**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA**
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**
**CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**ROSILDA KELLY SILVA SANTOS**

# PROGRESSÃO ARITMÉTICA E GEOMETRICA E SUAS APLICAÇÕES

**Campina Grande – PB**
**2016**

ROSILDA KELLY SILVA SANTOS

# PROGRESSÃO ARITMÉTICA E GEOMETRICA E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Licenciatura em matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Maria Isabelle Silva

Campina Grande – PB
2016

S237p Santos, Rosilda Kelly Silva.
Progressão aritmética e geométrica e suas aplicações [manuscrito] / Rosilda Kelly Silva Santos. - 2016.
46 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Profa. Dra. Maria Isabelle Silva, Departamento de Matemática".

1. Progressão aritmética. 2. Progressão geométrica. 3. Números triangulares. 4. Geometria fractal. I. Título.

21. ed. CDD 516

ROSILDA KELLY SILVA SANTOS

# PROGRESSÃO ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA E SUAS APLICAÇÕES

*Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado à banca examinadora do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, como exigência para obtenção do título de graduado.*

BANCA EXAMINADORA:

Maria Isabelle Silva

Profª. Drª. Maria Isabelle Silva
(Orientadora – / UEPB)

Walber Santiago Colaço

Prof. Me. Walber Santiago Colaço
(Examinador – / UEPB)

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Prof. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano
(Examinador – / UEPB)

## DEDICATÓRIA

Dedico todas minhas conquistas a minha família.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por sua infinita bondade.

A minha mãe Da Paz por todo esforço ao qual ela dedicou para me dar o melhor sempre.

A Rosilda Reges por toda educação, saúde, tempo dedicado, paciência e esforço; a ela agradeço por ter chegado até aqui.

Ao meu avô Fernando (em memória) e minha tia Maria (em memória) por todos os ensinamentos e amor dedicado; a eles o meu eterno amor.

Ao meu irmão Robério, por sempre acreditar em mim.

Aos amigos que fiz ao longo do curso, Niedja, Ana Paula, Ivson, pelas palavras amigas nas horas difíceis, pelo auxilio nos trabalhos e dificuldades e principalmente por estarem comigo nesta caminhada tornando-a mais fácil e agradável.

Aos meus amigos, em especial, a Cristina, Roberto.

A minha Orientadora Isabelle por todo apoio.

A todos que de alguma forma contribuíram para eu ter chegado até aqui.

O abandono da Matemática traz dano a todo o conhecimento, pois aquele que a ignora não pode conhecer as outras ciências ou as coisas do mundo.

(Roger Bacon)

# RESUMO

Esse trabalho de Conclusão de Curso, tem como objetivo trabalhar o uso de Progressão Aritmética e Geométrica correlacionados a outras áreas. Em especial, iremos trabalhar o desenvolvimento dos Números Triangulares e mostrar que na Geometria Fractal faz se o uso da Progressão Aritmética e Geométrica, mostraremos aqui dois fractais, a Curva de Koch e o Floco de neve de Koch.

**Palavra Chave:** Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, Números Triangulares, Geometria Fractal.

**ABSTRACT**

This work Completion of course , aims to work using Arithmetic and Geometric progression correlated to other areas. In particular , we will work the development of Triangular Numbers and show that in Fractal Geometry is the use of Arithmetic and Geometric progression , we show here two fractals , the Koch curve and the Koch snowflake .

**Keyword:** Arithmetic Progression , Geometric Progression , Triangular Numbers , Fractal Geometry .

**LISTA DE FIGURAS**

**SUMÁRIO**

## INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como base o estudo de Progressão Aritmética e Geométrica. A ideia de estuda-la deve-se ao fato de ser um tema de grande abrangência, são encontrados em objetos, lugares, natureza, ciências. A Progressão Aritmética, por exemplo, está envolvido em tudo que aumente ou diminua segundo uma constante, a razão.

No Capitulo 1, faremos um breve histórico do surgimento da Progressão Aritmética e Geométrica, passando desde os egípcios, com a necessidade de saber o período certo da colheita; passando pelo Papiro Rhind, que envolvia mais de 85 problemas matemáticos, até os dia de hoje.

No Capitulo 2, está a fundamentação teórica, divida em duas partes, uma de Progressão Aritmética e a outra de Progressão Geométrica; em cada um tema, serão apresentados algumas resoluções de exercícios aonde se encontram vários exercícios para fixação relacionados ao tema.

No Capitulo 3, serão abordados duas aplicações, sendo uma delas direcionado aos Números Triangulares, que cada termo da sua progressão é a soma dos números naturais de 1 a n; a outra aplicação, é na Geometria Fractal,

> Os fractais são objetos matemáticos. Da mesma forma que uma circunferência, um quadrado ou um triângulo, eles não possuem existência real, mas muitos fenómenos em nosso redor podem ser modelados através deles, de forma a conseguirmos explicar as suas estruturas e, eventualmente, prever os seus comportamentos.(Mandelbrot – Jorge Nuno da Silva, p. 19.)

Na aplicação sobre Geometria Fractal, serão abordados dois fractais, uma é a Curva de Koch e a outra o Floco de Neve de Koch.

## Capítulo 1 ASPECTOS HISTORICOS

Os egípcios há mais de 5000 anos atrás, tiveram a necessidade de saber como o ciclo das cheias do Rio Nilo aconteciam, pois precisavam garantir o período certo de cultivar suas plantações. Notaram que as enchentes aconteciam há cada 365 dias, com isso criaram um calendário solar composto de 12 meses, e esse período foi dividido em três estações de quatro meses cada, no qual se chamavam: Período de semear, Período de crescimento e Período de colheita.

Por volta de 1650 a. C., o egiptólogo escocês A. Henry Rhind, que era advogado e antiquário, comprou o papiro de Rhind, o qual continha 85 problemas matemáticos e constavam alguns problemas que envolviam Progressão aritmética.

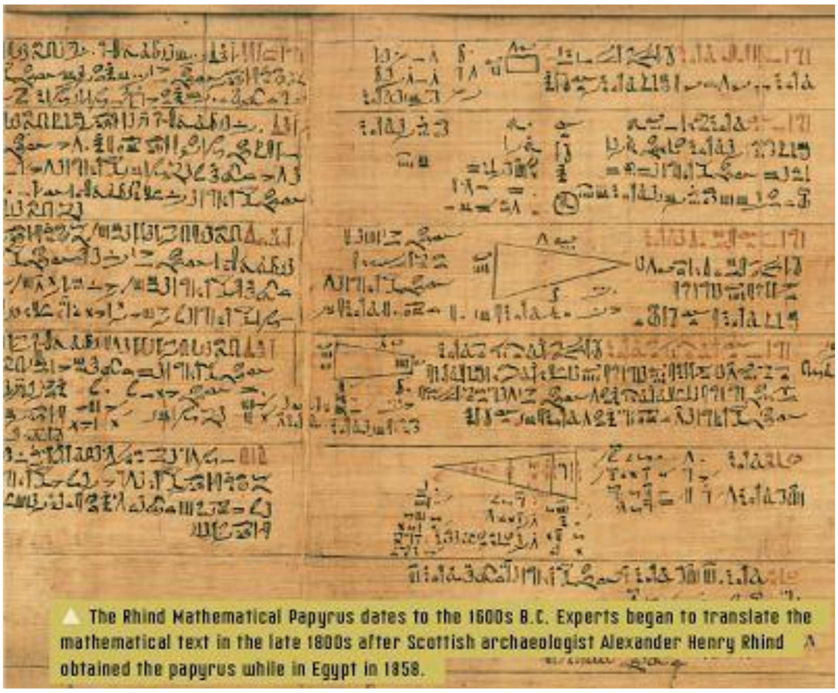



Figura 1 - Papiro Rhind

O Papiro Rhind continha os seguintes problemas:

“Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em Progressão Aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores”

“Sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2041 espigas de trigo, 16 807 hectares”. É presumível que o escriba estava tratando de um problema bem conhecido, em que cada uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas de grão.

No Papiro de Rhind também aparece uma progressão geométrica muito interessante formada pelas frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ do Hekat, (unidade comum do volume usada para medir quantidade de grãos). Os termos dessa sequência são conhecidos como frações dos olhos do deus Hórus.

