UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS - CCHE
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

José Genildo Alves

Função Exponencial , Função Logarítmica e Aplicações

Monteiro - PB
2013

José Genildo Alves

Função Exponencial , Função Logarítmica e Aplicações

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB , em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática .

Orientação do Professor Ms. Marciel Medeiros de Oliveira .

Monteiro - PB
2013

A474f Alves, José Genildo.
Função exponencial , função logarítmica e aplicações [manuscrito] : / Jose Genildo Alves. - 2013.
32 p. : il.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2013.
"Orientação: Prof. Me. Marciel Medeiros de Oliveira, Departamento de Matemática".

1. Logaritmo. 2. Função logarítmica. 3. Aplicações dos Logaritmos. I. Título.

21. ed. CDD 512.922

José Genildo Alves

Função Exponencial , Função Logarítmica e Aplicações

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB , em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática .

Aprovado pela banca examinadora em 30 de outubro de 2013.

Banca Examinadora

Marciel Medeiros de Ol

Prof^o. Ms. Marciel Medeiros de Oliveira
Departamento de Matemática - Campus VI/UEPB
Orientador

Brunno de Castro Trajano

Prof^o Ms. Brunno de Castro Trajano
Departamento de Matemática - Campus Avançado de Patu/UERN
Examinador

Prof^o. Ms. Jozan Medeiros
Departamento de Matemática - UVA/Polo-Patos-PB
Examinador

Dedico este trabalho aos meus pais, por todo amor e carinho que tiveram comigo, por terem me dado educação e formado em mim o caráter que hoje tenho. Foram eles os responsáveis por ter me tornado tudo o que hoje eu sou.

"A Matemática é a chave de ouro com que podemos abrir todas as ciências".
Victor Duruy

Resumo

Neste trabalho, fizemos uma abordagem da função logarítmica, a partir de revisão de potências cujas propriedades são fundamentais para a compreensão da função exponencial, a própria função exponencial que a utilizaremos como base para o estudo dos logaritmos, pois a função é a sua inversa. Veremos também um pouco sobre a história dos logaritmos desde a sua criação até os dias atuais. E é claro o objetivo principal do nosso estudo que é a aplicação das funções logarítmicas a outras ciências como economia, física, química, biologia, astronomia, informática entre outras.
Palavras-Chave: Logaritmo, Função Logarítmica e Aplicações do Logaritmos.

Abstract

In this work, we approach the logarithmic function from reviewing powers whose properties are fundamental to understanding the exponential function, the actual exponential function that we use as the basis for the study of logarithms, since the function is its inverse. We'll also learn a bit about the history of logarithms since its inception to the present day. And of course the main goal of our study is the application of logarithmic functions to other sciences such as economics, physics, chemistry, biology, astronomy, computer science among others.

Key words: *Logarithm, Logarithmic Function and Applications of Logarithms*

SUMÁRIO

1 Introdução

Neste trabalho, estudamos os logaritmos,mas precisamente a função logarítmica. Deve-se a John Napier (1550-1617) a invenção dos logaritmos no início do século do século XVI, a fim de simplificar as trabalhosas operações aritméticas dos astrônomos, para a elaboração de tabelas de navegação. Assim, surgiu as primeiras tábuas de logaritmos por Jost Burgi (1552-1632) e John Napier (1550 - 1617). Logo depois, Henry Briggs (1561 - 1631) aperfeiçoou essas tábuas, apresentando os logaritmos decimais.Naquela época, os logaritmos não era exatamente o que usamos hoje, nem era associado ao conceito de expoente, mas a essência era a mesma. A principal contribuição dos logaritmos para facilitar os cálculos foi a de transformar as operações de multiplicação em adição e de divisão em subtração, ao estudar as propriedades operatórias: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_b y e \log \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$. Hoje em dia, com o advento das calculadoras eletrônicas, multiplicar,dividir, calcular potências e extrair raízes nãon é mais uma dificuldade. Nem por isso, os logaritmos tornaram-se inúteis, pois a possibilidade de definir logaritmos como expoentes (John Wallis 1685) e a idéia de base para os logaritmos (William Johns 1742), transformaram o logaritmo em um imprescidível instrumento de resoluções de equações exponenciais. É esse logaritmo moderno, definido como um expoente que estudaremos.

Dessa forma, no primeiro capítulo fizemos uma revisão de potências que é a base do nosso estudo, para introduzir os logaritmos e a função logarítmica, esta como função inversa da função exponencial.

