



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB**  
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS - CCHE  
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

**Valéria Juliana Raposo Pereira**

**O Teorema de Liouville e Aplicação**

**Monteiro - PB**  
**2013**

**VALÉRIA JULIANA RAPOSO PEREIRA**

## **O Teorema de Liouville e Aplicação**

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB , em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática .

Orientação do Professor Me. Luiz Lima de Oliveira Junior.

**Monteiro - PB  
2013**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA SETORIAL – CAMPUS VI

P436 t      Pereira, Valéria Juliana Raposo.

O Teorema de Liouville e Aplicação [Manuscrito]

/    por    Valéria    Juliana    Raposo    Pereira.  
– 2013.

68 f. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em  
Licenciatura Plena em Matemática) – Universidade Estadual  
da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2013.

“Orientação: Prof. Me. Luiz Lima de Oliveira Junior,  
Departamento de Matemática”.

1. Teorema de Liouville    2. Variável Complexa    3 . Teorema  
Fundamental da Álgebra    I. Título.

21.ed. CDD 510

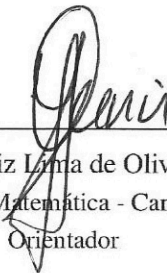
**VALÉRIA JULIANA RAPOSO PEREIRA**

## **O Teorema de Liouville e Aplicação**

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB , em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática .

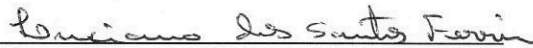
Aprovado pela banca examinadora em 28 de Agosto de 2013.

### **Banca Examinadora**



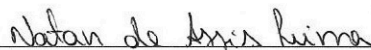
---

Prof<sup>o</sup>. Me. Luiz Lima de Oliveira Junior  
Departamento de Matemática - Campus VI/UEPB  
Orientador



---

Prof<sup>o</sup>. Me. Luciano dos Santos Ferreira  
Departamento de Matemática - Campus VI/UEPB  
Examinador



---

Prof<sup>o</sup>. Me. Natan de Assis Lima  
Departamento de Matemática - Campus VI/UEPB  
Examinador

Dedico este trabalho às bases da minha vida, meu maravilhoso Deus e minha amada família.

## Agradecimentos

- Concluo o Curso em matemática e inicio, o curso de minha vida profissional, não encontrei mãos que me puxem para cima nesta vida profissional, apenas levo a certeza de encontrar degraus, os quais galgarei passo a passo, ritmados e reforçados por aquilo que aprendi !!!!

- Há tantos a agradecer, por tanto se dedicarem a mim, não somente por terem ensinado, mas por terem proporcionado o aprender! A palavra mestre, nunca fará justiça aos professores dedicados, aos quais, sem nominar terão meu eterno agradecimento!

- A Esta Universidade, seu corpo de Direção e Administrativo, que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela mais acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes. O Muito Obrigado, é mísero por tamanha competência!

- Aos meus pais, Mizael e Josefa. Ao meu querido esposo Carlos Ariel. E aos meus irmão Vando e Vanda que nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo superior, sempre fizeram entender que o futuro, é feito apartir da constante dedicação no presente!

- Aos meus colegas de classe, Felipe, Raquel e João minha segunda família, que fortaleceram os laços da igualdade, num ambiente fraterno e respeitoso! Jamais lhes esquecerei!

- Por final, aquele, que me permitiu tudo isso, ao longo de toda a minha vida, e, não somente nestes anos como universitária, à você meu DEUS, obrigado, reconheço cada vez mais em todos os meus momentos, que você é o maior mestre, que uma pessoa pode conhecer e reconhecer!! .

Enfim, são muitos que gostaria de agradecer, mas tenho certeza que não faltarão oportunidade para agradecê-los.

*- Eu sei como ele conseguiu.*

*Todos perguntaram:*

*- Pode nos dizer como?*

*- É simples, respondeu o Einstein.*

*- Não havia ninguém ao seu redor, para lhe dizer que não seria capaz.*

*Albert Einstein*

## Resumo

O presente trabalho tem por objetivo demonstrar o Teorema de Liouville e como aplicação o Teorema Fundamental da Álgebra. Inicialmente tratamos um pouco de História dos Números Complexos e História de Liouville, em seguida temos a fundamentação teórica, onde se encontram toda a teoria utilizada para demonstração de tais teoremas. No desenvolvimento do trabalho adotamos uma metodologia na qual foram coletadas obras bibliográficas. Após a sondagem, efetuamos uma pesquisa exploratória sobre o objeto a ser estudado, a fim de selecionarmos as que mais se adequavam a realização da monografia, que serviram como alicerce para concretização da mesma. Ao término do trabalho, concluímos que através do Teorema de Liouville demonstramos facilmente o Teorema Fundamental da Álgebra.

**Palavras-Chave:** Função de Uma Variável Complexa; Teorema de Liouville; Teorema Fundamental da Álgebra.



## Abstract

The present work aims to demonstrate the Liouville theorem and as applying the Fundamental Theorem of Algebra. Initially treat each little His'toia Complex Numbers and History Liouville then have a theoretical basis, where are all the theory used to demonstration of such theorems. In developing this work we adopt a methodology in which were collected bibliographical works. After the survey, we performed an exploratory research about the object be studied, so we select those best suited to achieving the monograph, which served as the foundation for achieving thereof. At the end of the work, we conclude that by Liouville's Theorem easily demonstrate the Fundamental Theorem of Algebra.

**Keywords: Key words:** Function of a complex variable; Liouville's Theorem; Fundamental Theorem of Algebra.

## Lista de Figuras

1	Joseph Liouville . . . . .	19
1	Plano de Argand-Gauss . . . . .	23
2	Representação do conjugado . . . . .	24
3	Representação do módulo e argumento . . . . .	24
4	Região triplamente conexa . . . . .	28
5	Esfera de Riemann . . . . .	35
1	Curva $C$ . . . . .	41
2	Curva $-C$ . . . . .	41
3	Curva Não Fechada . . . . .	42
4	Curva não Simples Fechada . . . . .	42
5	Curva Simples Fechada . . . . .	42
6	<i>Plano 1</i> . . . . .	45
7	<i>Caminhos equivalentes</i> . . . . .	47
8	<i>Aditividade</i> . . . . .	48
9	<i>Cálculo da Integral de Linha</i> . . . . .	49
10	<i>Contorno 1</i> . . . . .	51
11	<i>Contorno 2</i> . . . . .	52
12	<i>Direção positiva e negativa <math>C^+</math> e <math>C^-</math></i> . . . . .	53
13	Domínio simplesmente conexo . . . . .	54
14	Domínio multiplamente conexo . . . . .	54
15	<i>Contorno 3</i> . . . . .	55
16	<i>Contorno 4</i> . . . . .	56

17	<i>Domínio Multiplamente Conexo 2</i>	58
18	<i>Domínio Simplesmente Conexo 2</i>	59
19	<i>Domínio Duplamente Conexo 2</i>	60
20	<i>Contorno 5</i>	61
21	<i>Contorno 6</i>	61

# SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	12
<b>1 Fatos Históricos</b>	<b>14</b>
1.1 A História dos Números complexos	14
1.2 Quem foi Joseph Liouville	19
<b>2 Fundamentação Teórica</b>	<b>21</b>
2.1 Os números complexos	21
2.2 Representação Polar	25
2.3 Os complexos $\mathbb{C}$ como espaço Topológico	26
2.4 Limites	28
2.5 Propriedades do limite	30
2.6 Continuidade	35
2.7 Descontinuidade removível e essencial	36
2.8 Diferenciação	38
<b>3 Teorema de Liouville e Aplicações</b>	<b>41</b>
3.1 Integrais	41
3.2 Fórmula Integral de Cauchy	59
<b>Conclusão</b>	<b>67</b>
<b>Referências</b>	<b>68</b>

# Introdução

Este trabalho tem o foco voltado às Funções de uma Variável complexa e algumas de suas Aplicações. O tema do nosso trabalho surgiu a partir de um projeto de extensão com título "Estudo de Funções de uma Variável Complexa" coordenado pelos professores Luiz Lima e Luciano dos Santos. Foi quando surgiu o interesse de fazermos o trabalho de conclusão de curso a partir do tema tratado no projeto.

O objetivo geral da pesquisa é demonstrar o Teorema de Liouville e como aplicação o Teorema Fundamental da Álgebra. E a principal finalidade deste é estudarmos toda a teoria necessária para tais demonstrações.

A importância deste trabalho se reflete no Teorema de Liouville que é um teorema de análise complexa e uma terceira consequência do Teorema Integral de Cauchy. O Teorema de Liouville afirma que uma função complexa inteira e limitada é constante.

A relevância do trabalho pode ser considerada de irrefutável indispensabilidade, pois este teorema permite demonstrar o teorema fundamental da álgebra de forma simples.

Metodologicamente, este trabalho adotou o tipo de pesquisa bibliográfica. Foi realizados resumos dos livros e TCCs lidos. É oportuno citarmos os principais autores que fundamentaram esse trabalho, Geraldo Ávila e Artur A. Hauser JR.

O trabalho está dividido em três capítulos, no primeiro tratamos um pouco da História dos Números Complexos e História de Liouville, no segundo temos a fundamentação teórica, contendo um resumo dos conteúdos: de Topologia, Limites e Funções Analíticas, e no terceiro e último capítulo encontra-se a Teoria da Integral, tratamos neste o estudo de Integrais, o Teorema Formula Integral de Cauchy, dentre outras teorias e enfim o teorema de Liouville e o Teorema Fundamental da Álgebra.

# 1 Fatos Históricos

Neste capítulo trataremos um pouco da história dos números complexos e História de Joseph Leouville.

## 1.1 A História dos Números complexos

Quando falamos em história, nos remetemos a alguns fatos que aconteceram no passado, mas mesmo assim, são dignos de grande importância para o nosso presente. É o que acontece com os Números Complexos. Por volta do século XVI o interesse pelo estudo da matemática ressurgiu na Europa, mas especificamente na Itália. Dois grandes matemáticos Cardano e Tartaglia disputavam a resolução da equação do 3º grau. De Girolamo Cardano, nascido em Pavia em 1501 e falecido em Roma em 1576. O que se pode ser dito de Cardano é que sua vida foi marcada por grandes embates. Cientista e Astrólogo, protegido do Papa Gregório XIII, sendo acusado de (heresia) ir contra os princípios e dogmas de uma religião contrária aos preceitos estabelecidos pela Igreja, por ter divulgado o horóscopo de Jesus Cristo.

E Nicolò Fontana, apelidado de Tartaglia, nascido em Bréscia, em 1501 e falecido em 1557. Sua infância foi marcada por infortúnio, lutas e por toda a sorte de dificuldades. Aos 11 anos sofreu grandes atritos quando a Brévia foi tomada por tropas francesas, o menino foi gravemente ferido diante de sua mãe, do incidente ocorrido Tartaglia levou por o resto de sua vida uma profunda cicatriz na boca, donde se originou o seu apelido. Scipione Del Ferro professor de Matemática da Universidade de Bolonha, por volta de 1510 encontrou uma forma geral de se resolver as equações de terceiro grau da forma,

$$x^3 + px + q = 0$$

morreu sem publicar sua valiosa descoberta, ele havia revelado para seu aluno, Antonio Maria Fior, que tentou adquirir fama com a descoberta de seu professor.

Naquela época era comum, matemático lançarem desafios entre si, e Fior desafiou Tartaglia, sendo bastante conhecido por seu talento. O desafio consistiu em solucionar diversos problemas que estes deveriam propor entre si, e Fior naturalmente pretendia apresentar questões que envolviam as equações de 3º grau, a qual apenas ele detinha da solução deixada por seu mestre. Tartaglia aceitou o desafio, pois não considerava Fior um desafio, mas pouco antes da data marcada Tartaglia descobriu que Fior estava armando, e iria utilizar um método deixado por Scipione Del Ferro.

Tartaglia relatou "mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1535". Além de resolver as equações proposta ainda resolveu as o tipo  $x^3 + px + q = 0$ , e também achou a forma geral para as do tipo  $x^3 - px^2 + q = 0$ , a qual Fior não conhecia.

O resultado do desafio proposto por Fior foi, que Tartaglia resolveu todos os problemas propostos por Fior, enquanto este não conseguiu solucionar nenhum dos problemas propostos a ele, saindo humilhado "e hoje só é lembrado como alguém que recebeu o merecido castigo ai pretender adquirir fama à custa de outrem"(GARBI, 2010, p. 37). Nesta mesma época Cardano estava escrevendo a *Pratica Arithmeticae Generalis*, reunindo Álgebra, Aritmética e Geometria. Cardano nem pretendia tocar no assunto das equações do terceiro grau em seu livro, acreditando no que dissera Luca Pacioli sobre a impossibilidade de uma solução geral para estas equações. Porém ficou sabendo que Tartaglia conhecia esta solução, e decidiu pedir para que ele a revelasse para que ele mesmo a publicasse na *Pratica*. Tartaglia negou, alegando que ele mesmo iria publicar em um livro a ser escrito no futuro.

Depois de muitos contra tempos entre estes dois homens, Tartaglia recebeu uma carta de um nobre italiano, convidando-o a visita-lo em Milão. Lá chegando ao invés do nobre italiano se encontrava Cardano, que o implorou pela resolução, sob juramento de segredo. Depois de muita insistência Tartaglia decidiu confia em Cardano. Tartaglia mandou a fórmula em forma de um poema que, de forma cifrada e misteriosa, que Cardano não conseguiu entender. Com mais conversações e mais juras feitas, Tartaglia finalmente revelou tudo. Cardano no ano de 1545 fez publicar *Ars Magna*, a fórmula revelada por Tartaglia. "Embora tenha feito rasgados elogios a ele, acrescentou que, independentemente e trinta anos antes, Scipione Del Ferro chegara aos mesmos resultados."(GARBI 2010, p. 37).

