UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

UM ESTUDO SOBRE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

HEMERSON GUEBA MOURA DA SILVA

CAMPINA GRANDE
Maio de 2016

HEMERSON GUEBA MOURA DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE

Maio de 2016

S586e Silva, Hemerson Gueba Moura da.
Um estudo sobre sequências numéricas [manuscrito] / Hemerson Gueba Moura da Silva. - 2016.
60 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática".

1. Progressão aritmética. 2. Progressão geométrica. 3. Sequências numéricas. 4. Limites. I. Título.

21. ed. CDD 513.4

HEMERSON GUEBA MOURA DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Aprovado em: 03 / 06/ 2016

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

COMISSÃO EXAMINADORA

Luciana Freitas

Prof^{a}. Dra. Luciana Roze de Freitas

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

ORIENTADORA

Maria Isabelle Silva

Prof^{a}. Dra. Maria Isabelle Silva

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

EXAMINADORA

Thiciany Matsudo Iwano

Prof^{a}. Ma. Thiciany Matsudo Iwano

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

EXAMINADORA

Dedicatória

Dedico este trabalho, primeiramente a meu pai (Gonçalo Moura da Silva) que esteve sempre presente em tudo que faço, dando apoio inclusive pra que eu fizesse o vestibular para matemàtica, a Profª Ana Aparecida Moura da Silva minha companheira que também sempre me deu todo o apoio pra continuar buscando meus objetivos e a Profª. Dra. Luciana Roze de Freitas, sempre que precisei de uma orientação tanto como aluno quanto como amigo esteve presente

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu pai, e a Profª Ana Aparecida todo o apoio passado pra mim em minha trajetória.

Agradeço também a minha orientadora Profª. Dra. Luciana Roze de Freitas pela atenção, compreensão, paciência e todo tempo dedicado para que eu pudesse ter concluído o trabalho com êxito e por todo apoio, até mesmo para que eu conquistasse o tempo que passei como seu monitor de calculo III.

Agradeço as professoras: Dra. Luciana Roze de Freitas, Dra. Maria Isabelle Silva e Ma. Thiciany Matsudo Iwano por terem aceitado fazer parte da minha banca, e principalmente pelas ajudas que me deram durante a pesquisa bem como na graduação.

Agradeço aos meus colegas de graduação: Weller Felipe, Alan Klisman, entre outros, que conviveram comigo durante esses quatro anos e meio, e que de alguma forma foram importantes na minha trajetória no curso, ora estudando, ora dando forças. E me sinto grato por ter tido a oportunidade de conquistar suas amizades.

"Não te vanglorie da vitória de hoje sobre seu adversário, pois amanhã o mesmo poderá vencê-lo, a única vitoria que perdura é a alcançada sobre sua própria ignorância ."

(Mestre Gigôro Kano)

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre sequências numéricas, iniciando com um breve histórico deste tema, onde fazemos referência a alguns matemáticos que contribuíram para o seguimento desse estudo. Em seguida, apresentamos um estudo do conteúdo trabalhado no Ensino Médio e prosseguimos com o conteúdo abordado no Ensino Superior. Faremos uma revisão bibliográfica, apresentando os resultados referentes as progressões aritméticas e geométricas e as principais definições envolvendo sequências numéricas e limites de sequências, finalizando com alguns limites importantes na matemática.

Palavras-chave: Progressão aritmética; Progressão geométrica; Sequências numéricas; Limites de sequências;

Abstract

In this work we present a study of numerical sequences, starting with a brief history of this issue, which we refer to some mathematicians who contributed to the follow-up of this study. Next, we present a study of the content worked in high school and continuing with the content covered in Higher Education. We will do a literature review, presenting the results of arithmetic and geometric progressions and key settings involving numerical sequences and limits of sequences, ending with some important limits in mathematics.

Palavras-chave: Arithmetically progression; Geometric progression; numerical sequences; Limits sequences;

Sumário

Introdução

Tivemos como objetivo para a elaboração deste trabalho, disponibilizar um conteúdo de fácil compreensão e que possa ser mais uma opção de pesquisa sobre sequências numéricas, buscando clareza e sem deixar faltar as principais definições e resultados que mostraremos no decorrer dos capítulos.

Apresentaremos um estudo básico sobre sequências numéricas que é um caso particular de funções e base para se iniciar os estudos em Análise Matemática, abordaremos desde os conceitos mais simples apresentados no ensino médio, até as demonstrações dos principais resultados de sequências vistos no ensino superior. No Capítulo 1, faremos um breve histórico a respeito do início do estudo de sequências e de alguns matemáticos que contribuíram muito para o desenvolvimento desse ramo da matemática. No Capítulo 2, será abordado a noção intuitiva de sequências numéricas dando base para o estudo de Progressão aritmética e em seguida Progressão geométrica. No Capítulo 3, apresentaremos as definições e resultados de sequências, limites de sequências, sequência de Cauchy e propriedades de limites. E finalizando no capítulo 4, mostraremos alguns exemplos de limites importantes.

Capítulo 1

Um pouco de história

Iniciamos este capítulo, com um resumo histórico sobre sequências numéricas, citando em seguida, algumas sequências famosas. No final do capítulo apresentamos um pouco da história dos matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento desta teoria. Algumas fontes pesquisadas podem ser encontradas nas referências [1], [3], [8], [10] e [9].

1.1 Breve histórico sobre sequências

As progressões eram utilizadas por povos antigos, como os egípcios, que observavam os períodos em que ocorria a enchente Rio Nilo, a fim de estabelecer padrões que determinassem estes períodos. Também foram encontrados registros de tábuas babilônicas, onde aparecem sequências de quadrados de números inteiros. O papiro de Rhind (ou Ahmes) é um dos documentos mais antigos datado de aproximadamente 1650 a.C., é um documento egípcio onde consta a solução de 85 problemas matemáticos, alguns envolvendo progressões.

Papiro Rhind

A medida em que a teoria das sequências foi se desenvolvendo, surgiram algumas sequências famosas que levam o nome de seus criadores. Vejamos algumas delas.

Sequência de Fibonacci

A Sequência de Fibonacci é uma sequência de números inteiros, começando normalmente por 1 e 1, essa sequência recebeu o nome do matemático italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido por Fibonacci, que descreveu, no ano de 1202, o crescimento de uma população de coelhos. Essa sequência já era conhecida na antiguidade onde cada termo subsequente, corresponde a soma dos dois anteriores.

Os números de Fibonacci, compõem a seguinte sequência

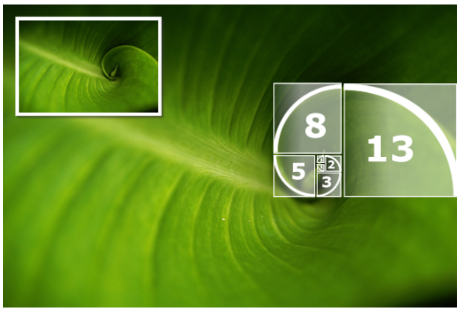
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \ldots.$$

A sequência é definida recursivamente pela fórmula

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

onde $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ são valores iniciais.

A sequência de Fibonacci tem aplicações na análise de mercados financeiros, na ciência da computação e na teoria dos jogos, também esta presente em configurações biológicas, como por exemplo, na espiral formada pela folha de uma bromélia, através da composição de quadrados com arestas de medidas proporcionais aos elementos da sequência.



Sequência de Farey

A Sequência de Farey é uma sucessão numérica de frações irredutíveis entre 0 e 1, ordenadas de modo crescente, que denotamos por F_N. Cada sequência de Farey começa no 0, representado pela fração $\frac{0}{1}$, e termina no 1, representado pela fração $\frac{1}{1}$. Além disso, o denominador não excede o valor de N.

Por exemplo, para $N = 8$ a sequência de Farey é a seguinte:

$$\frac{0}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{6}{7}, \frac{2}{8}, \frac{2}{7}, \ldots, \frac{1}{1}.$$

De maneira geral, dado um número natural N, temos

$$\frac{0}{N}, \frac{1}{N}, \frac{1}{N-1}, \frac{1}{N-2}, \ldots, \frac{N-2}{N-1}, \frac{2}{N}, \frac{2}{N-1}, \ldots, 1,$$

ou seja, F_N é o conjunto de todas as frações irredutíveis $\frac{a}{b}$, onde, $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$ e $0 \leq b \leq N$, ordenadas de modo crescente.

Sequência de Golomb

A sequência de Golomb é uma sequência de números inteiros, não-decrescente, na qual $x(n)$ é o número de vezes em que n ocorre na sequência, começando com $x(1) = 1$, e com a propriedade de que, para $n > 1$, cada $x(n)$ é o menor número inteiro que faz com que seja possível satisfazer a condição. Essa sequência recebeu esse nome em homenagem a Solomon Lobo Golomb (1932 - 2016).