No segundo capítulo, estudamos a história dos logaritmos.

No terceiro capítulo, expomos, então, algumas aplicações dos logaritmos em diversas áreas do conhecimento tais como:(Física, Química, Astronomia, Informática, etc...).

2 História dos Logaritmos

Neste capítulo, apresentaremos a história dos logaritmos, desde a sua criação, contribuição para as diversas áreas do conhecimento tais como: astronomia, navegação, química, física etc..., e sua importância para os dias atuais.

2.1 A criação dos logaritmos

Ao término do século XVI, um dos grandes desafios da matemática consistia em encontrar meios de simplificar os cálculos aritméticos, visando em especial às necessidades da astronomia. Alguns procedimentos então usados com essa finalidade estavam longe do ideal. Era o caso da prostafére(adição e subtração em grupo), consistindo na conversão de produtos em somas, mediante relações trigonométricas como por exemplo

$$2cos\ x\ cos\ y = cos(x+y) + cos(x-y).$$

Esse ponto de estrangulamento seria eliminado com a criação dos logaritmos no século XVII. É interessante notar que, embora os logaritmos resultem da relação inversa da potenciação, à época em que surgiram ainda não se usavam expoentes em matemática.

Nessa direção são dois os considerados pais da idéia de logaritmo. John Napier (1550-1617) e Jobst Burgi (1552-1632), em trabalhos independentes, quase concomitantes, o primeiro a partir de noções geométricas, o segundo a partir de noções algébricas.

E há também os precursores, dos quais talvez o mais importante seja Michael Stifel (1487-1567). Alemão da cidade de Esslinger, Stifell seguiu a carreira religiosa, inicialmente como monge agostiniano, mas acabou se convertendo às doutrinas de Lutero, de quem era amigo. Às tantas, certamente sem consultar seu líder religioso, anunciou o fim do mundo para 03-10-1533, baseando-se em interpretações de profecias bíblicas. Considerando-se sua grande reputação científica e a intensidade da fé naquela época, pode-se imaginar os transtornos causados por esse rebate falso. Tanto que Stifel teve que se refugiar numa prisão... de lá Lutero o salvou para a matemática. com efeito, em 1544 Stifel publicaria sua *Arithmética Integra*, o mais importante tratado de álgebra da Alemanha no século XVI. Nele aparece pela primeira vez o triângulo dos coeficientes do binômio, até os de ordem 17, inclusive a fórmula recorrente entre eles hoje conhecido como relação de Stifel. E aparece também o embrião da idéia de logaritmo. Cotejando a progressão geométrica $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$,1,2,4,8... com a progressão aritmética -3, -2, -1, 0, 1,2,3..., Stifel observou que o produto (quociente) de dois termos quaisquer da primeira está associado à soma(diferença) dos respectivos da segunda. Mas, para que essa idéia fosse proveitosa, era preciso interpolar, numa e noutra, cópias associadas convenientes de números reais, algo muito difícil para a época. O suíço Burgi era um homem eclético, o mesmo dedicava-se à fabricação de relógios, mas era versado em matemática e astronomia, tendo mesmo colaborado com Kepler em Praga. Daí, provavelmente, sua preocupação em criar os logaritmos, embora fosse um exímio calculista. Estimulado pelas idéias de Stifel, partiu de uma progressão aritmética de primeiro termo 0, razão 10 e último termo 32000, cujos elementos chamou de números vermelhos(pela cor com que os imprimiu). A progressão geométrica correspondente começa com 10^8 e sua razão é $1+10^{-4}$ (notação atual)- seus termos são chamados números negros. A partir daí constrói o que na verdade é, na terminologia atual, uma tábua de antilogaritmos: Os números vermelhos(logaritmos) são escritos na primeira linha e na coluna da esquerda e os negros correspondentes distribuídos pelas demais linha e colunas. A escolha de 1,0001 como razão da PG. Objetivava fazer com que suas potências ficassem muito próximas entre si; e começar essa progressão com 10^8 era um expediente para evitar números decimais. Burgi inventou seus logaritmos por volta do ano 1600, mas só em 1620 publicou um trabalho a respeito. Com isso ficou atrás de Napier na questão da prioridade sobre o assunto.