A reação de Tartaglia todos já havia de esperar, ficou com muita raiva e publicou sua versão dos fatos e denunciou Cardano por haver traído um sagrado juramento sobre a bíblia. E no final aconteceu o que todos esperávamos, houve uma grande injustiça com Tartaglia, a fórmula que deduzira e que ensinou ao desleal amigo, ao invés de receber o seu nome, hoje propagar-se como Fórmula de Cardano.

Vejamos a seguir a chamada de Cardano,

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Veamos a seguir como funciona na prática a fórmula de Cardano (Tartaglia!). Seja a equação  $x^3 - 6x - 9 = 0$ , sendo  $p = -6$  e  $q = -9$ .

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{9}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(\frac{-9}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} + \sqrt[3]{\frac{49}{4}} + \sqrt[3]{\frac{49}{4}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$$

$$x = 2 + 1 = 3$$

Basta verificarmos que realmente 3 é solução da equação, e a fórmula como esperado funcionou. Imaginou-se que as equações de 3º estavam solucionadas, e não demorou muito para surgirem às dúvidas ao respeito da fórmula. Com relação à fórmula de Bhaskara, encontra-se duas raízes facilmente para a equação do 2º grau, a questão é, por que a de Cardano só apresenta uma solução para uma equação de 3º grau?

A aplicação da fórmula de Cardano, logo começou a apresentar problemas que desafiavam o conhecimento dos matemáticos da época.

Vamos tomar, como exemplo:  $x^3 - 15x - 4 = 0$ , por simples verificação conta-se que  $x = 4$  é uma de suas raízes e as outras duas são  $-2 + \sqrt{3}$  e  $-2 - \sqrt{3}$ .

Se tentarmos resolver pela fórmula de Cardano

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Dá-se para vê que não apenas caímos em uma resolução que envolve números negativos, como também na extração de raízes cúbicas de valores não conhecidos. Se a aplicação da fórmula de Bhaskara, nas equações de 2º grau levava a raízes negativas, bastava dizer que não tinha solução. Diante das equações de 3º grau com soluções evidentes, mas que se tratava da



extração de raízes quadradas de números negativos. O que ocorria com as equações do 3º grau  $x^3 - 15x - 4 = 0$ , pode ser generalizado.

Se o produto:

$$(x - a)(x - b)(x - c) \quad (1.1)$$

É fácil de se vê que leva a uma equação do 3º grau em  $x$ , se igualarmos a zero, temos uma equação do 3º grau cujas raízes são  $x = a, x = b$  e  $x = c$ , pois para qualquer um desses valores o produto se anula. Desenvolvendo 1.1:

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc$$

Com isso desenvolvemos uma relação para que o produto cujo o desenvolvimento do produto conduza a um a equação do tipo  $x^3 + px + q = 0$ , sendo esta valida para a fórmula de Cardano. Queremos anular o termo do 2º grau é suficiente e necessário que  $a + b + c = 0$  ou  $c = -(a + b)$ . Portanto a equação  $(x - a)(x + b)(x + (a + b)) = 0$  tem por raízes  $a, b$  e  $-(a + b)$  é equivalente à equação  $x^3 + [ab - (a + b)]x + ab(a + b) = 0$ .

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{ab(a+b)}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{ab(a+b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab - (a+b)}{2}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(-\frac{ab(a+b)}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{ab(a+b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab - (a+b)}{2}\right)^3}}$$

Esta expressão nos levara as raízes  $a, b$  e  $c = -(a + b)$ , já conhecidas de antemão. Estudemos a expressão que se encontra sobre o radical quadrático e chamaremos de  $\Delta$ .

$$\Delta = \left(\frac{ab(a+b)}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab - (a+b)}{3}\right)^3$$

Fica a cargo do leitor, efetuar as operações e simplificar o polinômio decorrente.

$$\Delta = \frac{-4a^6 - 12a^5b + a^4b^2 + 26a^3b^3 + 3a^2b^4 - 12ab^5 - 4b^6}{108}$$

É possível mostrar que o numerador acima é igual ao produto

$$-(a - b)^2(2a + b)^2(a + 2b)^2$$

Portanto

$$\Delta = -\frac{(a - b)^2(2a + b)^2(a + 2b)^2}{108}$$

Ora se  $a$  e  $b$  são reais,  $\Delta$  nunca será positivo. Este é um achado surpreendente, pois, para que achemos  $a$  e  $b$  reais e distintos, teremos que trabalhar com raízes quadradas de números negativos, coisa que por muito tempo pensou-se ser impossível. Ainda mais surpreendente é quando as equações do 2º grau só possuem raízes reais quando  $\Delta \geq 0$ , e as equações do 3º grau, só possuem 3 raízes reais quando  $\Delta \leq 0$ . Estava claro que os números que a Matemática vinha trabalhando à séculos não era mais suficiente para o estudo da Álgebra. Tartaglia encontrara uma verdadeira caixa de supressas, estava diante de um novo tipo de número, diferente de tudo que se conhecia.

## 1.2 Quem foi Joseph Liouville



Figura 1: Joseph Liouville

Liouville nasceu em 24 de março de 1809 em Saint-Omer na França. E morreu em 08 de setembro de 1882.

Seus primeiros anos viveu com seu tio, pois seu pai era um oficial do exército de Napoleão. Somente quando Napoleão foi derrotado, seu pai retornou a família e viveram juntos e Toul na França.

Liouville estudou matemática na Faculdade de St. Louis, Paris. Nesta época já demonstrava interesse e habilidades em tópicos avançados de matemática. Ele entrou na École Polytechnique, quando tinha 16 anos. Nesta Universidade ele assistiu as palestras de André Marie e François Jean Dominique Arago. Ele foi muito influenciado por Augustin Louis Cauchy, mesmo não assistindo nenhuma palestra deste. Podemos citar Gaspard de Pônei e Simeon Denis Poisson dentre seus examinadores de sua graduação.

Liouville se formou em 1827 e entrou na École des Ponts et Chaussées, com interesse de se tornar um engenheiro. Sua saúde encontrava-se seriamente afetada, ele teve algum tempo de folga e retornou a Toul, onde casou-se com Marie-Louise Balland e decidiu pedir demissão em 1830 da École des Ponts et Chaussées. Ele aceitou uma posição acadêmica na Escola Politécnica em 1831, foi assistente de Claude Louis Mathieu. Com isso desenvolveu uma reputação enfocada em temas avançados.

Na França, em 1836, começou sua própria revista matemática, *Jornal Mathematiques Pures et Appliquées* que era conhecido como *Journal de Liouville*, a revista foi um sucesso e publicou muitos trabalhos significativos de matemáticos franceses. Em 1838, tornou-se professor de Análise e Mecânica da Escola politécnica, e em 1840 foi eleito para a Académie des Sciences em Astronomia e ele também foi eleito para o Bureau des Longitudes.

Liouville foi chefe do Partido Republicano na França e amigo íntimo de Arago, ele foi encorajado a concorrer a um cargo e em 1848 foi eleito para a Assembléia de Organização, sua carreira não durou muito tempo. Ele teve uma grande produção matemática escreveu mais de 400 trabalhos, sendo mais de 200 sobre a teoria dos números, outros trabalhos abrangeram uma série de tópicos, incluindo a física, matemática e a matemática pura.

Liouville introduziu o cálculo fracionado como parte de sua análise do eletromagnetismo, foi o primeiro a provar a existência de números transcendentes, isto é, números que não

são algébricos e não pode ser uma solução para uma equação polinomial não constante com coeficientes racionais. Teve outros trabalhos importantes sendo um sobre os problemas de valor de contorno com equações diferenciais, hoje chamado de Teoria de Sturm-Liouville e em mecânica estatística e teoria da medida.

Em 1843, ele aunciou a Academia de Paris que tinha descoberto muito insights (Psicologia Descoberta subitamente da solução de um problema) brilhante por Galois. Talvez seu impacto mais importante na matemática foi a descoberta das memórias por Evariste Galois.

Muitos historiadores o consideram o maior matemático de seu tempo, e a cratera de Liouville na lua é nomeado em sua honra.

## 2 Fundamentação Teórica

### 2.1 Os números complexos

**Definição 2.1.** O Conjunto dos números complexos, indicado por  $\mathbb{C}$ , é o conjunto de todos os pares ordenados de números reais em que estão definidas:

- 1 ) Igualdade:  $(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d$ .
- 2 ) Adição:  $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ .
- 3 ) Multiplicação:  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ .

Desta forma é importante notar que, estamos definindo o conjunto dos números complexos como o produto Cartesiano do conjunto dos números reais por ele mesmo, isto é,

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

. É usual representar cada elemento  $(x, y) \in \mathbb{C}$  com o símbolo  $z$ , portanto:

$$z \in \mathbb{C} \iff z = (x, y), \text{ com } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 2.1.** Dado  $z_1 = (4, 1)$ , e  $z_2 = (3, 0)$ , calcular  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 \cdot z_2$  e  $z_2^2$ .

#### 2.1.1 Unidade Imaginária

A igualdade  $(1, 0) = 1$  define, em  $\mathbb{C}$ , o número complexo  $(1, 0)$  como unidade real.

O par  $(0, 1)$  define a unidade imaginária, indicada por  $i$ .

$$(0, 1) = i$$

No qual satisfaz a seguinte propriedade

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1$$

e desta maneira podemos escrever

$$i = \sqrt{-1}.$$

No número complexo  $z = (x, y)$ , os números reais  $x, y$  são, respectivamente, a parte real e imaginária de  $z$  sendo indicado por

$$R(z) = x \text{ e } Im(z) = y.$$

### 2.1.2 Potências de $i$

Consideremos as potências do tipo  $i^n$ , onde  $n$  é natural. Vejamos alguns exemplos:

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 & i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 \\ i^1 &= i & i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^2 &= -1 & i^6 &= i^5 \cdot i = i \cdot i = -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i & i^7 &= i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i \end{aligned}$$

Começamos então a perceber que, à medida que  $n$  cresce, os resultados de  $i^n$  vão se repetindo periodicamente, assumindo sempre um dos valores da sequência:

$$1, -1, i, -i.$$

Assim, para calcular o valor  $i^n$ , **basta elevar  $i$  ao resto da divisão euclidiana de  $n$  por 4**, isto é:

$$i^n = i^{4k+r} = i^{4k} \cdot i^r = (i^4)^k \cdot i^r = i^r.$$

e, portanto:

$$i^n = i^r.$$

**Exemplo 2.2.** Calcule:

- a)  $i^{53}$ ;
- b)  $i^{88}$ ;
- c)  $i^{10} - i^{12}$ ;

### 2.1.3 Forma Álgebraica

Note que sempre podemos escrever

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$$

onde

$$(x, 0) = x \text{ e } (0, y) = (y, 0)(0, 1) = yi.$$

Assim, para

$$z = (x, y) = x + iy$$

é dita da forma álgebraica de  $z$ .

**Exemplo 2.3.** Coloque na forma álgebraica os seguintes números complexos ( $a+bi$ ):

a)  $(3, -2)^2$

b)  $(4, 9)^2 + (-1, -1)$

**Exemplo 2.4.** Resolva

a)  $(1+i)/(3+4i)$

b)  $(2+3i)(3-5i)$

### 2.1.4 O Plano Complexo - (Plano de Argand-Gauss)

O plano Cartesiano este chamado: de plano complexo ou plano  $z$  é o conjunto das representações de todos os números complexos  $z = x + yi$  pelos pontos  $P = (x, y)$ , do plano. Assim, para o complexo  $z = x + yi = (x, y)$ ,  $x$  é a projeção de  $z$  sobre o eixo das abscissas (eixo real) e  $y$  é a projeção de  $z$  sobre o eixo das ordenadas (eixo imaginário). Veja figura abaixo.

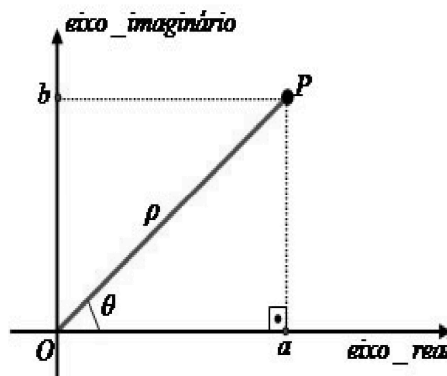


Figura 1: Plano de Argand-Gauss

**Observação 2.1.** Chamaremos o ponto  $P$  de afixo do complexo  $z$ .

**Definição 2.2.** O conjugado de um número complexo  $z = a + ib$  é definido por

$$\bar{z} = a - bi.$$

Conjugar um número complexo, corresponde geometricamente a refletí-lo com relação ao eixo real,

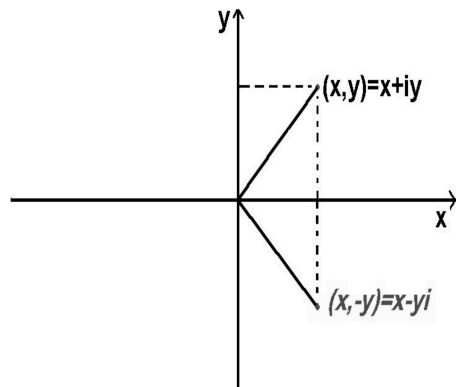


Figura 2: Representação do conjugado

**Observação 2.2.** Geometricamente, o módulo de um número complexo  $z$  representa a distância de  $z$  a origem do plano cartesiano. Argumento de um número Complexo: Sejam  $z = a + bi$  um número complexo não nulo e  $r$  o segmento de reta que liga 0 a  $z$  e  $\theta$  é o ângulo que  $r$  faz com o eixo  $x$  no sentido anti-horário.

Veja a figura abaixo:

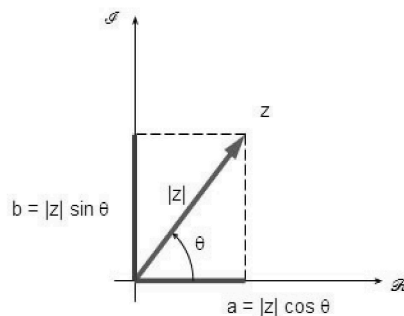


Figura 3: Representação do módulo e argumento

A medida  $\theta$  é chamado de argumento de  $z$  e é indicado por

$$\theta = \arg(z).$$

Observe que o argumento de um número complexo  $\theta = \arg(z)$  não é único, pois,

$$\arg(z) = \theta_k = \theta + 2k\pi.$$



Para obtermos  $\arg(z) = \theta$  de maneira única, basta considerar por exemplo que

$$0 \leq \theta < 2\pi$$

ou

$$-\pi < \theta \leq \pi.$$

O argumento de  $z$  assim definido é chamado de argumento principal.