Exemplo 1.1. *Seja $x(1) = 1$, o valor 1, só ocorre uma vez na sequência, de modo que $x(2)$ não pode ser 1 novamente, e portanto deve ser 2. Obtemos os primeiros valores da forma:*

1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 12.

Colin Mallows obteve a seguinte relação de recorrência:

$$x(1) = 1 \text{ e } x(n+1) = 1 + xn + 1 - x[-x(n)].$$

A ideia de limite surgiu por volta de 450 a.C. com os paradoxos de Zenão de Eléia, o Eudoxo de Cnido por volta do século IV e o de Arquimedes Siracusa $(287 - 212$ a.C.), que utilizavam o método da exaustão para calcular áreas ou volume de uma região.

No século XVII vários matemáticos como, Isaac Newton $(1641 - 1727)$ com Princípia Mathematica, Gottfried Wlhelm Leibniz $(1646-1716)$, Jean Le Rond D'Alembert $(1717-1783)$, buscaram utilizar o conceito de limite mesmo sem ter uma formulação explicita, porém através desses estudos foi sendo desenvolvido a uniformização do método de exaustão no cálculo de áreas e noção de somas de séries.

Em 1812 Carl Friedrich Gauss $(1777 - 1855)$ deu o primeiro tratamento rigoroso para a noção de convergência de sequências e séries. Augustin Louis Cauchy $(1789 - 1857)$ formulou as noções modernas de limites, continuidade e convergência de séries. No século XIX, por obra de Abel, Weierstrass, Riemann e outros, foi desenvolvida a teoria das funções análiticas.

1.2 Pioneiros no estudo de sequências numéricas

Augustin Louis Cauchy

Augustin Louis Cauchy nasceu em Paris, no dia 21 de agosto de 1789. Veio de uma família de intelectuais e começou a dedicar-se ao estudo da matemática aos 7 anos de idade. Aos 13 anos de idade, ingressou na École Polytechnique e aos 17 foi para a École des Ponts et Chousses (Escola de Pontes e Estradas), onde se formou em engenharia civil em 1809, com 20 anos.

Seus estudos mais destacados enquanto matemático foram em análise de funções complexas, convergências, divergências de séries e sequências, Cauchy escreveu cerca de 800 trabalhos originais em matemática e também dedicou-se a física. Escreveu importantes trabalhos a respeito da Mecânica dos Fluidos, da Ondulatória e da Elasticidade. Cauchy faleceu na cidade de Sceaux, no dia 23 de maio de 1857, com 68 anos de idade.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

Weierstrass nasceu em 31 de outubro de 1815, na cidade de Ostenfeld na Alemanha. Estudou direito na cidade de Bonn de 1834 a 1838, em 1841 escreveu seu primeiro trabalho sobre séries de potência das funções elípticas. Em 1856 escreveu vários trabalhos sobre convergência e divergência de séries e publicou aproximadamente 300 trabalhos originais. Weiertrass faleceu em 19 de fevereiro de 1897 em Berlim.

Capítulo 2

Sequências numéricas no ensino médio

Neste capítulo vamos iniciar com uma noção intuitiva de sequência. Apresentaremos algumas definições, exemplos e resultados envolvendo Progressão aritmética e Progressão geométrica no Ensino Médio. O conteúdo que estamos abordando neste capítulo, pode ser encontrado na referência [2].

2.1 Noção intuitiva de sequências

Em muitas situações da vida diária aparece a ideia de sequência com bastante frequência. Assim, por exemplo, temos:

i) sequência dos dias da semana (domingo, segunda, ..., sábado).

ii) sequência dos números naturais (1, 2, 3, 4, ...).

Nesses exemplos podemos observar uma determinada ordem nos elementos da sequência. Esses elementos são chamados de termos da sequência. Podemos representar o primeiro termo por x_1 (lê-se, x índice um), o segundo termo por x_2, o terceiro termo por x_3 e assim por diante, até o termo de ordem n ou n-ésimo termo x_n, então, uma sequência pode ser representada por

$$(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Neste trabalho apresentaremos apenas o estudo das sequências numéricas.

2.2 Sequências numéricas

Definição 2.1. *Uma sequência numérica finita de n termos é uma função X cujo domínio é um subconjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ e o contra-domínio é o conjunto dos números reais. Os termos da imagem são indicados por*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n.$$

Definição 2.2. *Uma sequência numérica infinita é uma função x cujo o domínio é*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\},$$

e o contra-domínio é o conjunto dos números reais. Indicamos os elementos da imagem por

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

assim,

$$x(1) = x_1, x(2) = x_2, x(3) = x_3, \ldots, x(n) = x_n, \ldots$$

Exemplo 2.1. *A sequência $x_n = 2n$ dos números pares positivos é infinita, na qual, $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_8 = 16$ e etc.*

2.3 Determinação de uma sequência

Toda sequência é determinada por leis matemáticas chamadas *leis de formação*, que possibilitam determinar todos os seus termos. Neste caso, o termo x_n é dado por uma expressão dependendo de n. Por exemplo, a sequência

$$x_n = 2n - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

é dada por

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\,.\,1 - 1 = 1 \\ x_2 &= 2\,.\,2 - 1 = 3 \\ x_3 &= 2\,.\,3 - 1 = 5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

e assim por diante, de acordo com os valores atribuídos a n. Logo, a sequência encontrada é

$$(1,\, 3,\, 5,\, 7,\, \ldots),$$

que é a sequência dos números naturais ímpares.

Exemplo 2.2. *Podemos determinar o termo x_n, na sequência dos números quadrados perfeitos.*

$$(1,\, 4,\, 9,\, 16,\, 25,\, \ldots).$$

Observamos que se $n = 1$, implica que $x_1 = 1 = 1^2$, da mesma forma fazendo, $n = 2$, resulta em $x_2 = 4 = 2^2$, e assim por diante. Para um n qualquer implica que

$$x_n = n^2,$$

logo, $x_n = n^2$ é o termo geral da sequência.

2.4 Progressão aritmética (P.A)

Definição 2.3. *Progressão aritmética (P.A) é toda sequência de números na qual a diferença entre cada termo (a partir do segundo) e o termo antecedente é sempre o mesmo valor (constante). Essa constante é chamada razão da progressão (P.A) e é representada pela letra r.*

Observação 2.1. *Podemos observar que de forma geral, uma sequência*

$$(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots),$$

é uma P.A quando

$$x_n = x_{n-1} + r,$$

resultando

$$x_n - x_{n-1} = r, \text{ para todo } n \geq 2,$$

comparando, temos

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= x_3 - x_2 \\ &= x_4 - x_3 = \ldots \\ &= x_n - x_{n-1} = \ldots \\ &= r. \end{aligned}$$

Definição 2.4. *Uma sequência* (x_n) *é uma progressão aritmética crescente, quando* $r > 0$.

Exemplo 2.3. *A sequência* $(2, 7, 12, 17, \ldots)$ *tem* $r = 5$, *logo é uma P.A* ***crescente****, pois* $r > 0$.

Definição 2.5. *Uma sequência* (x_n) *é uma progressão aritmética decrescente, quando* $r < 0$.

Exemplo 2.4. *A sequência* $(20, 10, 0, -10, -20)$ *é uma P.A de cinco termos em que o primeiro termo é* $x_1 = 20$ *e* $r = -10$. *Essa é uma P.A* ***decrescente****, pois* $r < 0$.

Definição 2.6. *Uma sequência* (x_n) *é uma progressão aritmética* ***constante ou estacionária****, quando* $r = 0$.

Exemplo 2.5. *A sequência* $(4, 4, 4)$ *é uma P.A de três termos, em que o primeiro termo é* $x_1 = 4$ *e* $r = 0$. *Logo, é uma P.A estacionária.*

Exemplo 2.6. *A sequência* $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$ *não é uma progressão aritmética, pois as diferenças entre termos sucessivos são alternadamente* -2 *e* 2.

Observação 2.2. *Resulta da definição de P.A que, se* x_r, x_s *e* x_p *são termos consecutivos de uma P.A, então*

$$x_s - x_r = x_p - x_s,$$

o que implica

$$2x_s = x_r + x_p,$$

daí

$$x_s = \frac{x_r + x_p}{2},$$

ou seja, dados três termos consecutivos de uma progressão aritmética, o termo do meio é a média aritmética dos outros dois.