2.2 Os logarítmos Segundo Napier

John Napier (1550-1617), tornou pública uma invenção sua que sacudira a matemática da época. Os logaritmos, cuja criação trabalhou cerca de 20 anos. O termo logaritmo foi criado por Napier. De logos e arithmos, que significam, respectivamente, "razão e "números". E a obra em que, no ano de 1614, apresentou essa sua descoberta recebeu o título de *Mirifice logarithmorum canonis descriptio* (ou seja, uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos). Nela Napier explica a natureza dos logaritmos, segundo sua concepção, e forneceu uma tábua de logarítmos dos senos de 0^0 a 90^0, de minuto em minuto. A razão de aplicar sua idéia à trigonometria se deveu ao fato de que o objetivo principal dessa tábua era facilitar os longos e penosos cálculos que navegadores e astrônomos enfrentavam diuturnamente.

Em linguagem moderna, Napier concebeu os seus logaritmos da seguinte maneira: imaginemos os pontos C e F percorrendo respectivamente o segmento AB e a semi-reta DX, partindo ao mesmo tempo de A e D, com a mesma velocidade inicial; admitamos ainda que, numericamente, a velocidade de C seja dada sempre pela medida de CB e que a velocidade de F seja constante; nessas condições Napier definiu como logaritmo de $X = CB$ o número $Y = DF$. Assim, explicitamente, nesse conceito não intervém a idéia de base. Mas pode-se provar que

$$y = 10^7 \cdot \log_{\frac{1}{e}}(\frac{x}{10^7}).$$

A potência 10^7 surge aí porque Napier considerava $AB = 10^7$.

Napier juntamente com Briggs acabaram concordando que uma tábua de logaritmos de base 10 seria mais útil. Mas, com o advento das calculadoras manuais e dos computadores, as tábuas de logaritmos perderam sua utilidade. Hoje, o que importa especialmente são certas propriedades funcionais da função logaritmo e de sua inversa, a função exponencial. E nesse sentido deve-se privilegiar, isto sim, a base $e = 2,7182\ldots$.

No início do século XVII, os cálculos envolvidos nos assuntos de astronomia e navegação eram longos e trabalhosos. Para simplificar esses cálculos, surgiram nessa época as primeiras tábuas de logaritmos, inventadas independentemente por Jost Burgi (1552-1632)e John Napier (1550-1617). Logo depois, Henry Briggs (1561-1631) aperfeiçoou essas tábuas, apresentando os logaritmos decimais.

A principal contribuição dos logaritmos para facilitar os cálculos foi a de transformar as operações de multiplicação em adição e de divisão em subtração, ao estudar as propriedades operatórias:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Essas descobertas aumentaram muito a capacidade de cálculo numérico dos que estavam envolvidos em Astronomia e navegação. Dizia-se na época que a invenção dos logaritmos "duplicou "a vida dos astrônomos, alusão ao fato de que o trabalho de cálculo diminuíra tanto com a introdução dos logaritmos, que os astrônomos poderiam produzir o equivalente ao que produziriam antes, se pudessem viver duas vidas. Posteriormente, surgiram as réguas de cálculo, baseadas nessas propriedades dos logaritmos. Hoje, com o advento das calculadoras e microcomputadores, eles caíram em desuso.

2.3 Logaritmos e funções logarítmicas

Vários conceitos básicos da matemática, criados para atender a certas necessidades e resolver problemas específicos, revelaram posteriormente uma utilidade bem mais ampla do que inicialmente pensada e vieram, com a evolução das idéias e o desenvolvimento das teorias, a adquirir uma posição definitiva de grande relevância nessa ciência. Em alguns casos, a utilidade original foi, com o tempo, superada por novas técnicas, mas a relevância teórica se manteve. Os logaritmos foram inventados no início do século XVII a fim de simplificar as trabalhosas operações aritméticas dos astrônomos para a elaboração de tabelas de navegação. Com efeito, a regra

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$\log(x^n) = n \log x$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{\log x}{n}$$

permitem reduzir cada operação aritmética(exceto, naturalmente, a adição e subtração) a uma operação mais simples, efetuada com os logaritmos. Essa maravilhosa utilidade prática dos logaritmos perdurou até recentemente, quando foi vastamente superada pelo uso das calculadoras eletrônicas. A função logarítmica, entretanto, justamente com sua inversa, a função exponencial, permanece como uma das mais importantes na matemática, por uma série de razões que vão muito além da sua utilidade como instrumento de cálculo aritmético.