No entanto, é frequente nos referirmos ao argumento principal  $\theta$  simplesmente como **argumento de  $z$** .

**Exemplo 2.5.** Para o complexo  $z = -5$ , temos que, o ponto  $P(-3, 0)$  está no semi-eixo negativo  $0x$ . Portanto:

$$\theta = \pi$$

**Exemplo 2.6.** Para o complexo  $z = -3i$ , temos que, o ponto  $P(0, -3)$  está no semi-eixo negativo  $0y$ . Portanto:

$$\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

## 2.2 Representação Polar

Utilizando as definições de argumento e módulo de  $z \neq 0$  podemos escrevê-lo em coordenadas polares da seguinte forma

$$z = x + iy = (x, y) = |z| (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$$

, onde

$$x = |z| \cos\alpha$$

$$y = |z| \operatorname{sen}\alpha.$$

Sejam os números complexos (não nulos):

$$z = |z| (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$$

$$w = |w| (\cos\sigma + i\operatorname{sen}\sigma)$$

$$\begin{aligned} zw &= [|z| (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)] \cdot [|w| (\cos\sigma + i\operatorname{sen}\sigma)] \\ &= |z| \cdot |w| [(\cos\alpha \cdot \cos\sigma - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\sigma) + i(\cos\alpha \operatorname{sen}\sigma + \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\sigma)] \\ &= |z \cdot w| [\cos(\alpha + \sigma) + i\operatorname{sen}(\alpha + \sigma)] \end{aligned}$$

Assim, para multiplicar dois números complexos na forma trigonométrica, basta multiplicar seus módulos e somar seus argumentos.

Para divisão, temos

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1| \cdot (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)}{|z_2| \cdot (\cos\sigma + i\operatorname{sen}\sigma)} \\ &= \frac{|z_1| \cdot (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)}{|z_2| \cdot (\cos\sigma + i\operatorname{sen}\sigma)} \cdot \frac{(\cos\sigma - i\operatorname{sen}\sigma)}{(\cos\sigma - i\operatorname{sen}\sigma)} \\ &= \frac{|z_1| \cdot (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) \cdot (\cos\sigma - i\operatorname{sen}\sigma)}{|z_2| \cdot (\cos^2\sigma + \operatorname{sen}^2\sigma)} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \cos(\alpha - \sigma) + i\operatorname{sen}(\alpha - \sigma) \end{aligned}$$

Portanto, para dividir dois números complexos na forma trigonométrica, basta **dividir seus módulos e subtrair seus argumentos**.

**Exemplo 2.7.** Sejam  $z_1 = 6(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\pi 4)$  e  $z_2 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}3\pi 2)$ .

Calcule:  $z_1 \cdot z_2$  e  $\frac{z_1}{z_2}$

Para calcularmos  $z_1 \cdot z_2$ , fazemos:

$$\begin{cases} |z_1| \cdot |z_2| &= 6 \cdot 2 = 12 \\ \alpha + \sigma &= \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

e escrevemos:

$$z_1 \cdot z_2 = 12 \left( \cos\frac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} \right).$$

Para calcularmos  $\frac{z_1}{z_2}$  fazemos:

$$\begin{cases} \frac{|z_1|}{|z_2|} &= \frac{6}{2} = 3 \\ \alpha - \sigma &= \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} = -\frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

e escrevemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = 3 \left[ \cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \right].$$

## 2.3 Os complexos $\mathbb{C}$ como espaço Topológico

### 2.3.1 Conjuntos abertos e fechados

Qualquer coleção de pontos no plano é chamada de conjunto de pontos, e cada ponto é chamado um membro ou elemento do conjunto.

**Definição 2.3.** Sejam  $z_0 = (x_0, y_0)$  um ponto do plano complexo  $\mathbb{C}$  e  $r$  um número real positivo. O conjunto  $D(z_0, r)$  formado pelos pontos  $z$  do plano satisfazendo

$$|z - z_0| < r$$

é chamado disco aberto ou simplesmente disco de raio  $r$  e centro  $z_0$ .

Já o disco fechado é o conjunto  $\overline{D}(z_0, r)$

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}.$$

**Definição 2.4.** Chama-se vizinhança de um ponto  $z_0$  a todo conjunto  $V$  que contém um disco de centro  $z_0$ . Em particular um disco  $D_r(z_0)$  é uma vizinhança de  $z_0$ . Usaremos a notação  $V'_r(z_0)$  para indicar uma vizinhança sem o ponto  $z_0$ . Ou seja,  $V'_r(z_0) = D_r(z_0) - z_0$ .

**Definição 2.5.** Um círculo de raio  $r$  e centro em  $z_0$ , é denotado por  $\partial\overline{D}(z_0, r)$  tal que:

$$\partial\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}.$$

**Definição 2.6.** Dizemos que  $z_0$  é ponto interior de um conjunto  $A$  se  $A$  é vizinhança de  $z_0$ , isto é, se existe um disco de centro  $z_0$  todo contido em  $A$ .

$$\text{int}(A) = \{z \in A \mid \exists r > 0 \text{ tal que } D(z, r) \subset A\}.$$

**Definição 2.7.** Um subconjunto  $A$  do plano chama-se aberto se todos os seus pontos são interiores, quando todo ponto  $z \in A$  é centro de um disco aberto inteiramente contido em  $A$ , ou seja, se  $A$  é vizinhança de cada um de seus pontos. É dito fechado quando seu complementar é aberto.

Intuitivamente sempre que  $A$  contém um ponto  $z$ , deve conter todos os pontos de  $\mathbb{C}$  suficientemente próximos de  $z$ .

**Definição 2.8.** Chama-se fronteira de um conjunto  $C$  ao conjunto dos pontos  $z$  tais que qualquer vizinhança de  $z$  contém pontos de  $C$  e do seu complementar, que iremos representar por  $C'$ .

**Definição 2.9.** Um ponto de  $A$  é dito ponto de acumulação se qualquer  $r > 0$ , o disco  $D(z, r)$  contém pelo menos um ponto de  $A$  diferente de  $z$ . Um ponto que não é de acumulação é dito isolado.

**Definição 2.10.** Um conjunto  $A$  é dito conexo quando quaisquer dos pontos de  $A$  puderem ser unidos por uma poligonal (curva contínua) inteiramente contida em  $A$ .

Um conjunto aberto e conexo diz-se uma região. Uma região pode ser simples ou múltiplamente conexa. Uma região é simplesmente conexa se o "interior" de qualquer contorno

fechado contido na região, ainda pertence à região. Isto é equivalente a dizer que qualquer contorno fechado pertencente à região pode ser deformado até se reduzir a um ponto sem que deixe de pertencer à região. Por exemplo, um círculo é simplesmente conexo; uma coroa circular é duplamente conexa.

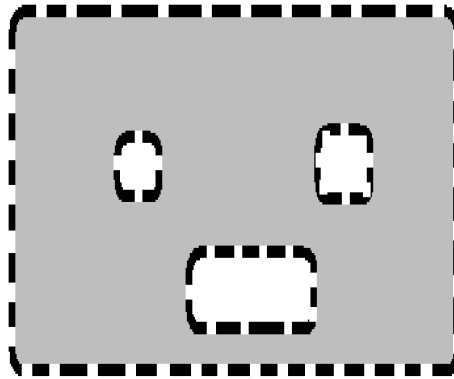


Figura 4: Região triplemente conexa

## 2.4 Limites

Nos cursos de cálculo aprendemos a definição de limite e continuidade para variável real. Para uma variável complexa estas definições são semelhantes.

**Definição 2.11.** Um **disco furado** é um disco aberto  $D(z_0, \delta)$  cujo centro  $z_0$  está removido. Portanto, um disco furado de raio delta é

$$D'(z_0, \delta) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}.$$

**Definição 2.12.** Seja  $z_0$  um ponto de acumulação do domínio  $R \subset \mathbb{C}$  de uma função complexa  $f$ . Diz-se que  $f$  tem limite  $w_0$  com  $z$  tendendo a  $z_0$  se dado qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$z \in D'(z_0, \delta), \quad 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

**Exemplo 2.8.** Usando a definição de limite mostre que o  $\lim_{z \rightarrow 2i} (3z + i) = 6i + 1$

**Solução:**

Devemos mostrar que dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$z \in D'(z_0, \delta), \quad 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
|f(z) - w_0| &< \varepsilon \\
|3z + 1 - (6i + 1)| &< \varepsilon \\
|3x + 3yi - 6i| &< \varepsilon \\
|3x + 3(y - 2)i| &< \varepsilon \\
3|x + (y - 2)i| &< \varepsilon \\
|x + (y - 2)i| &< \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Portanto, basta tomar  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ . Seja

$$0 < |z - z_0| = |x + (y - 2)i| < \delta,$$

então

$$|f(z) - w_0| = |3z + 1 - 6i - 1| = |3x + 3(y - 2)i| = 3|x + (y - 2)i| < 3\delta = \varepsilon.$$

**Exemplo 2.9.** Mostre que o  $\lim(z^2 + 1) = 2i + 1$  quando  $z \rightarrow (i + 1)$ .

**Teorema 2.1.** Se  $\lim f(z) = B \neq 0$ , prove que existe  $\delta > 0$  tal que

$$|f(z)| > \frac{1}{2}B, \text{ para } 0 < |z - z_0| \leq \delta.$$

Demonstração: Desde que  $\lim f(z) = B$ , existe, podemos determinar  $\delta$  tal que  $|f(z) - B| < \frac{1}{2}|B|$ , se  $|z - z_0| < \delta$

Tomando,  $B = B - f(z) + f(z)$ , temos que

$$|B| = |B - f(z) + f(z)| \leq |B - f(z)| + |f(z)|$$

isto é,  $|B| < \frac{1}{2}|B| + |f(z)|$ . Portanto,

$$|f(z)| > \frac{1}{2}|B|.$$

■

**Teorema 2.2.** Se  $\lim g(z) = B \neq 0$ , então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{B}.$$

Demonstração: Devemos mostra que, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |z - z_0| \leq \delta$

$$\left( \left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{B} \right| \right) = \frac{|g(z) - B|}{|B||g(z)|} < \varepsilon.$$

Por hipótese, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$|g(z) - B| < \frac{1}{2} |B|^2 \varepsilon,$$

se  $0 < |z - z_0| \leq \delta_1$ .

Pelo teorema 2.1, desde que  $\lim g(z) = B \neq 0$ , podemos encontrar  $\delta_2 > 0$  tal que  $|g(z)| > \frac{1}{2} |B|$  se  $0 < |z - z_0| \leq \delta_2$ . Então, se  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ , temos

$$\left( \left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{B} \right| \right) = \frac{|g(z) - B|}{|B| |g(z)|} < \frac{\frac{1}{2} |B|^2 \cdot \varepsilon}{|B| \cdot \frac{1}{2} |B|} = \varepsilon$$

quando  $0 < |z - z_0| \leq \delta$ . Portanto

$$\lim \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{B} \neq 0.$$

■

## 2.5 Propriedades do limite

As propriedades do limite, relativas aos limites da soma, do produto, do quociente etc., já conhecidas no caso de funções de variáveis reais, permanecem válidas para funções de variável complexa, e são estabelecidas como no caso de variável real.

**Teorema 2.3.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções de variável complexa. Se*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = F$$

e

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = G,$$

então:

$$a) \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$b) \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$c) \text{ se } \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0 \text{ então } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}$$

$$d) \lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0.$$

**Demonstração:**

a) Devemos mostrar que para  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |z - z_0| \leq \delta$  então  $|[f(z) - g(z)] - (F + G)| < \varepsilon$ .

Temos

$$| [f(z) - g(z)] - (F + G) | = | f(z) - F + g(z) - G | \leq | f(z) - F | + | g(z) - G |$$

Mas, por hipótese, dado  $\varepsilon$ , existe  $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$  e  $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$  tais que

$$0 < |z - z_0| \leq \delta_1 \quad \text{então} \quad |f(z) - F| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

e

$$0 < |z - z_0| \leq \delta_2 \quad \text{então} \quad |g(z) - G| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim,

$$| [f(z) - g(z)] - (F + G) | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Desde que  $0 < |z - z_0| \leq \delta$ , onde  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ .

b) Devemos mostrar que para  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se

$$0 < |z - z_0| \leq \delta \quad \text{então} \quad |f(z) \cdot g(z) - FG| < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned} |f(z) \cdot g(z) - FG| &= |f(z) \cdot g(z) - f(z)G + f(z)G - FG| \\ &= |f(z)[g(z) - G] + G[f(z) - F]| \\ &\leq |f(z)| |g(z) - G| + |G| |f(z) - F| \end{aligned} \quad (2.1)$$

Mas, por hipótese, temos:

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = F \implies \exists \delta_1 > 0$  tal que

$0 < |z - z_0| \leq \delta_1 \implies |f(z) - F| < 1$  e pela proposição, temos que

$$|f(z)| - |F| \leq |f(z) - F| < 1$$

o que implica que

$$|f(z)| < 1 + |F|.$$

Como  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = G$ , isto é, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$|g(z) - G| < \frac{\varepsilon}{2[|F| + 1]}.$$

Mas, por outro lado, como  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = F$  dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta_3 > 0$  tal que

$$|f(z) - F| < \frac{\varepsilon}{2|G|}.$$

Tomando,  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ , e utilizando as hipóteses, a desigualdade 2.1, fica:

$$0 < |z - z_0| \leq \delta \implies |f(z)g(z) - FG| < (|F| + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{2[|F| + 1]} + |G| \cdot \frac{\varepsilon}{2|G|} = \varepsilon$$

como queríamos provar.

c) Do teorema 2.3 item b) e do teorema 2.2, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left( f(z) \cdot \frac{1}{g(z)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)}) \\ &= F \cdot \frac{1}{G} \end{aligned}$$

d) Basta tomar  $\delta = \varepsilon$  e  $|z - z_0| < \delta$  então  $|z - z_0| < \varepsilon$ .