Exemplo 2.7. *Verifiquemos se a sequência* $(a-4b, a-2b, a, a+2b)$, *em que* a *e* b *são números reais, é ou não uma P.A, se for, poderemos determinar a razão. Usando a definição de P.A a diferença entre os termos consecutivos é constante e igual a* $2b$, *de fato*

$$\begin{aligned} (a-2b) - (a-4b) &= a - 2b - a + 4b \\ &= 2b, \end{aligned}$$

da mesma forma

$$\begin{aligned} a-(a-2b) &= a-a+2b \\ &= 2b, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (a+2b)-a &= a+2b-a \\ &= 2b. \end{aligned}$$

Portanto, a sequência dada é uma P.A com $r = 2b$*.*

Exemplo 2.8. *A sequência* $\left(2, \frac{7}{3}, \ldots\right)$*, é uma P.A infinita. Podemos determinar a razão e o terceiro termo dessa P.A. Sendo* $x_1 = 2$ *o primeiro termo e* $x_2 = \frac{7}{3}$ *o segundo termo, temos que*

$$\begin{aligned} r &= x_2 - x_1 \\ &= \frac{7}{3} - 2 \\ &= \frac{7}{3} - \frac{6}{3} \\ &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 + r \\ &= \frac{7}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Logo, $r = \frac{1}{3}$ *e* $x_3 = \frac{8}{3}$*.*

Exemplo 2.9. *Para determinar o quarto termo da P.A* $(a-3, a-1, \ldots)$*. Podemos observar que o primeiro termo é* $x_1 = a-3$ *e o segundo termo é* $x_2 = a-1$*. Logo*

$$\begin{aligned} r &= x_2 - x_1 \\ &= (a-1)-(a-3) \\ &= a-1-a+3 \\ &= 2, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} x_4 &= x_1 + r + r + r \\ &= x_1 + 3r \\ &= (a-3) + 3 \,.\, 2 \\ &= a - 3 + 6 \\ &= a + 3. \end{aligned}$$

O quarto termo da P.A dada é $x_4 = a + 3$.

2.5 Termo geral de uma P.A

Em uma *P.A* $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ de razão r, iniciando do primeiro termo, para avançar um termo basta somar r ao primeiro termo ($x_2 = x_1 + r$). Para avançar dois termos basta somar $2r$ ao primeiro termo ($x_3 = x_1 + 2r$), e assim por diante. Desse modo encontramos o termo de ordem n, denominado ***termo geral*** da *P.A*, que é dado por

$$x_n = x_1 + (n-1)r.$$

Ao passar de x_1 para x_n, avançamos $(n-1)$ termos, ou seja, basta somar $(n-1)$ vezes a razão ao primeiro termo.

Observação 2.3. *Podemos observar que* $x_9 = x_4 + 5r$*, pois, passando de* x_4 *para* x_9*, avançamos cinco termos. Além disso,*

$$x_3 = x_{15} - 12r.$$

Pois voltamos 12 *termos ao passar de* x_{15} *para* x_3*.*

Observação 2.4. *Em algumas situações é favorável considerar o primeiro termo como sendo* x_0 *e não* x_1*, passando o termo geral da P.A, a ser determinado por* $x_n = x_0 + nr$*.*

Exemplo 2.10. *Se o preço de um carro novo é R\$* 20.000,00 *e esse valor diminui R\$* 1.200,00 *a cada ano de uso, qual será seu preço com* 5 *anos de uso?*

Temos uma P.A com $x_0 = 20.000$*,* $r = -1.200$ *e queremos determinar* x_5*, então*

$$\begin{aligned} x_5 &= x_0 + 5r \\ &= 20.000 + 5(-1.200) \\ &= 20.000 - 6.000 \\ &= 14.000. \end{aligned}$$

Assim, após 5 *anos o carro custará R\$* $14.000,00$.

Exemplo 2.11. *Para encontrar a fórmula do termo geral da P.A* $(5, 9, \ldots)$*, podemos observar que na P.A dada, temos* $x_1 = 5$ *e* $r = 4$*. Daí*

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (n-1)r \\ &= 5 + (n-1)4 \\ &= 5 + 4n - 4 \\ &= 4n + 1. \end{aligned}$$

Logo, a fórmula do termo geral é $x_n = 4n + 1$.

Exemplo 2.12. *Para encontrar o vigésimo termo da P.A* $(2, 8, \ldots)$*, podemos observar que dados os termos,* $x_1 = 2$*,* $r = 6$ *e* $n = 20$*, temos*

$$\begin{aligned} x_{20} &= x_1 + 19r \\ &= 2 + 19 \,.\, 6 \\ &= 116. \end{aligned}$$

Logo, $x_{20} = 116$.

2.6 Soma dos termos de uma P.A finita

Karl Friedrich Gauss $(1777 - 1855)$ foi um matemático. Quando tinha aproximadamente 7 ou 8 anos de idade, depois de um exercício passado em sala por seu professor para somar todos os termos de 1 a 100, ele mostrou o resultado igual a 5.050 e seu procedimento para resolver o problema passou a valer de modo geral.

Consideramos uma *P.A* finita $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$, de razão r , com n sendo um número par. A soma dos seus n termos pode ser escrita por

$$\begin{aligned} S_n &= x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n \\ &= x_1 + (x_1 + r) + (x_1 + 2r) + \ldots + (x_n - 2r) + (x_n - r) + x_n, \end{aligned}$$

ou seja

$$S_n = (x_1 + x_n) + (x_1 + x_n) + \ldots + (x_1 + x_n).$$

Temos, $\frac{n}{2}$ parcelas iguais a $(x_1 + x_n)$. Portanto,

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n)n}{2},$$

fórmula que nos permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma $P.A$.

Exemplo 2.13. *Para calcular a soma dos* 50 *primeiros termos da P.A* $(2, 6, \ldots)$, *temos que na P.A infinita, os* 50 *primeiros termos formam uma P.A finita, na qual* $x_1 = 2$, $r = 4$ *e* $n = 50$. *Devemos calcular* x_n *(ou seja,* x_{50}*)*

$$x_n = x_1 + (n-1)r,$$

o que implica

$$x_{50} = 2 + 49 \,.\, 4,$$

daí

$$x_{50} = 2 + 196.$$

Logo, $x_{50} = 198$. *Aplicando a fórmula, temos*

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n)n}{2},$$

o que implica em

$$S_{50} = \frac{(2 + 198)50}{2},$$

resultando em

$$S_{50} = 5000.$$

Então, a soma procurada é igual a 5000.

Exemplo 2.14. *A soma dos dez termos de uma P.A é* 200. *Se o primeiro termo dessa P.A é* 2, *podemos calcular a razão* r *da P.A. Nessa P.A sabemos que* $S_{10} = 200$, $x_1 = 2$ *e* $n = 10$. *Aplicando a fórmula da soma, temos*

$$S_{10} = \frac{(x_1 + x_{10})10}{2},$$

donde,

$$200 = \frac{(2 + x_{10})10}{2},$$

então

$$20 + 10x_{10} = 400,$$

onde

$$10x_{10} = 380,$$

logo, $x_{10} = 38$.

Para calcular r, *temos que*

$$x_{10} = x_1 + 9r,$$

então

$$\begin{aligned} 38 &= 2 + 9r \\ &\Rightarrow 9r = 36, \end{aligned}$$

logo, $r = 4$.

2.7 Progressões aritméticas de segunda ordem

Da sequência $(0, 3, 8, 15, 24, 35, \ldots)$, podemos formar uma progressão aritmética tomando as diferença entre cada termo e o termo anterior $(x_{n+1} - x_n)$:

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \ldots$$

obtendo uma $P.A$ não estacionária.

Definição 2.7. *Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência x_n na qual as diferenças $(x_{n+1} - x_n)$ entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética não estacionária. A sequência*

$$(0,\ 3,\ 8,\ 15,\ 24,\ 35,\ \ldots,\ n^2 - 1,\ \ldots)$$

é um exemplo de uma P.A de segunda ordem.

2.8 Progressão geométrica (P.G)

Definição 2.8. *A taxa de crescimento relativo de uma grandeza é dada pela razão entre seu aumento e seu valor inicial. Assim uma grandeza que passa de um valor a para um valor b tem taxa de crescimento relativo determinada por*

$$i = \frac{b-a}{a}.$$

Definição 2.9. *Progressão geométrica (P.G) é toda sequência de números não-nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado, razão da progressão que denotamos por q. Ou seja, uma progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é sempre a mesma. De fato*

$$q = \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

logo

$$\begin{aligned} q - 1 &= \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \\ &= i, \end{aligned}$$

portanto

$$q = i + 1.$$

Exemplo 2.15. *A sequência $(2,\ 10,\ 50,\ 250)$ é uma P.G de quatro termos, em que o primeiro termo é $x_1 = 2$ e $q = 5$. Observe que*

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{10}{2} = 5$$

e

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{50}{10} = 5,$$

temos um quociente constante igual a 5. *Nesse exemplo,* $i = \frac{10-2}{2} = \frac{8}{2} = 4$. *Logo*

$$\begin{aligned} q &= 1+i \\ &= 1+4 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Exemplo 2.16. *A sequência* $(6, -12, 24, -48, 96)$ *é uma P.G de cinco termos, na qual* $x_1 = 6$ *e* $q = -2$. *Calculemos a taxa de crescimento relativo*

$$i = \frac{-12-6}{6} = \frac{-18}{6} = -3,$$

logo

$$q = 1 + i = 1 + (-3) = -2.$$

Observação 2.5. *Da definição, decorre que, se* x_r, x_s *e* x_p, *são três termos consecutivos de uma progressão geométrica*

$$\frac{x_s}{x_r} = \frac{x_p}{x_s} \Rightarrow (x_s)^2 = x_r x_p,$$

ou seja, o termo do meio é a ***média geométrica*** *dos outros dois.*

Exemplo 2.17. *Para verificar se a sequência* $(5, 15, 45, 135, 405)$ *é uma P.G, devemos calcular os quocientes, da seguinte forma*

$$\frac{15}{5} = 3, \ \frac{45}{15} = 3, \ \frac{135}{45} = 3, \ \frac{405}{135} = 3.$$

Logo, a sequência é uma P.G de razão 3.