Um matemático ou astrônomo do século XVII achava os logaritmos importantes porque eles lhes permitiam efetuar cálculos com rapidez e eficiência. Um matemático de hoje acha que a função logarítmica e sua inversa, a função exponencial, ocupam uma posição central na Análise Matemática por causa das suas propriedades funcionais, especialmente a equação diferencial $x` = C \cdot x$, que descreve a evolução de grandezas que em cada instante. Exemplos de grandezas com essa propriedade são um capital empregado a juros compostos, uma população (de animais ou bactérias), a radioatividade de uma substância, ou um capital que sofre desconto.

3 Conceitos Básicos

Neste capítulo, apresentaremos uma revisão de potências como base fundamental para o estudo dos logaritmos, função exponencial, definindo-o como função inversa da exponencial.

3.1 Potências com expoente natural

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Definimos *potência* de base a e expoente n como sendo o número natural a^n tal que

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fatores}}.$$

Dessa forma, $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$, $(-8)^2 = (-8) \cdot (-8) = 64$ e $6^1 = 6$.

Logo, nota-se que se a base de uma potencia é um numero positivo, qualquer que seja o expoente, a potência é sempre positiva. Se a base é um numero negativo, vamos ter uma potência positiva, se o expoente é um número par e negativa se for um numero ímpar.

Proposição 3.1 *Sejam a e b números reais e m e n números naturais. Então são válidas as seguintes propriedades:*

a)$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ *(propriedade fundamental).*

b) $\frac{a^m}{a^n} = a^n \cdot a^{-n}$, *com* $a \neq 0$ *e* $m > n$.

c) $(ab)^m = a^n \cdot a^m$.

d) $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{a^m}$, *se* $b \neq 0$.

e) $(a^m)^n = a^{mn}$.

3.2 Potência de Expoente Inteiro Negativo

Sejam a um número real não nulo e n um número natural, definimos a^{-n} pela relação

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

isto é, a potência de base real, não nula, e expoente inteiro negativo é definida como o inverso da correspondente potência de inteiro positivo.

Exemplo 3.1 *a)* $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$.
b) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$.

3.3 Potência com expoente racional

Sejam $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ $(m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*)$, definimos a potência de base a e expoente $\frac{m}{n}$ pela relação

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Observação 3.1 *Toda potência de base positiva e expoente racional é um número*

$$a > 0 \Longrightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} > 0.$$

Exemplo 3.2 *1)* $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$.
2) $(\frac{1}{2})^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(\frac{1}{2})^3} = \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$

3.4 Função Exponencial

Definição 3.1 *Dado um número real a com $a > 0$ e $a \neq 1$, chamamos de **função exponencial** de base a à uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$.*

Exemplo 3.3 *a)* $f(x) = 2^x$
b) $g(x) = (\frac{1}{2})^x$
c) $h(x) = 3^x$

Observação 3.2 *1) O domínio da função exponencial é os reais, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$.*
2) O conjunto imagem da função exponencial é $\mathbb{R}_+^*$, ou seja, $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$. Note que para todo $a \in \mathbb{R}$, temos $a^x > 0$.

3.5 Gráfico da função exponencial

Por exemplo, vamos construir o gráfico da função $f(x) = 2^x$. Para isso, construamos a seguinte tabela:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