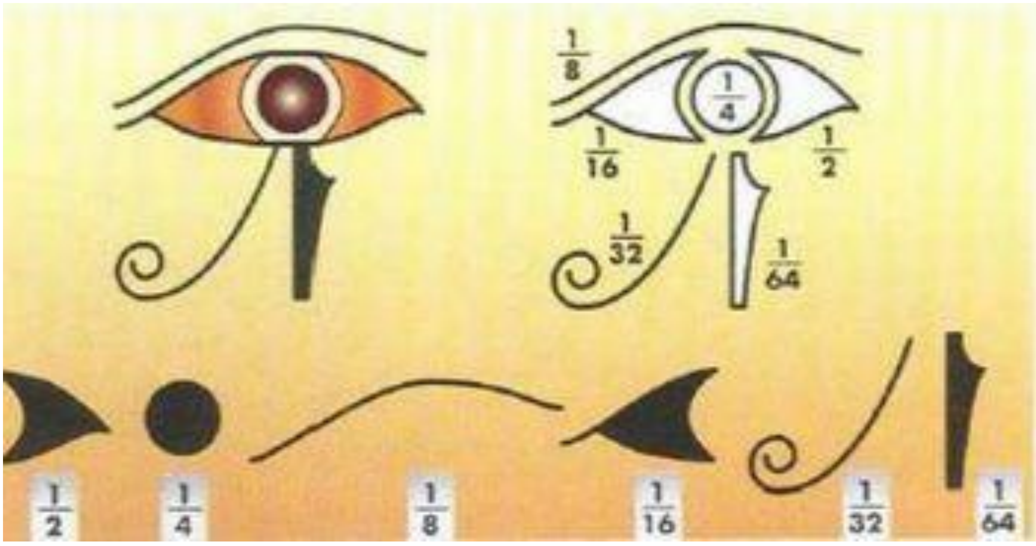



Figura 2 - O Papiro Rhind: Problema de Frações

Presume-se que se deve a Pitágoras (585 a.C. – 500 a.C.) e aos sábios gregos que viveram depois dele, a criação da Aritmética, pois os pitagóricos conheciam as progressões aritméticas, as geométricas, as harmônicas e musicais, as proporções, os quadrados de uma soma ou de uma diferença.

Pitágoras foi um importante matemático e filósofo, autor do Teorema de Pitágoras, o qual fala "Num triangulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos". Como filósofo, deu origem a uma corrente, que inspirou vários pensadores gregos, entre eles Platão.

Através dos membros mais antigos da escola pitagórica em aproximadamente 600 a. C., que se deu origem os Números Figurados (ou triangulares). Esses números, que expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, representam um elo de ligação entre a geometria e a aritmética.

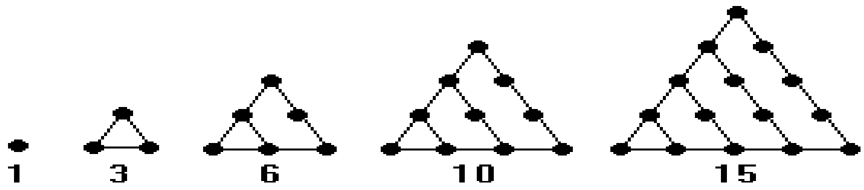



Figura 3 - Números Triangulares

O matemático grego Euclides em sua obra Os Elementos, na sua VIII edição, que encontramos as proporções contínuas e Progressões Geométricas relacionadas, de forma que, se temos uma proporção contínua a : b = b : c = c : d, então a, b, c, d formam uma Progressão Geométrica.

Euclides é considerado o pai da Geometria, nasceu no século III a.C. em Alexandria no Egito, famoso por ser autor de várias obras, incluindo o enunciado do "Postulado das Paralelas", que afirma: " Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos do mesmo lado, menores do que dois ângulos retos, estas outras, prolongando-se ao infinito, encontrar-se-ão no lado onde os ângulos sejam menores do que dois ângulos retos."

Na Matemática grega depois de Euclides surgiu o seguinte problema: “Se $a^2$, $b^2$, $c^2$ estão em Progressão Aritmética, então b + c, c + a, a + b estão em progressão harmônica”.

Na doutrina de Darwin também podemos encontrar as Progressões Aritméticas e Geométricas.

Num dos quatro itens fundamentais da doutrina de Darwin, podemos encontramos uma referência às Progressões Geométricas e Aritméticas, uma influência das ideias de Thomas Malthus, famoso economista. Diz a teoria “a população mundial cresce em Progressão Geométrica (P.G.), enquanto a produção de alimentos em Progressão Aritmética (P.A.)”.

Em consequência deste item, Darwin afirmou que “devido a tal desproporção, os indivíduos empenhariam - se numa luta pela vida, ao final da qual seriam selecionados os mais fortes ou os mais aptos a seleção natural de alguns indivíduos em detrimento de muitos outros”. A comparação de Malthus entre o crescimento populacional e as reservas alimentares não é mais aceita atualmente, pois, apesar da maior taxa de crescimento populacional, não há uma desproporção tão grande como mostra o diagrama.

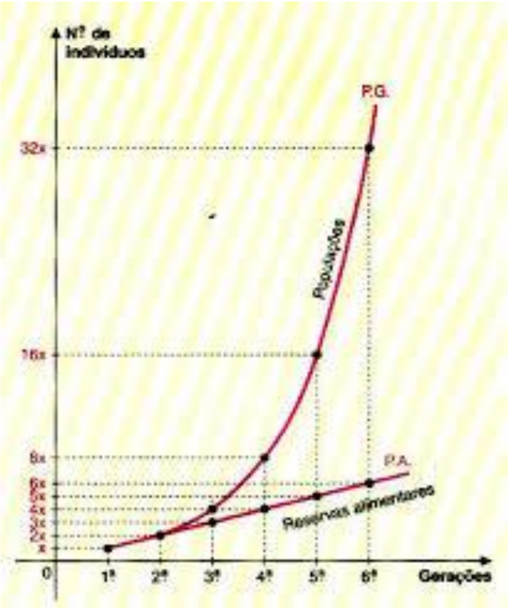



Figura 4 - Diagrama da Comparação de Mathus

# Capítulo 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

## 2.1 PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A.)

Progressão Aritmética é uma sequência na qual a cada termo a partir do segundo termo é igual a soma do seu antecessor com uma constante. Essa constante é chamada Razão de P.A., que é representada pela letra **r .**

Exemplo 1:

a) $0, 2, 4, 6, \dots$ , cada termo é igual o anterior mais 2.

b) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{3}, -\frac{4}{3}, \dots\right)$, cada termo é igual o anterior menos $\frac{1}{3}$

O termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 + \ n - 1 \ . r$$

Pela definição de Progressão aritmética, temos:

$$\begin{gathered} a_2 - a_1 = r \\ a_3 - a_2 = r \\ a_4 - a_3 = r \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_n - a_{n-1} = r \\ a_n - a_1 = (n-1)\, r \end{gathered}$$

Logo,

$$a_n = a_1 + \ n - 1 \ . r$$
$$r = a_n - a_{n-1}$$

Onde:

$a_1$ é o primeiro termo

$a_n$ é o enésimo termo ou termo geral

$\mathrm{n}$ é o número de termos

$\mathrm{r}$ é a razão

Exemplo 2: Determine o 7º termo da P.A. $(0, -7, -14, \ldots)$

<u>Resposta:</u> Dado, $a_1 = 0$, $a_2 = -7$

A questão pede o $a_7$, que é obtido pela Formula do termo Geral,

$a_n = a + \ (n - 1)\ . r$

$\Rightarrow\ a_7 = 0 + \ (7 - 1)\ . r$

$\Rightarrow\ a_7 = 6r$ ①

Primeiro, temos que encontrar a razão:

$r = \ a_n - a_{n-1}$

$\Rightarrow\ r = \ a_2 - \ a_1$

$\Rightarrow r = \ -7 - 0$

$\Rightarrow r = \ -7$

Agora, substituímos a razão em ①

$a_7 = 6r$

$\Rightarrow a_7 = 6.\ (-7)$

$\Rightarrow\ a_7 = \ -42$

Exemplo 3: Qual é o segundo termo de uma P.A. de razão 9, cujo 10º vale 98?

<u>Resposta:</u> Dado, $r = \ 9$, $a_{10} = 98$, $a_2 = ?$

O $a_2$, é encontrado através da formula:

$a_2 = \ a_1 + r \ \rightarrow \ a_2 = \ a_1 + 9$ ①

Primeiro vamos achar o primeiro termo da P.A

Temos que,

$a_{10} = 98 \ \rightarrow \ a_1 + 9. r = 98 \rightarrow a_1 + 9.9 = 98 \rightarrow a_1 + 81 = 98 \rightarrow a_1 = 17$

Agora, substituímos o $a_1$ em ①

$a_2 = \ 17 + 9 \ \rightarrow \ a_2 = 26$

Exemplo 4: O sétimo termo de uma progressão aritmética é 38 e o décimo é 50. Calcule o vigésimo termo.