**Exemplo 2.10.** Calcule cada um dos limites, utilizando o teorema 2.3.

a)  $\lim(z^2 - 5z + 10)$  quando  $z \rightarrow (i + 1)$

**solução:**

$$\begin{aligned} \lim z^2 - \lim 5z + \lim 10 &= \lim z \lim z - 5 \lim z + 10 \\ &= (i + 1)(i + 1) - 5(i + 1) + 10 \\ &= -1 - 2i + 1 - 5i - 5 + 10 \\ &= 5 - 3i. \end{aligned}$$

c)  $\lim \frac{(2z + 3)(z - 1)}{z^2 - 2z + 4}$  quando  $z \rightarrow 2i$

**Solução:**



$$\begin{aligned}
\lim \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4} &= \frac{\lim(2z+3) \cdot \lim(z-1)}{\lim(z^2-2z+4)} \\
&= \frac{(\lim 2z + \lim 3) \cdot (\lim z - \lim 1)}{(\lim z^2 - \lim 2z + \lim 4)} \\
&= \frac{(2 \lim z + \lim 3) \cdot (\lim z - \lim 1)}{(\lim z \cdot \lim z - 2 \lim z + \lim 4)} \\
&= \frac{(4i+3) \cdot (2i-1)}{-4-4i+4} \\
&= \frac{-8-4i+6i-3}{-4i} \\
&= \frac{-11+2i}{-4i} \\
&= \frac{-1}{2} + \frac{11}{4} \cdot i
\end{aligned}$$

d)  $\lim \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4}$  quando  $z \rightarrow -2i$

Existe uma importante relação entre o limite de uma função complexa e os limites de suas partes real e imaginária, que consideremos a seguir.

**Teorema 2.4.** *Sejam  $f(z) = w = u + iv$  uma função com domínio  $D$ , e  $w_0 = u_0 + iv_0$ . Então*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \text{ se, e somente, se}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \text{ e } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0.$$

**Demonstração:** Suponha que  $\lim f(z) = w_0$ . Então para cada  $\varepsilon > 0$ , dado existe um  $\delta > 0$  tal

$$z \in D \cap V_\delta(z_0) \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon. \quad (2.2)$$

Como

$$|u(x,y) - u_0| = |R[f(z) - w_0]| \leq |f(z) - w_0| \quad (2.3)$$

$$|v(x,y) - v_0| = |Im[f(z) - w_0]| \leq |f(z) - w_0| \quad (2.4)$$

De 2.2, 2.4 e ?? segue-se que, se

$z \in D \cap V_\delta(z_0)$  implica que

$$|u(x,y) - u_0| < \varepsilon$$

e

$$|v(x, y) - v_0| < \varepsilon.$$

isto é,  $\lim u(x, y) = u_0$  e  $\lim v(x, y) = v_0$  quando  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ .

Reciprocamente que  $\lim u(x, y) = u_0$  e  $\lim v(x, y) = v_0$  quando  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  então, para cada  $\varepsilon > 0$  existem  $\delta_1$  e  $\delta_2$  tais que  $|u(x, y) - u_0| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $(x, y)$  tal que  $z = x + yi$  está em  $D'(z_0, \delta_1)$ .

$$|v(x, y) - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } (x, y) \text{ tal que}$$

$$z = x + yi \text{ está em } D'(z_0, \delta_2).$$

Se  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , ambas as desigualdades valem para todo  $(x, y)$  tal que  $z$  está em  $D'(z_0, \delta)$ . Logo, empregando a desigualdade triangular

$$\begin{aligned} |f(z) - w_0| &= |u(x, y) - u_0 + v(x, y) - v_0| \\ &\leq |u(x, y) - u_0| + |v(x, y) - v_0| \\ &\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

para todo  $z \in D'(z_0, \delta)$ . Portanto,  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  existe e é igual  $w_0$ . ■

### 2.5.1 Limites no Infinito

Para termos uma idéia de limite de uma função de uma variável complexa no infinito é necessário observar que no plano  $\mathbb{C}$  não está definida uma direção, como por exemplo na reta, onde temos a noção de positivo e negativo ou direita e esquerda. Para conseguirmos dar uma definição satisfatória de limite no infinito vamos colocar o "infinito" nos complexos  $\mathbb{C}$ . Dentro da terminologia moderna de topologia isso quer dizer que devemos "compactificar" o conjunto  $\mathbb{C}$ . Portanto, vamos definir o símbolo  $\infty$  de modo que para um número complexo  $z$  as seguintes operações sejam verdadeiras:

$$\begin{aligned} z + \infty = \infty, \quad z \cdot \infty = \infty, \quad \text{quando } z \neq 0, \\ \infty + \infty = \infty, \quad \infty \cdot \infty = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

e não estão definidas :

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad \frac{\infty}{0}$$

Vamos agora definir o conjunto

$$\mathbb{C}^c := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

chamado de **plano complexo estendido** ou **esfera de Riemann** da seguinte forma:

Considere uma esfera  $S$  com pólo sul na origem do plano. A cada ponto  $P$  da superfície dessa esfera podemos associar unicamente um ponto do plano. Para fazer isso usamos uma reta que une o pólo norte  $N$  da esfera ao ponto  $P$ . Essa reta intercepta o plano somente num único ponto. Mas ao pólo norte  $N$  estão associados infinitos pontos do plano, que podem ser considerados como pontos de uma circunferência de raio infinito. A esfera considerada assim é a compactificação de  $\mathbb{C}$  por adicionar o símbolo  $\infty$ . Essa esfera é então  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  e o polo norte da esfera pode ser identificado com  $\infty$ . Veja figura abaixo (wikipedia)<sup>1</sup>.

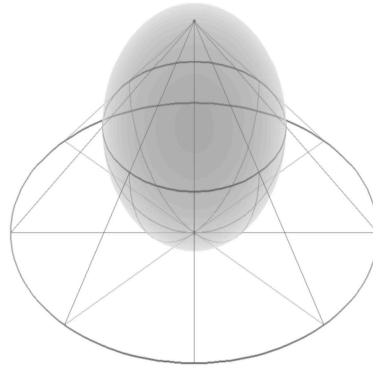


Figura 5: Esfera de Riemann

Agora podemos definir limite no infinito.

**Definição 2.13.** Diz-se que uma função  $f(z)$  com domínio  $D$  tem limite finito  $L$  com  $z \rightarrow \infty$  se, dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existir  $M > 0$  tal que  $|f(z) - L| < \varepsilon$  para todo  $z \in D, |z| > M$ .

Diz-se que  $f(z)$  tende a infinito com  $z$  tendendo a  $z_0$  se, dado qualquer  $k > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(z)| > K$  para todo  $z \in D'(z_0, \delta)$ .

Diz-se que  $f(z)$  tende a infinito com  $z$  tendendo a infinito se, dado qualquer  $K > 0$ , existe  $M > 0$  tal que  $|f(z)| > K$  para todo  $z \in D', |z| > M$ .

**Exemplo 2.11.**  $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{z+i} = \infty$ , pois se  $\delta < M$ ,

$$|z+i| < \delta \implies \frac{1}{|z+i|} > \frac{1}{\delta} > M.$$

## 2.6 Continuidade

**Definição 2.14.** Uma função de uma variável complexa  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  é contínua num ponto  $z_0$  quando

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

e  $f$  é contínua no conjunto  $A$  quando ela é contínua em todos os pontos de  $A$ . Uma função que não é contínua em um ponto ela é dita descontínua neste ponto.

<sup>1</sup> [http://pt.wikipedia.org/wiki/Esfera\\_de\\_Riemann](http://pt.wikipedia.org/wiki/Esfera_de_Riemann)

Três condições estão estabelecidas nesta definição:

1.  $f(z)$  deve estar definida em  $z_0$ ;
2.  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , deve existir.
3.  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ ,

**Exemplo 2.12.** A função  $f(z) = z$  é contínua em todo  $\mathbb{C}$ . Para provar esse fato basta mostrar que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = z_0$  para qualquer  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Agora suponha que  $\varepsilon > 0$ . Queremos achar  $\delta > 0$  tal que

$$z \in D'(z_0, \delta) \implies |f(z) - z_0| < \varepsilon.$$

Mas

$$|f(z) - z_0| = |z - z_0|.$$

Então podemos escolher  $\delta = \varepsilon$ , pois então

$$z \in D'(z_0, \delta) = D'(z_0, \varepsilon) \implies 0 < |f(z) - z_0| < \varepsilon$$

pela definição de  $D'(z_0, \varepsilon)$ .

**Teorema 2.5.** A soma e o produto de duas funções contínuas  $f(z)$  e  $g(z)$  num conjunto  $A \subset \mathbb{C}$  são funções contínuas. Se  $g(z) \neq 0$  no  $A$ , a função  $\frac{f(z)}{g(z)}$  é contínua em  $A$ .

**Demonstração:** Aplicação direta do teorema 2.3.

**Teorema 2.6.** Seja  $g$  uma função cujo domínio contenha um ponto  $z_0$  e cuja imagem esteja contida no domínio de uma função  $f$ . Se  $g$  é contínua num ponto  $z_0$  e  $f$  é contínua em  $g(z_0) = w_0$ , então a função composta  $f(g(z_0))$  será contínua no ponto  $z_0$ .

## 2.7 Descontinuidade removível e essencial

Se a função  $f$  não é contínua em um ponto  $z_0$  mas  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ , existe, a descontinuidade é dita removível. Neste caso podemos obter uma função  $f^*$  contínua em  $z_0$ , definindo  $f$  de modo que sejam satisfeitas as três condições da definição. Quando a função não é contínua porque o limite da função em um dado ponto não existe, a descontinuidade neste ponto é dita essencial.

**Exemplo 2.13.** A função  $f(z) = \frac{(z^2 + 1)}{(z - i)}$  possui uma descontinuidade removível em  $z_0 = i$ , pois

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z^2 + 1)}{(z - i)} = 2i$ , mas a função não está definida para  $z = i$ . Neste caso, definimos uma nova função  $f^*$  do seguinte modo:

$$f^*(z) = f(z) \quad \text{se } z \neq i$$

$$f^*(z) = 2i \quad \text{se } z = i.$$

*Esta nova função  $f^*$  é contínua em todos os pontos do plano complexo.*

**Exemplo 2.14.** *A função definida por  $f(z) = \frac{z}{|z|}$  possui uma descontinuidade essencial em  $z_0 = 0$ , porque o limite  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , não existe.*

## 2.8 Diferenciação

Sejam uma função complexa  $f$  definida num aberto  $R \subset \mathbb{C}$  e  $z$  um ponto de  $R$ , então a derivada  $f'(z_0)$  ou  $\frac{df}{dz}$ , de  $f(z)$  no ponto  $z_0$  é

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

se o limite existir.

**Exemplo 2.15.** A derivada da função complexa  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = z^2$  é

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} z + z_0 = 2z_0.$$

**Teorema 2.7.** Se  $f$  e  $g$  são funções deriváveis em  $z_0$ , então

- a)  $(wf)'(z_0) = wf'(z_0)$ , com  $w \in \mathbb{C}$ ,
- b)  $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$
- c)  $(fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)$
- d)  $\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$ .

**Demonstração:** Semelhante ao caso real.

**Teorema 2.8.** Sejam  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : B \rightarrow \mathbb{C}$  com  $f(A) \subset B$ . Se  $f$  é derivável em  $z_0$  e  $g$  é derivável em  $f(z_0)$ , então  $g \circ f$  é derivável em  $z_0$  e

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \circ f'(z_0).$$

**Demonstração:** Semelhante ao caso real.

não ser analítica.

**Definição 2.15.** Uma função complexa é analítica, ou regular ou holomorfa, em um ponto  $z_0$  se, e somente se, é definida e diferenciável no ponto  $z_0$  e numa vizinhança de  $z_0$ . Uma função é analítica num conjunto  $S$  se é derivável em todo ponto de  $S$ . Se  $S = \mathbb{C}$  a função é dita inteira

**Exemplo 2.16.** A função  $f(z) = z$  é analítica em  $\mathbb{C}$ .

**Contra-Exemplo 2.1.** A função  $f(z) = |z|^2$  não é analítica em  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 2.9.** Se  $f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y)$  é uma função analítica numa região  $R$ , então,

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \tag{2.6}$$

As equações acima são chamadas equações de Cauchy-Riemann.

**Teorema 2.10.** *Sejam  $u(x,y)$  e  $v(x,y)$  funções reais com derivadas parciais contínuas numa região  $R$ . Se  $u(x,y)$  e  $v(x,y)$  satisfazem as equações*

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

então  $f(z) = w = u(x,y) + iv(x,y)$  é uma função analítica em  $R$ .

### 2.8.1 Singularidade

Um ponto  $z_0$  é ponto singular, ou uma singularidade, de uma função  $f(z)$ , se  $f(z)$  é analítica em algum ponto de cada vizinhança de  $z_0$ , exceto no próprio  $z_0$ .

Um ponto singular  $z_0$  de uma função  $f$  é um ponto singular isolado, ou uma singularidade isolada se, existe uma vizinhança perfurada de  $z_0$ , onde  $f(z)$  seja analítica. Caso contrário, diremos que  $z_0$  é ponto não singular não isolado de  $f$ . Qualquer vizinhança de uma singularidade não-isolada de  $f$  contém outras singularidades de  $f$ . Uma singularidade de  $f$  é portanto um ponto de acumulação de seu conjunto de singularidades.