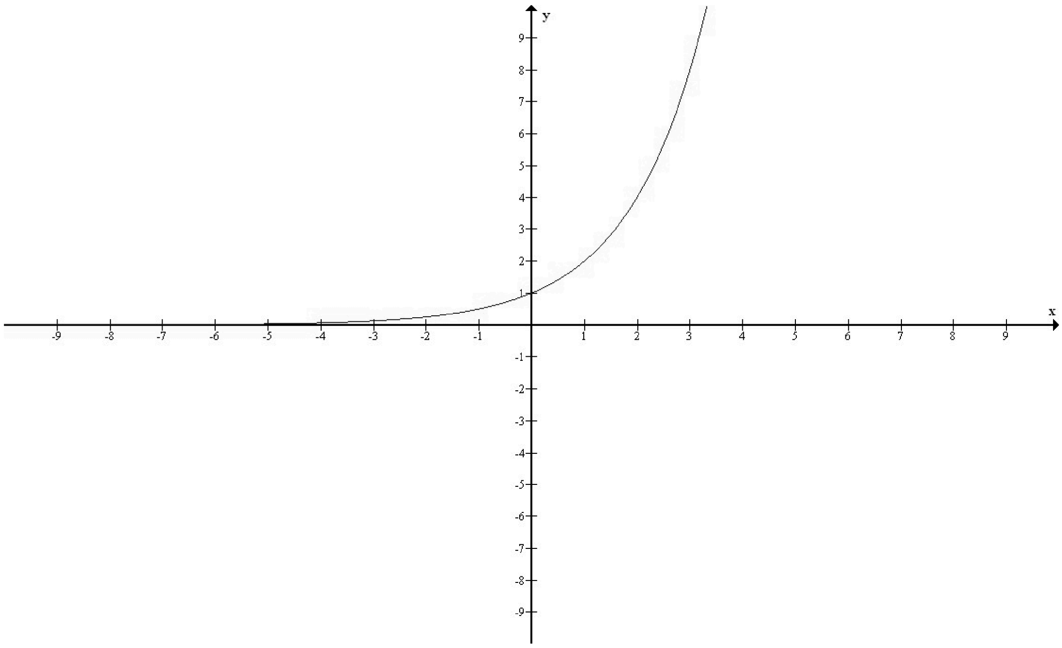

Figura 3.1:

Observação 3.3 *1) Na função exponencial $f(x) = a^x$, temos:*

$$x = 0 \Longrightarrow f(0) = a^0 = 1,$$

isto é, o par ordenado $(0,1)$ pertence à função para todo $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, isto significa que o gráfico cartesiano de toda função exponencial corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

2) A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ $(0 < a < 1)$. Portanto, dados os reais x_1 e x_2, temos:
i) Quando $a > 1 \Rightarrow x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
ii) Quando $0 < a < 1 \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

3) A função exponencial $f(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$, é injetora pois, dados x_1 e x_2 tais que $x_1 \neq x_2$. Por exemplo suponha $x_1 < x_2$, então:

$$a > 1 \Longrightarrow f(x_1) < (x_2) \quad e \quad 0 < a < 1 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Portanto, nos dois casos, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

3.6 Equações Exponenciais

Definição 3.2 *são equações com incógnita no expoente. Existem dois métodos fundamentais para resolução das equações exponenciais.*

1) Método da redução a uma base comum

Este método, como o próprio nome já diz, será aplicado quando ambos os membros da equação, com as transformações convenientes baseadas nas propriedades de potências forem redutíveis a potências de mesma base a $(0 < a \neq 1)$*. Pelo fato de a função exponencial* $f(x) = a^x$*, ser injetora, podemos concluir que potências iguais e de mesma base têm os expoentes iguais, isto é:*

$$a^b = a^c \Longleftrightarrow b = c \ (0 < a \neq 1)$$

Exemplo 3.4 *a)* $2^x = 64 \Longleftrightarrow 2^x = 2^6 \Longleftrightarrow x = 6$*;*
b) $8^x = \frac{1}{32} \Longleftrightarrow (2^3)^x = \frac{1}{2^5}$*;*
c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81} \Longleftrightarrow (3^{\frac{1}{2}})^x = \sqrt[3]{3^4} \Longleftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{4}{3}} \Longleftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{x}{4} \Longleftrightarrow x = \frac{8}{3}$.

3.7 logaritmos

Definição 3.3 *Sejam a e b números reais positivos, com* $a \neq 1$*. definimos logaritmo de na base, como sendo o expoente que se deve dar à base de modo que a potência obtida seja igual a.*

Simbolicamente,

$$\log_a b = c \Longleftrightarrow a^c = b,$$

com a e b positivos e $a \neq 1$.

Exemplo 3.5 *a)* $\log_3 81 = 4 \Longleftrightarrow 3^4 = 81$.
b) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Longleftrightarrow (\frac{1}{2})^{-5} = 32$.

Observação 3.4 *Condição de existência do logaritmo:* $\log_a N$ *existe quando e somente quando*

$$\begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

3.8 Consequências da definição de logaritmo

1. $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$, qualquer que seja $a > 0$ *e* $a \neq 1$.

2. $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$, para todo $a > 0$ *e* $a \neq 1$.

3. $\log_a a^n = n$, pois $a^n = a^n$, para todo $a > 0$ e $a \neq 1$ para todo n.

4. $a^{\log_a N} = N$, com $n > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$. De fato, se $\log_a N = x \Rightarrow a^x = N$, substituindo $a^{\log_a N} = N$.

5. $\log_a x = \log_a y \iff x = y$,com $x > 0, y > 0, a > 0$ *e* $a \neq 1$. De fato, se $\log_a x = r$ e $\log_a y = s$, isto é, $a^r = x$ *e* $a^s = y$, temos:
   1. $x = y \Rightarrow a^r = a^s \Rightarrow r = s \Rightarrow \log_a x = \log_a y$.
   2. $\log_a x = \log_a y \iff r = s \Rightarrow a^r = a^s \Rightarrow x = y$.

