de 1666, em casa pelo fato do Trinity College ter sido fechado devido à peste.

Neste estudo sobre taxas de variações Newton abordou as *taxas de mudança* de uma quantidade variável, pois sabemos que grande parte dos fenômenos físicos existentes estão relacionados a quantidades (grandezas) variáveis, aquelas que estão modificando seus valores o tempo todo. Para se referir a estas quantidades variáveis Newton usou o termo *fluente*. E para se referir a taxa de mudança deste fluente Newton usou o termo *fluxão*. Podemos especular que na mente de Newton o mundo se comportava de maneira dinâmica. Tal preocupação o levou a elaborar, mais tarde, uma lei que relaciona o movimento de todo universo (A lei da gravitação).

A ideia de Newton sobre o cálculo se baseava no seguinte: Inicialmente precisava considerar duas grandezas que se relacionavam de acordo com uma equação, tal equação é representada, por uma curva, no plano cartesiano, em seguida ele considerava um ponto genérico, móvel $P(x, y)$ pertencente a curva que representa a equação. À medida que o ponto P se desloca sobre a curva o valor de xe y variam continuamente, e considerando que o tempo "*fluindo*" a uma taxa uniforme (fluente), ele partiu para encontrar as taxas de variações de x e y (a fluxão).

Em seus trabalhos Newton deu vários exemplos de como se aplicar seu "*método das fluxões"*, mostrando inclusive que tal método é extremamente generalizado sendo possível aplicá-lo a quaisquer duas grandezas que se relacionem de acordo com uma equação. Mesmo não pensando que x e y variassem com o tempo, ele considerou uma interpretação totalmente geométrica de suas fluxões, tornando-a independente do tempo. Fazendo aplicações numerosas nas quais calculava inclinações de curvas, seus pontos mais altos e baixos (máximos e mínimos), pontos de inflexão, linhas tangentes. Atualmente chamamos este processo de *derivação* e a fluxão de uma função de *derivada*.

Sabemos que vários matemáticos chegaram a usar resultados semelhantes aos de Newton. Fermat, por exemplo, usou vários casos particulares. O crédito dado a Newton é pelo fato de ter sido ele o inventor de um método capaz de calcular a taxa de mudança de qualquer função. Invertendo o procedimento para se calcular uma fluxão, Newton criou o método de calcular o fluente, atualmente conhecido como processo de *integração indefinida* ou *antidiferenciação.*

Podemos dizer que a invenção do cálculo foi a maior contribuição dada a matemática desde a reunião da estrutura da geometria clássica, feita pelo grande Euclides de Alexandria em seu livro *Elementos.*

O alemão Gottfried Wilhelm Leibniz, nascido no dia primeiro de Julho de 1646, na cidade de Leipzig, foi um filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário que estudou teologia, direito, Filosofia e Matemática na Universidade é considerado, por alguns historiadores, como o último dos sábios a conseguir conhecimento universal.

Gottfried Leibniz, BOYER (1974).

Entre suas várias contribuições para matemática, devemos incluir além do cálculo, trabalhos em análise combinatória, o primeiro sistema de numeração binária e a invenção de uma máquina de calcular capaz de soma e multiplicar.

Por volta do ano de 1675, Leibniz chegou ao seu cálculo diferencial e integral chegando a ter um sistema plenamente funcional por volta do ano de 1677. É fato que a abordagem feita por Leibniz desde sempre fora puramente diferente da feita por Newton, pois Leibniz apoiou suas ideias na filosofia criando assim um modelo muito mais abstrato. A ideia era usar diferenciais (pequenos valores acrescidos aos valores de x e y).

Leibniz usou a notação dy/dx e pensou nela como a proporção entre dois pequenos acréscimos, que hoje em dia chamamos de *quociente diferencial*. Nessa abordagem a ideia de limite se tornou fundamental para definição da inclinação, ou taxa de variação de uma função, porém na época de Leibniz o conceito de limite ainda não havia surgido. Tal fato causou muita confusão e colocou em xeque as bases do cálculo diferencial.

A integração feita por ele também diferia da dada por Newton nos seguintes aspectos. Primeiro na questão da notação, segundo no fato de Newton olhar para diferenciação como o processo inverso da diferenciação, e Leibniz olhar para, por exemplo, um problema de calcular área sob o gráfico de uma função, de tal maneira como uma soma da área de várias faixas estreitas de largura dx e alturas y, variando com x de acordo com a equação $y = f(x)$. Somando as áreas das faixas ele obteria a área sob o gráfico de $f \;\; x \; : A = \quad ydx$.

Leibniz com seu jeito de ser bem mais aberto que Newton enviou uma carta para Newton por intermédio de Henry Oldenburg (ele era o elo de comunicação entre Leibniz e Newton, levando e trazendo suas correspondências), na qual fazia um pedido de mais detalhes sobre o métodos dos fluentes. E Newton respondeu enviando um anagrama (forma de codificar uma mensagem e fazer com que não consigam decifrá-la), que mais tarde serviria como argumento na disputa pela invenção.

Logo após Leibniz envia para Newton um resumo completo de seu cálculo diferencial, esperando talvez que Newton fizesse o mesmo, porém isso só aumentou a desconfiança de Newton do perigo de sua invenção ser roubada. Durante muitos anos a relação entre eles se torna difícil com muitas acusações de um ter copiado as ideias do outro.

Mesmo após a morte de Newton e Leibniz muitas pessoas continuavam entrando nessa discussão, porém o impacto causado por suas publicações causaram impactos diferentes no ambiente acadêmico que atingiram. Na Inglaterra, devido a grandiosa fama de Newton, poucos matemáticos tomaram coragem de estudar o cálculo, entretanto na Alemanha o cálculo de Leibniz ganhou forte apoio da família Bernoulli, que o espalhou por toda Europa chegando a muitos matemáticos dentre os quais Guillaune François Antoine L'Hospital autor do primeiro livro texto sobre o assunto.

3 FUNÇÕES

Neste capítulo aborda-se o conteúdo de funções, buscando esclarecer ideias básicas sobre os conceitos envolvidos em seu ensino, para que se possa fundamentar a base necessária ao estudo do cálculo diferencial, ferramenta matemática utilizada neste trabalho para abordar as maximizações de áreas de figuras geométricas. Inicia-se abordando o conceito de função, que é, sem dúvida, o modelo matemático que mais se aproxima do mundo real, para que possamos, em seguida, tratar de alguns casos específicos.

Em 1939 o grupo Bourbaki, um grupo de matemáticos, em sua grande maioria franceses, que se reuniram por volta de 1935, período no qual lançaram alguns livros que tinham por objetivo fundamentar a teoria dos conjuntos. O grupo Bourbaki tem gabinete na École Normale Supérieure, em Paris. O uso do pseudônimo Nicolas Bourbaki foi a escolha de um personagem inventado. Eles ampliaram o conceito de função, abrangendo relações entre dois conjuntos de elementos, não só de números, como até então o conceito era abordado.

Passou-se a definir uma função como uma terna ordenada (X, Y, f), na qual X eYsão conjuntos e f é um subconjunto de $X \times Y$, tal que se (x, y) pertence a f e (x, y') pertence a f, então $y = y'$. Tomando essa definição de função, o grupo Bourbaki apresenta uma nova visão das Operações matemáticas e constrói um ramo da matemática que se chama Estruturas Algébricas.

O conceito de função é um dos mais genéricos e unificadores de toda a Matemática atual, presente em efetivamente todos os campos, incluindo Aritmética, Álgebra, Geometria, Análise, Combinatória, Probabilidade, etc. Muitas noções importantes, desde as mais simples até as mais sofisticadas, admitem formulações usando a linguagem própria das funções, que contribuem para a clareza da exposição e simplificam o desenvolvimento de conceitos. Grande parte do conteúdo de matemática lecionado no ensino médio e superior está relacionado ao estudo de funções, e são inúmeras as experiências frustradas de alunos que não conseguem assimilar significativamente seus conceitos, seja como objeto de estudo, seja como ferramenta para o estudo de outros conteúdos, sendo talvez um dos grandes responsáveis pelo alto índice de reprovação em disciplinas elementares estudadas no início de suas vidas acadêmicas

Nota-se que o tratamento dado ao conceito de função pelos professores dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, nem sempre surge de problemas sociais que aparecem no decorrer da história para resolver alguma situação caracterizada como obstáculo. É sabido que priorizar uma abordagem que vise o pragmatismo das aulas em que o professor descarrega várias definições, demonstrações e exercícios, sem atribuir alguma aplicação para o conteúdo estudado é uma estratégia perigosa, uma vez que, a "preocupação excessiva com apresentações formais é uma falha grave no ensino, pois atrapalha o desenvolvimento do aluno já que obscurece o que há de mais importante na Matemática: as idéias. Exemplo típico desse erro é o esforço que se faz no 2° grau para apresentar o conceito de função como um caso particular de relação" (Ávila, 1985). Todavia, essa é uma realidade extremamente comum nas salas de aula, transmitir conteúdos desconectados do contexto social, da realidade do aluno ou que tenha uma aplicação prática, nem que seja uma aplicação dentro da própria matemática.

Um caminho sugerido por Brasil (2006), diz respeito a uma organização curricular ocorrendo com "integração e articulação dos conhecimentos em processo permanente de interdisciplinaridade e contextualização". Desta forma, é indiscutível que torna-se mais fácil para os alunos compreender o conteúdo quando ele é capaz de relacioná-lo com alguma outra situação.

3.1 O CONCEITO DE FUNÇÃO

O termo função é de autoria de Leibniz, e muitos matemáticos contribuíram para que chegássemos ao seu conceito atual. Ao grande Matemático Suíço Leonard Euler, deve-se a notação na qual $f(x)$ lê-se (f de x). Segundo Dante (2014), o alemão Dirichlet escreveu uma definição de função semelhante a que tem-se dada pelo grupo Bourbaki: "Uma variável y se diz em função de uma variável x se, para todo valor atribuído a x, corresponde, por alguma lei ou regra, um único valor de y. Nesse caso, $x$denomina-se variável **independente** e y, variável **dependente**". De fato, tal definição se aproxima bastante da definição dada há décadas mais tarde pelo grupo Bourbaki, apud Dante, 2014, p.41: "Dados dois conjuntos X e Y, uma função $f: X \longrightarrow Y$ (lê-se: uma função de X em Y) é uma regra que determina como associar a cada elemento $x \in X$ um único $y = f(x) \in Y$ ". Deixando claro a terna, $(X, Y, f(x))$, na qual X e Y são conjuntos e $f(x)$ a lei que relaciona os elementos.