**Exemplo 2.17.** A função  $f(z) = \frac{1}{z-1}$  possui uma singularidade em  $z = 1$ .

As singularidades isoladas se classificam como segue;

1. - Uma ponto singular isolado  $z_0$  de uma função  $f(z)$  é dito singularidade evitável (ou removível) de  $f(z)$  em  $z_0$ , o que é responsável pelo fato de  $f$  não ser regular em  $z_0$  se existe  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .
2. Uma ponto singular, isolado  $z_0$  de uma função  $f(z)$ , que não é definido em  $z_0$  num conjunto  $S$ , é chamado pólo de ordem  $n$  de  $f(z)$  se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = M.$$

$M$  sendo um número finito, diferente de zero, e  $n$  um inteiro positivo, um pólo de ordem 1 é chamado pólo simples.

**Exemplo 2.18.** A função  $f(z) = \frac{3}{(z-3)^2}$  têm um pólo de ordem 2 em  $z = 3$ .

**Exemplo 2.19.** A função  $g(z) = \frac{3}{(z-2)^3(z-1)(z+5)}$  têm um pólo de ordem 3 em  $z = 2$  e pólos simples em  $z = 1$  e  $z = 5$ .

3. - Uma ponto singular isolado  $z_0$  de uma função  $f(z)$  é chamado uma singularidades essencial de  $f(z)$  se  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z)$  não existe para nenhum inteiro positivo  $n$ .

**Exemplo 2.20.** A função  $f(z) = \frac{2}{e^z - 3}$  possui uma singularidade essencial em  $z = 2$ .

## 2.8.2 A Função Exponencial

**Definição 2.16.** A função exponencial  $e^z$  é definida para todo  $z = x + iy$  por

$$e^{(z)} = e^{(x)}\cos(y) + i\sin(y).$$

### Propriedades da Exponencial

- a)  $e^{(iy)} = \cos(y) + i\sin(y)$ ;
- b)  $e^z = e^x e^{iy}$ ;
- c)  $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ ;
- d)  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z} = e^z$ ;
- e)  $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ ;
- f)  $(e^z)^{pz}$ ;
- g)  $(e^z)^{\frac{1}{q}} = e^{\frac{1}{q}(z+i2\pi k)}$ ;
- h)  $(e^z)^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q}(z+i2\pi k)}$ ;
- i)  $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ ;
- j)  $e^z$  é uma função inteira e  $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$ .

**Observação 2.3.** Como notação exponencial, a representação polar de um número complexo assume a forma polar compacta  $z = re^{i\theta}$ , onde  $r = |z|$  e  $\theta = \arg(z)$ .



### 3 Teorema de Liouville e Aplicações

#### 3.1 Integrais

**Definição 3.1.** Definimos arco contínuo ou simplesmente arco como um conjunto  $C$  de pontos, dados parametricamente

$$C = \{z(t) = x(t) + iy(t) : a \leq t \leq b\},$$

onde  $z(t)$  é contínua em  $t$  ou equivalente,  $x(t)$  e  $y(t)$  são contínuas.

**Observação 3.1.** Consideraremos  $t \in [a, b]$  com valores crescentes de  $t$ , de forma que  $C$  é um conjunto orientado.

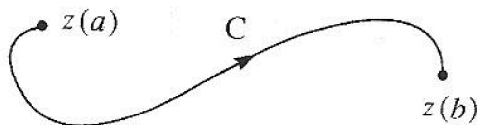


Figura 1: Curva C

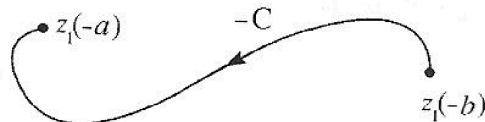


Figura 2: Curva -C

Considerando  $w(t) = z(-t)$ ,  $-b \leq t \leq -a$ , obtemos a curva  $-C$ , oposta a orientação da curva  $C$ .

**Definição 3.2.** Chama-se arco de Jordan ou arco simples aquele em que cada ponto  $z(t)$  corresponde a um valor de  $t$ .

Quando o arco não é simples ele contém ao menos um ponto múltiplo.

**Observação 3.2.** Neste caso, temos  $z(t_1) = z(t_2)$  com  $t_1 \neq t_2$ .

**Definição 3.3.** Chama-se curva fechada simples ou curva de Jordan a toda curva fechada cujos pontos, com exceção das extremidades, sejam todos simples.

Na figura abaixo estão representadas as curvas simples não fechada, curva fechada não simples e curva fechada simples (Curva de Jordan).

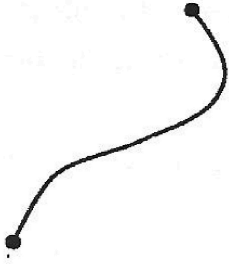


Figura 3

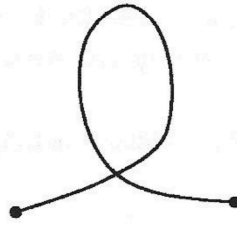


Figura 4: CNSF

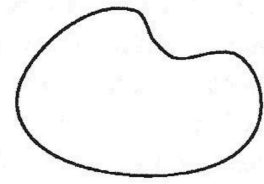


Figura 5: CSF

**Definição 3.4.** (Arco regular) Um arco é dito regular se

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t), \quad a \leq t \leq b$$

existe, é contínua e  $z'(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .

**Exemplo 3.1.** O arco  $z(t) = t^2 + it$ ,  $-\infty < t < \infty$  é regular, pois

$$z'(t) = 2t + i \text{ e } z'(t) \neq 0, \quad \forall t.$$

**Definição 3.5.** Chamamos contorno ou caminho a todo arco contínuo formado por um número finito de arcos regulares.

$$\text{Temos } z(t) \text{ é contínua em } [a, b] = \bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j]$$

(i)  $z'(t)$  é contínua em  $(a_j, b_j)$

(ii)  $z'(t) \neq 0$  em  $(a_j, b_j)$

(iii)  $\lim_{t \rightarrow a_j^+} z'(t) = z'(a_j^+) \neq 0$  e  $\lim_{t \rightarrow a_j^-} z'(t) = z'(a_j^-) \neq 0$ .

**Exemplo 3.2.** Considere  $z(t)$  dado por:

$$z(t) = \begin{cases} t + it, & 0 \leq t \leq 1 \\ t + it^2, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$z(t)$  é um contorno.

**Definição 3.6.** (Integral de Contorno)

Seja

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto F(t) = U(t) + iV(t) \end{aligned}$$

Definimos

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b U(t)dt + i \int_a^b V(t)dt.$$

**Observação 3.3.** (i)  $Re \int_a^b F(t)dt = \int_a^b ReF(t)dt$ 

$$(ii) Im \int_a^b F(t)dt = \int_a^b ImF(t)dt.$$

**Exemplo 3.3.** Seja

$$\begin{aligned} F : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto F(t) = t + it^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^1 F(t)dt = \int_0^1 tdt + i \int_0^1 t^2dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 + i \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{3}.$$

**Propriedades**

$$(i) \int_a^b [F(t)dt + G(t)]dt = \int_a^b F(t)dt + \int_a^b G(t)dt;$$

$$(ii) \int_a^b cF(t)dt = c \int_a^b F(t)dt;$$

$$(iii) \left| \int_a^b F(t)dt \right| \leq \int_a^b |F(t)|dt.$$

Vamos provar (iii), os itens (i) e (ii) ficam como exercício.

Se  $\int_a^b F(t)dt = 0$ , então a desigualdade é óbvia, pois  $|F(t)| \geq 0$  e portanto  $\int_a^b |F(t)|dt \geq 0$ .

Suponhamos que  $\int_a^b F(t)dt \neq 0$ . Sendo  $\int_a^b F(t)dt \in \mathbb{C}$ , então escrevendo sua representação polar, temos:

$$\int_a^b F(t)dt = re^{i\theta}, r > 0.$$

Agora, usando (ii), temos:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b F(t) dt \right| &= |re^{i\theta}| = r = e^{-i\theta} \int_a^b F(t) dt = \\ &= \int_a^b e^{-i\theta} F(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}[e^{-i\theta} F(t)] dt \leq \\ &\leq \int_a^b |\operatorname{Re}[e^{-i\theta} F(t)]| dt \leq \int_a^b |e^{-i\theta} F(t)| dt = \int_a^b |F(t)| dt. \end{aligned}$$

**Definição 3.7.** (*Integral Curvilínea ou de Contorno*) Seja  $C$  um contorno qualquer e  $f = u + iv$  uma função contínua em  $C$ , onde

$$C = \{z = z(t) = x(t) + iy(t) : a \leq t \leq b\}.$$

Definimos

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt. \quad (3.1)$$

**Observação 3.4.** A integral do segundo membro de (3.1) é uma integral do tipo:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b U(t) dt + i \int_a^b V(t) dt.$$

De fato,

$$f(z(t)) = f(x(t) + iy(t)) = u(x(t), y(t)) + iV(x(t), y(t))$$

e

$$z'(t) = x'(t) + iv(t).$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(z(t)) \cdot z'(t) &= [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))][x'(t) + iv'(t)] = \\ &= \underbrace{u(x(t), y(t)) \cdot x'(t) - v(x(t), y(t)) \cdot v'(t)}_{U(t)} + \\ &+ i \underbrace{[u(x(t), y(t)) \cdot y'(t) + v(x(t), y(t)) \cdot x'(t)]}_{V(t)} \end{aligned}$$

**Observação 3.5.** A integral de linha (3.1) pode ser escrita em termos de integrais curvilíneas reais.

$$\int_C f(z) dz = \int_C (udx - vdy) + i \int_C (udy + vdx). \quad (3.2)$$

De fato, escrevendo  $f = u + iv$ ,  $dz = dx + idy$ , temos:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C (udx - vdy) + i \int_C (udy + vdx).$$

**Exemplo 3.4.** Calcular o valor da integral

$$\int_{C_1} z^2 dz,$$

onde  $C_1$  é o segmento de reta  $OB$  de  $z = 0$  a  $z = 2 + i$ .

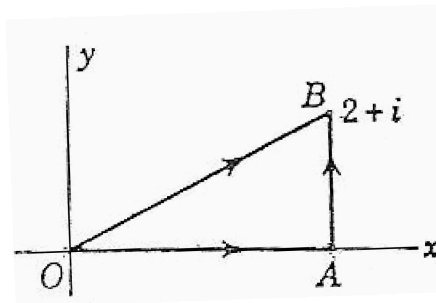


Figura 6: Plano  $I$

Vamos considerar  $y = y(t) = t$  e  $x = x(t) = 2t$ , logo as equações paramétricas de  $C_1$  reduzem  $x = 2y$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Temos:

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + y^2 + 2xyi = (2y)^2 - y^2 + 2(2y)yi = 3y^2 + 4y^2i$$

e

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) = 2 + i.$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z)dz &= \int_{C_1} z^2 dz = \int_0^1 (3y^2 + 4y^2i)(2 + i)dy = \\ &= \int_0^1 (2y^2 + 11y^2i)dy = \frac{2y^3}{3} \Big|_0^1 + i \frac{11y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} + i \frac{11}{3}. \end{aligned}$$

Seja  $C_2$  o caminho  $OAB$  da figura acima. Neste caso, temos:

$$\int_{C_2} z^2 dz = \int_{OA} z^2 dz + \int_{AB} z^2 dz.$$

• Sobre o arco  $OA$ ,  $z = x$ . As equações paramétricas deste arco são  $x = x(t) = t$ ,  $y = y(t) = 0$  e  $0 \leq x \leq 2$ .

Logo,

$$\int_{OA} z^2 dz = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

• Sobre  $AB$  temos  $z = 2 + iy$ ,  $dz = idy$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{AB} z^2 dz &= \int_0^1 (4 - y^2 + 4yi) idy = \int_0^1 -4y dy + i \int_0^1 (4 - y^2) dy = \\ &= -\frac{4}{2} + i \left[ 4y \Big|_0^1 - \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 \right] = -2 + i \left( 4 - \frac{1}{3} \right) = -2 + i \frac{11}{3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{C_2} z^2 dz = \frac{8}{3} + \left( -2 + i \frac{11}{3} \right) = \frac{2}{3} + i \frac{11}{3}..$$

Observe que a integral sobre o caminho  $C_1$  é igual a integral sobre o caminho  $C_2$ .

**Definição 3.8.** (Cumprimento de Arco) Seja  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  com equação paramétrica  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ . Defina-se o comprimento de  $\gamma$  de  $a$  e  $b$ , pela integral

$$L = L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

**Exemplo 3.5.** Seja

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \gamma(t) = \cos t + i \sin t. \end{aligned}$$

Então,

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi..$$

**Definição 3.9.** (Caminhos Equivalentes) Dois caminhos  $C_1$  e  $C_2$  dados por  $\gamma_1: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\gamma_2: [\xi, \eta] \rightarrow \mathbb{C}$ , respectivamente, são ditos equivalentes se existe uma bijeção crescente  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [\xi, \eta]$  (ver figura abaixo) a qual é contínua e continuamente diferenciável juntamente com sua inversa  $\varphi^{-1}$ , tal que

$$\gamma_1(t) = (\gamma_2 \circ \varphi)(t) = \gamma_2(\varphi(t)), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

**Exemplo 3.6.** Os caminhos  $C_1$  e  $C_2$  dados pelas curvas

$$\begin{aligned} \gamma_1: [0, 4\pi] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \gamma_1(t) = \cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2} = e^{\frac{t}{2}i} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_2: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \gamma_2(t) = \cos t + i \sin t = e^{ti}, \end{aligned}$$

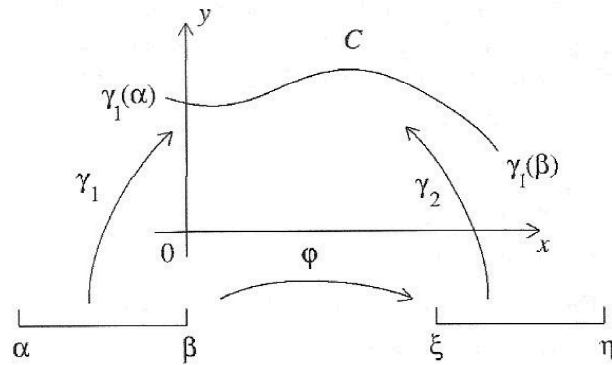


Figura 7: Caminhos equivalentes

são equivalentes, pois a função

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 4\pi] &\longrightarrow [0, 2\pi] \\ t &\longmapsto \varphi(t) = \frac{t}{2} \end{aligned}$$

é uma bijeção crescente continuamente diferenciável e sua inversa

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : [0, 2\pi] &\longrightarrow [0, 4\pi] \\ t &\longmapsto \varphi^{-1}(t) = 2t \end{aligned}$$

é continuamente diferenciável.