   Portanto, $\log_a x = \log_a y \iff x = y$, com $x > 0, y > 0, a > o$ *e* $a \neq 1$.

Exemplo 3.6 *a)* $8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^3 = 5^3 = 125$.
b) $3^{1+\log_3 4} = 3^1 \cdot 3^{\log_3 4} = 3 \cdot 4 = 12$.

3.9 Propriedades operatórias dos logaritmos

1) Logaritmo de um produto

Em qualquer base a com $0 < a \neq 1$, o logaritmo de dois fatores reais positivos é igual à soma dos logaritmos dos fatores. Em símbolos: se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c.$$

Exemplo 3.7 *a)* $\log_5(3 \cdot 4) = \log_5 3 + \log_5 4$
b) $\log_6 3 \cdot (-4) \cdot (-5) = \log_6 3 + \log_6(-4) + \log_6(-5)$
c) se $x > 0$, *então* $\log_2[x \cdot (x+1)] = \log_2 x + \log_2(x+1)$

2)logaritmo do quociente

Em qualquer base a $0 < a \neq 1$, o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor. Em símbolos: se $0 < a \neq 1$, $b > o$ e $c > 0$, então

$$\log_a(\frac{b}{c}).$$

Exemplo 3.8 *a)* $\log_5(\frac{2}{3}) = \log_5 2 - \log_5 3$;
b) $\log(\frac{2\cdot 3}{5}) = \log(2\cdot 3) - \log 5 = \log 2 + \log 3 - \log 5$;
c) se $x > 0$, *então* $\log_2(\frac{x}{x+1}) = \log_2 x - \log_2(x+1)$.

3) Logaritmo de uma potência

Em qualquer base a $0 < a \neq 1$, o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência. Em símbolos: se $0 < a \neq 1, b > o$ e $\alpha \in R$, então

$$\log_a b^{\alpha} = \alpha \cdot \log_a b.$$

Exemplo 3.9 *a)*$\log_3 2^5 = 5 \cdot \log_3 2$;
b)$\log_5 \sqrt[3]{2} = \log_5 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_5 2$;
c) $\log(x-1)^4 = 4 \cdot \log(x-1)$ *se, e somente se,* $x - 1 > 0$, *isto é,* $x > 1$.

Observação 3.5 *Chamamos de sistema de logaritmo de base a ao conjunto de todos os logaritmos dos números reais positivos de número reais positivos em uma base a* $(0 < a \neq 1)$. *Nesse sentido, entre a infinidade de a base a, portanto entre a infinidade de sistema de logaritmos existem dois sistemas de logaritmos de particular importância, a saber:*
1) ***Sistemas de logaritmos decimais*** *é o sistema na base 10, o qual se indica por* $log_{10}x$, *ou simplesmente log x.*
2) ***Sistemas de logaritmos neperianos*** *é o sistema na base e , o qual se indica por* $log_e x$, *ou simplesmente ln x.*

3.10 Mudança de Base

Para escrever um logaritmo de base a para base c, usamos a relação

$$\log_a b = \frac{\log_a a}{\log_a b}.$$

Observação 3.6 *Note que essa propriedade é realmente válida, pois:*

$$log_a b = x \Longleftrightarrow a^x = b \ (1)$$

$$log_c b = y \Longleftrightarrow c^y = b \ (2)$$

$$log_c a = xz \Longleftrightarrow c^z = a \ (3)$$

Dai substituindo (3) e (2) em (1), obtemos

$$(c^z)^x = c^y \Longrightarrow zx = y \Longrightarrow x = \frac{y}{z}.$$

Exemplo 3.10 *a)* $\log_7 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 7}$ *(na base 2);*
b) $\log_2 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2}$ *(na base 10).*

3.11 cologaritmo

Definição 3.4 *Chamamos de **cologaritmo** de um número b* $(b \in \mathbb{R}$ *e* $b > 0)$ *numa base a* $(a \in \mathbb{R}$ *e* $0 < a \neq 1)$*, ao oposto do logaritmo de b na base a. Simbolicamnete, se* $0 < a \neq 1$*, então*

$$colog_a b = -\log_a b.$$

Considerando que $\log_a b = -\log_a \frac{1}{b}$*, temos que se* $0 < a \neq 1$ *e* $b > 0$*, então*

$$colog_a b = \log_a \frac{1}{b}.$$

Exemplo 3.11 *a)* $colog_2 5 = -\log_2 5 = \log_2 \frac{1}{5}$;
b) $colog_2 \frac{1}{3} = -\log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3$;
c) se $x > 1$*, então* $\log_3 x - \log_3 (x-1) = \log_3 x + colog_3 (x-1)$.