<u>Resposta:</u> É dado $a_7 = 38$ , $a_{10} = 50$, $a_{20} = ?$

Vamos relacionar $a_{20}$ com $a_{10}$

$a_{20} = a_{10} + 10r$

$\Longrightarrow a_{20} = 50 + 10r$ ①

Para achar $r$, temos que relacionar $a_7$ com $a_{10}$ para obter a razão

$a_{10} = 50$

$\Longrightarrow a_7 + 3r = 50$

$\Longrightarrow 38 + 3r = 50$

$\Longrightarrow 3r = 12$

$\Longrightarrow r = 4$

Então, substituímos $r$ em ①

$a_{20} = a_{10} + 10r$

$\Longrightarrow a_{20} = 50 + 10.4$

$\Longrightarrow a_{20} = 90$

Exemplo 5: $3 - x, -x, \sqrt{9 - x}, \ldots$ é uma progressão aritmética. Determine o valor de $x$, bem como o quinto termo da progressão.

<u>Resposta:</u> Temos, $a_1 = (3 - x)$, $a_2 = -x$, $a_3 = \sqrt{9 - x}$, $a_5 = ?$

$r = -x - (3 - x) \Longrightarrow r = -3$

Vamos relacionar $a_3$ com $a_2$

$a_3 = a_2 + r$

$\Longrightarrow \sqrt{9 - x} = -x + (-3)$

$\Longrightarrow \sqrt{9 - x} = -x - 3$

Elevamos os dois membros ao quadrado

$\left(\sqrt{9 - x}\right)^2 = (-x - 3)^2$

$\Longrightarrow 9 - x = x^2 + 6x + 9$

$\Longrightarrow x^2 + 7x = 0$

$\Longrightarrow x(x + 7) = 0$

$x = 0 \text{ e } x = -7$

Para $x = 0$, temos a sequência (3, 0, 3) que não é uma P.A.

Para $x = -7$, temos a sequência $(10, 7, 4)$ que é uma P.A. de $r = -3$

Logo,

$a_5 = 10 + 4.(-3)$

$\Longrightarrow a_5 = -2$

Exemplo 6: 31 livros estão arrumados em uma estante, em ordem crescente de preços, da esquerda para a direita. O preço de cada livro difere em R$2,00 dos preços dos livros que lhe são adjacentes. O preço do livro mais caro é a soma dos preços do livro do meio e de um dos que lhe são adjacentes. Determine o preço do livro mais caro.

Resposta: Temos que, $\mathrm{n} = 31, \mathrm{r} = 2$

Foi dito que

$\mathrm{a}_{31} = \mathrm{a}_{15} + \mathrm{a}_{16}$

$\Longrightarrow \mathrm{a}_1 + 30\mathrm{r} = \mathrm{a}_1 + 14\mathrm{r} + \mathrm{a}_1 + 15\mathrm{r}$

$\Longrightarrow \mathrm{a}_1 + 30\mathrm{r} = 2\mathrm{a}_1 + 29\mathrm{r}$

$\Longrightarrow \mathrm{a}_1 = \mathrm{r}$

$\Longrightarrow \mathrm{a}_1 = 2$

Assim,

$\mathrm{a}_{31} = 2 + 30.2$

$\Longrightarrow \mathrm{a}_{31} = 62$

Portanto, o livro mais caro custa R$62,00.

### 2.1.1 CLASSIFICAÇÃO

Podemos classificar a P.A. de acordo com a razão.

- Para $r > 0$ e cada termo maior que o anterior, $a_n > a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ é chamada **P.A. crescente**

$$(10, 15, 20, 25, \dots)$$

- Para $r < 0$ e cada termo menor que o anterior, $a_n < a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ é chamada **P.A. decrescente**

$$10, 5, 0, -5, \dots$$

- Quando $r = 0$ e todos os termos da P.A. iguais, é chamada **P.A constante.**

$$(10, 10, 10, 10, \dots)$$

### 2.1.2 SOMA DOS N PRIMEIROS TERMOS DE UMA P.A.

Quando era criança, o matemático alemão Carl F. Gauss, foi desafiado pelo seu professor a responder quanto era a soma dos inteiros de 1 a 100, e não demorou muito e o menino respondeu que era 5050, e que obteve a resposta fazendo,

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = 4 + 97 = ...$$

e obteve 50 somas de 101.

Assim, a soma dos n primeiros termos da P.A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots.)$ é dado por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Segue a demonstração da formula da Soma dos n primeiros termos de uma P.A.

Temos que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \ (1)$$

Escrevendo ao contrário

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1 \ (2)$$

Somando $(1)$ e $(2)$, obtemos:

$$2S_n = \ a_1 + a_n \ + \ a_2 + a_{n-1} \ + \ a_3 + a_{n-2} \ + \cdots + \ a_2 + a_{n-1} \ + \ a_1 + a_n$$

$$\Rightarrow 2S_n = \ a_1 + a_n \ + \ a_1 + a_n \ + \ a_1 + a_n \ + \cdots + \ a_1 + a_n \ + \ a_1 + a_n$$

$$\Rightarrow 2S_n = \ a_1 + a_n \ .n$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Exemplo 7: Calcule a soma dos quinze primeiros termos da P.A. $(-45, -41, -37, -33, \ldots)$

<u>Resposta</u>: Dado, $a_1 = -45$ e $r = a_2 - a_1 \Longrightarrow r = -41 - \ -45 \ \Longrightarrow r = 4$ , $S_{15} = ?$

Para achar o $S_{15}$ utilizamos a formula da Soma geral,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

$\Longrightarrow S_{15} = \frac{(-45+a_{15}).15}{2}$ ①

Logo, temos que achar $a_{15}$

$a_{15} = a_1 + 14.r$

$\Longrightarrow a_{15} = -45 + 14.4$

$\Longrightarrow a_{15} = 11$

Agora, Substituímos $a_{15}$ em ①

$S_{15} = \frac{-45+a_{15}\ .15}{2}$

$\Longrightarrow S_{15} = \frac{-45 + 11\ .15}{2}$

$\Longrightarrow S_{15} = -255$

Exemplo 8: Na P.A. $(68,62,56,50,\ldots)$,encontre a soma de seus quatros últimos termos, admitindo que a sequência tem dez termos

Resposta: $a_1 = 68$ , $r = a_2 - a_1 \Longrightarrow r = 62 - 68 \Longrightarrow r = -6$ , $n = 10$

Temos que Achar soma dos 4 últimos termos

$S = a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$

Mostraremos de duas maneiras.

Primeira Maneira:

Achando os 4 últimos termos,

$a_7 = a_1 + \ n - 1\ r \Longrightarrow a_7 = 68 + 6.(-6) \Longrightarrow a_7 = 32$

$a_8 = 68 + 7.(-6) \Longrightarrow a_8 = 26$

$a_9 = 68 + 8.(-6) \Longrightarrow a_9 = 20$

$a_{10} = 68 + 9.(-6) \Longrightarrow a_{10} = 14$

Logo,

$S = a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$

$\Longrightarrow S = 32 + 26 + 20 + 14$

$\Longrightarrow S = 92$

Segunda Maneira:

Utilizando a seguinte fórmula:

$S_4 = \frac{(a_7+a_{10}).4}{2}$

No caso, $n = 4$ visto que a soma é só de $a_7$ a $a_{10}$

$$S_4 = \frac{32 + 14 \ .4}{2}$$

$$\Rightarrow S_4 = 92$$

Exemplo 9: Calcule a média aritmética dos termos da progressão aritmética que se obtém inserindo $\mathrm{p}$ termos entre os números a e b.

<u>Resposta:</u> Como foi pedido que inserisse $\mathrm{p}$ termos entre 2 termos, o número total de termo é:

$$n = p + 2$$

A média vai ser dada por

$$m = \frac{S_{p+2}}{(p+2)} \ (1)$$

Vamos, achar $S_{p+2}$

$$S_{p+2} = \frac{a_1 + a_{p+2} \ . \ p+2}{2}$$

$$\Rightarrow S_{p+2} = \frac{a + b \ .(p+2)}{2} \ (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$m = \frac{\frac{a + b \ . \ p+2}{2}}{p+2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{a + b \ . \ p+2}{2} . \frac{1}{p+2} \Rightarrow$$

$$m = \frac{a+b}{2}$$

Portanto,

$$m = \frac{a+b}{2}$$

Exemplo 10: Calcule o primeiro termo da progressão aritmética na qual a soma dos cinquenta primeiros termos é 200 e a soma dos cinquenta seguintes é 2700.