Exemplo 2.18. *Para verificar se a sequência* $(x^{n-4}, x^{n-2}, x^n, x^{n+2})$ *com* $x \neq 0$ *é uma P.G e em seguida calcular sua razão, temos que*

$$\begin{aligned} \frac{x^{n-2}}{x^{n-4}} &= x^{n-2-(n-4)} \\ &= x^{n-2-n+4} \\ &= x^2, \end{aligned}$$

da mesma forma

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{x^{n-2}} &= x^{n-(n-2)}\\ &= x^{n-n+2}\\ &= x^2,\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}\frac{x^{n+2}}{x^n} &= x^{n+2-n}\\ &= x^2,\end{aligned}$$

então, a sequência é uma P.G de razão x^2.

2.9 Classificação de uma P.G

Definição 2.10. *Uma P.G é **crescente**, quando* $q > 1$ *e os termos são positivos ou quando* $0 < q < 1$ *e os termos são negativos.*

Exemplo 2.19. *Sejam as sequências,* $(2, 6, 18, 54, \ldots)$ *com* $q = 3$ *e* $(-40, -20, -10, -5, \ldots)$ *com* $q = \frac{1}{2}$*, analisando podemos perceber que são sequências crescentes.*

Definição 2.11. *Uma P.G é **decrescente** quando* $0 < q < 1$ *e os termos são positivos ou quando* $q > 1$ *e os termos são negativos.*

Exemplo 2.20. *Sejam as sequências dadas por* $(200, 100, 50, 25, \ldots)$*, em que* $q = \frac{1}{2}$ *e* $(-4, -12, -36, -108, \ldots)$ *onde* $q = 3$*, podemos observar que ambas as sequências são decrescentes.*

Definição 2.12. *Uma P.G é **constante** quando* $q = 1$.

Exemplo 2.21. *A sequência,* $(10, 10, 10, \ldots)$ *em que* $q = 1$ *é constante.*

Definição 2.13. *Uma P.G é **alternante** quando* $q < 0$.

Exemplo 2.22. *A sequência,* $(4, -8, 16, -32, \ldots)$ *em que* $q = -2$ *é alternante.*

2.10 Termo geral de uma P.G

Em uma *P.G* $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, de razão q, partindo do primeiro termo, para avançar um termo, basta multiplicar o primeiro termo pela razão q $(x_2 = x_1 q)$, para avançar dois termos, basta multiplicar o primeiro termo pelo quadrado da razão $q\,(x_3 = x_1q^2)$ e assim por diante. Desse modo encontramos o termo de ordem n, denominado termo geral da $P.G$, que é dado por

$$x_n = x_1q^{n-1}.$$

Exemplo 2.23. *Para determinar o quarto termo da $P.G\,(ab,\, a^3b^2,\, \ldots)$, com $a, b \in \mathbb{R}^*$, podemos observar que $x_1 = ab$ e $x_2 = a^3b^2$, então*

$$q = \frac{x_2}{x_1},$$

o que implica

$$q = \frac{a^3b^2}{ab},$$

logo

$$q = a^2b,$$

então temos

$$\begin{aligned} x_4 &= x_1q^3 \\ &= ab(a^2b)^3 \\ &= ab\,.\,a^6b^3 \\ &= a^7b^4, \end{aligned}$$

logo

$$x_4 = a^7b^4.$$

Observação 2.6. *Em algumas situações é mais indicado determinar o primeiro termo como x_0 e não x_1, ficando o termo geral da $P.G$ determinado por $x_n = x_0q^n$.*

Exemplo 2.24. *Se o número de sócios de um clube hoje é de 2000 e cresce 5% ao ano, quantos sócios esse clube terá em 3 anos?*

Podemos perceber que temos uma $P.G$ com $x_0 = 2000$ e a razão

$$\begin{aligned} q &= 1 + i \\ &= 1 + 0,05 \\ &= 1,05. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} x_3 &= q^3 x_0 \\ &= 2000(1,05)^3 \\ &= 2315. \end{aligned}$$

Após 3 *anos, o clube terá* 2315 *sócios.*

Exemplo 2.25. *Ao lançarmos uma moeda, temos dois resultados possíveis, cara ou coroa. Se lançarmos duas moedas diferentes, teremos quatro possibilidades:*

$$(cara,\ coroa),\ (cara,\ cara),\ (coroa,\ coroa)\ ou\ (coroa,\ cara).$$

Qual é o total de resultados se lançarmos 8 *moedas?*

Nesta situação, temos a progressão geométrica (2, 4, 8, 16, 32, ...) *e procuramos o oitavo termo.*

$$x_n = x_1 q^{n-1},$$

onde, $x_1 = 2$ *e* $q = 2$

$$\begin{aligned} x_8 &= 2\,.\,2^{8-1} \\ &= 2\,.\,2^7 \\ &= 2^8 \\ &= 256. \end{aligned}$$

Portanto, quando lançamos 8 *moedas diferentes, temos* 256 *resultados possíveis.*

Exemplo 2.26. *Para encontrar a fórmula do termo geral da P.G* (2, 4, ...)*, podemos observar que* $x_1 = 2$ *e* $q = 2$*, assim*

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 q^{n-1} \\ &= 2\,.\,2^{n-1} \\ &= 2^n, \end{aligned}$$

logo, o termo geral da P.G dada é $x_n = 2^n$.

2.11 Soma dos n termos de uma P.G finita

Teorema 2.1. *A soma dos n termos de uma progressão geométrica* (x_n) *de razão de* $q \neq 1$ *é*

$$S_n = \frac{x_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Demonstração: Consideremos a $P.G$ finita $(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_{n-1},\, x_n)$ e seja S_n a soma de seus termos:

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n. \tag{2.1}$$

Vamos multiplicar os dois membros dessa igualdade pela razão q, obtendo

$$qS_n = x_1q + x_2q + x_3q + \ldots + x_{n-1}q + x_nq,$$

ou

$$qS_n = x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n + x_nq. \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2), obtemos

$$\begin{aligned} S_n - qS_n &= x_1 - x_nq \\ &= x_1 - x_1q^n, \end{aligned}$$

daí

$$S_n(1-q) = x_1 - x_1q^n,$$

o que implica

$$S_n(1-q) = x_1(1-q^n),$$

portanto

$$S_n = \frac{x_1(1-q^n)}{1-q}, \text{ para } q \neq 1.$$

■

Observação 2.7. *Se* $q = 1$*, temos*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n,$$

logo

$$S_n = nx_1.$$

Exemplo 2.27. *Para determinar a soma dos dez primeiros termos da P.G* $(3, 6, \ldots)$*, devemos observar que* $x_1 = 3$*,* $q = 2$ *e* $n = 10$*. Aplicando a fórmula*

$$S_n = \frac{x_1(1-q^n)}{1-q},$$

implica

$$S_{10} = \frac{3(1-2^{10})}{1-2} = \frac{3(1-1.024)}{-1} = 3.069.$$

A soma pedida é 3.069*.*

Capítulo 3

Sequências numéricas e limites

Este capítulo contêm algumas definições e resultados sobre limites de sequências numéricas abordadas no ensino superior, os conteúdos utilizados como apoio de pesquisas estão presentes nas referências [4], [5], [6] e [7].

3.1 Limite de uma sequência

Recordemos que uma sequência numérica infinita é uma função que associa cada número natural n um número real, isto é;

$$\begin{aligned} X: \ \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto x_n, \end{aligned}$$

onde n é o índice e x_n é o n-ésimo elemento da sequência. Podemos indicar uma sequência através das seguintes notações;

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (x_n)_{n=1}^{\infty},\ (x_n),\ (x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots),$$

ou simplesmente x_n como sendo o termo geral da sequência. Essa função não é necessariamente injetiva, pode-se ter $x_m = x_n$ com $m \neq n$.