3.12 Função logarítmica

Definição 3.5 *Seja a um número real com* $0 < a \neq 1$*, chamamos **função logarítmica de base a** à função* $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *que associa a cada x o número* $\log_a x$.

Em símbolos:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = log_a x \end{array}$$

Exemplo 3.12 *1.* $f(x) = \log_2 x$;
2. $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$;
3. $h(x) = \log\ x$.

Observação 3.7 *1) O domínio da função logaritmo é conjunto* $\mathbb{R}_+^*$.
2) 2) O conjunto imagem da função é conjunto $\mathbb{R}$.

3.13 Gráfico da Função Logarítmica

Vamos construir o gráfico da função logarítmica $f(x) = \log_2 x$ para $a > 1$. Para isso, vamos construir uma tabela dando valores inicialmente a x e depois calculamos $f(x)$.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x) = \log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

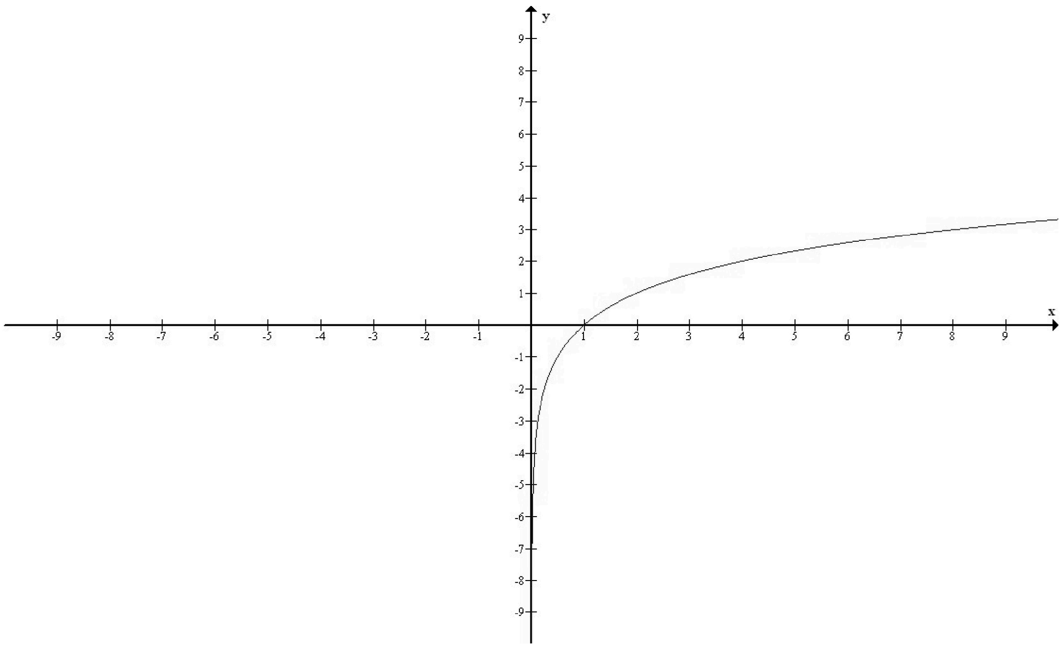

Figura 3.2:

Observação 3.8 *1) Na função logarítmica* $f(x) = log_a x$*, se* $0 < a \neq 1$*, então* $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) > 0$. *Ademais,* $x = 0 \Longrightarrow f(1) = log_a 1 = 0$, *isto é, o par ordenado*

$(1,0)$ *pertence à função para todo* $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, *isto significa que o gráfico cartesiano de toda função logarítmica corta o eixo x no ponto de ordenada* 0.

2) A função logarítmica $f(x) = log_a x$ *é crescente (decrescente) se, e somente se,* $a > 1$ $(0 < a < 1)$. *Portanto, dados os reais* x_1 *e* x_2, *temos:*
i) Quando $a > 1 \Rightarrow x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
ii) Quando $0 < a < 1$ *e* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

3) A função logarítmica $f(x) = log_a x$, *com* $0 < a \neq 1$, *é injetora pois, dados* x_1 *e* x_2 *tais que* $x_1 \neq x_2$. *Por exemplo suponha* $x_1 < x_2$, *então:*

$$a > 1 \Longrightarrow f(x_1) < (x_2) \quad e \quad 0 < a < 1 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Portanto, nos dois casos, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ademais, se $0 < a \neq 1$, então a função $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$ admite a função inversa de $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = a^x$.