O texto das Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (OCNEM) sugere que o estudo de funções seja iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações. Levando o aluno a perceber o conceito envolvido, e não a decorar definições ou regras e equações para as quais conseguirá atribuir pouco ou quase nenhum significado. Baseado nessas orientações Paiva 2009, p.83, inicia o capítulo que trata do conceito de função da seguinte maneira:

> Toda característica que pode ser expressa por uma medida é chamada de **grandeza**. São exemplos de grandeza: comprimento, área, volume, velocidade, pressão, temperatura, profundidade, tempo, massa e vazão. A variação da medida de uma grandeza associada a um objeto depende da variação das medidas de outras grandezas, por exemplo: o crescimento de uma planta depende do tempo; a taxa de evaporação das águas de um rio depende da temperatura. Para estudar essas dependências podemos recorrer a equações matemáticas que relacionam as grandezas envolvidas.

Fazendo assim, uma abordagem que tenha um significado relacionado com o mundo real e que seja de fácil compreensão por parte dos alunos, de acordo com a sugestão da (OCNEM). Aqui a abordagem ao estudo das funções será feita como em THOMAS (2009), “Uma função de um conjunto D em um conjunto Y é uma regra que associa a um *único* elemento $f(x) \in Y$ a cada elemento $x \in D$”, pelo fato de tal definição, ser exposta de maneira precisa e concisa, porém várias outras literaturas podem ser pesquisadas sobre tal tema, como por exemplo, DANTE (2014), PAIVA (2009), STWERT (2007).

Diz-se nesse caso que D é o domínio da função f, Y é o contradomínio de f e que $f(x) = y$, com y pertencente a um subconjunto de Y, conjunto que é chamado de conjunto imagem (Im) de f, será a lei de formação da função f. Em alguns casos, é possível ter alguma restrição no domínio dependendo do contexto em que é apresentada a função. Por exemplo, considerando a função $A(l) = l^2$, que fornece a área de um quadrado em função de seu lado, tem-se que o valor de l, está restrito ao conjunto dos números reais positivos, pois a medida do lado de um quadrado não assume valores negativos nem nulo.

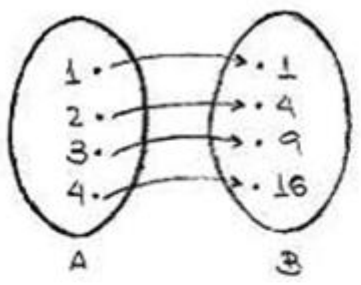
3.2 REPRESENTAÇÕES DE UMA FUNÇÃO

Pode-se representar uma função através de uma equação que explicite sua lei de formação, diagramas relacionados por setas, tabelas, gráficos ou até um conjunto de pares ordenados. Nesta seção discute-se alguns tipos de representações elencando-se cada um dos casos a seguir.

3.3 REPRESENTAÇÃO POR DIAGRAMAS

Uma função utilizando diagramas de dois conjuntos A e B, relaciona os elementos de A e B por setas ligando-os, de modo que A seja o domínio, B o contradomínio e $f$seja a relação entre oso conjuntos A e B. Por exemplo:

Sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1,4,9, 16\}$, a função $f: A \longrightarrow B$, será representada por:



$f: A \longrightarrow B$, O autor 2016.

Pode-se perceber que $Im = \;1,4,9,16\;$, pois $\;1,4,9,16\;$ são os elementos do contradomínio que recebem a relação f.

3.4 REPRESENTAÇÃO POR UMA TABELA

É possível escrever os valores que das variáveis dependente e independente em uma tabela, na qual existe uma correspondência entre as duas grandezas descritas em cada uma das colunas, como segue:

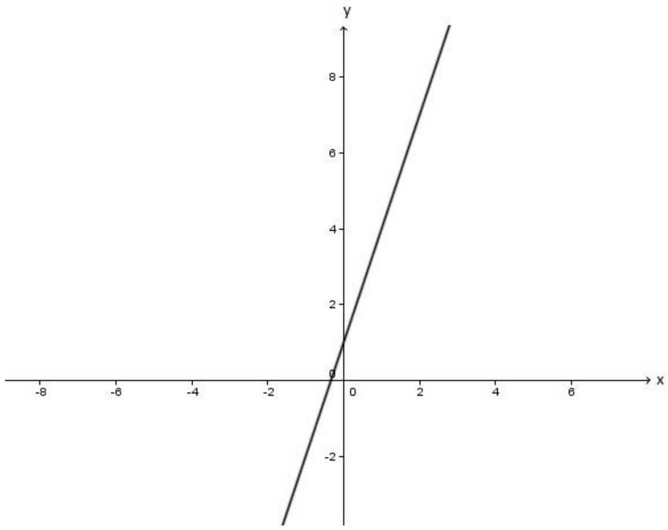
x	$f\;\;x$
-1	-20
0	-12
1	-2

Neste tipo de representação não se tem clareza, se o domínio é um conjunto que possui medidas discretas ou continuas, ou mesmo que conjunto é o contradomínio. Porém representar uma função por uma tabela muitas vezes ajuda a identificar qual a lei de formação que relaciona os elementos do domínio com os elementos do contradomínio.

3.5 REPRESENTAÇÃO POR UM GRÁFICO

Neste tipo de representação cada ponto pertencente à função será representado por um par ordenado no qual $(x, y) \; = \; (x, f(x))$. Assim o gráfico de uma função f será o lugar geométrico de todos os pontos $\;x, f\;\;x\;\;$.

Por exemplo: Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\;f\;\;x\;\; = 3x + 1$. Sua representação gráfica será:



Representação gráfica da função $f(x) = 3x + 1, o\ autor\ 2016$.

Um fato importante é que o domínio está representado no eixo x e o contradomínio no eixo y. Também podemos ter uma preocupação conveniente na hora de desenhar o gráfico que representa uma função. Esta preocupação seria qual o traçado formado entre os pares ordenados, e a resposta será obtida posteriormente pela operação de diferenciação. Por enquanto, é suficiente dizer que, caso o domínio da função seja um conjunto continuo, ligam-se os pontos encontrados da forma mais conveniente possível.

Observa-se que, dada uma curva qualquer no plano xy, ela nem sempre representa o gráfico de uma função. Pois, se f *é* uma função, um ponto de seu domínio só poderá ter uma imagem, ou seja, só poderá estar relacionado com um elemento do contradomínio pela função f. Assim a curva representa o gráfico de uma função se ao traçarmos uma reta qualquer, vertical ela corta a curva exatamente em um ponto, caso o domínio da função não esteja definido neste ponto a tal reta pode não cortar a curva.

3.6 FUNÇÕES DEFINIDAS POR MAIS DE UMA SENTENÇA

Algumas funções são definidas por mais de uma lei de formação, pois estão definidas para partes diferentes de seu domínio. Tem-se como exemplo de uma função definida por duas sentenças a função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x < 1 \\ x + 2, & se\ x \geq 1 \end{cases}$. A representação gráfica desta função não é uma curva contínua, sua representação dá um "salto" no ponto $x = 1$, do valor $f(x) = 1$, que teríamos caso usássemos a equação $f(x) = x^2$, para o valor $f(x) = 3$, quando usamos a equação $f(x) = x + 2$, tendo como $Im_f = (-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$.

3.7 OPERAÇÕES COM FUNÇÕES

Definição 1. Sejam fe g funções e k um número real. As operações de adição $(f + g)$, subtração $(f - g)$, multiplicação $(f \cdot g)$ e divisão $\left(\frac{f}{g}\right)$ são definidas por:

i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;

ii) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$;

iii) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;

iv) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(X)}$;

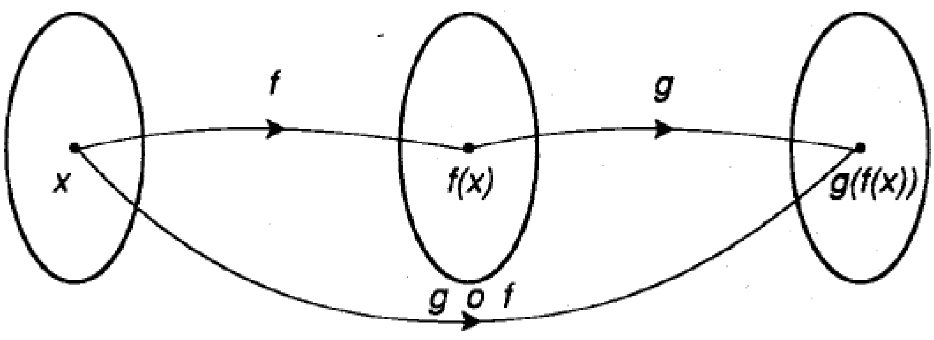
v) $(k f)(x) = kf(x)$.

Definidas assim, estabelece-se que o domínio das funções $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$ e $(f \cdot g)(x)$ será a interseção entre os domínios de f e g. O domínio da função $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ será a interseção dos domínios de f e g, com exceção dos pontos em que$g(x)$ se anula e o domínio de $kf(x)$ é igual ao domínio de $f(x)$.

3.8 COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Definição 2. Dada duas funções f e g, a função composta de $f$com g, será a função $f(g(x))$ que denota-se por $f \circ g(x)$.

O domínio de $f \circ g(x)$ é o conjunto de todos os pontos $x$do domínio de f tais que a imagem deles está no domínio de g.



Representação por diagrama da composição da função $f$pela função g

Exemplo 1: Encontrar a função $f \circ g(x)$, dadas as funções $f(x) = 3x^2 - 1$ e $g(x) = x - 1$.

Solução.

$f \circ g(x) = f(g(x))$, logo $f \circ g(x) = 3(x - 1)^2 - 1 = 3x^2 + 3 - 6x - 1 = 3x^2 - 6x - 1$.

3.9 FUNÇÕES INVERSAS

Definição 3. Diz-se que uma função, f é inversa de uma função, g, se $f \circ g(x) = g \circ f(x) = x$. Ou seja, a função f ser inversa da função g, implica que a composição de f com g ou de g com f, será igual a função identidade. Denota-se a função inversa de uma função f, por f^{-1}.