Exemplo 3.1. *Analise as sequências dadas abaixo.*

i) $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Consideremos a sequência dada por

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{1000}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right).$$

Observemos que, a medida que o valor de n aumenta, o termo $x_n = \dfrac{1}{n}$ se aproxima de zero.

ii) $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Podemos observar que os termos da sequência estão sendo gerados de acordo com os valores de n, e se tornando cada vez maiores.

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$$

iii) $(\sqrt{2})_{n\in\mathbb{N}}$.

Nesse caso, os termos são

$$(\sqrt{2}), (\sqrt{2}), (\sqrt{2}), \ldots$$

observamos que é uma sequência constante, onde os termos se repetem infinitamente.

iv) $(-1)^n_{n\in\mathbb{N}}$

Percebemos que os termos da sequência variam entre 1 e -1, ou seja

$$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

Exemplo 3.2. *Determine os três primeiros termos e o décimo termo das sequências dadas.*

a) $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$

Temos que

$$x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{-1}{3}, \ldots,\ x_{10} = \frac{1}{10}, \ldots .$$

Nesse caso podemos observar que os termos da sequência vão se aproximando de zero, a medida que n cresce arbitrariamente.

b) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Temos que

$$x_1 = \frac{1}{2},\, x_2 = \frac{2}{3},\, x_3 = \frac{3}{4},\, \ldots,\, x_{10} = \frac{10}{11},\, \ldots .$$

Podemos observar que a sequência vai cada vez mais se aproximando de 1.

Definição 3.1. *Dizemos que um número L é o limite de uma sequência (x_n) de números reais e escreve-se*

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

ou, simplesmente

$$L = \lim x_n,$$

quando para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_n - L| < \varepsilon, \textit{ sempre que } n > n_0.$$

Neste caso

$$-\varepsilon < x_n - L < \varepsilon, \textit{ sempre que } n > n_0.$$

ou seja

$$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon.$$

Observação 3.1. *Quando uma sequência (x_n) possui limite L, dizemos que a sequência (x_n) tende ou converge para L, e assim $x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, para todo $n \geq n_0$. Denotamos tal fato simbolicamente por*

$$x_n \longrightarrow L.$$

Uma sequência que possui limite chama-se convergente, do contrário ela é dita divergente.

Observação 3.2. *Temos como resultado imediato da definição de limite, que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - L) = 0,$$

ou equivalente

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - L| = 0.$$

Em particular

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0.$$

Teorema 3.1. *Uma sequência* (x_n) *não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração: Suponha que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = M$ com $L \neq M$, e que $L > M$. Considerando, $\varepsilon = \dfrac{L-M}{2} > 0$, tem-se que existem n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$, tais que

$$|x_n - L| < \frac{L-M}{2}, \text{ para todo } n \geq n_1, \tag{3.1}$$

e também

$$|x_n - M| < \frac{L-M}{2}, \text{ para todo } n \geq n_2. \tag{3.2}$$

Então, de (3.1), temos

$$-\left(\frac{L-M}{2}\right) < x_n - L < \frac{L-M}{2}.$$

Somando L em todos os membros

$$L - \left(\frac{L-M}{2}\right) < L + x_n - L < L + \left(\frac{L-M}{2}\right),$$

logo

$$\frac{L+M}{2} < x_n < \frac{3L-M}{2}, \text{ para todo } n \geq n_1 \tag{3.3}$$

De (3.2), resulta que

$$-\left(\frac{L-M}{2}\right) < x_n - M < \frac{L-M}{2},$$

onde, adicionando M em todos os membros temos,

$$M - \left(\frac{L-M}{2}\right) < M + x_n - M < M + \frac{L-M}{2},$$

o que implica

$$\frac{3M-L}{2} < x_n < \frac{L+M}{2}, \text{ para todo } n \geq n_2 \tag{3.4}$$

Logo, tomando $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, tem-se de (3.3 - 3.4), que

$$\frac{L+M}{2} < x_n < \frac{L+M}{2}, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

o que é um absurdo. ■

Exemplo 3.3. *Seja* $\left(\frac{1}{n}\right)$ *uma sequência dada, de acordo com os valores de* n*, obtemos os termos*

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots .$$

Verifiquemos que $L = 0$ *é o limite da sequência. Dado* $\varepsilon > 0$*, seja* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tal que,* $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$*. Logo*

$$|x_n - L| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Observe que, para todo $n > n_0$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

assim, para todo $n > n_0$*, temos*

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon,$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Exemplo 3.4. *Seja* $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ *uma sequência dada, com* $p \in \mathbb{R}$*,* $p > 0$ *fixado. Verifiquemos que* $L = 0$*, é o limite da sequência. Dado* $\varepsilon > 0$*, seja* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tal que,* $n_0 > \frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}}$*. Logo*

$$|x_n - L| = \left|\frac{1}{n^p} - 0\right| = \left|\frac{1}{n^p}\right| = \frac{1}{n^p}.$$

Observe que, para todo $n > n_0$

$$\frac{1}{n^p} < \frac{1}{n_0{}^p} < \varepsilon,$$

assim, para todo $n > n_0$*, temos*

$$\left|\frac{1}{n^p} - 0\right| < \varepsilon,$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0.$$

Exemplo 3.5. *Dada a sequência, $(-1)^n$, podemos observar que os termos da sequência variam entre* -1 *e* 1*. Então, suponhamos que*

$$\lim_{n\to\infty} [(-1)^n] = L,$$

e considere $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pela definição temos, se ***n é par****, resulta que*

$$|1 - L| < \frac{1}{2} \Rightarrow |L - 1| < \frac{1}{2}, \textit{ para todo } n \geq n_0 \textit{ (n par)}$$

então

$$-\frac{1}{2} < L - 1 < \frac{1}{2}.$$

Adicionando 1 *em todos os membros, temos*

$$1 - \frac{1}{2} < 1 + L - 1 < 1 + \frac{1}{2},$$

o que implica

$$1 - \frac{1}{2} < L < 1 + \frac{1}{2},$$

logo

$$\frac{1}{2} < L < \frac{3}{2}. \tag{3.5}$$

Se ***n ímpar****, resulta que*

$$|-1 - L| < \frac{1}{2}, \textit{ para todo } n \geq n_1 \textit{ (n ímpar)}$$

observamos que

$$|-(1 + L)| < \frac{1}{2} \Rightarrow |1 + L| < \frac{1}{2}.$$

Da definição de módulo

$$-\frac{1}{2} < 1 + L < \frac{1}{2}.$$

Subtraindo -1 em todos os termos, temos

$$-1 - \frac{1}{2} < L < -1 + \frac{1}{2},$$

então

$$-\frac{3}{2} < L < -\frac{1}{2}. \tag{3.6}$$

Logo, de (3.5) - (3.6)*, obtemos*

$$\frac{1}{2} < L < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < -\frac{1}{2},$$

o que é um absurdo. Logo, a sequência $[(-1)^n]$ *não possui limite, ou seja, seu limite não existe.*

Definição 3.2. *Dada uma sequência* $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números reais, uma subsequência de* X *é a restrição da função* X *a um subconjunto infinito*

$$\mathbb{N}'=\{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots\} \text{ de } \mathbb{N},$$

onde

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots,$$

e escreve-se

$$X' = (x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}'}, \ (x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots x_{n_k,\ldots}) \text{ ou } (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}},$$

para indicar a subsequência $X' = X|\mathbb{N}'$.

Definição 3.3. *Dizemos que uma sequência* (x_n) *é limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado isto é, quando existem números reais* a *e* b*, tais que,* $a \leq x_n \leq b$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Isto quer dizer que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo* $[a, b]$*. Então, uma sequência* (x_n) *é limitada, quando existe um número real* $c > 0$*. Tal que*

$$|x_n| \leq c, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Definição 3.4. *Uma sequência* (x_n)*, é dita limitada superiormente quando existe um número real* b*, tal que,* $x_n \leq b$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Ou seja, todos os termos* x_n *pertencem a semi reta* $(-\infty, b]$.

Definição 3.5. *Uma sequência* (x_n) *diz-se limitada inferiormente, quando existe* $a \in \mathbb{R}$*, tal que,* $a \leq x_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, ou seja,* $x_n \in [a, +\infty)$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.6. *Seja $x_n = -n$, cujos os termos são*

$$-1, -2, -3, \ldots,$$

observe que a sequência é limitada superiormente, pois

$$x_n = -n \leq 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 3.7. *Dada a sequência $x_n = n^2$, então os termos são*

$$1, 4, \ldots, n^2, \ldots$$

daí, a sequência é limitada inferiormente pois, $x_n \geq 1$.