<u>Resposta:</u> É dado,

$$\frac{a_1 + a_{50} \ .50}{2} = 200$$

$$\Rightarrow \ a_1 + a_{50} \ = 8 \rightarrow a_1 + a_1 + 49r = 8$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 49r = 8 (1)$$

$$\frac{a_{51} + a_{100}\ .50}{2} = 2700$$

$\Longrightarrow\ a_{51} + a_{100} = 108$

$\Longrightarrow a_1 + 50r + a_1 + 99r = 108$

$\Longrightarrow 2a_1 + 149r = 108$②

Fazendo um sistema de equações com ① e ②

$2a_1 + 49r = 8\ \ -1$
$2a_1 + 149r = 108$

$\Longrightarrow \begin{matrix} -2a_1 - 49r = -8 \\ 2a_1 + 149r = 108 \end{matrix}$

$\Rightarrow 100r = 100 \Rightarrow r = 1$

Substituindo o valor de r na equação ①, obtemos $2a_1 + 49.1 = 8 \Longrightarrow a_1 = -20{,}5$.

### 2.1.3 PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE SEGUNDA ORDEM

Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência $(a_n)$ na qual as diferenças $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética não estacionária (variável), diferente da Progressão Aritmética de Primeira ordem que as diferenças $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, foram um progressão estacionária (constante).

Exemplo 11: A sequência $a_n = (1, 3, 6, 10, 15, \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem porque a sequência das diferenças $\Delta a_n = (2, 3, 4, 5, \ldots)$ é uma progressão aritmética não estacionária.

## 2.2 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (P.G.)

Progressão Geométrica P.G. é a sequência de números reais não nulos, em que cada termo, a partir do 2º, é igual ao produto do termo anterior por uma constante. Essa constante é chamada de **razão de P.G.** e é representada por **q**.

Exemplo 1:

a) $2, 4, 8, 16, 32$ cada termo é igual ao dobro do anterior.

b) $4, 12, 36, 108$ cada termo é igual ao triplo do anterior.

c) $-6, 12, -24, 48, -96$ cada termo é igual ao dobro do anterior.

O termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Segue a demonstração, pela definição de Progressão Geométrica, temos:

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \frac{a_3}{a_2} = q, \frac{a_4}{a_3} = q, \cdots, \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Multiplicando essas $n - 1$ igualdades, obtemos $\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}$

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Onde:

$a_1$ é o primeiro termo

$a_n$ é o enésimo termo ou termo geral

$n$ é o número de termos

$q$ é a razão

Exemplo 2: Determine o 6º termo da P.G. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...)$

<u>Resposta:</u> Dado, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_6 = ?$

A questão pede $a_6$, que vai ser encontrado pela formula do termo geral.

$a_n = a_1 . q^{n-1}$

$\Longrightarrow a_6 = a_1 . q^{6-1}$

$\Longrightarrow a_6 = \frac{1}{2} . q^5$ ①

Vamos achar primeiro a razão $q$

$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

$\Longrightarrow q = \frac{a_2}{a_1}$

$$\Longrightarrow q = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow q = -\frac{1}{2}$$

Agora, determinaremos o $a_6$ substituindo q em 1.

$$a_6 = \frac{1}{2}\,.\,q^5$$

$$\Longrightarrow a_6 = \frac{1}{2}.\ \ -\frac{1}{2}^{\ 5}$$

$$\Longrightarrow a_6 = \frac{1}{2}.\ \ -\frac{1}{32}$$

$$\Longrightarrow a_6 = -\frac{1}{64}$$

Exemplo 3: Determine o 9º termo da P.G. $(80, 40, 20, 10, \ldots)$

<u>Resposta:</u> Dado $a_1 = 80$ e $q = \frac{a_2}{a_1} \Longrightarrow q = \frac{40}{80} \Longrightarrow q = \frac{1}{2}$

Assim,

$$a_9 = a_1.\,q^8 \ \Longrightarrow\ a_9 = 80.\,(\frac{1}{2})^8 \ \Longrightarrow\ a_9 = 80.\frac{1}{256} \ \Longrightarrow\ a_9 = \frac{5}{16}$$

Exemplo 4: O 4º termo de uma P.G. é $\frac{1}{250}$ e o 1º termo é 4. Qual é o 2º termo dessa P.G.?

<u>Resposta:</u> Dado $a_4 = \frac{1}{250}$, $a_1 = 4$, $a_2 = ?$

Vamos achar $a_2$ pela formula do termo geral,

$a_n = a_1.\,q^{n-1} \ \Longrightarrow\ a_2 = a_1.\,q^1 \Longrightarrow\ a_2 = 4.\,q$ 1

Vamos achar primeiro a razão $q$, através de $a_4$

$$a_4 = \frac{1}{250} \rightarrow a_1.\,q^3 = \frac{1}{250}$$

$$\Longrightarrow 4.\,q^3 = \frac{1}{250}$$

$$\Longrightarrow q^3 = \frac{1}{1000}$$

$$\Longrightarrow q^3 = \frac{1}{10^3}$$

$$\Longrightarrow q = \frac{1}{10}$$

Substituindo q em ①, temos

$a_2 = 4.q \Longrightarrow a_2 = 4.\frac{1}{10} \Longrightarrow a_2 = \frac{4}{10} \Longrightarrow a_2 = \frac{2}{5}$

Exemplo 5) Em uma P.G. crescente, o 3º termo vale -80, e o 7º termo,-5. Qual é seu primeiro termo?

<u>Resposta:</u> Dado $a_3 = -80$, $a_7 = -5$, $a_1 = ?$

Podemos relacionar o $a_7$ com $a_3$ para achar a razão $q$.

$a_7 = -5 \Longrightarrow a_3.q^4 = -5$

$\Longrightarrow -80.q^4 = -5 \Longrightarrow q^4 = \frac{-5}{-80}$

$\Longrightarrow q^4 = \frac{1}{16} \Longrightarrow q^4 = \frac{1}{2^4}$

$\Longrightarrow q = \frac{1}{2}$

Assim, usando

$a_3 = -80 \Longrightarrow a_1.q^2 = -80$

$\Longrightarrow a_1.\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -80 \Longrightarrow a_1.\frac{1}{4} = -80$

$\Longrightarrow a_1 = -80.4 \Longrightarrow a_1 = -320$

Exemplo 6: Em uma P.G., o 1º termo é $\sqrt{2}$, e o 3º termo é $5\sqrt{2}$. Determine o 2º termo, o 7º termo e a razão da P.G.

<u>Resposta:</u> Dado $a_1 = \sqrt{2}$, $a_3 = 5\sqrt{2}$, $a_2 = ?$, $a_7 = ?$

Temos que, $a_3 = a_1.q^2 \Longrightarrow 5\sqrt{2} = \sqrt{2}.q^2 \Longrightarrow q^2 = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Longrightarrow q^2 = 5 \Longrightarrow q = \pm\sqrt{5}$

Vamos achar o $a_2$ e $a_7$, para os valores de $q = \pm\sqrt{5}$

- Para $q = +\sqrt{5}$,

  Temos $a_2 = a_1.q \Longrightarrow a_2 = \sqrt{2}.\sqrt{5} \Longrightarrow a_2 = \sqrt{10}$

  $a_7 = a_1.q^6 \Longrightarrow a_7 = \sqrt{2}.(\sqrt{5})^6 \Longrightarrow a_7 = 125\sqrt{2}$

- Para $q = -\sqrt{5}$,

  Temos $a_2 = a_1.q \Longrightarrow a_2 = \sqrt{2}.(-\sqrt{5}) \Longrightarrow a_2 = -\sqrt{10}$

  $a_7 = a_1.q^6 \Longrightarrow a_7 = \sqrt{2}.(-\sqrt{5})^6 \Longrightarrow a_7 = 125\sqrt{2}$

Exemplo 7: Determine o número real $\mathrm{x}$ a fim de que a sequência $(\mathrm{x}^2-4{,}2\mathrm{x}+4{,}6)$ seja uma P.G.

<u>Resposta:</u> Dado $\mathrm{a}_1=\mathrm{x}^2-4$, $\mathrm{q}=\frac{2\mathrm{x}+4}{\mathrm{x}^2-4}\Longrightarrow \mathrm{q}=\frac{2(\mathrm{x}+2)}{(\mathrm{x}+2)\ (\mathrm{x}-2)}\Longrightarrow \mathrm{q}=\frac{2}{(\mathrm{x}-2)}$

Para achar o valor de x, utilizaremos a formula de $\mathrm{a}_3$

$$\mathrm{a}_1.\mathrm{q}^2=\mathrm{a}_3\Longrightarrow \ (\mathrm{x}^2-4)\ .\left(\frac{2}{\mathrm{x}-2}\right)^2=6$$

$$\Longrightarrow \ (\mathrm{x}+2)(\mathrm{x}-2)\ .\frac{4}{(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}-2)}=6$$

$$\Longrightarrow \frac{4.\ (\mathrm{x}+2)}{\mathrm{x}-2}=6$$

$$\Longrightarrow 4.\ (\mathrm{x}+2)=6.\ (\mathrm{x}-2)$$

$$\Longrightarrow 4\mathrm{x}+8=6\mathrm{x}-12$$

$$\Longrightarrow 4\mathrm{x}-6\mathrm{x}=-12-8$$

$$\Longrightarrow -2\mathrm{x}=-20\ \ (-1)$$

$$\Longrightarrow 2\mathrm{x}=20\Longrightarrow \mathrm{x}=10$$

Exemplo 8: Em uma P.G. de 3 termos positivos, o produto dos termos extremos vale 625, e a soma dos dois últimos termos é igual a 30. Qual é o 1º termo?