Exemplo 2: Achar a função inversa de $f(x) = x + 12$.

Solução. Seja $g(x) = x - 12$, tem-s que $f \circ g(x) = f(g(x)) = (x - 12) + 12 = x$ e ainda que $g \circ f(x) = g(f(x)) = (x + 12) - 12 = x$, portanto as funções $f(x)$ e $g(x)$ são inversas uma da outra, isto é, $g = f^{-1}$.

4 TIPOS DE FUNÇÃO

Neste capítulo faz-se um estudo sobre alguns tipos de funções, suas representações, algumas peculiaridades, para que seja possível tratar da derivada de algumas delas mais tarde.

4.1 FUNÇÃO CONSTANTE

Função constante é toda função definida de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa cada número real x a um único valor real k. Em linguagem matemática:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};$$

$$f(x) = k, \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

A representação gráfica deste tipo de função é sempre uma linha reta paralela ao eixo das abscissas, e f tem $\mathbb{R}$ como seu domínio e o conjunto unitário $Im = \{k\}$ como seu conjunto imagem.

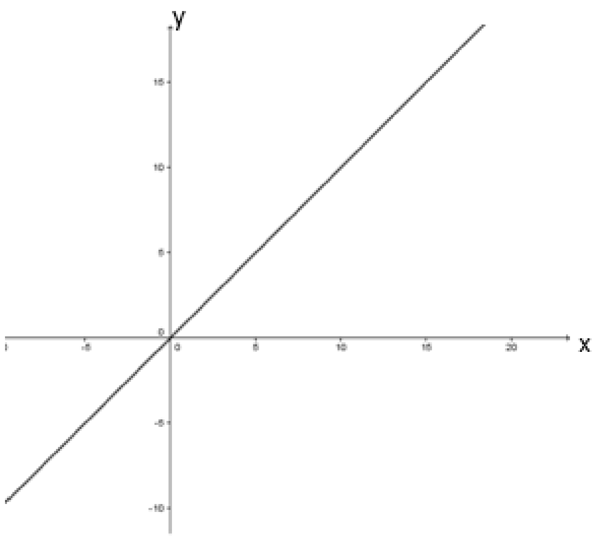
4.2 FUNÇÃO LINEAR

Função linear é toda função definida de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa cada número real x a único valor real x. Em linguagem matemática:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};$$

$$f(x) = x.$$

A representação gráfica deste tipo de função é sempre a bissetriz do primeiro e do terceiro quadrantes, f tem $\mathbb{R}$ como seu domínio e $\mathbb{R}$ como seu conjunto imagem.



Representação gráfica da função $f(x) = x, o\ autor$ 2016.

Observação 1. A este tipo de função chama-se função identidade.

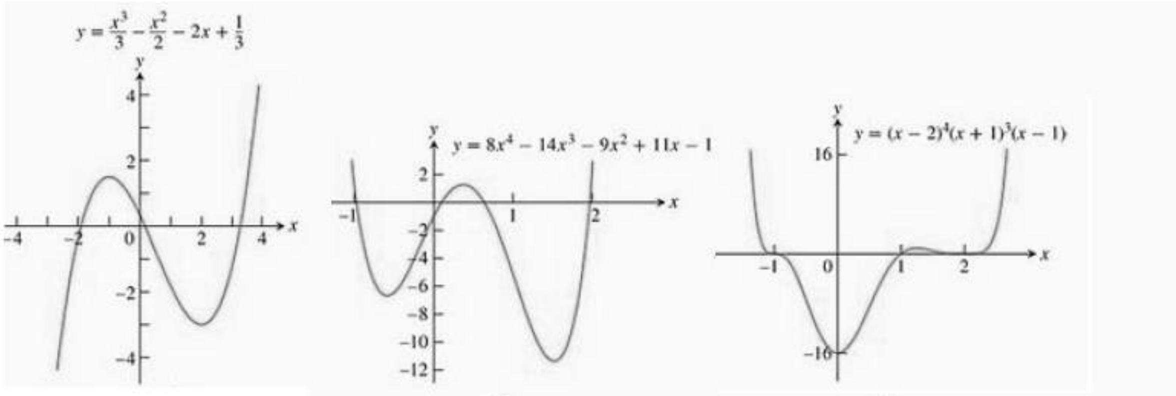
4.3 FUNÇÕES POLINOMIAIS

Função polinomial é toda função definida de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa cada número real x a um único valor real $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$, em que $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_o$ são números reais, chamados de coeficientes do polinômio. Em linguagem matemática tem-se:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};$$

$$f \;\; x \;\; = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

A representação gráfica deste tipo de função serão curvas contínuas como na figura abaixo,



Representação gráfica de algumas funções polinomiais, Thomas 2009.

Neste caso f terá $\mathbb{R}$como seu domínio e $\mathbb{R}$ como seu conjunto imagem.

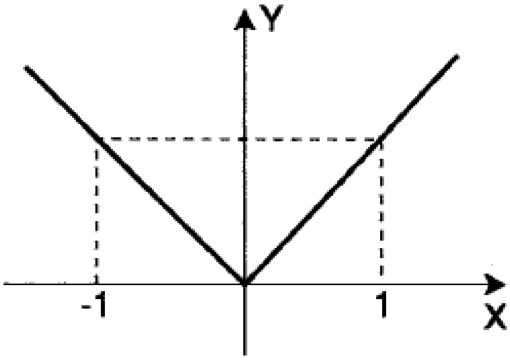
4.4 FUNÇÕES MODULARES

Função modular é toda função definida de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa cada número real x a único valor real $|x|$. Em linguagem matemática:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \;\; x \;\; = \;\; x$$

A representação gráfica da função modular é uma linha poligonal situada apenas no primeiro e no segundo quadrante do plano cartesiano, pois x não assume valores negativos independente do valor de x.



Representação gráfica da função $f(x) = |x|$.

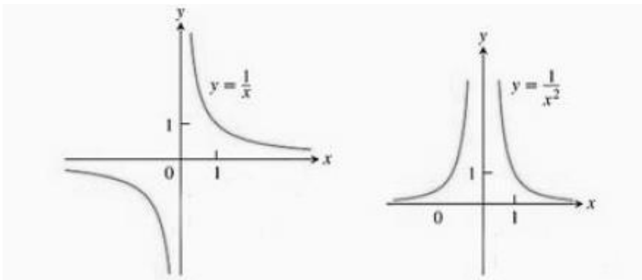
4.5 FUNÇÃO RACIONAL

Função racional é toda função definida de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa cada número real x a um único valor real $\frac{p(x)}{q(x)}$, no qual $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(x) \neq 0$. Em linguagem matemática:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Pode-se notar que a função $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, não está definida para valores de x que anulam $q(x)$, ou seja, $f$não está definida para os valores de x, que são raízes de$q(x)$. A representação gráfica da função racional é uma curva que se chama de hipérbole.



Representação gráfica das funções $f(x) = \frac{1}{x}$ e $f(x) = \frac{1}{x^2}$, Thomas 2009.

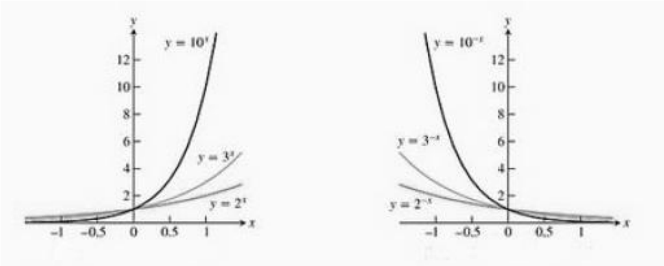
4.6 FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Função exponencial é toda função definida de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa cada número real x a um único valor real a^x, na qual $a > 0$ é uma constante diferente de 1. Em linguagem matemática:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = a^x$$

Toda a função exponencial tem domínio igual a$(-\infty, +\infty)$, e imagem igual a $(0, +\infty)$. Consequentemente, uma função exponencial não se anula.



Representação gráfica das funções $f\ \ x\ \ = 10^x$, $g\ \ x\ \ = 3^x$, $h\ \ x\ \ = 2^x$, $i\ \ x\ \ = 10^{-x}$, $j\ \ x\ \ = 3^{-x}$, $k\ \ x\ \ = 2^{-x}$, Thomas 2009.

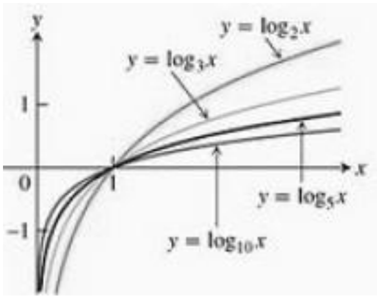
4.7 FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Função logarítmica é toda função definida de $(0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa cada $x \in (0, +\infty)$, a único valor real $log_a x$, na qual $a > 0$ é uma constante diferente de 1. Em linguagem matemática:

$$f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f\ \ x\ \ = log_a x$$

A função logarítmica será a função inversa da função exponencial.



Representação gráfica das funções $f\ \ x\ \ = log_2 x$, $f\ \ x\ \ = log_3 x$, $f\ \ x\ \ = log_{10} x$, $f\ \ x\ \ = log_5 x$, Thomas 2009.

4.8 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Nesta seção trataremos de duas das funções trigonométricas, as funções seno e cosseno.

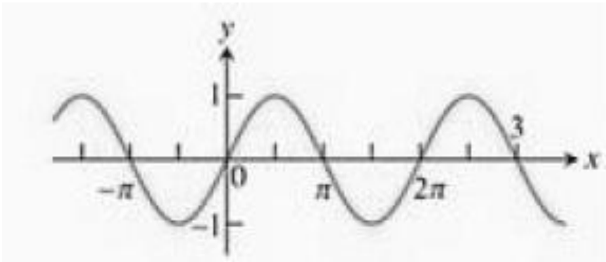
4.8.1 FUNÇÃO SENO

Função seno é a função definida de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa cada número real x,a único valor real $sen\ \ x$. Em linguagem matemática tem-se:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f\ \ x\ \ = sen(x)$$

O conjunto imagem da função seno é o intervalo fechado $[-1, 1]$, e a função seno é periódica com período igual a 2π, já que tem-se$sen\ \ x + 2k\pi\ \ = sen\ \ x\ \ , \forall k \in \mathbb{Z}$.