Além disso,

$$(\gamma_2 \circ \varphi)(t) = \gamma_2(\varphi(t)) = e^{i\varphi(t)} = e^{(\frac{t}{2})i} = \gamma_1(t).$$

**Teorema 3.1.** Se  $C_1$  e  $C_2$  são duas curvas equivalentes, então

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$

**Prova:** Considere  $\varphi$  a bijeção entre os dois caminhos. Por denição e pela Regra da Cadeia, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z)dt &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f((\gamma_2 \circ \varphi)(t))\gamma_2'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \\ &= \int_{\xi}^{\eta} f(\gamma_2(u))\gamma_2'(u)du = \int_{C_2} f(z)dz, \end{aligned}$$

onde,  $u = \varphi(t)$ . Note que  $du = \varphi'(t)dt$ .

**Exemplo 3.7.** Consideremos os caminhos

$$C_1 = \{z(t) = \gamma_1(t) \in \mathbb{C} : 0 \leq t \leq 4\pi\} \text{ e } C_2 = \{z(t) = \gamma_2(t) \in \mathbb{C} : 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

Pelo Exemplo acima, os caminhos  $C_1$  e  $C_2$  são equivalentes.

Logo, as integrais

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz.$$

## Propriedades

(a) Dependência da direção

$$\int_{-C} f(z)dz = - \int_C f(z)dz$$

**Prova:** A curva oposta a  $C$ ,  $-C$  é dada por:

$$\begin{aligned} \psi = -\gamma : [\alpha, \beta] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \gamma(\alpha + \beta - t) \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} \int_{-C} f(z)dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\psi(t))\psi'(t)dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\alpha + \beta - t))(-\gamma'(\alpha + \beta - t))dt \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} f(\gamma(u))\gamma'(u)du = (u = \alpha + \beta - t) \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(u))\gamma'(u)du \\ &= - \int_C f(z)dz. \end{aligned}$$

(b) Aditividade. Se  $C = C_1 + C_2$ , então

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

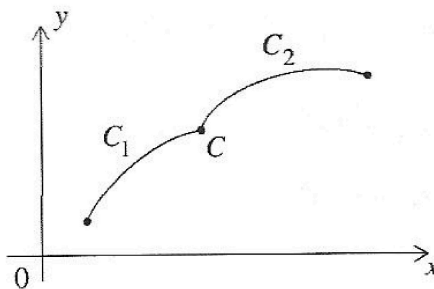


Figura 8: Aditividade



(c) Linearidade:

$$\int_C [af(z) + bg(z)]dz = a \int_C f(z)dz + b \int_C g(z)dz,$$

onde  $a, b \in \mathbb{C}$ .

(d) Se  $|f(z)| \leq M, \forall z \in \gamma(I)$ , então

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq M \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)|dt = ML,$$

onde  $L$  é o comprimento de  $C$ .

**Exemplo 3.8.** Para cada uma das seguintes curvas  $C$ , com ponto inicial  $(0,0)$  e final  $(1,1)$ , calcule a integral de linha.

$$(*) \int_C \bar{z}dz = \int_C [x - iy][dx + idy] = \int_C (xdx + ydy) + i \int_C (-ydx + xdy),$$

onde,

(a)  $C$  é o segmento de reta  $y = x$ ;

(b)  $C$  é a parte da parábola  $y = x^2$ ;

(c)  $C$  é a linha poligonal  $OAB$ .

(a) Solução: Se  $y = x$  sobre  $0 \leq x \leq 1$ , então  $dy = dx$  e por  $(*)$ , temos:

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^1 (xdx + xdx) + i \int_0^1 (-xdx + xdx) = 2x^2 \Big|_0^1 = 1$$

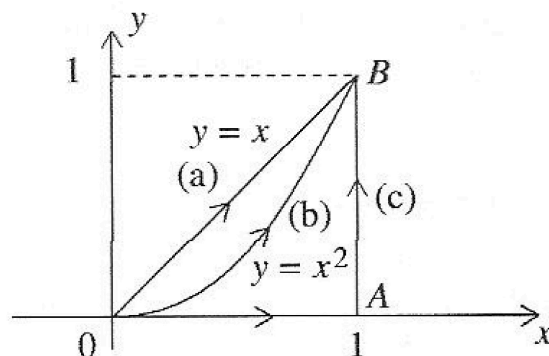


Figura 9: Cálculo da Integral de Linha

(b) Solução : Se  $y = x^2$  sobre  $0 \leq x \leq 1$ , então  $dy = 2xdx$  e por (\*), temos:

$$\begin{aligned}\int_C \bar{z}dz &= \int_0^1 (xdx + x^2 2xdx) + i \int_0^1 (-x^2 dx + x \cdot 2xdx) = \\ &= \left( \frac{x^2}{2} + \frac{2x^4}{4} \right) \Big|_0^1 + i \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 1 + \frac{i}{3}\end{aligned}$$

(c) Solução : A integral ao longo da poligonal  $OAB$ , obtemos:

$$\int_{OAB} \bar{z}dz = \int_{OA} \bar{z}dz + \int_{AB} \bar{z}dz.$$

- No segmento  $OA$ , temos  $y = 0$ ,  $dy = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

Assim,

$$\int_{OA} \bar{z}dz = \int_0^1 xdx + i \int_0^1 (-0dx + x \cdot 0dy) = \frac{1}{2}.$$

- No segmento  $AB$ , temos  $x = 1$ ,  $dx = 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , o que implica

$$\int_{AB} \bar{z}dz = \int_0^1 (1 \cdot 0 + ydy) + i \int_0^1 ((-y) \cdot 0dx + 1dy) = \frac{1}{2} + i.$$

Portanto,

$$\int_{OAB} \bar{z}dz = \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} + i \right) = 1 + i..$$

### Teorema Fundamental do Cálculo para Contornos.

**Teorema 3.2.** Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  um arco regular e  $F$  uma função analítica num conjunto aberto que contém  $\gamma$ . Então

$$\int_{\gamma} F'(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Em particular, se a curva  $C$  é fechada, temos:

$$\oint_C F'(z)dz = 0.$$

**Prova:** Seja

$$F(\gamma(t)) = g(t) = u(t) + iv(t).$$

Então,

$$F'(\gamma(t))\gamma'(t) = g'(t) = u'(t) + iv'(t).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} F'(z) dz &= \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \\ &= \int_a^b u'(t) dt + i \int_a^b v'(t) dt = u(b) - u(a) + i[v(b) - v(a)] = \\ &= [u(b) + iv(b)] - [u(a) + iv(a)] = g(b) - g(a) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

Se  $\gamma(b) = \gamma(a)$ , então  $F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$  e portanto,

$$\oint_C F'(z) dz = 0.$$

**Observação 3.6.** Quando o contorno  $C$  for fechado, isto é, os pontos inicial e final são iguais, usaremos a notação

$$\oint_C F'(z) dz = 0.$$

Como consequência do Teorema acima, temos:

$$\oint_C f(z) dz = 0 = \oint_C F'(z) dz = 0.$$

onde  $F'(z) = f(z)$ .

Vimos que:

$$\oint_C z^2 dz = 0,$$

onde  $C$  é o contorno dado na figura abaixo.

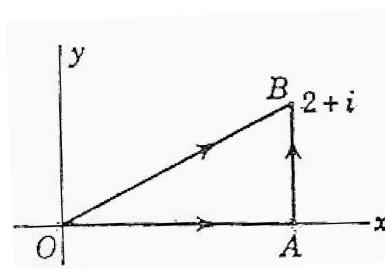


Figura 10: Contorno 1

**Exemplo 3.9.** Calcular  $\int_C \bar{z} dz$  quando  $C$  for o contorno:

- (i)  $C = C_1$ , de  $z = 0$  para  $z = 1$  para  $z = 1 + i$ ;
- (ii)  $C = C_2$ , onde  $C_2$  é o segmento de reta da figura abaixo de  $z = 0$  a  $z = 1 + i$ ;
- (iii)  $C = C_2$ , é o círculo unitário.

**Solução:** Sejam  $0 = (0,0)$ ,  $A = (1,0)$  e  $B = (1,1)$ .

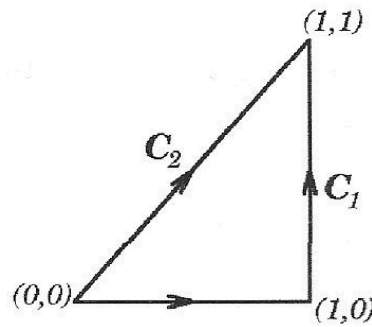


Figura 11: Contorno 2

(i) Temos

$$\int_{C_1} \bar{z} dz = \int_{OA} \bar{z} dz + \int_{AB} \bar{z} dz$$

. Agora, vamos calcular cada integral do segundo membro da igualdade acima.

- Note que na integral a partir de  $z = 0$  a  $z = 1$ , temos  $y = 0$ , e portanto,  $dy = 0$ .
- Na integral a partir de  $z = 1$  a  $z = 1 + i$ ,  $x = 1$  e portanto  $dx = 0$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \bar{z} dz &= \int_{OA} \bar{z} dz + \int_{AB} \bar{z} dz = \\ &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 (1 - iy)(idy) = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \\ &+ \int_0^1 y dy + i \int_0^1 dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + i = 1 + i. \end{aligned}$$

(ii) Sobre a curva  $C_2$  temos  $y = x$ .

Logo,

$$\int_{C_2} \bar{z} dz = \int_0^1 (x - ix)(dx + idx) = \int_0^1 (x + x) dx + i \int_0^1 (-x + x) dx = \frac{2x^2}{2} \Big|_0^1 = 1.$$

**Observação 3.7.** Como  $\bar{z}$  não é analítica, vemos que  $\int_{C_1} \bar{z} dz$  e  $\int_{C_2} \bar{z} dz$  não são necessariamente iguais.

(iii) Seja  $z = e^{i\theta}$ , pois  $|z| = 1$ , visto que estamos no círculo unitário. Como  $\bar{z} = e^{-i\theta}$  implica  $dz = ie^{i\theta}$ .

Logo,

$$\int_{C_3} \bar{z} dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} ie^{i\theta} e^{-i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

**Exemplo 3.10.** Calcular  $\int_{C_3} z dz$ . Como  $C_3$  é um contorno fechado e  $f$  é analítica na região contendo  $z$ , temos pela observação

$$\oint_{C_3} z dz = 0.$$

**Exemplo 3.11.** Calcule a integral  $I = \int_1^i \frac{\log z}{z} dz$ .

**Solução:** Temos

$$\begin{aligned} \int_1^i \frac{\log z}{z} dz &= \int_1^i \log z \left( \frac{d}{dz} \log z \right) dz = \int_1^i \frac{d}{dz} \left( \frac{\log^2 z}{2} \right) dz = \\ &= \frac{\log^2 z}{2} \Big|_1^i = \frac{1}{2} \left( \log e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( i \frac{\pi}{2} \right)^2 = -\frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

Note que

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = i$$

e que

$$\begin{aligned} \log^2 z \Big|_1^i &= [(\log i)^2 - (\log 1)^2] = (\log i - \log 1)(\log i + \log 1) = \\ &= \left( \log \frac{i}{1} \right) (\log i \cdot 1) = (\log i)^2 = (\log e^{i\frac{\pi}{2}})^2 = \left( i \frac{\pi}{2} \right)^2 = -1 \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

### Teorema de Cauchy

Nesta seção estudaremos o Teorema de Cauchy para domínio simplesmente conexo.

Como o sinal da integral de linha depende da direção de integração ao longo da curva fechada  $C$ , a direção positiva ao longo de  $C$ , será a direção para a qual a região interior  $R$ , está na nossa esquerda quando caminhamos sobre a curva. A outra direção é a direção negativa. Se um caminho fechado  $C$  é simples, então as direções positivas e negativas de  $C$ , correspondendo ao domínio limitado delimitado por  $C$ .

**Notação:** As orientações positivas e negativas são denotadas por  $C^+$  e  $C^-$ .

Assim,

$$\oint_{C^+} f(z) dz \text{ e } \oint_{C^-} f(z) dz$$

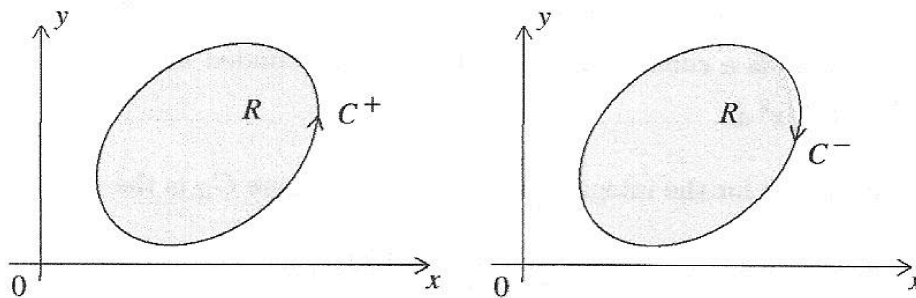


Figura 12: Direção positiva e negativa  $C^+$  e  $C^-$

**Definição 3.10.** Definimos um domínio simplesmente conexo  $D$ , como sendo um domínio no qual todo contorno fechado simples contido em  $D$  contém somente pontos de  $D$ .

Um domínio que não é simplesmente conexo é chamado multiplamente conexo.