<u>Resposta:</u> Dado, n=3, $\mathrm{a}_1.\mathrm{a}_3=625$ , $\mathrm{a}_2+\mathrm{a}_3=30$, $\mathrm{a}_1=?$

Podemos escrever a P.G. da seguinte forma $(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}},\mathrm{x},\mathrm{xy})$

São dados que,

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}.\mathrm{xy}=625\\ \mathrm{x}+\mathrm{xy}=30\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}\mathrm{x}^2=625 \ (1)\\ \mathrm{x}(1+\mathrm{y})=30 \ (2)\end{cases}$$

Vamos resolver a equação (1)

$$\mathrm{x}^2=625\Longrightarrow \mathrm{x}=\pm\sqrt{625}\Longrightarrow \mathrm{x}=\pm 25$$

Substituindo os valores de $\mathrm{x}$ na equação (2), temos:

- Para $x=25$, temos:

$$25\ (1+\mathrm{y})=30$$

$$\Longrightarrow \ (1+\mathrm{y})=\frac{30}{25}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{y}=\frac{30}{25}-1$$

$$\Longrightarrow \mathrm{y}=\frac{30-25}{25}$$

$\Longrightarrow \mathrm{y} = \dfrac{5}{25}$

$\Longrightarrow \mathrm{y} = \dfrac{1}{5}$

Então, $\mathrm{a}_1 = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} = \frac{25}{\frac{1}{5}} = 125$

$\mathrm{a}_2 = 25$

$\mathrm{a}_3 = 25.\frac{1}{5} = 5$

Forma-se a P.G.$(125{,}25{,}5)$

- Para $x = -25$, temos:

$-25 \;\; 1 + \mathrm{y} \;\; = 30$

$\Longrightarrow \;\; 1 + \mathrm{y} \;\; = \dfrac{30}{-25}$

$\Longrightarrow \mathrm{y} = -\dfrac{30}{25} - 1$

$\Longrightarrow \mathrm{y} = \dfrac{-30 - 25}{25}$

$\Longrightarrow \mathrm{y} = \dfrac{-55}{25}$

$\Longrightarrow \mathrm{y} = -\dfrac{11}{5}$

Então, $\mathrm{a}_1 = \frac{-25}{-\frac{11}{5}} = -25.(-\frac{5}{11}) = \frac{125}{11}$

$\mathrm{a}_2 = -25$

$\mathrm{a}_3 = -25.(-\frac{11}{5}) = 55$

Forma-se a P.G.$(\frac{125}{11}, -25{,}55)$.

Como foi dito que os 3 termos são positivos, então a P.G. é $(125{,}25{,}5)$

### 2.2.1 CLASSIFICAÇÃO

- Para $q < 0$, tem se a chamada **P.G**. **alternada ou oscilante**

Exemplos:

$$(5, -25, 125, -625, \ldots), \; q = -5$$

- Para $a_1 > 0 \; e \; q > 1$ ou $(a_1 < 0 \; e \; 0 < q < 1)$,tem se a chamada **P.G. crescente**

Exemplos:

$$1, 6, 36, 216, \ldots \;, q = 6$$
$$(-4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \ldots), \; q = \frac{1}{2}$$

- Para $a_1 > 0 \; e \; 0 < q < 1$ ou $(a_1 < 0 \; e \; q > 1)$,tem se a chamada **P.G decrescente**

Exemplos:

$$(2, \; \frac{2}{3}, \; \frac{2}{9}, \; \frac{2}{27}, \ldots), \; q = \frac{1}{3}$$
$$-8, -24, -72, -216 \ldots \;, q = 3$$

### 2.2.2 SOMA DOS N PRIMEIROS TERMOS DE UMA P.G

É dado por:

$$S_n = \frac{a_1 \; 1 - q^n}{1 - q}$$

Segue a demonstração:

Multiplicando $q$ por $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ , obtemos

$$qS_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_n . q$$

Subtraindo $S_n$ por $qS_n$, obtemos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_n q = a_1 - a_1 q^n$$

Ou seja, $S_n \; 1 - q \; = a_1(1 - q^n)$

Logo,

$$S_n = \frac{a_1\ \ 1 - q^n}{1 - q}, q \neq 1$$

Exemplo 9: Calcule a soma dos seis primeiros termos da P.G.$(-2, 4, -8, \ldots)$

<u>Resposta:</u> Dado $a_1 = -2$ e $q = \frac{4}{-2} = -2$, $n = 6$

Usando a formula da soma dos n primeiros termos de uma P.G, temos:

$$S_n = \frac{a_1\ \ q^n - 1}{q - 1}$$

$$\Longrightarrow S_6 = \frac{-2\ \ \ -2\ ^6 - 1}{-2 - 1}$$

$$\Longrightarrow S_6 = \frac{-2\ \ 64 - 1}{-3}$$

$$\Longrightarrow S_6 = \frac{-2.63}{-3}$$

$$\Longrightarrow S_6 = \frac{-126}{-3}$$

$$\Longrightarrow S_6 = 42$$

Exemplo 10: Calcule a soma dos 12 primeiros termos da P.G. que o primeiro termo é 400 e a razão é 1,01

<u>Resposta:</u> Dado, $a_1 = 400$ e $q = 1{,}01$, $S_{12} = ?$

Usando a formula da soma dos n primeiros termos de uma P.G, temos:

$$S_n = \frac{a_1\ \ q^n - 1}{q - 1}$$

$$\Longrightarrow S_{12} = \frac{400[(1{,}01)^{12} - 1]}{12 - 1}$$

$$\Longrightarrow S_{12} = \frac{400\ \ 1{,}126 - 1}{11}$$

$$\Longrightarrow S_{12} = \frac{400.0{,}126}{11}$$

$$\Longrightarrow S_{12} = \frac{50{,}4}{11}$$

$$\Longrightarrow S_{12} = 4{,}58$$

Exemplo 11: Calcule a soma dos dez primeiros termos da P.G. $\ m, m^2, m^3, \ldots$

a) para $m = 2$

b) para $m = 0$

<u>Resposta:</u> Dado, $a_1 = m$, $q = \frac{m^2}{m} \rightarrow q = m$

Vamos achar a formula da soma dos 10 primeiros termos da P.G.

$$S_n = \frac{a_1\ q^n - 1}{q - 1} \rightarrow S_{10} = \frac{m\ m^{10} - 1}{m - 1}$$

a) $S_{10} = \frac{2\ 2^{10} - 1}{2 - 1} \Longrightarrow S_{10} = 2(1024 - 1) \Longrightarrow S_{10} = 2.1023 \Longrightarrow S_{10} = 2046$

b) $S_{10} = \frac{0\ 0^{10} - 1}{0 - 1} \Longrightarrow S_{10} = 0$

Exemplo 12: Quantos termos da P.G.$(3,6,12, \ldots)$ devemos somar a fim de que o total resulte 12285?

<u>Resposta:</u> Dado, $a_1 = 3$, $q = 2$, $S_n = 12285$

Pela formula da soma do n primeiros termos de uma P.G. temos:

$$\frac{3\ 2^n - 1}{2 - 1} = 12285$$

$$\Longrightarrow 3\ 2^n - 1\ = 12285$$

$$\Longrightarrow 2^n - 1 = \frac{12285}{3}$$

$$\Longrightarrow 2^n - 1 = 4095$$

$$\Longrightarrow 2^n = 4096$$

$$\Longrightarrow 2^n = 2^{12}$$

$$\Longrightarrow n = 12 \text{ termos}$$

Portanto, é uma P.G de 12 termos

Exemplo 12: Encontre a fração geratriz das dízimas periódicas abaixo:

a)0,222...

b)1,777...