Exemplo 3.8. *Dada a sequência $x_n = \dfrac{n}{2(n+1)}$, obtemos os termos*

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{8}, \frac{4}{10}, \frac{5}{12}, \ldots,$$

podemos observar que a sequência dada está limitada no intervalo fechado $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Definição 3.6. *Uma sequência (x_n) chama-se monótona não-decrescente quando $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 3.7. *Uma sequência (x_n) é monótona não-crescente, quando $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 3.8. *Uma sequência (x_n) é crescente quando temos $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 3.9. *Uma sequência é dita decrescente quando $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Observação 3.3. *Toda sequência monótona não-decrescente (respect. não-crescente) é limitada inferiormente (respect. superiormente) pelo seu primeiro termo.*

Observação 3.4. *para que uma sequência monótona seja limitada é suficiente que possua uma subsequência limitada. De fato, seja $(x_{n_k})_{n \in \mathbb{N}'}$ uma subsequência limitada da sequência monótona (digamos, não-decrescente). Temos $x_{n_k} \leq c$ para todo $n_k \in \mathbb{N}'$. Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}'$ tal que, $n < n_k$. Então*

$$x_n \leq x_{n_k} \leq c.$$

Portanto, a sequência é limitada.

Teorema 3.2. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $L = \lim_{n \to \infty} x_n$. Tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe, $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow x_n \in (L - 1,\, L + 1).$$

Sejam b o menor e c o maior elemento do conjunto finito $\{x_1,\, \ldots,\, x_{n_0},\, L - 1,\, L + 1\}$. Todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[b,\, c]$, logo ela é limitada. ∎

Teorema 3.3. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) monótona, digamos não-decrescente e limitada.

Escrevamos $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ e $L = supX$. Afirmamos que $L = \lim_{n \to \infty} x_n$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, o número $(L - \varepsilon)$ não é cota superior de X. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$L - \varepsilon < x_{n_0} \leq L.$$

Assim, como (x_n) é não-decrescente, temos

$$n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < L + \varepsilon,$$

daí

$$\lim_{n \to \infty} x_n = L.$$

Semelhantemente, se (x_n) é não-crescente e limitada, então

$$\lim_{n \to \infty} x_n = M,$$

onde M é o ínfimo do conjunto dos valores (x_n). ∎

As definições de supremo e ínfimo podem ser encontradas nas seguintes referências, [5] e [6].

Proposição 3.1. *Se $\lim_{n \to \infty} x_n = L$, então toda subsequência de (x_n) converge para o limite L.*

Demonstração: Seja (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n). Podemos observar que

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k \ldots,$$

onde

$$n_1 \geq 1,\, n_2 \geq 2,\, n_3 \geq 3.$$

De forma geral, $n_k \geq k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Considerando $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n \geq n_0, \text{ acarreta } |x_n - L| < \varepsilon,$$

em particular, para $n_k \geq n_0$, temos $|x_{n_k} - L| < \varepsilon$. Mas $n_k \geq k$ todo $k \in \mathbb{N}$, e portanto

$$k \geq n_0 \Rightarrow n_k \geq n_0 \Rightarrow |x_{n_k} - L| < \varepsilon,$$

logo

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = L.$$

■

Teorema 3.4 (Bolzano Weierstrass). *Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: É suficiente mostrar que toda sequência (limitada ou não) possui uma subsequência monótona. Diremos que um termo x_n, da sequência dada é destacado quando $x_n \geq x_p$ para todo $p > n$. Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n, tais que, x_n é um termo destacado. Se D for um conjunto dos índices infinito,

$$D = \{n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_k,\, \ldots\},$$

onde

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots,$$

então, a subsequência $(x_n)_{n \in D}$ será monótona não-crescente. Se, entretanto, D for finito seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior do que todos os $n \in D$. Então x_{n_1}, não é destacado logo existe $n_2 > n_1$ com $x_{n_1} < x_{n_2}$. Por sua vez, x_{n_2} não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. Prosseguindo obtemos uma subsequência crescente

$$x_{n_1} < x_{n_2} < \ldots < x_{n_k} < \ldots.$$

■

Exemplo 3.9. *Seja* $0 < a < 1$. *A sequência* $(a, a^2, \ldots, a^n, \ldots)$, *formada pelas potências sucessivas de* a, *é decrescente limitada pois multiplicando* $0 < a < 1$ *por* a^n *resulta*

$$0 < a^{n+1} < a^n.$$

Afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, *como* $\dfrac{1}{a} > 1$, *seque-se então que existe* $n_0 \in \mathbb{N}$, *tal que*

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{n_0} > \tfrac{1}{\varepsilon}$$

ou seja

$$a^{n_0} < \varepsilon$$

de onde, segue que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a^n - 0| = a^n \leq a^{n_0} < \varepsilon,$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

Neste caso, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = inf\{a^n; n \in \mathbb{N}\} = 0$.

3.2 Limite da soma dos termos de uma P.G infinita

Nas progressões geométricas em que $0 < |q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando n tende a infinito. Nesse caso, q^n aproxima-se de zero para n suficientemente grande, ou seja

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Sabemos que

$$S_n = \frac{x_1(1-q^n)}{1-q},$$

para $q \neq 1$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{x_1(1-0)}{1-q}.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{x_1}{1-q},\ 0 < |q| < 1.$$

Exemplo 3.10. *Vamos calcular o limite da soma dos termos progressão geométrica* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$. *Note que*

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n},$$

como, $x_1 = \frac{1}{2}$, *e* $q = \frac{1}{2}$, *temos*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{x_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

Isso significa que quanto maior for n*, a soma*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

será mais próxima de 1.

3.3 Sequências de Cauchy

Definição 3.10. *Uma sequência* (x_n) *é denominada sequência de Cauchy se para cada* $\varepsilon > 0$ *existe um* $N(\varepsilon) = n_0 \in \mathbb{N}$*, tal que*

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Em outra palavras, significa dizer que quando uma sequência é de Cauchy os seus termos ficam arbitrariamente próximos uns dos outros a partir de um determinando índice.

Exemplo 3.11. *A sequência* $\left(\frac{1}{n}\right)$ *é de Cauchy pois, se* $\varepsilon > 0$ *é dado, considere* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tal que*

$$n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$$

cuja existência é garantida. Então

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \textit{ para todo } m, n \geq n_0.$$

Proposição 3.2. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência convergente para o limite L. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2},$$

portanto, para m, $n \geq n_0$, temos

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - L| + |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Proposição 3.3. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Para $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, Tal que

$$m,\ n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < 1.$$

Pela desigualdade triangular temos que, para todo $n \geq n_0$,

$$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|.$$

Seja

$$M = max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1 + |x_{n_0}|\},$$

e temos que

$$|x_n| \leq M, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

$\blacksquare$

Observação 3.5. *A reciproca da proposição* 3.3 *não é verdadeira, já que existem sequências limitadas que não são de Cauchy.*

Proposição 3.4. *Toda sequência de Cauchy de* $\mathbb{R}$ *é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Temos que (x_n) é limitada, pela proposiçao anterior. Pelo Teorema de **Bolzano-Weierstrass** (Teorema 3.4), (x_n) possui uma subsequência (x_{n_k}) convergente para o limite L. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n_k \geq n_1 \Rightarrow |x_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, sendo (x_n) de **Cauchy**, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n, m \geq n_2 \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomemos, $n_3 = max\{n_1, n_2\}$. Como $n_k \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, teremos

$$|x_k - L| \leq |x_k - x_{n_k} + x_{n_k} - L| \leq |x_k - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ \forall\, k \geq n_3$$

isto é

$$\lim_{n \to \infty} x_n = L.$$

$\blacksquare$

3.4 Limites e desigualdades

Seja P uma propriedade referente aos termos de uma sequência (x_n). Diremos que para todo n suficientemente grande x_n goza da propriedade P, para significar que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, x_n goza da propriedade P, para todo $n \geq n_0$.

Teorema 3.5. *Seja* $\lim_{n \to \infty} x_n = L$. *Se* $M < L$, *então para* n *suficientemente grande, tem-se,* $M < x_n$. *Analogamente, se* $L < M$ *então* $x_n < M$ *para todo* n *suficientemente grande.*

Demonstração: Tomando, $\varepsilon = L - M$, temos, $\varepsilon > 0$ e $M = L - \varepsilon$. Pela definição de limite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon,$$

portanto

$$M < x_n, \text{ para todo } n > n_0$$

A outra afirmação se prova analogamente. ■

Corolário 3.1. *Seja $L = \lim_{n\to\infty} x_n$. Se $L > 0$ então, para todo n suficientemente grande, tem-se $x_n > 0$. Analogamente, se $L < 0$ então, $x_n < 0$ para todo n suficientemente grande.*

Corolário 3.2. *Sejam $L = \lim_{n\to\infty} x_n$ e $M = \lim_{n\to\infty} y_n$. Se $x_n \leq y_n$, para todo n suficientemente grande então $L \leq M$. Em particular se $x_n \leq M$ para todo n suficientemente grande então,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq M.$$

Observação 3.6. *Sendo $x_n < y_n$, não podemos afirmar que os limites $L < M$.*

Exemplo 3.12. *Dadas as sequências $\frac{1}{n}$ e $-\frac{1}{n}$, podemos observar que $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$, porém*

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

ambas, tem limites iguais a zero.