Representação gráfica da função $f(x) = sen(x)$, Thomas 2009.

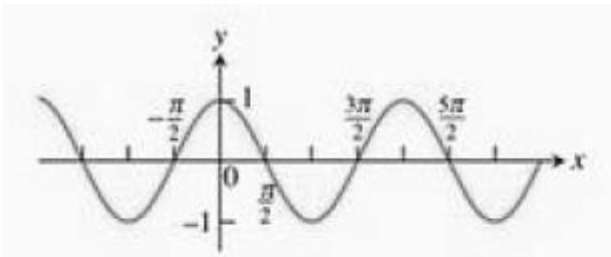
4.8.2 FUNÇÃO COSSENO

Função cosseno é a função definida de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa cada número real x, a único valor real $cos(x)$. Em linguagem matemática:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f\ \ x\ \ = cos(x)$$

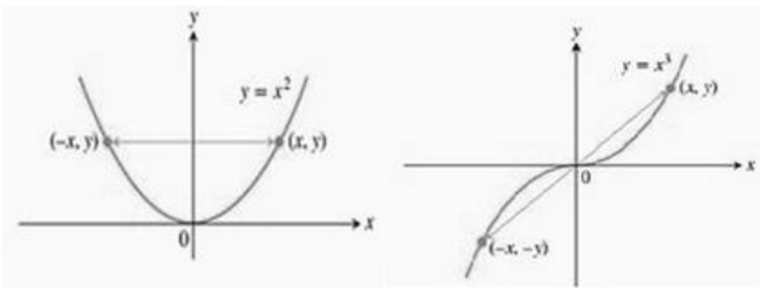
O conjunto imagem da função cosseno é o intervalo fechado $[-1, 1]$, e a função cosseno é periódica com período igual a 2π, já que tem-se $cos\ \ x + 2k\pi\ \ = cos\ \ x\ \ , \forall k \in \mathbb{Z}$.



Representação gráfica da função $f(x) = cos(x)$, Thomas 2009.

4.9 PARIDADE DE FUNÇÕES

Definição 4. Diz-se que f é uma função par se $f\ \ x\ \ = f\ \ -x\ \ , \forall x \in D$. Caso tenhamos $f\ \ x\ \ = -f\ \ x\ \ , \forall x \in D$, diremos que f é uma função ímpar.



Representações gráficas de uma função par e uma função ímpar respectivamente, Thomas 20009.

5 LIMITES

A partir deste capítulo surgem conteúdos matemáticos tratados no ensino superior, porém foi feita uma abordagem simples, buscando o máximo de clareza possível. O leitor mais interessado pode ler mais sobre o tema em Thomas (2009) ou Stwert (2007).

A ideia de limite está relacionada, a ideia de aproximação do valor da imagem de uma função a medida que o valor da variável independente se aproxima de um número, como exemplo, na função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f\ \ x\ \ = \begin{matrix} x+2, \ se\ x \neq 2 \\ 2,\ se\ x\ = 2 \end{matrix}$, tem-se que os valores de $f\ \ x$ se aproximam de 4 a medida que x se aproxima de 2, porém $f\ \ 2\ \ = 2$. Observando a tabela:

x	$f\ \ x$
0	2
1	3
1,5	3,5
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
1,9999	3,9999
1,99999	3,99999
2	2
2,1	4,1
2,01	4,01
2,001	4,001
2,0001	4,0001
2,00001	4,00001

Diz-se assim que $\lim_{x\to 2} f(X) = 4$.

Definição 5. Seja $f(x)$ definida num intervalo aberto I, contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Diz-se que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é L, e escreve-se:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $\ f\ \ x\ \ - L\ \ < \varepsilon$, sempre que $0 < \ \ x - a\ \ < \delta$.

Exemplo. Provar que $\lim_{x\to 3}(5x-2) = 13$.

Nota-se que de acordo com a definição de limite, devemos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $\ (5x-2) - 13\ \ < \varepsilon$ sempre que $0 < \ \ x - 3\ \ < \delta$.

Na desigualdade envolvendoε, pode-se ter a ideia da escolha do δ, nota-se que:

$$5x - 2\ \ - 13\ \ < \varepsilon \Rightarrow\ 5x - 2 - 13\ \ < \varepsilon \Rightarrow\ 5x - 15\ \ < \varepsilon \Rightarrow\ 5\ \ x - 3\ \ \ < \varepsilon \Rightarrow$$

$$5\ (x-3)\ < \varepsilon \Rightarrow\ (x-3)\ < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Ou seja, pode-se escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, desta maneira teremos $\ 5x-2\ -13\ < \varepsilon$ sempre que $0 <\ x-3\ < \delta.$

Proposição1. Se a, m e n são números reais, então. $\text{Lim}_{x\to a}\ mx+n\ =\ ma+n\ .$

Demonstração. Considerando inicialmente $m \neq 0$, De acordo com a definição de limite, tem-se que para $\varepsilon > 0$, devemos mostrar que existe $\delta > 0$, tal que $\ mx+n\ -(ma+n)\ < \varepsilon$ sempre que $0 <\ x-a\ < \delta\ $. Usando a desigualdade envolvendo ε para escolher o valor de δ, tem-se:

$$mx-n\ -\ ma+n\ \ < \varepsilon \Rightarrow\ mx+n-ma-n\ < \varepsilon \Rightarrow\ m\ x-a\ \ < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|m| \cdot\ (x-a)\ < \varepsilon \Rightarrow\ (x-a)\ < \frac{\varepsilon}{|m|}$$

De fato, se $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$, segue que:

$$mx-n\ -\ ma+n\ \ =\ m\ \cdot\ \ x-a\ \ <\ m\ \cdot \frac{\varepsilon}{m}.$$

Sempre que, $0 <\ x-a\ < \delta$. Logo $\text{Lim}_{x\to a}\ mx+n\ =\ ma+n\ .$

Por outro lado, é necessário considerar o caso $m = 0$. Nesse caso

$$mx-n\ -\ ma+n\ \ = 0$$

Consequentemente, para qualquer $\varepsilon > 0$ escolhido a definição de limite é satisfeita. Tal fato acarreta duas conseqüências:$\lim_{x\to a} k = k, \forall k \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to a} x = a.$

Proposição 2. Sejam $f = f(x), g = g(x)$ e $k, m \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes afirmações:

i) $\lim_{x\to a}(f \pm g) = \lim_{x\to a}(f) \pm \lim_{x\to a}(g)$;

ii) $\lim_{x\to a}[k \cdot (f)] = k \cdot \lim_{x\to a}(f)$;

iii) $\lim_{x\to a}(f \cdot g) = \lim_{x\to a}(f) \cdot \lim_{x\to a}(g)$;

iv) $\lim_{x\to a}\ \frac{f}{g}\ = \frac{\lim_{x\to a}(f)}{\lim_{x\to a}(g)}$;

v) $\lim_{x\to a}(f^m) = [\lim_{x\to a}\ f\ ]^m$;

vi) $\lim_{x\to a} \sqrt[m]{f} = \sqrt[m]{(\lim_{x\to a}\ f\ )}$, com $f > 0$ e $m \in \mathbb{Z}$, ou $f \leq 0$ e n inteiro positivo ímpar;

vii) $\lim_{x\to a}\ \log_a f\ = \log_a\ \lim_{x\to a}(f)\ $;

viii) $\lim_{x\to a}[sen\ f\ ] = sen\ \lim_{x\to a}(f)\ $;

ix) $\lim_{x\to a}[\cos(f)] = cos\ \lim_{x\to a}(f)\ .$

Demonstração [do item *i*].

Sejam, $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$ e $\varepsilon > 0$ escolhido arbitrariamente. Quer-se provar que existe $\delta > 0$, tal que $[f\ x\ + g(x)] - (L + M)\ < \varepsilon$ sempre que $0 <\ x - a\ < \delta$. Nota-se que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, portanto existe $\delta_1 > 0$, tal que $[f\ x\ - L\ < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $0 <\ x - a\ < \delta_1$. Da mesma forma $\lim_{x\to a} g(x) = M$, logo existe $\delta_2 > 0$, tal que $[g\ x\ - M\ < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $0 <\ x - a\ < \delta_2$. Considerando δ como o menor valor entre δ_1 e δ_2, segue que $\delta \leq \delta_1$e $\delta \leq \delta_2$, daí, se $0 <\ x - a\ < \delta$, então $[f\ x\ - L\ < \frac{\varepsilon}{2}$ e $[g\ x\ - M\ < \frac{\varepsilon}{2}$, portanto:

$$[f\ x\ + g(x)] - (L + M)\ =\ f\ x\ - L\ +\ g\ x\ - M\ \leq\ f\ x\ - L\ +\ g\ x\ - M\ < \varepsilon$$

Sempre que $0 <\ x - a\ < \delta$, conclui-se que:

$$\lim_{x\to a}\ f\ x\ + g\ x\ = \lim_{x\to a} f\ x\ + \lim_{x\to a} g\ x\ .$$

5.1 TEOREMA DO CONFRONTO

Uma ferramenta extremamente eficaz para que se possa calcular alguns limites notáveis é chamada de Teorema do confronto ou Teorema do Sanduíche.

Teorema 1. *(Teorema do confronto).*

Suponha que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para qualquer x em um intervalo aberto contendo c, exceto, possivelmente, em $x = c$. Suponha também que, se

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L, \text{ então, } \lim_{x\to c} g(x) = L.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ escolhido arbitrariamente. Como $\lim_{x\to c} f\ x\ = L$, existe $\delta_1 > 0$, tal que $[f\ x\ - L\ < E$, sempre que $0 <\ x - a\ < \delta_1$. Como $\lim_{x\to c} h\ x\ = L$, existe $\delta_2 > 0$, tal que $[h\ x\ - L\ < E$, sempre que $0 <\ x - a\ < \delta_2$. Considerando δ como o menor valor entre δ_1 e δ_2, segue que $\delta \leq \delta_1$e $\delta \leq \delta_2$, logo se $0 <\ x - a\ < \delta$, então $[f\ x\ - L\ < E$ e $[h\ x\ - L\ < E$, de forma equivalente tem-se $L - \mathcal{E} < f\ x\ < L + \mathcal{E}$ e $L - \mathcal{E} < h\ x\ < L + \mathcal{E}$, ou seja, $L - \mathcal{E} < f\ x\ < h\ x\ < L + \mathcal{E}$, mas dessa forma tem-se $L - \mathcal{E} < f\ x\ < g\ x\ < h\ x\ < L + \mathcal{E}$. Daí:

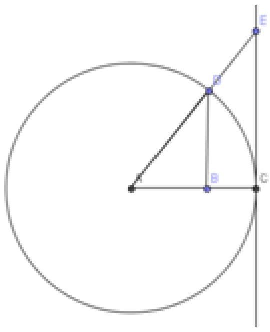
$L - \mathcal{E} < g\ x\ < L + \mathcal{E}$, logo se $0 <\ x - a\ < \delta$, tem-se $[g\ x\ - L\ < E$, isto é, $\lim_{x\to c} g(x) = L$.