<u>Resposta:</u>

a) Seja $x = 0{,}222 \ldots$ que podemos escrever da seguinte forma

$$x = 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + \cdots$$

Ao observarmos $x$ representa uma P.G. infinita

Que é dado $a_1 = 0{,}2$ e $q = \frac{0{,}02}{0{,}2} = 0{,}1$

Então, usando a fórmula da P.G. infinita temos:

$S_n = \frac{a_1}{1-q} \Longrightarrow x = \frac{0,2}{1-0,1} \Longrightarrow x = \frac{0,2}{0,9} \Longrightarrow x = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{9}{10}} \Longrightarrow x = \frac{2}{9}$

b)Seja $x = 1,777\ldots$ que podemos escrever da seguinte forma

$x = 1 + 0,777$

$x$ vai ser dividido em duas equações chamadas $x_1$ e $x_2$ que vai ficar da seguinte maneira.

$x_1 = 1①$ e $x_2 = 0,777②$

De ①, temos:

$a_1 = 1$ e $q = 0$, assim:

$x_1 = \dfrac{1}{1-0} \Longrightarrow x_1 = 1$

De ②, temos:

$x_2 = 0,7 + 0,07 + 0,007$

Onde, $a_1 = 0,7$ e $q = 0,1$ , assim:

$x_2 = \dfrac{0,7}{1-0,1} \Longrightarrow x_2 = \dfrac{0,7}{0,9} \Longrightarrow x_2 = \dfrac{7}{9}$

Portanto, a fração é obtida a partir de $x$, que é a soma dos resultados de ① e ②, temos:

$x = x_1 + x_2 = 1 + \dfrac{7}{9} \rightarrow x = \dfrac{16}{9}$

Exemplo 13: Aumentos sucessivos de 10% e 20% equivalem a um único aumento de quanto?

<u>Resposta:</u>

Vamos usar o seguinte formula

$G_{n+1} = (1+i)G_n$

Onde, $i$-taxa de crescimento constante

Então, vamos usar duas constantes $i_1 = 10\% = 0,1$ e $i_2 = 20\% = 0,2$

Faremos

$G = (1+i_1)(1+i_2)G_0$

$\Longrightarrow G = (1+0,1)(1+0,2)G_0$

$\Longrightarrow G = 1,1.1,2.G_0$

$\Longrightarrow G = 1,32G_0$

Portanto, teve um aumento de 32%

Exemplo 14: Qual o desconto único equivalente a descontos sucessivos de 10% e 20%?

Resposta:

Temos, $i_1 = -10\% = -0,1$ e $i_2 = -20\% = -0,2$

Assim, $G = (1 - 0,1)(1 - 0,2)G_0 \Longrightarrow G = 0,9.0,8G_0 \Longrightarrow G = 0,72G_0$

Logo, teve um desconto de 28%

Exemplo 15: Se a base de um retângulo aumentar 10% e altura diminuir de 10%, de quanto variará a sua área?

Resposta:

Área do retângulo: $A = b.h$

Área do retângulo após variações: $A_1 = (1 + 0,1)b.(1 - 0,1)h \Longrightarrow A_1 = 0,99b.h$

Portanto, a área variou $-1\%$

Exemplo 16: A mão de obra responde por 70% dos custos de certa empresa. Se os salários aumentarem de 30% e dos demais custos aumentarem de 10% de quanto aumentará o custo total?

Resposta:

Antes do reajuste:

Custo Total

C=1,0

Após reajuste:

Mão de obra

$M^I = 0,7.1,3 = 0,91$

Demais custos

$D^I = (0,3).(1,1) = 0,33$

Custo total

$C^I = M^I + D^I = 0,91 + 0,33 = 1,24$

Assim, $C^I - C = 1,24 - 1,0 = 0,24$ ou $24\%$

Logo, aumentou o custo total 24%

# Capítulo 3 APLICAÇÕES

Neste capítulo, mostraremos algumas aplicações de Progressão Aritmética e Geométrica. Visto que é assunto de grande escala, pois em tudo que fazemos utilizamos sequência. Uma das aplicações abordada neste trabalho são os Números Triangulares e a outra aplicação é o uso de Progressão Aritmética e Geométrica na Geometria Fractal.

## 3.1 NÚMEROS TRIANGULARES

Os Números Triangulares é dado pela seguinte sequência:

**1, 3, 6, 10, 15,...**

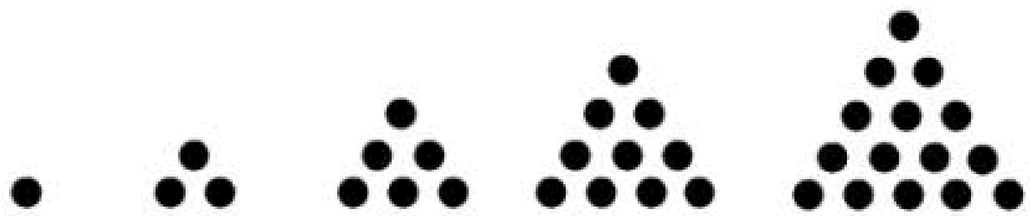


Figura 5 - Números Triangulares

O Número Triangular é a soma de n números naturais de 1 a n. Como é mostrado a seguir:

1 = **1**

1 + 2 = **3**

1 + 2 + 3 = **6**

1 + 2 + 3 + 4 = **10**

1 + 2 + 3 + 4 + 5 = **15**

1 , *3* , *6* , *10* , *15* ,...

O enésimo número triangular $T_n$ é dado pela soma da Progressão Aritmética, lembrando que a soma dos termos de uma Progressão Aritmética finita é a metade do produto do número de termos pela soma dos dois termos extremos, temos:

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemplo 1: Achar o 10º e o 50º número triangular.

$$T_{10} = \frac{10 \quad 10+1}{2} \Rightarrow T_{10} = 55$$

$$T_{50} = \frac{50 \quad 50+1}{2} \Rightarrow a_{50} = 1275$$

Um outro ponto, a se notar, é que a soma de dois termos sequentes é o quadrado do segundo índice.

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 &= 1 + 3 = 4 = 2^2 \\
a_2 + a_3 &= 3 + 6 = 9 = 3^2 \\
a_3 + a_4 &= 6 + 10 = 16 = 4^2 \\
a_4 + a_5 &= 10 + 15 = 25 = 5^2 \\
\vdots \qquad & \qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n-1} + a_n &= \qquad\qquad\qquad n^2
\end{aligned}$$

Exemplo 2: Imaginemos uma situação em que k pessoas se encontram. Para que todos se cumprimentem mutuamente, quantos apertos de mão deverão ser efetuados.

Solução:

Primeiro, mostremos uma Situação hipotética para 5 pessoas (**A, B, C, D, E**) , cujo:

**A** cumprimenta B, C, D, E – (A, B)(A,C)(A,D)(A,E)

**B** cumprimenta C, D,E, pois A já a cumprimentou – (B,C)(B,D)(B,E)

**C** cumprimenta D, E , pois A e B, já a cumprimentaram. – (C,D)(C,E)

**D** cumprimenta E, pois A, B e C, já a cumprimentaram. – (D,E)

**E** não precisa cumprimentar as outras pessoas, pois A, B, C e D, já a cumprimentaram.

Note que ao total foram 10 apertos de mão, pois foram na sequência 4 + 3 + 2 + 1 apertos de mão, formando assim, a soma dos números naturais de 1 a n.

Agora, vamos mostrar matematicamente, para k pessoas.

O 1º cumprimenta (k-1) pessoas

O 2º cumprimenta (k-2) pessoas

O 3º cumprimenta (k-3) pessoas

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

O (k-1)º cumprimenta 1 pessoa.

O kº cumprimenta 0 pessoas.

Portanto, observemos que o total de apertos de mão é $T_{k-1}$.

Para o qual, acharemos através $T_{k-1}$ através da fórmula do Termo Geral dos Números Triangulares,

$$T_n = \frac{n\,(\,n+1)}{2}$$

Logo,

$$T_{k-1} = \frac{k-1\ \ [(\,k-1)+1)]}{2}$$

$$\Longrightarrow\ T_{k-1} = \frac{k-1\ \ k}{2}$$

Agora, retornemos a situação Hipotética inicial, para k = 5 pessoas, e com isso resultará o total de apertos de mão:

$T_{5-1} = \frac{5-1\ \ 5}{2} \rightarrow T_4 = \frac{4.5}{2} \rightarrow T_4 =$ 10 Apertos de mão.

## 3.2 GEOMETRIA FRACTAL

Há mais de dois mil anos, o matemático grego Euclides, enquanto caminhava pela praia, notou que a areia, vista como um todo se assemelhava a uma superfície contínua e uniforme, embora fosse composta por pequenas partes visíveis. Daí tentou provar que as formas da natureza poderiam ser reduzidas em formas geométricas simples, porém não conseguiu chegar ao resultado esperado.