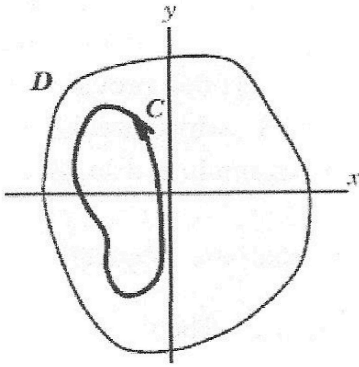


Figura 13: Domínio simplesmente conexo

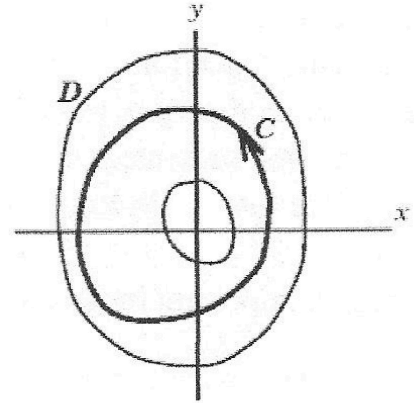


Figura 14: Domínio multiplamente conexo

Nesta seção estudaremos o Teorema de Cauchy, o qual é um dos mais importantes no cálculo de funções de variáveis complexas. Para demonstração do Teorema de Cauchy, necessitaremos do seguinte resultado.

**Teorema 3.3 (Green).** Dadas as funções  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  a valores reais com derivadas parciais contínuas  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial v}{\partial y}$  numa região simplesmente conexa  $D$ , fechada e limitada por um caminho fechado  $C$ , então

$$\oint_C u(x, y)dx + v(x, y)dy = \int \int_D \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy.$$

**Teorema 3.4 (Cauchy).** Se uma função  $f$  é analítica em um domínio simplesmente conexo  $D$ , e  $f'(z)$  é contínua em  $D$ , então ao longo de um contorno fechado simples  $C$  em  $D$ , tem-se

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

**Observação 3.8.** O Teorema de Cauchy sem a hipótese que  $f'(z)$  é contínua foi provado por Goursat.

**Prova** Temos

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (u dy + v dx).$$

Agora, usando a hipótese que  $f'(z)$  é contínua, temos que  $u$  e  $v$  tem derivadas parciais contínuas. Logo, pelo Teorema de Green para pontos de  $D$  limitados por  $C$ , temos:

$$\oint_C f(z)dz = \int \int_D \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \int \int_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.3)$$

Sendo  $f(z)$  analítica, pelas equações de Cauchy-Riemann, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.4)$$

De (3.3) e (3.4), obtemos:

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

**Observação 3.9.** O Teorema de Cauchy pode ser estabelecido como:

Se  $f(z)$  é analítica em todos os pontos interior a um contorno fechado simples e sobre o contorno  $C$ , então

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

**Exemplo 3.12.** Mostre que  $\oint_C f(z) dz = 0$ , onde  $C$  é dada na figura abaixo, onde  $D$  é a região

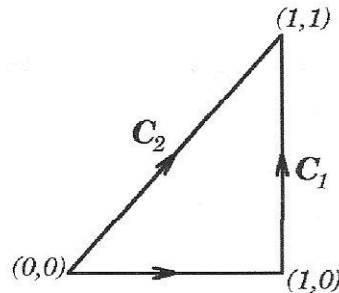


Figura 15: Contorno 3

limitada por  $C$ , sendo  $C = 0A + AB + (-B0)$  e  $D$  é uma região simplesmente conexa limitada por essa curva. Então  $f(z) = z$  é analítica em  $D$  e  $f'(z)$  é contínua em  $D$  e portanto, pelo Teorema de Cauchy,

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

**Exemplo 3.13.** Mostre que  $\oint_C z^2 dz = 0$ , onde  $C$  é a circunferência unitária.

Sendo  $D$  o círculo unitário uma região simplesmente conexa e  $f(z) = z^2$  analítica em  $D$ , temos:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C z^2 dz = 0.$$

**Exemplo 3.14.** Calcule a integral

$$I = \int_{|z|=2} z^2 dz.$$

**Solução:** Como a equação do caminho  $|z| = 2$  é  $z = 2e^{i\theta}$  com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , então  $dz = 2e^{i\theta} i d\theta$

$$\int_{|z|=2} z^2 dz = \int_0^{2\pi} 2^2 e^{2i\theta} 2i d\theta = 8i \int_0^{2\pi} e^{3i\theta} d\theta = \frac{8i}{3i} e^{3i\theta} \Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3} (e^{6\pi i} - 1) = 0,$$

como é mostrado pelo Teorema de Cauchy.

**Exemplo 3.15.** Calcular a integral

$$I = \int_{|z|=1} \sqrt{z} dz,$$

onde selecionamos um ramo de  $\sqrt{z}$ .

**Solução:**

Para escolhermos um ramo da função  $\sqrt{z}$  necessitamos cortar o plano complexo de  $z = 0$  a  $z = \infty$ .

Vamos escolher um corte ao longo do semi-eixo real negativo. (ver figura abaixo)

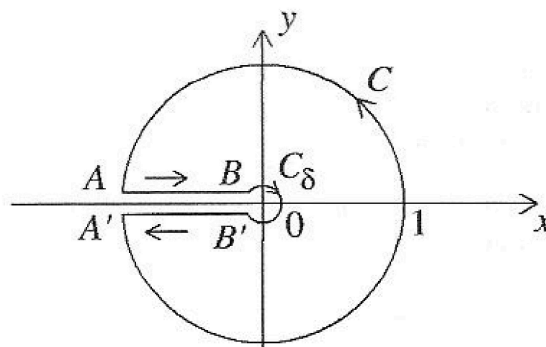


Figura 16: Contorno 4

Então  $-\pi < \arg z \leq \pi$  e  $\sqrt{z} = \sqrt{e^{i\theta}} = e^{i\theta/2}$ . Como o caminho é  $|z| = 1$ , isto é,  $z = e^{i\theta}$ , com  $-\pi < \theta \leq \pi$  e então  $dz = ie^{i\theta}$ .

Assim,

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} e^{i\theta/2} d\theta = i \int_{-\pi}^{\pi} e^{3i\theta/2} d\theta = \frac{2}{3} e^{i3\theta/2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3} \left( e^{i3\pi/2} - e^{-i3\pi/2} \right) = -\frac{4\pi}{3} i \neq 0. \quad (3.5)$$

**Observação 3.10.** Note que a integral não é igual a zero, pois o caminho  $|z| = 1$  não é fechado (ver figura). Note que o caminho  $\Gamma = C + AB + C_\delta + B'A'$  é fechado. Como  $f(z) = \sqrt{z}$  é analítica em  $D$ , onde  $D$  é a região limitada por  $\Gamma$ , e  $f'(z)$  é contínua em  $D$  e  $D$  é simplesmente conexo, então pelo Teorema de Cauchy, temos

$$\int_{\Gamma} \sqrt{z} dz = 0.$$

Temos:

(i) Sobre o segmento  $AB$ , temos:

$$z = re^{i\theta}, \quad dz = e^{i\theta} dr, \quad \sqrt{z} = e^{i\pi/2} \sqrt{r}.$$



Logo,

$$\int_{AB} \sqrt{z} dz = \int_1^\delta e^{i\pi} e^{\frac{i\pi}{2}} \sqrt{r} dr = e^{\frac{3i\pi}{2}} \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} \Big|_1^\delta \longrightarrow \frac{2}{3} i, \text{ quando } \delta \longrightarrow 0.$$

(ii) Sobre o círculo  $C_\delta$ , temos:

$$z = \delta e^{i\varphi}, \quad dz = \delta i e^{i\varphi} d\varphi, \quad \sqrt{z} = \sqrt{\delta} e^{\frac{i\varphi}{2}}.$$

Logo,

$$\int_{C_\delta} \sqrt{z} dz = \int_\pi^{-\pi} \sqrt{\delta} e^{\frac{i\varphi}{2}} \delta i e^{i\varphi} d\varphi \longrightarrow 0, \text{ quando } \delta \longrightarrow 0.$$

(iii) Sobre o segmento  $B'A'$ , temos:

$$z = r e^{-i\pi}, \quad dz = e^{-i\pi} dr, \quad \sqrt{z} = e^{-i\pi} \sqrt{r}.$$

Logo,

$$\int_{B'A'} \sqrt{z} dz = \int_\delta^1 e^{-i\pi} e^{\frac{-i\pi}{2}} \sqrt{r} dr = e^{\frac{-3i\pi}{2}} \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} \Big|_\delta^1 \longrightarrow \frac{2}{3} i, \text{ quando } \delta \longrightarrow 0.$$

Portanto,

$$\int_{ABC_\delta B'A'} \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} i + \frac{2}{3} i = \frac{4}{3} i. \quad (3.6)$$

Adicionando (3.5) e (3.6), obtemos  $\frac{4}{3} i + \left(-\frac{4}{3} i\right) = 0$  como é mostrado pelo Teorema de Cauchy.

**Exemplo 3.16.** Mostre que o Teorema de Cauchy não está assegurado para a função  $f(z) = \frac{1}{z}$  na curva fechada  $|z| = 2$ , isto é, mostre que:

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

**Solução:**

Note que a curva  $|z| = 2$  é dada por  $z = 2e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e portanto:

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{i\theta}}{2e^{i\theta}} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \neq 0.$$

**Observação 3.11.** O valor não nulo da integral acima, segue-se do fato que  $z = 0$  é um ponto singular (como veremos) da função integrando  $f(z) = \frac{1}{z}$  dentro da curva  $|z| = 2$ , e portanto as condições do Teorema de Cauchy não são satisfeitas.

**Teorema de Cauchy para domínio multiplamente conexo.**

Suponhamos que  $f(z)$  é analítica em um domínio multiplamente conexo, contendo uma curva fechada externa  $C$ , e curvas fechadas internas  $C_1, C_2, \dots, C_n$  (ver figura abaixo).

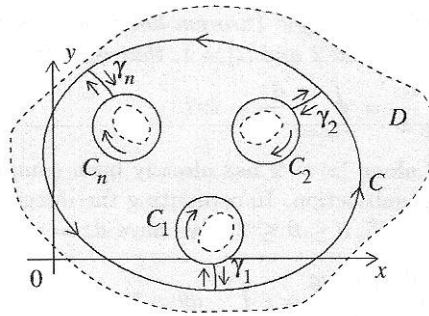


Figura 17: Domínio Multiplamente Conexa 2

Se o arco  $C$  e os arcos  $C_1, C_2, \dots, C_n$  estão unidos por  $n$  arcos  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , respectivamente, então  $D$  contém uma região simplesmente conexa  $R$  limitada pelos arcos  $C_1, C_2, \dots, C_n$  e os arcos  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ . Recorde que uma região é dita simplesmente conexa se ela não tem buracos.

Usando o Teorema de Cauchy para domínio simplesmente conexo, temos:

$$\oint_C f(z)dz + \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z)dz + \sum_{k=1}^n \left[ \int_{\gamma_k} f(z)dz + \int_{-\gamma_k} f(z)dz \right] = 0. \quad (3.7)$$

**Observação 3.12.** As duas integrais ao longo dos arcos  $\gamma_k$  e  $-\gamma_k$  somadas é igual a zero, pois  $\gamma_k$  é atravessada duas vezes, mas em direções opostas. Portanto, de (3.7) obtemos:

$$\oint_C f(z)dz + \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z)dz = 0. \quad (3.8)$$

A fórmula (3.8) pode ser escrita na forma

$$\oint_{C^+} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k^+} f(z)dz \quad (3.9)$$

**Exemplo 3.17.** Mostre que o Teorema de Cauchy está assegurado para a função  $f(z) = \frac{1}{z}$  e os caminhos fechados  $|z| = 1$  e  $|z| = 2$ , isto é, mostre que:

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

**Solução:**

A curva  $|z| = 1$  é dada por  $z = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Daí, obtemos  $dz = ie^{i\theta} d\theta$  é:

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} i}{e^{i\theta}} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Note que a curva  $|z| = 2$  é dada por  $z = 2e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e portanto, como feito acima, temos:

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{i\theta}}{2e^{i\theta}} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \neq 0.$$

## 3.2 Fórmula Integral de Cauchy.

Um importante resultado devido a Cauchy mostre que o valor de uma função analítica  $f$  sobre a fronteira de um contorno fechado  $C$  determina o valor de  $f$  no interior de  $C$ .

**Teorema 3.5** (Fórmula Integral de Cauchy). *Se  $f(z)$  é analítica em um domínio simplesmente conexo  $D$  contendo um caminho fechado  $C$  tomado na direção positiva, e se  $z_0$  é um ponto qualquer no interior de  $C$ . Então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

**Prova 3.6.** *Seja  $C_\rho$  o círculo de raio  $\rho > 0$  e centrado em  $z_0$ , onde  $\rho > 0$  é tomado pequeno de modo que  $C_\rho$  é interior a  $C$ . (Ver figura abaixo)*

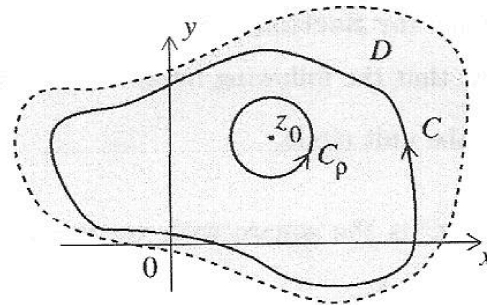


Figura 18: Domínio Simplesmente Conexos 2

Então  $\frac{f(z)}{z - z_0}$  é analítica no domínio duplamente conexo contendo  $C$  e  $C_\rho$ . Pelo Teorema de Cauchy para domínio multiplamente conexo, temos:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (3.10)$$

onde  $C_\rho$  é tomado na direção positiva.