5.2 LIMITE TRIGONOMÉTRICO NOTÁVEL

O limite $\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}$ é chamado de limite trigonométrico notável e tal limite é igual a 1. Podemos provar tal afirmação utilizando o Teorema do confronto.

Proposição 3. $\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x} = 1.$

Demonstração. Sem perda de generalidade, pode-se limitar a considerar $x \in\ 0, \frac{\pi}{2}$ Considerando um círculo de centro A de raio unitário, sendo tangenciado pela reta EC, com o ponto B sendo a projeção do ponto D sobre o raio r como na figura abaixo.



Reta tangente, o autor 2016.

Seja x o ângulo $A\hat{E}C$, ou seja, $x = DC$. Sejam ainda R a área do triângulo AEC, T a área do triangulo ACD e S a área do setor circular ACD. Nota-se que $R > S > T$. Isto é, $\frac{AC \cdot CE}{2} > \frac{AC \cdot DC}{2} > \frac{AC \cdot BD}{2} \Rightarrow CE > DC > BD \Rightarrow tg(x) > x > sen(x)$. Dividindo todos os membros da desigualdade por $sen(x)$, já que sabe-se que $x > 0$. Assim:

$$1 > \frac{x}{sen(x)} > \frac{1}{cos(x)} \Rightarrow 1 < \frac{x}{sen(x)} < \cos\ x\ .$$

Passando limite com x tendendo a zero em todos os lados da desigualdade tem-se:

$1 < \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x}{sen(x)} < 1$, já que $\lim_{x\longrightarrow 0}\cos\ x\ = 1$. Logo pelo Teorema do confronto segue que

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x}{sen(x)} = 1.$$

5.3 LIMITES LATERAIS

Nesta seção se fará um estudo sobre a ideia de que um limite L, com x tendendo a c, de uma função f só existirá quando a função estiver definida em valores próximos de c tanto pela esquerda quanto pela direita. Por exemplo, a função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f\ x\ = 3x + 1$, posssui limite 7, quando $x \longrightarrow 2$, já que quando x se aproxima de 2 tanto pela esquerda (valores menores que 2) quanto pela direita (valores maiores que 2) o valor do limite é 7. Podemos usar $\lim_{x\to 0} x \ \cdot x$, como um exemplo de um limite que não existe, já que quando x se aproxima de zero pela direita o valor do limite é positivo e quando x se aproxima de zero pela esquerda o valor do limite é negativo.

Teorema 2. Sef é definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a, então $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se, e somente se $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$.

Demonstração. Pela definição de limite é imediato que $\lim_{x\to a} f \ x \ = L$ implica em $\lim_{x\to a^+} f \ x \ = L$ e também $\lim_{x\to a^-} f \ x \ = L$. Reciprocamente pode-se supor que $\lim_{x\to a^+} f \ x \ = L$ e $\lim_{x\to a^-} f \ x \ = L$. Tomando um $\varepsilon > 0$escolhido arbitrariamente sabe-se que existe $\delta_1 > 0$, tal que $[f \ x \ - L \ < E$, sempre que $a < x < a + \delta_1$ e existe $\delta_2 > 0$, tal que $[f \ x \ - L \ < E$, sempre que $a - \delta_2 < x < a$. Tomando δ como o menor valor entre δ_1e δ_2, conclui-se assim que $a - \delta_2 \leq a - \delta$ e $a + \delta \leq a + \delta_1$. Assim $x \neq a$ e $a - \delta < x < a + \delta$ implica que $f \ x \ - L \ < \varepsilon$, ou seja, $f \ x \ - L \ < \varepsilon$ sempre que $0 < \ x - a \ < \delta$, daí $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

5.4 LIMITES NO INFINITO

Definição 6. Diz-se que $f \ x$ possui limite L quando x tende ao infinito e escreve-se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L,$ se para cada número $\varepsilon > 0$ existir um número M correspondente tal que, para todos valores de x, tiver-se que $x > M$ implicando em $f \ x \ - L \ < \varepsilon$.

Definição 7. Diz-se que $f \ x$ possui limite L quando x tende ao infinito e escreve-se $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L,$ se pra cada número $\varepsilon > 0$ existir um número N correspondente tal que, para todos valores de x, tiver-se que $x < N$ implicando em $f \ x \ - L \ < \varepsilon$.

5.5 CONTINUIDADE

Pela definição de limite pôde-se ver que o $\lim_{x\to a} f(x)$ pode existir mesmo quando a função f não estiver definida em a. Nos casos em que f esteja definida em a e $\lim_{x\to a} f(x) = f \ a$, diz-se que f será contínua em a.

Definição 8. Diz-se que a função f será contínua em um ponto a se:

i) f é definida no ponto a;

ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe;

iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Exemplo 3. A função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ é contínua no ponto $x = 3$, pois f é definida em $x = 3$, $\lim_{x\to 3} 3x + 1 = 10$, ou seja existe $\lim_{x\to 3} f(x)$, e $f(3) = 10$.

Um fato importante é que quando uma função é contínua em todos os pontos de um intervalo, diremos que esta função é contínua neste intervalo, ou seja, uma função contínua será a função contínua em cada ponto pertencente ao seu domínio. Portanto para ser contínua uma função não precisa ser contínua em qualquer intervalo é suficiente que seja contínua em seu domínio.

6 A DERIVADA

A operação de derivação ou diferenciação é uma operação caracterizada como taxa de variação, neste capítulo faremos uma abordagem ao estudo das derivadas. Define-se o coeficiente angular de uma curva como o limite dos coeficientes angulares das secantes. Isto é, o coeficiente angular de uma curva é:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+h)-f(x)}{h}$$

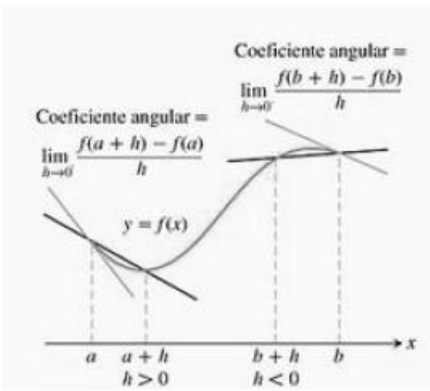
Definição 8. A derivada de uma função $f(x)$ em relação a variável x é a função f' cujo valor em x, quando tal limite existir, é:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h+h)-f(x)}{h}$$

Considerando que $f(h+h)-f(x)$ é o incremento Δy no valor da função, que corresponde ao incremento $h=\Delta x,$ no valor da variável independente, pode-se escrever:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Geometricamente percebe-se que a derivada de uma função f em um ponto c, pertencente ao domínio de f será a inclinação da reta tangente à curva que representa a função f, no ponto c.



Interpretação geométrica da derivada de uma função f, Thomas 2009.

Exemplo 4. Calcular a derivada da função $f(x)=\sqrt[3]{x}$, no ponto $x=3$.

Solução. Usando a definição de derivada, tem-se:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{(x+h)}-\sqrt[3]{x}}{h}$$

Multiplicando a expressão por $\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2+\sqrt[3]{x+h}\cdot\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2$, segue:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{(x+h)} - \sqrt[3]{x}\right) \cdot \left(\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2 + \sqrt[3]{x+h} \cdot \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2\right)}{h \cdot \left(\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2 + \sqrt[3]{x+h} \cdot \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2\right)}$$

Ou seja,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h \cdot \left(\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2 + \sqrt[3]{x+h} \cdot \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2\right)} =$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h \cdot \left(\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2 + \sqrt[3]{x+h} \cdot \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2\right)} =$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2 + \sqrt[3]{x+h} \cdot \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2} =$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \left(\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x}\right) + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Daí,

$$f'(3) = \frac{1}{3\sqrt[3]{3^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{9}}.$$

6.1 DIFERENCIABILIDADE E CONTINUIDADE

Uma função f terá derivada em um ponto P, quando os coeficientes angulares das retas secantes que passam pelos pontos P e Q extremamente próximos no gráfico, à medida que tais secantes tenham um limite. Portanto, caso as posições secantes das retas que passam por P e Q não tenham uma posição limite ou caso essa posição seja vertical, f não será derivável no ponto P.

Teorema 3. Seja f uma função bem definida. Se f é diferenciável no ponto c, então f é contínua em c.