Anos mais tarde, após vários estudos o matemático polonês Benoît Mandelbrot concluiu o estudo que Euclides havia começado, logo ficou conhecido como o pai da Geometria Fractal, pois atribuiu o termo Fractal e foi o primeiro a visualizar os fractais complexos.

> “Concebi, desenvolvi e apliquei a muitas áreas uma nova Geometria da natureza, que encontra ordem em formas e processos caóticos. Batizei-a em 1975 com a palavra Fractal”. (Mandelbrot)

Benoît Mandelbrot, na década de 70, mostrou que as irregularidades da natureza são de uma regularidade impressionante e desvendou uma realidade além da imaginação: um lugar onde coisas infinitamente grandes podem caber em um espaço pequeno e limitado.

Todavia, a Geometria Fractal está intimamente ligada a Teoria do Caos que busca padrões organizados de comportamento dentro de um sistema aparentemente aleatório. "O Caos não tem estátua nem figura e não pode ser imaginado; é um espaço que só pode ser conhecido pelas coisas que nele existem, e ele contém o universo infinito." (Frances A. Yates)

Em síntese, Um fractal é a maneira ideal para ver o infinito com o olho da mente, porque ele não pode exibir a complexidade infinita que reina nele. Eles sempre estiveram presente entre nós, como por exemplo: samambaias, em nossos pulmões, couve, flocos de neve.

> “Um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma reprodução do todo. Não podemos ver um fractal porque é uma figura limite, mas as etapas de sua construção podem dar uma ideia da figura toda. Seu nome se deve ao fato de que a dimensão de um fractal não é um número inteiro”. Sallum (2005)

> Os fractais são objetos matemáticos. Da mesma forma que uma circunferência, um quadrado ou um triângulo, eles não possuem existência real, mas muitos fenómenos em nosso redor podem ser modelados através deles, de forma a conseguirmos explicar as suas estruturas e, eventualmente, prever os seus comportamentos.(Mandelbrot – Jorge Nuno da Silva, p. 19.)

Os Fractais possuem algumas propriedades peculiares, como: Dimensão Fractal, Auto-semelhança e Complexidade infinita.

- Dimensão Fractal: é uma medida que quantifica a densidade dos fractais no espaço métrico em que são definidas e pode ser utilizada para determinação da rugosidade de uma textura.

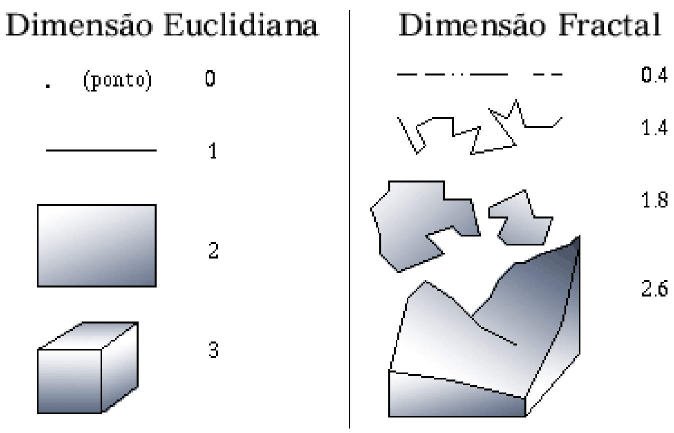



Figura 6 - Dimensão Fractal

- Auto-semelhança: caracteriza-se por cada pequena porção do fractal poder ser vista como uma réplica de todo o fractal numa escala menor.

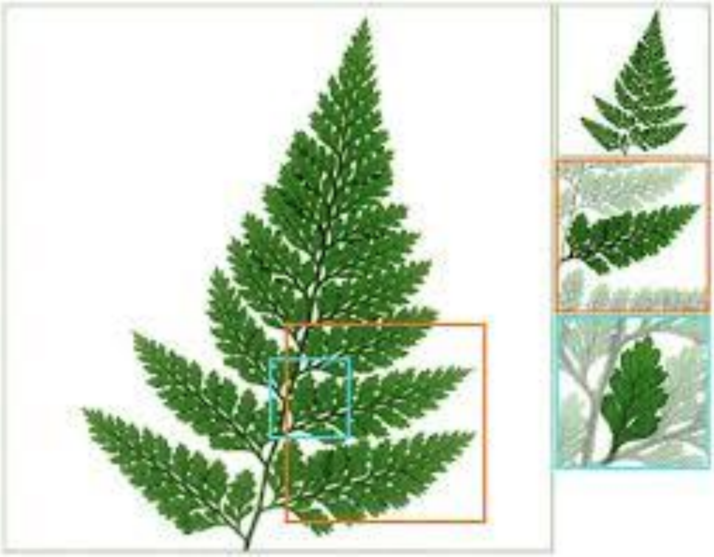


Figura 7- Auto semelhança

- Complexidade infinita: É uma propriedade dos fractais que significa que nunca conseguiremos representá-los completamente, pois a quantidade de detalhes é infinita. Sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores.

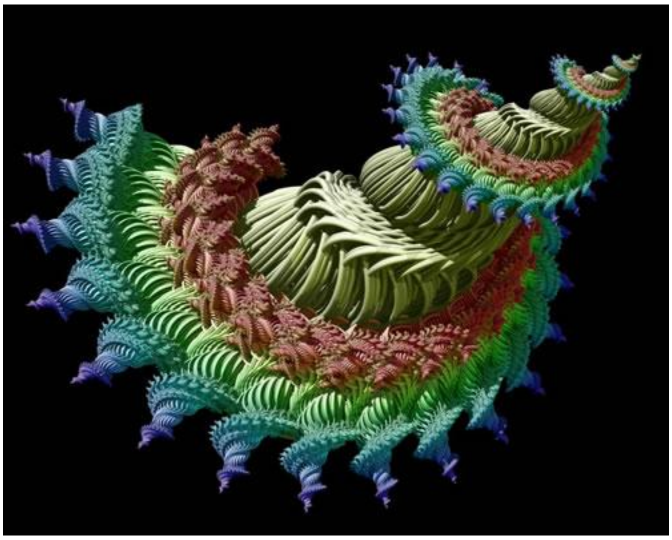


Figura 8 – Complexidade Infinita

Existem muitos exemplos de fractais e que mostram uma complexidade regular e auto similaridades infinitas, todos eles parecem criaturas estranhas e belas, como por exemplo: Triângulo de Sierpinski, Sierpinski, Curva de Koch, entre outros.

Neste trabalho, iremos trabalhar com a Curva de Koch e o Floco de neve de Koch.

### 3.2.1 **CURVA DE KOCH**

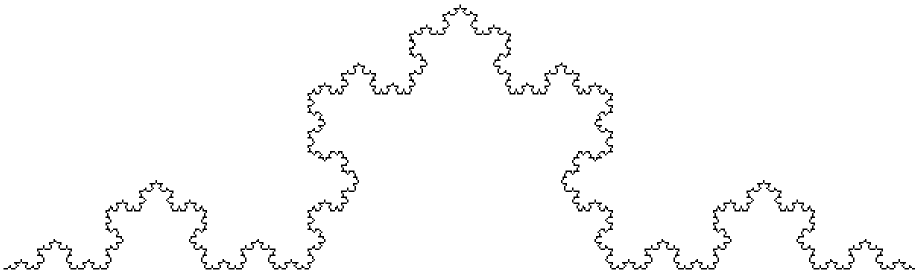


Figura 9 - Curva de Koch

No ano de 1904, o matemático sueco Helge Von Koch inventou a Curva de Koch.

A Curva de Koch é um objeto fractal obtido por meio de várias iterações (repetições), cujo o resultado sempre é a imagem do anterior.

<u>Propriedades:</u>

- O comprimento é infinito.
- Área finita.
- Metade da curva de Koch tem o mesmo comprimento que ela inteira.

Para a construção de um objeto fractal, o dividimos em vários Níveis, o qual segue –se alguns passos:

**NO NÍVEL 0**

É dado 1(um) segmento de comprimento **l** e Comprimento total da curva **l**.

**NO NÍVEL 01**

O Segmento é dividido em 3(três) partes iguais, resultando o comprimento em $\frac{1}{3}$.

A parte do meio é substituída por um triângulo equilátero sem a base, que vai resultar em 4 (quatro) segmentos.

O Comprimento total da curva é obtido pelo número de segmentos vezes o comprimento de cada segmento, resultando em $\mathbf{4.\frac{1}{3}}$.

Figura 10 - Nível 1

**NO NÍVEL 02**

Neste Nível, repete - se o mesmo procedimento que o NÍVEL 01 para cada segmento. Logo, Cada segmento é dividido em 3 partes, ao qual o comprimento final vai ser $\frac{1}{3}$ vezes $\frac{1}{3}$, resultando em $\frac{1}{3^2}$

Figura 11 - Nível 2

Nos próximos níveis irão se repetir os passos.