Como o caminho  $C_\rho$  é dado por  $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$ , onde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Então  $dz = \rho i e^{i\theta} d\theta$  e por (3.10), obtemos

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta. \quad (3.11)$$

Como  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  é analítica em  $D$ ,  $f(z)$  é contínua em  $D$ . logo,  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  são contínuas em  $D$ . Tomando o limite em (3.11) quando  $\rho \rightarrow 0$  e usando o Teorema

(3.7), na integral do lado direito em (3.11) e notando que a integral do lado esquerdo de (3.10) não depende de  $\rho$ , temos:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z_0) d\theta = 2\pi i f(z_0).$$

Logo,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

**Teorema 3.7.** Se  $f(x, y)$  é contínua num retângulo,  $a \leq x \leq b$  e  $c \leq y \leq d$ , então a função

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

é contínua no segmento  $c \leq y \leq d$ , e além disso

$$\lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = \int_a^b f(x, y_0) dx.$$

**Observação 3.13.** A fórmula integral de Cauchy está assegurado para domínio multiplamente conexo. Por exemplo, se  $f(z)$  é analítica em um domínio duplamente conexo  $D$ , contendo o exterior e interior dos caminhos fechados  $C_1$  e  $C_2$  respectivamente (ver na figura abaixo).

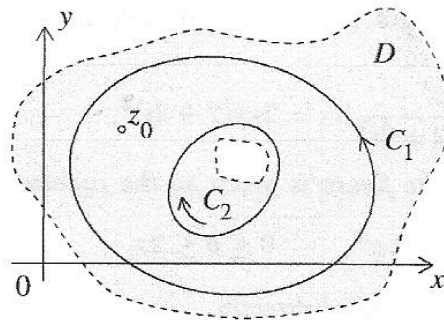


Figura 19: Domínio Duplamente Conexos 2

Se  $z_0$  é um ponto na região limitada por  $C_1$  e  $C_2$ , então

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são tomados na direção positiva.

**Exemplo 3.18.** Considere a função  $f(z) = z^2$  analítica no plano complexo e seja  $z_0 = 2 + 2i$ . Seja  $C$  o círculo de raio 2 centrado em  $z_0$  (ver figura abaixo). Pela fórmula integral de Cauchy, obtemos:

$$\oint_C \frac{z^2}{z - (2 + 2i)} dz = 2\pi i (2 + 2i)^2,$$

onde  $C$  é o contorno mostrado na figura abaixo é dada pela equação.

$$z = (2 + 2i) + 2e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

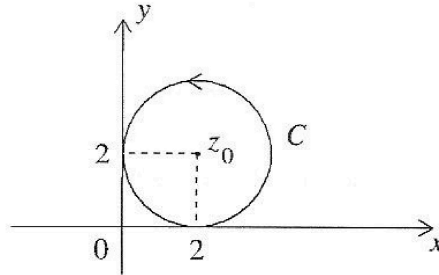


Figura 20: Contorno 5

**Observação 3.14.** Calcule a integral acima pelo método direto.

**Exemplo 3.19.** Mostre que

$$\oint_C \frac{z^2}{z - (1 + i)} dz = 2\pi(1 + i)^2,$$

onde  $C$  é um quadrado centrado em  $z_0 = 1 + i$ , com lado de comprimento 2.

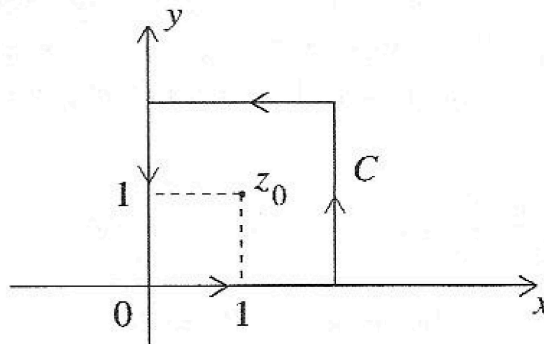


Figura 21: Contorno 6

**Observação 3.15.** Calcule a integral acima pelo método direto.

A seguir a partir da fórmula integral de Cauchy, serão obtidos vários resultados das funções analíticas.

### Diferenciabilidade infinita das funções analíticas

**Teorema 3.8.** *Uma função analítica é infinitamente diferenciável. Além disso, para todo  $n = 1, 2, \dots$*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} dz.$$

**Prova:** Substituindo  $z$  por  $\xi$  e  $z_0$  por  $z$  na fórmula integral de Cauchy, temos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} dz. \quad (3.12)$$

Seja  $D$  um domínio simplesmente conexo contendo um caminho fechado  $C$ . Mostraremos que se  $f(z)$  é analítica em  $D$ , então a integral (3.12) pode ser diferenciável um número arbitrário de vezes com respeito a  $z$  e

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi. \quad (3.13)$$

De fato, para qualquer complexo  $h$ , tal que  $z + h \in D$ , obtemos a partir de (3.12) que

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[ \frac{1}{\xi - z - h} - \frac{1}{\xi - z} \right] d\xi$$

o que implica

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)} d\xi. \quad (3.14)$$

Como  $f(z)$  é analítica sobre  $C$ , ela é contínua. Além disso, se

$$|h| < \frac{1}{2} |\xi - z| \quad (3.15)$$

então a função

$$\frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)}$$

é contínua sobre  $C$  com respeito as variáveis  $\xi$  e  $h$  para  $z$  fixado. Portanto, pelo Teorema (3.7), podemos tomar o limite superior sobre o sinal da integral quando  $h \rightarrow 0$  em (3.14). Além disso, a integral

$$\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

existe, pois

$$\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}$$

é analítica sobre  $C$  e se  $z$  é um ponto interno de  $D$ . Portanto, o limite do lado esquerdo de (3.14) existe quando  $h \rightarrow 0$ . Logo tomando o limite em (3.14) quando  $h \rightarrow 0$ , obtemos

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi. \quad (3.16)$$

Argumento análogo aplicado a (3.16) dar

$$\frac{f'(z+h) - f'(z)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left[ \frac{1}{(\xi - z - h)^2} - \frac{1}{(\xi - z)^2} \right] d\xi.$$

o que implica

$$\frac{f'(z+h) - f'(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{2(\xi - z - \frac{h}{2})}{(\xi - z - h)^2 (\xi - z)^2} d\xi. \quad (3.17)$$

A integral (3.17) é contínua com respeito a variável  $\xi$  e  $h$  sobre uma vizinhança de  $C$  se  $z$  está fixado e  $|h| < \frac{|\xi - z|}{2}$ .

Portanto podemos tomar o limite em (3.17) quando  $h \rightarrow 0$ , além disso, a integral

$$\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi$$

existe. Portanto tomando o limite em (3.17) quando  $h \rightarrow 0$ , obtemos

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi \quad (3.18)$$

Suponhamos que a fórmula

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi. \quad (3.19)$$

é válida e mostraremos sua validade para  $n$ .

Temos

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_C \left[ \frac{nh(\xi - z)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2!}h^2(\xi - z)^{n-2} + \dots - (-1)^{(n+1)}h^n}{(\xi - z - h)^n (\xi - z)^n} \right] d\xi. \quad (3.20)$$

A integral em (3.20) é analítica com respeito a variável  $\xi$  e  $h$  sobre uma vizinhança de  $C$  se  $z$  está fixado e  $|h| < \frac{|\xi - z|}{2}$ . Portanto podemos tomar o limite em (3.20) quando  $h \rightarrow 0$ , obtemos

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

**Observação 3.16.** Se  $f(z)$  é analítica em  $D$ , então  $f(z)$  tem derivadas de todas as ordens em  $D$ .

**IMPORTANTE** Este resultado não é verdade para funções de variável real.

**Exemplo 3.20.** A função  $f(x) = (x-1)^{\frac{7}{3}}$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$  é derivável.

Temos:

$$f'(x) = \frac{7}{3}(x-1)^{\frac{4}{3}}, \text{ com } f'(1) = 0$$

$f''(x) = \frac{28}{3}(x-1)^{\frac{1}{3}}$ , com  $f''(1) = 0$ .  
 Porém,  $f'''(1)$  não existe.

### Desigualdades de Cauchy

As desigualdades de Cauchy afirmam que se  $f(z)$  é analítica sobre um círculo de  $C$  de raio  $r$  centrado em  $z = a$ , e  $m$  seu interior, e se para algum  $M > 0$ ,  $|f(z)| \leq M$  para todo  $z$  em  $C$  e  $|f(z)| < M$  para  $z$  interior a  $C$ ,

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{r^n},$$

para

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

#### Demonstração

Como  $f(z)$  é analítica em  $C$ , é contínua e, portanto limitada. Assim existe um número  $M$  tal que  $|f(z)| < M$  para todo  $z$  em  $C$ . Se  $f(z)^0$  representa  $f(z)$ , então por (3.13),

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Logo,

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \oint_C \frac{|f(z)||dz|}{|z-a|^{(n+1)}}.$$

Mas  $|z-a| = r$  para  $z$  em  $C$  e, portanto,

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi r^{(n+1)}} M \oint_C |dz| = \frac{n!M}{2\pi r^{(n+1)}} \times 2\pi r \leq \frac{n!M}{r^n}$$

para  $n = 1, 2, 3, \dots$

Como uma segunda consequência da fórmula integral de Cauchy, provaremos o Teorema de Morera, o qual é a recíproca do Teorema de Cauchy para domínio simplesmente conexo. Para obter o teorema de Morera, enunciaremos o teorema a seguir, o qual a prova fica como exercício.

**Teorema 3.9.** *Se  $f(z)$  é contínua em uma região simplesmente conexa  $D$  e a integral de  $f(z)$  ao longo de qualquer caminho fechado em  $D$ , é igual a zero, então a função*

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi, \quad z_0, z \in D \quad (3.21)$$

é analítica em  $D$  e  $F'(z) = f(z)$ .

**Observação 3.17.** *A integral (3.21) é chamada de primitiva ou antiderivada de  $f(z)$ .*

**Teorema 3.10 (Morera).** *Seja  $f(z)$  uma função contínua em um domínio simplesmente conexo  $D$  e suponha que a integral de  $f(z)$  ao longo de qualquer caminho fechado inteiramente contido em  $D$  é igual a zero. Então,  $f(z)$  é analítica em  $D$ .*



**Prova:** Pelo Teorema (3.9), a função

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi, \quad (3.22)$$

onde  $z_0, z \in D$  e a integral (3.22) é calculada ao longo de qualquer caminho fechado inteiramente contido em  $D$ , é analítica em  $D$  e  $F'(z) = f(z)$ . Então pelo Teorema (3.8), temos  $F''(z) = f'(z)$  em  $D$ . Assim,  $f(z)$  é analítica em  $D$ .

### Teorema de Liouville

Como uma terceira consequência da fórmula integral de Cauchy, provaremos o Teorema de Liouville para funções inteiras limitadas

**Teorema 3.11** (Liouville). *Se a função inteira  $f(z)$  é uniformemente limitada em  $\mathbb{C}$ , então  $f(z)$  é constante.*

**Prova:** Pelo Teorema 3.8, com  $n = 1$ , temos:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi,$$

onde  $C$  é um círculo de raio  $R$  centrado em  $z$ . Logo,  $\xi = z + Re^{i\theta}$ , com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $d\xi = Rie^{i\theta} d\theta$ . Então

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} f(z + Re^{i\theta}) e^{-i\theta} d\theta \quad (3.23)$$

Tomando o módulo em (3.23) e usando o fato que  $|f(z)| < M$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ , obtemos

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} |f(z + Re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi R} \cdot M \cdot 2\pi = \frac{M}{R}$$

, isto é,

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}. \quad (3.24)$$

Fazendo  $R \rightarrow \infty$  em (3.24), obtemos  $|f'(z)| = 0$  que implica

$$f'(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

**IMPORTANTE** O Teorema de Liouville não é válido para função real.

**Exemplo 3.21.** A função  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  é diferenciável e limitada, mas não é constante.

Como aplicação do Teorema de Liouville, provaremos o Teorema Fundamental da Álgebra.

**Teorema 3.12** (Teorema Fundamental da Álgebra). *Todo polinômio complexo de grau  $n$  tem pelo menos uma raiz complexa.*

**Prova:** Suponhamos que

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0$$

não tenha raiz complexa. Então,  $P(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$ . Como  $P(z)$  é uma função inteira a função  $f(z) = \frac{1}{P(z)}$  é inteira.

Vamos mostrar que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ .

Temos:

$$f(z) = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \frac{\frac{1}{z^n}}{a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \cdots + a_0 \frac{1}{z^n}}.$$

Logo,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \frac{0}{a_n} = 0.$$

Isto implica que existe  $R > 0$ , tal que:

$$|z| > R \implies |f(z)| < M. \quad (3.25)$$

Se  $|z| \leq R_1$ , então

$$|f(z)| \leq M_1. \quad (3.26)$$

Seja  $K = \max\{M, M_1\} > 0$ . Logo, de (3.25) e (3.26), concluímos que  $|f(z)| \leq K, \forall z \in \mathbb{C}$ . Isto é,  $f$  é limitada. Portanto, pelo Teorema de Liouville  $f$  é constante, o que é uma contradição. Portanto, existe  $z_0 \in \mathbb{C}$ , tal que  $P(z_0) = 0$ .

## Conclusão

Tratamos de história, fundamentamos o trabalho com a teoria aplicada no curso de extensão de Estudo de uma Função de Variável Complexa, e enfim chegamos ao nosso objetivo, que são as demonstrações dos teoremas. Contudo a teoria utilizada é de fundamental importância para entendimento das demonstrações.

Concluimos que com o auxílio do teorema de Liouville, podemos demonstrar uma de suas aplicações que é o teorema Fundamental da Álgebra de forma mais simplificada.

Esperamos que este trabalho possa ser usado, e estimular os leitores para pesquisar outras aplicações e despertar para o quanto a matemática pura pode ser interessante.

## Referências

AVILA, Geraldo. **Variáveis Complexas e Aplicações**. 3<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

GARBI, Geraldo G. **O Romance das Equações Algébricas**. 4<sup>a</sup> ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

HAUSER JR, Artur A. **Variáveis Complexas: Com aplicações à física**. Rio de Janeiro: Livros técnicos e Científicos editora. 1972.

SILVA, C. A. P. **O Problema de Sturm-Liouville e Aplicações**. 2011. 56 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Especialização em Matemática Pura e Aplicada)- Faculdade de Ciências e Tecnologias. Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande-PB. 2011.