Demonstração. O fato de f ser diferenciável no ponto c, implica que $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, e que $\lim_{x \to a} f(x) = f(c)$. Percebe-se, que quando $x \to c$, $x - c \to 0$. Chamando $x - c$ de h, tem-se que $x = c + h$, logo precisa-se mostrar que:

$$\lim_{h \to 0} f(c + h) = f(c)$$

Como $h \neq 0$, podemos escrever

$$f(c+h)=f(c+h)+f(c)-f(c)\Rightarrow$$

$$f(c+h)=f(c)+f(c+h)-f(c)\Rightarrow$$

$$f(c+h)=f(c)+\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\cdot h\Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}f(c+h)=\lim_{h\to 0}f(c)+\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\right)\cdot\lim_{h\to 0}h\Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}f(c+h)=f(c)+f'(c)\cdot o\Rightarrow\lim_{h\to 0}f(c+h)=f(c).$$

Proposição 3.

i) Seja f uma função bem definida, $f(x)=c$, então $f'(x)=0$;

ii) Seja f uma função bem definida, $f(x)=x^n$, então $f'(x)=nx^{n-1}$;

iii) Sejam f e g funções deriváveis em x e c uma constante com $g(x)=c\cdot f(x)$, então $g'(x)=cf'(x)$;

iv) Sejam f, g e h funções bem definidas, tais que com $h(x)=f(x)+g(x)$, então $g'(x)=f'(x)+g'(x)$;

v) Sejam f, g e h funções bem definidas, tais que com $h(x)=f(x)\cdot g(x)$, então $g'(x)=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$;

vi) Sejam f, g e u funções bem definidas, tais que com $f(x)=\frac{g(x)}{u(x)}$, então $f'(x)=\frac{g'(x)\cdot u(x)-u'(x)\cdot g(x)}{u^2(x)}$

Demonstração.

i) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0.$

ii) Para demonstrar tal propriedade usaremos a seguinte identidade:

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+a^{n-3}\cdot b^2+\cdots+a^2\cdot b^{n-3}+a^1\cdot b^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n\right)-x^n}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^1+\cdots+h^{n-1}\right)h}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^{1}+\cdots+h^{n-1}\right)=nx^{n-1}.$$

iii) Como $g(x)=c\cdot f(x)$tem-se que:

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c\cdot f(x+h)-c\cdot f(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}c\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=c\cdot f'(x).$$

iv) Como $h(x)=f(x)+g(x)$, segue que:

$$h'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-\left(f(x)+g(x)\right)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+\left(g(x+h)-g(x)\right)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x).$$

v) Pela definição de derivada tem-se:

$$h'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)\cdot f(x+h)-g(x)\cdot f(x)}{h}$$

Somando e subtraindo a função $\frac{g(x+h)\cdot f(x)}{h}$ desta expressão tem-se:

$$h'(x)=\lim\nolimits_{h\to 0}\frac{g(x+h)\cdot f(x+h)-g(x)\cdot f(x)}{h}+\frac{g(x+h)\cdot f(x)}{h}-\frac{g(x+h)\cdot f(x)}{h}\Rightarrow$$

$$h'(x)=\lim\nolimits_{h\to 0}\frac{g(x+h)[f(x+h)-f(x)]}{h}+\frac{f(x)[-g(x)+g(x+h)}{h}\Rightarrow$$

$$h(x) = \lim_{h\to 0} g(x+h) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h} + \lim_{h\to 0} f(x) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{[-g(x)+g(x+h)]}{h} \Rightarrow$$

$$h'(x) = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

vi) Como $f(x) = \frac{g(x)}{u(x)}$, tem-se $f(x) \cdot u(x) = g(x)$. Derivando esta expressão:

$$g(x) = f'(x) \cdot u(x) + f(x) \cdot u(x)$$

Isolando $f'(x)$ nesta igualdade, segue:

$$f'(x) = \frac{g'(x) - u'(x) \cdot f(x)}{u(x)}$$

Sabe-se que $f(x) = \frac{g(x)}{u(x)}$, assim:

$$f'(x) = \frac{g'(x) - u'(x) \cdot \frac{g(x)}{u(x)}}{u(x)}$$

Daí,

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot u(x) - u'(x) \cdot g(x)}{u^2(x)}$$

6.2 A DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA

Sendo f e g funções, então a derivada da função da função g composta de f será:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Demonstração. Inicialmente volta-se a definição de derivada para deduzir um resultado importante.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Subtraindo $f'(a)$ de ambos os lados desta igualdade segue:

$$0 = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a)$$

Chamando $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a)$ de m:

$$\lim_{\Delta x\to 0} m = 0$$

Daí conclui-se que $\Delta y = m\Delta x + \Delta x f'(a)$ e ainda que, $\Delta x \to 0$ implica em $m \to 0$.

Agora supondo que $u = g(x)$ seja derivável em a, e que $y = f(x)$ seja derivável em b, com $b = g(a)$. Sendo $\Delta x, \Delta y$ e Δu os incrementos de x, y e u respectivamente. Segue então que:

$$\Delta u = \Delta x \cdot g'(a) + \Delta x \cdot m \ (*), \text{ com } m \to 0, \text{ quando } \Delta x \to 0.$$

E também,

$$\Delta y = \Delta u \cdot f'(b) + \Delta u \cdot n \ (\#), \text{ com } n \to 0, \text{ quando } \Delta u \to 0.$$

Substituindo o valor de Δude $(*)$ em $(\#)$.

$$\Delta y = (\Delta x \cdot g'(a) + \Delta x \cdot m) f'(b) + (\Delta x \cdot g'(a) + \Delta x \cdot m) n \Rightarrow$$

$$\Delta y = (g'(a) + m)(f'(b) + n)\Delta x \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (g'(a) + m)(f'(b) + n) \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[(g'(a) + m)(f'(b) + n)\right] \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (g'(a) + m) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} (f'(b) + n).$$

Porém é fato que $m \to 0$ e $n \to 0$ quando $\Delta x \to 0$, logo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{m \to 0} (g'(a) + m) \cdot \lim_{n \to 0} (f'(b) + n) \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(a) \cdot f'(b) \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(a) \cdot f'(g(a)).$$

7 APLICAÇÕES DA DERIVADA

A abordagem feita neste capítulo versa sobre algumas aplicações e consequências da operação de diferenciação, feitas no próprio cálculo diferencial.

7.1 EXTREMOS DE FUNÇÕES

Nesta seção faz-se um estudo de como localizar pontos extremos de uma função contínua, usando, para tal, sua derivada para logo em seguida formula-se uma estratégia que possibilite resolver alguns problemas de otimização.

Definição 9. Uma função f tem um máximo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c,tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

Definição 10. Uma função f tem um mínimo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c,tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I \cap D(f)$.

Para encontrar os possíveis pontos extremos de uma função podemos utilizar a seguinte proposição:

Proposição 4. Supondo que $f(x)$ exista para todo $x \in (a,b)$ e que f tem um extremo relativo em c, onde $a < c < b$. Se $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

Demonstração. Supondo f tem um ponto máximo relativo em c e que $f'(c)$ existe

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Como f tem um ponto de máximo relativo em c tem-se que $f(c) \geq f(x)$ ou $f(x) - f(c) \leq 0$. Se $x \to c^+$, logo $\frac{f(x) - f(c)}{x-c} \leq 0$, assim $f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} \leq 0$. Se $x \to c^-$, tem − se $\frac{f(x) - f(c)}{x-c} \geq 0$, assim $f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} \geq 0$. Por estas duas desigualdades, chega-se a conclusão de que $f'(c) = 0$. A demonstração para o caso em que f tem um ponto mínimo relativo em c, se faz de maneira análoga.

Geometricamente podemos dizer que quando ocorre de f ter um ponto extremo relativo em c e $f'(c)$ existe, então o gráfico de f possui uma reta tangente horizontal no ponto $x = c$. Nem sempre, quando houver esta reta tangente horizontal o ponto c será um ponto de extremo relativo. Há casos em que estas condições ocorrem e tal ponto não se caracteriza como um extremo relativo, portanto diremos que quando tais condições forem cumpridas por algum ponto c, este ponto será considerado um *ponto crítico de f*, também se diz quando

$f'(c)$ não existe. Assim para que exista um extremo relativo é necessário que o ponto c seja um ponto crítico de f. Observa-se que uma função definida em um dado intervalo pode admitir vários extremos relativos. O maior deles será chamado de máximo absoluto da função nesse intervalo e o menor de mínimo absoluto.

Definição 11. Seja f uma função de domínio D. Então f tem um valor **máximo absoluto** em D em um ponto c se

$$f(x) \leq f(C), \text{ para qualquer } x \text{ em } D.$$

E um valor **mínimo absoluto** em D em um ponto c se

$$f(x) \geq f(C), \text{ para qualquer } x \text{ em } D.$$

7.2 TEOREMA DO VALOR MÉDIO

É necessário se enunciar o Teorema de Rolle para que se possa chegar ao Teorema do valor médio, uma ferramenta fundamental para estudo de comportamento das derivadas de algumas funções.

Teorema 4. **(Teorema de Rolle)** Seja f uma função definida e continua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se $f(a) = f(b) = 0$, então existe pelo menos um ponto c entre a e b tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração. Inicialmente, se $f(x) = 0$, para todo x, com $a \leq x \leq b$. Então $f'(x) = 0$, para todo x, com $a \leq x \leq b$, portanto podemos tomar qualquer número entre x, com a e b.

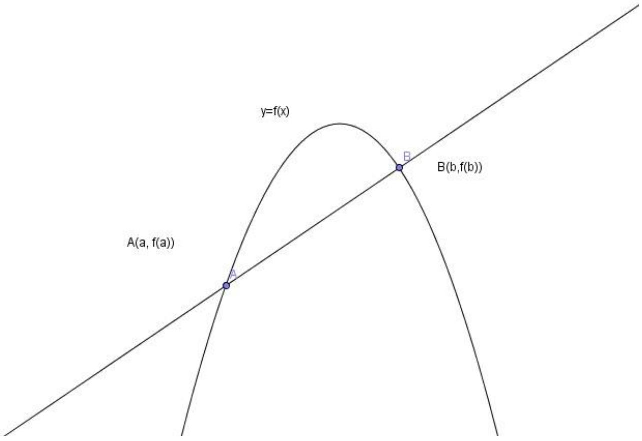
Agora nota-se que, se $f(x) \neq 0$, para algum x, com $a \leq x \leq b$. Como f é contínua em $[a, b]$, então f assume máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$. Sendo $f(x) \neq 0$, para algum $x \in (a, b)$ um dos extremos de f será diferente de zero. Como $f(a) = f(b) = 0$, esse extremos será atingido em um ponto $c \in (a, b)$. E como f é derivável em $c \in (a, b)$ conclui-se que $f'(c) = 0$.

Teorema 5. (Teorema do Valor Médio) Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável

em (a, b). Então existe um numero c no intervalo (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração. Traçando o gráfico da função f como uma curva qualquer do plano e emseguida uma reta através dos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ essa reta é o gráfico da função:



$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\ (*)$$

Definindo a função $h(x)$ como a função $f(x) - g(x)$, tem-se

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Pode-se perceber que a função $h(x)$ satisfaz ao Teorema de Rolle em $[a, b]$, pois ela é contínua em $[a, b]$ e é derivável em (a, b), já que as funções f e g o são. E também que $h(a) = h(b) = 0$, assim $h' = 0$ em algum ponto $c \in (a, b)$. Derivando a equação $(*)$ em relação ax e fazendo $x = c$ tem-se.