Abaixo, segue um quadro geral do nível 1 ao n - enésimo nível.

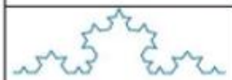
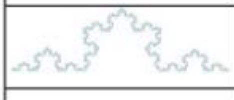
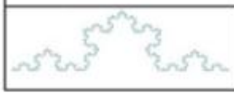
| | Nível | Nº de segmentos | Comprimento de cada segmento | Comprimento total da curva |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | $\ell$ | $\ell$ |
|  | 1 | 4 | $\frac{\ell}{3}$ | $4\frac{\ell}{3}$ |
|  | 2 | $4^2$ | $\frac{\ell}{3^2}$ | $4^2\frac{\ell}{3^2}$ |
|  | 3 | $4^3$ | $\frac{\ell}{3^3}$ | $4^3\frac{\ell}{3^3}$ |
|  | 4 | $4^4$ | $\frac{\ell}{3^4}$ | $4^4\frac{\ell}{3^4}$ |
| | ... | ... | ... | ... |
|  | N | $4^n$ | $\frac{\ell}{3^n}$ | $\left(\frac{4}{3}\right)^n \ell$ |

Figura 12 - Quadro geral dos n níveis da Curva de Koch

Note que, na Coluna Nº de Segmentos , encontramos uma PG de razão 4.

Na Coluna Comprimento de cada segmento, encontramos uma PG de razão $\frac{1}{3}$.

E por fim, a Coluna Comprimento total da curva, é uma PG de razão $\frac{4}{3}$.

### 3.2.2 **FLOCO DE NEVE DE KOCH**

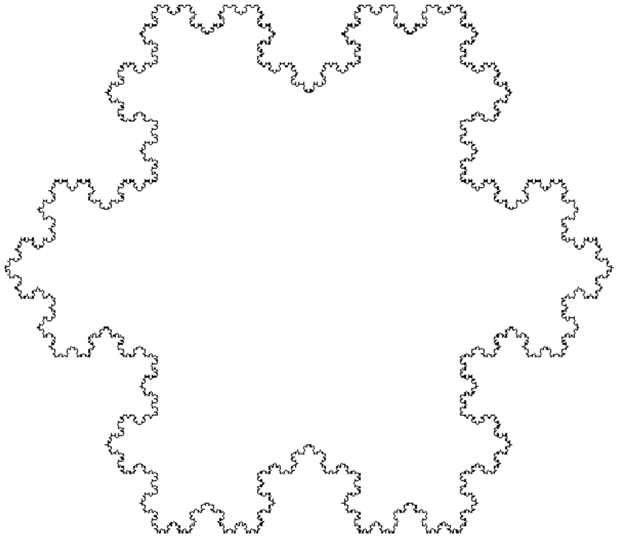


Figura 13 - Floco de Neve de Koch

O Floco de Neve de Koch é obtido a partir da Curva de Koch, cuja base é um triângulo equilátero.

<u>Propriedades:</u>

- Perímetro Infinito
- Área limitada

O processo de construção do Floco de Neve de Koch é o mesmo que o da Curva de Koch, só que multiplicado por 3:

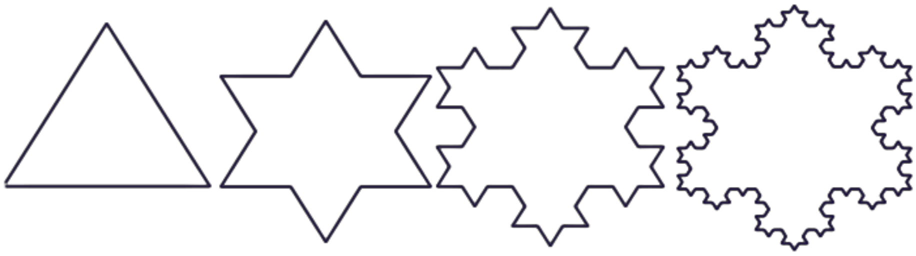


Figura 14 - Níveis do Floco de Neve de Koch

**NÍVEL 0**

Nº de lados: 3

Comprimento dos lados: $l$

Perímetro: 3 x $l$= $3l$

**NÍVEL 01**

Nº de lados: 3 x 4 =12

Comprimento dos lados: $\frac{l}{3}$

Perímetro: 3 x 4 x $\frac{l}{3}$ = $3(\frac{4}{3})l$

**NÍVEL 02**

Nº de lados: 3 x 4 x 4 =3 x $4^2$ = 48

Comprimento dos lados: $\frac{l}{9}$ = $\frac{l}{3^2}$

Perímetro: 3 x $4^2$ x $\frac{l}{3^2}$ = $3(\frac{4}{3})^2l$

**NÍVEL 03**

Nº de lados: 3 x 4 x 4 x 4 =3 x $4^3$ = 192

Comprimento dos lados: $\frac{l}{27}$ = $\frac{l}{3^3}$

Perímetro: 3 x $4^3$ x $\frac{1}{3^3}$ = $3(\frac{4}{3})^3l$

Em síntese, teremos:

| NIVEL | Nº DE LADOS | COMPRIMENTO DOS LADOS | PERÍMETRO |
|---|---|---|---|
| 0 | 3 | L | $3l$ |
| 1 | 3X4 | $\frac{l}{3}$ | $3(\frac{4}{3})l$ |
| 2 | $3 \times 4^2$ | $\frac{l}{3^2}$ | $3(\frac{4}{3})^2 l$ |
| 3 | $3 \times 4^3$ | $\frac{l}{3^3}$ | $3(\frac{4}{3})^3 l$ |
| ... | ... | .... | ... |
| n | $3 \times 4^n$ | $\frac{l}{3^n}$ | $3(\frac{4}{3})^n l$ |

Figura 15 - Quadro geral dos N níveis do Floco de Neve de Koch

Concluímos, que pelas Colunas de Nº de lados, Comprimento dos lados e Perímetro formam-se Progressões Geométrica de razão 4, $\frac{1}{3}$ , $\frac{4}{3}$ , respectivamente.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como intuito mostrar a grande importância da Progressão Aritmética e Geométrica para a Matemática; é um assunto vasto, que alcança vários ramos, como a Biologia, a Física, a Estatística, entre outros. Ela está presente no nosso dia a dia.

Aqui resolvi trabalhar com duas aplicações, os Números Triangulares e a Geometria Fractal.

Os Números Triangulares pela simplicidade que apresenta, a sequência é dada pela soma sequenciada dos números naturais.

A Geometria Fractal que é assunto que sempre me deu prazer de trabalhar, pela exuberância que se apresenta, pelos ricos detalhes dos seus fractais. A Geometria Fractal vai além da Geometria Euclidiana, pois apresentam Complexidade Infinita, uma capacidade de se reproduzir e dimensões que vão além.

Com esse trabalho, tive a oportunidade aumentar mais meu aprendizado e espero que esteja contribuindo para o aprendizado, daquele que tenha curiosidade em conhecer.

## BIBLIOGRAFIA

LIMA, Elon Lages Lima; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar **A matemática do Ensino Médio vol. 2.** 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1998

MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C. **Progressões e Matemática Financeira.** 5. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001

PAIVA, Manoel Rodrigues **Matemática: Ensino de 2º grau.** 1. ed. São Paulo: Moderna, 1995.

<http://www.somaticaeducar.com.br/arquivo/material/112008-08-23-19-28-11.pdf>, Aceso em Novembro/2015

<http://jnsilva.ludicum.org/hm2008_9/Livro2.pdf>, Acesso em: dezembro/2015

<http://professorandrios.blogspot.com.br/2011/06/geometria-fractal-arte-e-matematica-em.html> , Acesso em: Dezembro/2015

<www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1791.pdf >, Acesso em: Janeiro/2016

<http://stoa.usp.br/osame/files/355/1860/Fractais_Ediouro2.pdf >, Acesso em: março/2016.

<http://www.atractor.pt/va/mat/numeros/triangulares/index.html>, Acesso em: Março/2016

<http://brasilescola.uol.com.br/matematica/numeros-triangulares.htm>, Acesso em: Março/2016

<http://sites.unifra.br/Portals/35/2012/08.pdf>, Acesso em: Abril/2016

<http://www.fractarte.com.br/ >, acesso em: maio/2016.

<facos.edu.br/publicacoes/revistas/.../fractais_progressao_e_serie_geometrica.pdf>, Acesso em: junho/2016

<http://www.e-biografias.net/pitagoras> , acesso em junho/2016

<http://www.e-biografias.net/euclides/>, acesso em junho/2016