Teorema 3.6 (Teorema do confronto). *Se $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = L$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$, para todo n suficientemente grande, então temos*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = L.$$

Demonstração: Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existem n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$, tais que

$$n > n_1 \Rightarrow L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon,$$

e também

$$n > n_2 \Rightarrow L - \varepsilon < y_n < L + \varepsilon.$$

Seja $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, então

$$n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < L + \varepsilon \Rightarrow z_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon),$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} z_n = L.$$

■

Exemplo 3.13. *Para provar*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{log(n)}{n} = 0.$$

Podemos observar que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\log\sqrt{n} < \sqrt{n},$$

como

$$\log\sqrt{n} = \frac{1}{2}\log(n),$$

segue-se que

$$\log(n) < 2\sqrt{n}.$$

Dividimos por n, resulta que

$$0 < \log\frac{(n)}{n} < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

fazendo $n \longrightarrow \infty$, pelo teorema do confronto, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n} = 0.$$

Exemplo 3.14. *Podemos mostrar que o $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{sen(n)}{n^2}\right] = 0$. Analisando a limitação da função seno, temos*

$$|sen(n)| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq sen(n) \leq 1,$$

onde dividindo por n^2, temos

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{sen(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

calculando o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0,$$

e também

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2} = 0,$$

temos que, pelo teorema do confronto

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{sen(n)}{n^2}\right] = 0.$$

3.5 Operações com limites

Teorema 3.7. *Se o* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *e* (y_n) *é uma sequência limitada (convergente ou não), então* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

Demonstração: Existe $c > 0$, tal que $|y_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{c},$$

então

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n y_n| = |x_n||y_n| < \frac{c\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = 0.$$

■

Exemplo 3.15. *Se* $x_n = \dfrac{1}{n}$ *e* $y_n = sen(n)$, *então* (y_n) *não converge mas, como* $-1 \leq y_n \leq 1$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ *tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{sen(n)}{n}\right] = 0.$$

Observação 3.7. *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, *mas* (y_n) *não é limitada, o produto* $(x_n y_n)$ *pode divergir ou convergir para um valor qualquer.*

Exemplo 3.16. *Dadas as sequências* $x_n = \dfrac{1}{n}$ *e* $y_n = n^2$*, podemos observar que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *e* $y_n = n^2$ *é ilimitada, mas*

$$x_n y_n = \frac{1}{n} n^2 = n,$$

ou seja, o produto diverge.

Exemplo 3.17. *Dadas as sequências* $x_n = \dfrac{1}{n}$ *e* $y_n = cn$*, temos* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *e* $y_n = cn$ *é ilimitada, então*

$$x_n y_n = \frac{1}{n} cn = c,$$

logo, o produto converge.

Teorema 3.8. *Se o* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = M$*, então:*
i) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = L + M$*;*
ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = L - M$*;*
iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = LM$*;*
iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{L}{M}$ *se* $M \neq 0$ *e* $y_n \neq 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração:

i) Seja $\varepsilon > 0$ dado. Então existem n_1 e n_2 em $\mathbb{N}$, tais que

$$n \geq n_1 \text{ acarreta } |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2},$$

e também

$$n \geq n_2 \text{ acarreta } |y_n - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Agora se, $n \geq max\{n_1, n_2\}$, então

$$|(x_n + y_n) - (L + M)| \leq |x_n - L| + |y_n - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ii) Seja $\varepsilon > 0$ dado. Então existem n_1 e n_2 em $\mathbb{N}$, tais que $n \geq n_1$, acarreta $|x_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $n \geq n_2$, acarreta $|y_n - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. agora se $n \geq max\{n_1, n_2\}$, temos

$$|(x_n - y_n) - (L - M)| \leq |x_n - L| + |y_n - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

iii) Sabemos, em primeiro lugar, que toda sequência convergente é limitada, logo existe um $c > 0$, tal que

$$|x_n| \leq c, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Seja agora $\varepsilon > 0$. Então, existem n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$, onde

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2|M|}$$

e

$$|y_n - M| < \frac{\varepsilon}{2c}.$$

Portanto, se $n \geq max\{n_1, n_2\}$, temos

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - LM| &= |x_n(y_n - M) + M(x_n - L)| \\
&\leq |x_n(y_n - M)| + |M(x_n - L)| \\
&= |x_n||y_n - M| + |M||x_n - L| \\
&< \frac{c\varepsilon}{2c} + \frac{|M|\varepsilon}{2|M|} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

iv) Observamos que

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{L}{M} = \frac{(x_n M - y_n L)}{y_n M}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n M - y_n L) = LM - ML = 0$, é suficiente provar que, $\left(\frac{1}{y_n M}\right)$ é uma sequência limitada para concluir que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{L}{M}\right) = 0,$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{L}{M}.$$

Ora colocando, $c = \dfrac{M^2}{2}$, temos

$$0 < c < M^2.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} y_n M = M^2,$$

seque-se do Teorema 3.5 que para todo n suficientemente grande, tem-se

$$c < y_n M,$$

e portanto, para n suficientemente grande, tem-se

$$\frac{1}{y_n M} < \frac{1}{c},$$

complementando a demonstração. ■

Proposição 3.5. *Se $x_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L < 1$, então, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.*

Demonstração: Tomemos $c \in \mathbb{R}$, com $L < c < 1$. Então

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < c,$$

para todo n suficientemente grande. Segue-se que,

$$0 < x_{n+1} = \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) x_n < cx_n < x_n.$$

Logo, para n suficientemente grande a sequência (x_n) é monótona decrescente e limitada inferiormente. Seja $M = \lim_{n\to\infty} x_n$. De $x_{n+1} < cx_n$, para todo n suficientemente grande resulta, fazendo $n \to \infty$, que $M \leq cM$, isto é

$$(1 - c)M \leq 0.$$

Como, $M \geq 0$ e $0 < c < 1$, concluímos que

$$M = 0.$$

■

3.6 Limites infinitos

Definição 3.11. *Dada uma sequência* (x_n), *escreve-se* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *para significar que dado arbitrariamente,* $A > 0$, *existe,* $n_0 \in \mathbb{N}$, *tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow x_n > A.$$

Se tivermos $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *então a sequência* (x_n) *não é limitada superiormente. Porém a recíproca não é verdadeira.*

Definição 3.12. *Dada uma sequência* (x_n), *escreve-se* $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, *para significar que dado,* $A > 0$, *pode-se encontrar* $n_0 \in \mathbb{N}$, *tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow x_n < -A.$$

Se tivermos $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *então a sequência* (x_n) *não é limitada inferiormente. Nesse caso também a recíproca não é verdadeira.*

Observação 3.8. *Deve-se enfatizar que,* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e* $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$, *as sequências* (x_n) *e* (y_n) *não são convergentes. Note que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} -x_n = -\infty.$$

Exemplo 3.18. *Dada a sequência* $x_n = n + n(-1)^n$, *podemos observar que* (x_n) *não é limitada superiormente, porém não se tem* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *já que* $x_{(2n-1)} = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Observação 3.9. *Se* (x_n) *é ilimitada superiormente e crescente, então* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Corolário 3.3. *Sejam* (x_n) *e* (y_n) *sequências, então ocorrem as seguintes afirmações:*

i) *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e* (y_n) *é limitada inferiormente então,* $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$;

ii) *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *e existe* $c > 0$, *tal que,* $y_n > c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então,* $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = +\infty$;

iii) *Se* $x_n > c > 0$, $y_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, *então* $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = +\infty$;

iv) *Se* (x_n) *é limitada e* $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ *então,* $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = 0$.

Demonstração:

i) Existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $y_n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado arbitrariamente $A > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow x_n > A - c.$$

Segue-se que

$$n > n_0 \Rightarrow x_n + y_n > A - c + c = A,$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = +\infty.$$

ii) Dado arbitrariamente $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow x_n > \frac{A}{c},$$

daí

$$n > n_0 \Rightarrow x_n y_n > \frac{Ac}{c} = A,$$

donde

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = +\infty.$$

iii) Dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow y_n < \frac{c}{A},$$

então

$$n > n_0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} > \frac{Ac}{c} = A,$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

iv) Existe $c > 0$, tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > o$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow y_n > \frac{c}{\varepsilon},$$

então

$$n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{x_n}{y_n}\right| < \frac{c\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

$\blacksquare$

Exemplo 3.19. *Dada a sequência* (x_n)*, se* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$*, então* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}\right) = +\infty$*, se* $x_n > 0$ *e* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}\right) = -\infty$*, se* $x_n < 0$*.*

Exemplo 3.20. *Dada a sequência* (x_n)*, se* $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$*, então,* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0$*.*

Exemplo 3.21. *Se* $a > 1$*, a sequência* $x_n = a^n$ *tende a infinito. De fato,* $0 < \frac{1}{a} < 1$*, de forma que*

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n},$$

tende a zero, então

$$(x_n) \longrightarrow \infty.$$

Observação 3.10. *Podemos perceber a indeterminação do tipo* $+\infty - \infty$*. De fato, se*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \text{ e } \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

nenhuma afirmação geral pode ser feita sobre

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n).$$

Exemplo 3.22. *Dadas as sequências* $x_n = n + (-1)^n$ *e* $y_n = -n$*, observe que*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(-1)^n,$$

não existe, já que o termo $(-1)^n$ *é alternante (ver exemplo 3.5).*

Exemplo 3.23. *Dadas as sequências* $x_n = 2n$ *e* $y_n = -n$*, podemos fazer*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

Exemplo 3.24. *Dadas as sequências* $x_n = n$ *e* $y_n = -2n$*, temos que*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty.$$

Exemplo 3.25. *Dadas as sequências* $x_n = n + c$ *e* $y_n = -n$*, assim*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = c,$$

poderá assumir um valor arbitrário $c \in \mathbb{R}$.