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

8 FUNÇÕES COM IMAGENS CRESCENTES E DECRESCENTES

Definição12. Diz-se que uma função f, definida num intervalo I, é crescente neste intervalo se para quaisquerx_1,$x_2 \in I$,com$x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) < f(x_2)$.

Definição13. Diz-se que uma função f, definida num intervalo I, é decrescente neste intervalo se para quaisquerx_1,$x_2 \in I$,com$x_1 < x_2$, tem-se que $f(x_1) > f(x_2)$.

Em ambos os casos pode se dizer que esta função f é monótona ou monotônica no intervalo I. Fazendo uma análise no sinal da função derivada determinando os intervalos onde a imagem da função f é crescente e decrescente.

Teorema 6. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b).
(i) Se $f\,'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f *é* crescente em $[a, b]$;
(ii) Se $f\,'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f *é* decrescente em $[a, b]$.

Demonstração. Sejamx_1, $x_2 \in [a, b]$, tais que $x_1 < x_2$. Então concluímos que f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2), usando o Teorema do Valor Médio pode-se dizer que, existe $c \in (x_1, x_2)$, tal que:

$$f' \;\; c \;\; = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

*(i)*Por hipótese tem-se que $f'(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$. Então $f'(c) > 0$, como $x_1 < x_2$ segue que $0 < x_2 - x_1$. Daí conclui-se que $f(x_2) - f \;\; x_1 \;\; > 0$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$, isto é, f é crescente em $\;a, b\;$.
*(ii)*Por hipótese tem-se que $f' \;\; x \;\; < 0$, para todo $x \in (a, b)$. Então $f' \;\; c \;\; < 0$, como $x_1 < x_2$ segue que $0 < x_2 - x_1$. Daí conclui-se que $f(x_2) - f \;\; x_1 \;\; < 0$, ou seja, $f(x_2) < f(x_1)$, isto é, f é decrescente em $\;a, b\;$.

Teorema 7. (Critério da derivada primeira, para determinação de extremos). Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ derivável no intervalo (a, b),exceto possivelmente num ponto c.
(i) Se $f\,'(x) > 0$, para todo $x < c$e $f' \;\; x \;\; < 0$,para todo $x > c$, então$f$tem um máximo relativo em c.
(ii) Se $f' \;\; x \;\; < 0$, para todo $x < c$e $f' \;\; x \;\; > 0$, para todo $x > c$, então$f$tem um mínimo relativo em c.

Demonstração *(i)* Usando O **Teorema 6**, pode-se concluir que f e crescente em a, c e decrescente em $[c, b]$. Portanto, $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$em (a, b)e assim f tem um máximo relativo em c.

(ii) É possível usar argumento análogo ao usado no item *(i)*.

Teorema 8. (Critério da derivada segunda, para determinação de extremos de uma função). Sejam f uma função derivável num intervalo $(\boldsymbol{a}, b)$ e $c$um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite a derivada f'' em (a, b), segue que:

(i) Se $f''(c) < 0, f$ tem um valor máximo relativo em *c*.

(ii) Se$f''(c) > 0, f$ tem um valor mínimo relativo em *c*.

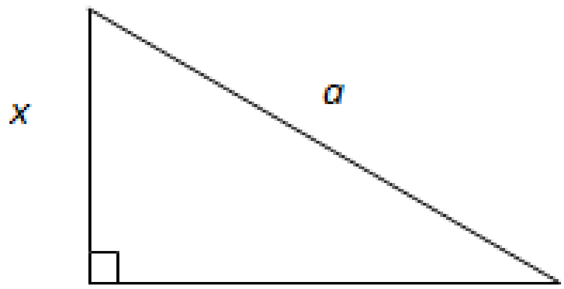
Demonstração *(i)* Se $f''(c) < 0$, então $f''(x) < 0$ em algum intervalo aberto I que contenha o ponto c, uma vez que f'' é contínua, portanto f é decrescente em I. Como $f'(c) = 0$ sinal de f' muda de positivo para negativo em c, acordo com o **Teorema 8,** f apresenta um máximo local em c.

(ii) É possível usar argumento análogo ao usado no item *(i)*.

9 APLICAÇÕES

Aqui faz-se algumas aplicações do conteúdo estudado, em cinco problemas escolhidos de forma conveniente, de modo que pudesse ser explicitada a abordagem, as funções que modelam estes problemas, sendo feita a partir de situações em que é necessário descobrir valores máximos ou mínimos de suas imagens.

APLICAÇÃO 1. Dos triângulos retângulos de mesma hipotenusa qual possui a maior área?



Solução. Sendo y o outro cateto deste triângulo, pelo Teorema de Pitágoras pode-se escrever

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (*)$$

Nota-se que a área de um triângulo retângulo pode ser escrita como o semi-produto de seus catetos, logo:

$$A = \frac{x \cdot y}{2} \qquad (\#)$$

Substituindo o valor de y de $(*)$ em $(\#)$, tem-se:

$$A(x) = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2}$$

O valor máximo dessa função é exatamente o valor máximo da função $f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2}$, para achar tal valor calcula-se $f'(x)$.

$$f(x) = x\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot (-2x) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Fazendo $f'(x) = 0$;

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow a^2 - x^2 = x^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Par saber se $f'(x) = 0$ é mesmo o ponto máximo da função façamos $f''\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$f'(x) = \sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2-x^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{a^2-x^2} - \frac{1}{2}\left(a^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\,(a^2-x^2)}{a^2-x^2} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2x-2x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{-4x\left(a^2-x^2\right) + a^2x - 2x^3}{\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{-4a^2x + 4x^3 + a^2x - 2x^3}{\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{-3a^2x + 2x^3}{\left(a^2-x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}}$$

Fazendo $f''\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, tem-se:

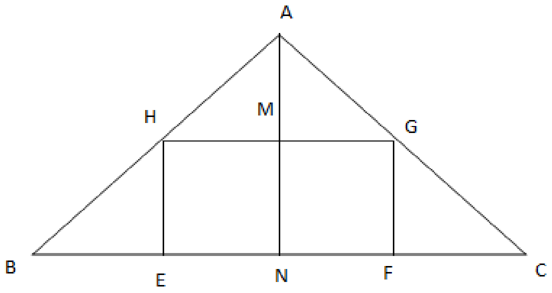
$$f''\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-3a^2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3}{\left(a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = -4 < 0$$

Portanto, $f'(x) = 0$ é ponto de máximo de f, e assim pode-se calcular o valor de y, em $y = \sqrt{a^2-x^2}$.

$$y = \sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow y = \sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} \Rightarrow y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Desta forma, o triângulo de maior área é o triângulo isósceles de catetos medindo $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

APLICAÇÃO 2. Descobrir qual o retângulo de área máxima, inscrito em dado triângulo ABC.



Solução. Quer-se encontrar o retângulo inscrito no triângulo ABC que possui a maior área. Chamando os lados do retângulo EF de x e FG de y, tem-se $A = x \cdot y$, assim queremos encontrar o valor máximo da expressão $A = x \cdot y(**)$.

Pode-se perceber a semelhança dos triângulos ABC e AHG, e por tal fato pode-se também perceber que:

$$\frac{HG}{BC} = \frac{AM}{AN}$$

ou seja,

$$\frac{x}{b} = \frac{AN - y}{AN}$$

Chamando AN de h, tem-se:

$$\frac{x}{b} = \frac{h - y}{h} \Rightarrow x = \frac{b(h - y)}{h} \qquad (\#\#)$$

Substituindo o valor de x de $(\#\#)$ em $(**)$, segue:

$$A = y \cdot \frac{b(h - y)}{h} \Rightarrow A = \frac{byh - by^2}{h}$$

Derivando em relação a $y$tem-se:

$$A' \;\; y \;\; = \frac{bh - 2by}{h}$$

Fazendo $A' \;\; y \;\; = 0$, segue:

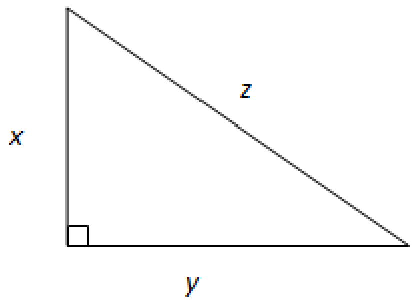
$$bh = 2by \Rightarrow y = \frac{h}{2}$$

Substituindo pra encontrarmos o valor de x, tem-se:

$$x = \frac{b(h - y)}{h} \Rightarrow x = \frac{b(h - \frac{h}{2})}{h} \Rightarrow x = \frac{b}{2}$$

Logo, o retângulo de maior área é o retângulo de área igual a $\frac{bh}{4}$.

APLICAÇÃO 3. Encontrar qual dentre todos os triângulos retângulos com mesmo perímetro $2p$ possui a maior área:



Pelo Teorema de Pitágoras pode-se escrever a hipotenusa z deste triângulo retângulo da seguinte maneira:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Como tem-se:

$$2p = x + y + z$$

Segue:

$$2p = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow 2p - x - y = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow$$
$$(2p - x - y)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 4p^2 - 4px - 4py + x^2 + y^2 + 2xy = x^2 + y^2 \Rightarrow$$
$$4p^2 + 2xy = 4p(x + y) \Rightarrow 2p^2 + xy = 2p(x + y) \Rightarrow$$
$$xy - 2py = 2px - 2p^2 \Rightarrow y = \frac{2p(x - p)}{x - 2p}$$

Como a área deste triângulo é:

$$A = \frac{x \cdot y}{2}$$

Segue que:

$$A = \frac{x}{2} \cdot \frac{2p(x - p)}{x - 2p}$$

Ou seja,

$$A(x) = \frac{px^2 - p^2x}{x - 2p}$$

Quer-se o valor máximo da função $A(x)$, para isto calcula-se$A'(x)$.

$$A(x) = \frac{px^2 - p^2x}{x-2p} \Rightarrow A'(x) = \frac{(2px - p^2)(x-2p) - (px^2 - p^2x)}{(x-2p)^2} \Rightarrow$$

$$A'(x) = \frac{px^2 - 4p^2x + 2p^3}{(x-2p)^2}$$

Fazendo $A'(x) = 0$:

$$px^2 - 4p^2x + 2p^3 = 0$$

Isto é,

$$x = \frac{-(-4p^2) \pm \sqrt{(-4p^2)^2 - 4 \cdot p \cdot 2p^3}}{2p}$$

Assim os valores possíveis para x são $x = 2p - p\sqrt{2}$ e $x = 2p + p\sqrt{2}$. E portanto estes são os pontos críticos da função $A(x)$. Fazendo a segunda derivada pode-se verificar qual deles é o ponto de máximo.

$$A'(x) = \frac{px^2 - 4p^2x + 2p^3}{(x-2p)^2} \Rightarrow$$

$$A''(x) = \frac{(2px - 4p^2)(x-2p)^2 - (px^2 - 4p^2x + 2p^3)(x-2p)2}{(x-2p)^4} \Rightarrow$$

$$A''(x) = \frac{4p^3}{(x-2p)^3}$$

Testando para $x = 2p - p\sqrt{2}$:

$$A''(2p - p\sqrt{2}) = \frac{4p^3}{(2p - p\sqrt{2} - 2p)^3} = \frac{4p^3}{(-p\sqrt{2})^3} = -\frac{4}{2\sqrt{2}} = -\sqrt{2} < 0$$

Portanto o ponto de máximo da função $A(x)$ é $x = 2p - p\sqrt{2}$.

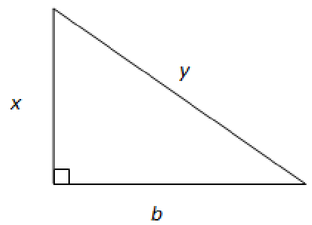
Como $y = \frac{2p(x-p)}{x-2p}$ segue que:

$$y = \frac{2p(2p - p\sqrt{2} - p)}{2p - p\sqrt{2} - 2p} \Rightarrow y = 2p - p\sqrt{2}.$$

Desta maneira o triângulo de maior área é o triângulo isósceles de lados:

$$x = 2p - p\sqrt{2};\ y = 2p - p\sqrt{2};\ z = 2p - 2p\sqrt{2}.$$

APLICAÇÃO 4. Achar entre todos os triângulos retângulos de mesma base b e perímetro $2p$ o de maior área.



Solução. O perímetro deste triângulo é dado por $2p = x + y + b$, pela fórmula de Herão tem-se que a área deste triângulo será dada por $A = \sqrt{p(p-b)(p-x)(p-y)}$.
Isolando o valor de y na primeira igualdade e substituindo na segunda tem-se:

$$A = \sqrt{p(p-b)(p-x)(p-(2p-x-b))} \Rightarrow$$
$$A = \sqrt{p(p-b)} \cdot \sqrt{(p-x)(p-(2p-x-b))}$$

Chamando $\sqrt{p(p-b)}$ de m, teremos:

$$A = m \cdot \sqrt{(p-x)(p-(2p-x-b))}$$

Como se quer o valor máximo para a área, procura-se o valor máximo da imagem função $A(x) = m \cdot \sqrt{(p-x)(p-(2p-x-b))}$, para tal façamos $A'(x)$.

$$A(x) = m \cdot \sqrt{(p-x)(p-(2p-x-b))} \Rightarrow$$
$$A'(x) = \frac{m}{2} \cdot \frac{2p-2x-b}{\sqrt{(p-x)(p-(2p-x-b))}}$$

Igualando $A'(x)$ a zero segue:

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{2p-2x-b}{\sqrt{(p-x)(p-(2p-x-b))}} = 0 \Rightarrow x = \frac{2p-b}{2}$$

Para verificarmos se este ponto crítico é ponto de máximo calcula-se$A''(x)$:

$$A'(x) = \frac{m}{2} \cdot \frac{2p-2x-b}{\sqrt{(p-x)(p-(2p-x-b))}} \Rightarrow$$
$$A''(x) = \frac{m}{4} \cdot \frac{p^2}{(p-x)(p-(2p-x-b))\sqrt{(p-x)(p-(2p-x-b))}}$$

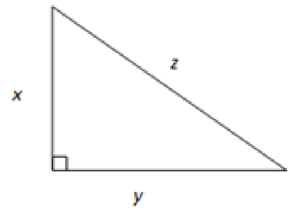
Substituindo $x = \frac{2p-b}{2}$ em $A''(x)$ tem-se:

$$A''\left(\frac{2p-b}{2}\right) = -\frac{2kp^2}{b^3} < 0$$

Portanto, é ponto de máximo.

Assim como $y = 2p - x - b$ segue que $y = 2p - \frac{2p-b}{2} - b \Rightarrow y = \frac{2p-b}{2}$. Daí conclui-se que o triângulo de maior área é o triângulo de lados $\frac{2p-b}{2}$, $\frac{2p-b}{2}$ e b.

APLICAÇÃO 5. Entre todos os triângulos retângulos com o mesmo perímetro p, qual é o ode menor hipotenusa?



Solução. Pelo Teorema de Pitágoras pode-se perceber com facilidade que $z^2 = x^2 + y^2$, como o perímetro do triângulo é $p$tem-se, $p = x + y + z \Rightarrow y = p - x - z$. Fazendo a substituição do valor de z da segunda igualdade na primeira tem-se:

$$z^2 = (p - x - z)^2 + x^2 \Rightarrow$$

$$z^2 = x^2 + p^2 + z^2 - 2px - 2pz + 2xz + x^2 \Rightarrow$$

$$2pz - 2xz = 2x^2 + p^2 - 2px \Rightarrow$$

$$z = \frac{2x^2 + p^2 - 2px}{2p - 2x}$$

Precisa-se descobrir o valor mínimo de z nesta última expressão, ou seja, o valor mínimo da função

$$z(x) = \frac{2x^2 + p^2 - 2px}{2p - 2x}$$

Para tal, calculemos $z'(x)$:

$$z(x) = \frac{2x^2 + p^2 - 2px}{2p - 2x} \Rightarrow z'(x) = \frac{(4x - 2p)(2p - 2x) - (-2)(2x^2 + p^2 - 2px)}{(2p - 2x)^2} \Rightarrow$$

$$z'(x) = \frac{8px - 4x^2 - 2p^2}{(2p - 2x)^2}$$

Fazendo $z'(x) = 0$, tem-se:

$$4px - 2x^2 - p^2 = 0$$

Ou seja,

$$x = \frac{-4p \pm \sqrt{(4p)^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-p^2)}}{2\cdot(-2)} \Rightarrow$$

$$x = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)p \text{ ou } x = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)p$$

Fazendo a segunda derivada para verificar se um destes pontos críticos é de mínimo tem-se:

$$z'(x) = \frac{8px - 4x^2 - 2p^2}{(2p-2x)^2} \Rightarrow z''(x) = \frac{p^2}{(p-x)^3}$$

Fazendo a substituição $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, tem-se:

$$z''\left(p - \frac{p\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{p^2}{(p - p - \frac{p\sqrt{2}}{2})^3} = \frac{p^2}{\frac{p^3 2\sqrt{2}}{8}} = \frac{4}{p\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{p} > 0$$

Desta forma $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ é o ponto de mínimo da função $z(x)$. E o triângulo de menor hipotenusa será o triângulo de hipotenusa $z\left(p - \frac{p\sqrt{2}}{2}\right) = p\sqrt{2}$.

Com estas aplicações, finaliza-se esse capítulo evidenciando a importância da aplicação da derivada como ferramenta para resolver os problemas aqui propostos.

10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O nível de evolução da raça humana, através dos tempos, sempre esteve relacionado com a capacidade de adquirir e transmitir conhecimentos, isto é, aprender e ensinar. Nesse contexto, vislumbrando no Curso de Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio uma oportunidade diferenciada para investigar outras conexões entre conteúdos tradicionalmente estudados, quer sejam nas séries de ensino fundamental, médio ou nos cursos de graduações, refletiu-se neste trabalho sobre a resolução de problemas geométricos, utilizando como ferramenta, uma importante ferramenta do Cálculo Diferencial, a derivada. Entendeu-se como uma característica inerente às atividades de ensino de um educador em matemática, a busca permanente pela aplicação dos conteúdos ensinados em qualquer período da formação acadêmica. O curso de graduação em Matemática deve ser um período onde o estudante, futuro professor, receba uma formação eclética que proporcione o aprofundamento dos conhecimentos e possibilite sua interação com os diversos meios educacionais, sociais, etc.

Visto por outro ângulo, a aproximação entre conteúdos estudados no ensino de nível médio através de uma ferramenta disponibilizada no semestre inicial dos cursos de graduação em Matemática, serve também, para sublinhar os componentes onde a aprendizagem deve ser significativa, uma vez que serão utilizados no desenvolvimento de operações mais complexas, a exemplo da derivada de uma função e suas aplicações. Isto explica todo o estudo realizado sobre os diversos tipos de funções que por sua vez representarão o modelo a ser estudado.

Ensinar é mostrar que o que está sendo ensinado pode se converter em oportunidades logo adiante, nas ocorrências diárias, na escola, na saúde, na segurança, nos meios de transportes, na economia, nos esportes, na política, etc.

Obrigado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática**. Tradução: João Bosco Pitombeira, Rio de Janeiro-RJ. Editora: SBM, 2013.

ÁVILA G. **Evolução do conceito de função e de integral**. In: publicação da Sociedade Brasileira de Matemática. p. 14-46, julho 1985, São Paulo.

BOYER, Carl Benjamim. **História da matemática**. Tradução: Elza Gomide, São Paulo-SP. Editora: Edgard Blucher LTDA, 1974;

BRASIL; MEC, SEB**; Orientações Curriculares para o Ensino Médio, Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias**, Brasília: MEC. SEB, 2006

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexto e Aplicações/ Luiz Roberto Dante**. 2ª Edição, São Paulo. Editora Ática, 2014.

MAOR, Eli. ***e*: A história de um número**. Tradução: Jorge Calife, 4ª Edição, Rio de Janeiro-RJ. Editora: Record, 2008.

PAIVA, Manoel. **Matemática-Paiva/Manoel Paiva**. 1ª Edição, São Paulo. Moderna, 2009.

SINGH, Simon; **O Último Teorema de Fermat: a história que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos.** Tradução: Jorge Luiz Calife. 3ª edição. Rio de Janeiro. Editora Record, 2008.

STWERT, Ian. **Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años.** Barcelona**.** Editora Crítica, 2007.

THOMAS, George B.. **Cálculo.** 11ª ed, São Paulo. Editora Pearson, 2009.