Outras indeterminações frequentemente encontradas são $\infty^0, 1^\infty$ e 0^0. Os limites mais importantes da Análises quase sempre se apresentam sob a forma de uma expressão indeterminada.

Exemplo 3.26. *Temos como um limite especial*

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

observamos que esse limite é da forma 1^∞, que vamos analisar posteriormente.

Analisando a grandeza entre alguns limites, dado $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$ e um número $k \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \lim_{n\to\infty} a^k = \lim_{n\to\infty} n! = \lim_{n\to\infty} n^n.$$

Todas estas sequências têm limite infinito. Porém para valores muito grandes de n, temos

$$n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n,$$

onde o simbolo $\ll$ significa "é uma fração muito pequena"podemos perceber que, o crescimento exponencial supera o polinomial, o crescimento fatorial supera o exponencial com base ilimitadamente crescente.

Exemplo 3.27. *Em relação a grandeza de limites, temos que, se $a > 1$ e $k \in \mathbb{N}$ são constantes, então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Vamos mostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, fazendo $x_n = \frac{n^k}{a^n}$, temos que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k . \, a^{-1},$$

então

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k . \, a^{-1} = \frac{1}{a},$$

*se $a > 1$, pela **Proposição** 3.5*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Mostremos também que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$*, fazendo* $y_n = \dfrac{a^n}{n!}$*, temos que*

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{a}{(n+1)},$$

então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{(n+1)} = 0,$$

*logo, pela **Proposição*** 3.5

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Finalizando, mostremos que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$*, admitimos* $z_n = \dfrac{n!}{n^n}$*, temos que*

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \left[\frac{n}{(n+1)}\right]^n,$$

então

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) = \frac{1}{e}\ ,$$

sabendo que, $\dfrac{1}{e} < 1$ *e utilizando a **Proposição*** 3.5*, temos que*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

Capítulo 4

Limites importantes

Neste capítulo mostraremos alguns exemplos de limites especiais. O estudo desses exemplos teve como referência [4].

Exemplo 4.1. *A seguir apresentamos um importante exemplo de sequência monótona, e que define o número e, base dos logaritmos naturais. Esse número surgiu na consideração de um problema de juros compostos instantaneamente. Nesse contexto ele é definido mediante o limite*

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Observe que esse limite é uma forma indeterminada do tipo 1^∞, pois, enquanto o expoente tende a infinito, a base $1 + \dfrac{1}{n}$ tende decrescentemente a 1.

Mostraremos que a sequência que define e é crescente e limitada, portanto, tem limite. Pela fórmula do binômio de Newton, temos

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{r=0}^{n} \left(\frac{n!}{r!(n-r)!}\right) \frac{1}{n^r} \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots[n-(r-1)]}{r!} \frac{1}{n^r} \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r!}.\frac{n}{n}.\frac{(n-1)}{n}\dots\frac{[n-(r-1)]}{n}. \end{aligned}$$

Logo

$$x_n = 1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{r-1}{n}\right). \tag{4.1}$$

Substituindo n por $n+1$, nesta última expressão, obtemos

$$x_{n+1} = 1 + \sum_{r=1}^{n+1} \frac{1}{r!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{r-1}{n+1}\right).$$

Desconsiderando o último termo desta última somatória estaremos somando até $r = n$. *Vemos que cada fator entre parênteses que aí aparece, é maior que os fatores correspondentes em* (4.1), *concluímos que* $x_{n+1} > x_n$, *provando que a sequência* (x_n) *é efetivamente crescente.*

Podemos observar que cada parêntese que aparece em (4.1) *é menor do que* 1, *de sorte que, sendo* $n > 1$

$$\begin{aligned} x_n &< 1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r!} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \\ &< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Podemos observar que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1,$$

Formando a soma dos termos de uma P.G finita, onde a soma é menor que 1, *(ver no exemplo* 3.10*). Portanto,* $x_n < 3$. *Logo* (x_n) *é limitada. Pelo Teorema de* ***Bolzano-Weierstrass*** *a sequência admite uma subsequência convergente. Sendo crescente e limitada,* (x_n) *tem limite, que é o número e. Fica claro também que, esse número está compreendido entre* 2 *e* 3.

Observação 4.1. *Para provar que,* $e = \lim\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$. *Introduzimos* $m = n - 1$ *e notemos que*

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\dfrac{n}{(n-1)}} = \frac{1}{\dfrac{(m+1)}{m}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{m}} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-1};$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{n},$$

mas, esta última expressão tende a e, quando fazemos m tender a infinito (o que também equivale a fazer n tender a infinito). Em vista disso podemos escrever

$$e = \lim_{n\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Exemplo 4.2. *Dado um número* $a > 0$*, a sequência* $x_n = \sqrt[n]{a}$*, tem limite igual a* 1*. Suponhamos que* $a > 1$*, donde* $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$*, onde* h_n *é um número positivo conveniente. Todos os termos da fórmula do binômio de Newton em* $(1 + h_n)^n$ *são positivos, de sorte que*

$$a = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n > nh_n.$$

assim

$$h_n = |\sqrt[n]{a} - 1| < \frac{a}{n}$$

e isso será menor do que qualquer $\varepsilon > 0$ *fixado de antemão, desde que*

$$n > \frac{a}{\varepsilon}.$$

No caso $0 < a < 1$*, temos que* $\dfrac{1}{a} > 1$*, donde* $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1$*. Logo*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Exemplo 4.3. *Dada a sequência* $\sqrt[n]{n}$*, vamos mostrar que o* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$*, consideremos também que* $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$*, onde* h_n *novamente é um número positivo conveniente.*

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}(h_n)^2 + \ldots + (h_n)^n > \frac{n(n-1)}{2}(h_n)^2$$

donde

$$(h_n)^2 < \frac{2}{(n-1)}.$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$*,* $\dfrac{2}{(n-1)}$ *será menor do que* ε^2*, desde que* n *seja maior do que,* $\dfrac{2}{\varepsilon^2 + 1} = n_0$*. Consequentemente*

$$n > n_0 \Rightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| = h_n < \varepsilon,$$

provando o resultado desejado.

Considerações finais

Buscamos com esse trabalho facilitar a compreensão e o acesso a definições e resultados sobre sequências e limites, querendo lembrar também da importância do estudo de sequências numéricas no ensino médio nos conteúdos de P.A e P.G, juros e etc, como também a importância do estudo de sequências e limites pois faz base para as definições de convergência, divergência, continuidade, derivada, e integral. Essa importância foi a base de motivação para o desenvolvimento deste trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] Aguinaldo Prandini Riciere, *A construção do Cálculo* v.2 - S.P. - Gráfica Planalto Ltda, 1987.

[2] Dante, Luiz Roberto, *Matemática: Livro do professor* - 1. ed. – São Paulo : Ática, 2004.

[3] Fonseca, Daila Silva Seabra de Moura, *convergência de sequências numéricas no Cálculo [manuscrito] : um trabalho visando a corporificação dos conceitos* / Daila Silva Seabra de Moura Fonseca – 2012.

[4] Geraldo Ávila, *Análise Matemática para Licenciatura.* Edgard Blucher Ltda, 3 ed, 2006.

[5] Lima, Elon Larges, *Análise real volume 1. Funções de uma variável* 12.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2014.

[6] Lima, Elon Lages, *Curso de análise* v.1 14.ed.– Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.

[7] Maciel, Aldo Bezerra; Lima, Osmundo Alves, *Introdução à análise real* - Campina Grande: EDUEP, 2005.

Sites consultados:

[8] http://www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos_pdf/seriesdefarey.pdf

[9] https://www.linkedin.com/in/ailton-barcelos-da-costa-a4712327

[10] https://mathemathika.wordpress.com/2012/12/12/sequencia-de-golomb/