3.14 Equação logarítmica

Podemos classificar as equações logarítmicas em três tipos:

1^{o} tipo: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ é a equação que apresenta, ou é redutível a, uma igualdade entre dois logaritmos de mesma base a $(0 < a \neq 1)$.

Exemplo 3.13 *Resolver a equação* $\log_2(3 \cdot x - 5) = \log_2 7$.
Solução: $\log_2(3 \cdot x - 5) = \log_2 7 \Rightarrow 3 \cdot x - 5 = 7 > 0$. *Resolvendo temos:*

$$3 \cdot x - 5 = 7 \Rightarrow x = 4$$

$x = 4$ *é a solução da equação proposta e não há necessidade de verificarmos, pois* $7 > 0$ *é satisfeita para todo x real.*

2^{o} tipo: $\log_a f(x) = \alpha$ é a equação logarítmica que apresenta, ou é redutível a, uma igualdade entre um logaritmo e um número real. Se $0 < a \neq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\log_a f(x) = \alpha \Rightarrow f(x) = a^\alpha$.

Exemplo 3.14 *Resolver a equação* $\log_2(3x+1) = 4$.
Solução: $\log_2(3\cdot x+1) = 4 \Rightarrow 3x+1 = 2^4 \Rightarrow 3\cdot x = 15 \Rightarrow x = 5$.

3º tipo: Incógnita auxiliar, são as equações que resolvemos fazendo inicialmente uma mudança de incógnita.

Exemplo 3.15 *Resolver a equação* $\log_2^2 x - \log_2 x = 2$.
Solução: *A equação proposta é equivalente à equação*

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0$$

fazendo $\log_2 xy$, *temos:* $y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$ *ou* $y = 1$. *Mas* $y = \log_2 x$, *então* $\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4$ *e* $\log_2 x - 1 \Rightarrow x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

3.15 Inequação logarítmica

Vamos classificar as inequações em três tipos:

1º tipo:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) > 0 & \text{se} \quad a > 0 \\ & \text{ou} \\ 0 < f(x) < g(x) & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

2º tipo:

$$\text{i) } \log_a f(x) > k \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^k & \text{se} \quad a > 1 \\ & \text{ou} \\ 0 < f(x) < a^k & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \log_a f(x) < k \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^k & \text{se} \quad a > 1 \\ & \text{ou} \\ f(x) > a^k & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

3º tipo: São as equações que resolvemos fazendo inicialmente uma mudança de incógnita.

Exemplo 3.16 *1. Resolver a inequação* $\log_2(2 \cdot x - 1) < \log_2 6$;
Solução: *Observe que a base é maior que 1, logo a desigualdade entre os logaritmandos tem o mesmo sentido que a dos logaritmos*

$$\log_2(2x-1) < \log_2 6 \Rightarrow 0 < 2x - 1 < 6 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}.$$

2. Resolver a inequação $\log_2(3x+2) < 2$.
Solução: $\log_3(3x+2) < 2 \Rightarrow 0 < 3x+2 < 3^2 \Rightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{7}{3}$.

4 Aplicações das funções exponenciais e logarítimicas

Neste capítulo, expomos,então, algumas aplicações dos logaritmos em diversas áreas do conhecimento como (química, física, astronomia, etc...).

Aplicação 1: uma pessoa deposita uma quantia em um banco, que a remunera à taxa de 1 por cento ao mês. Em quantos meses a quantia depositada dobra?
Solução:
Após n meses, a quantia depositada terá sido multiplicada por $(1+0,01)^n = (1,01)^n$. para que a quantia dobre, devemos ter $1,01^n = 2$. Tomando logaritmos em uma base qualquer (por exemplo, na base 10),temos:

$$log(1+0,01)^n = log(1,01)^n \Longrightarrow n\log 1,01 = \log 2$$

.
com auxílio de uma tabela ou de uma calculadora, obtemos $\log 1,01 = 0,00432$ e $\log 2 = 0,30103$ e daí

$$n = \frac{\log 2}{\log 1,01} \Longrightarrow n = \frac{0,030103}{0,00432} = 69,68$$

Assim, seria necessário esperar 70 meses para que a quantia dobre.

Aplicação 2: Qual é a meia vida de um material radioativo que sofre desintegração de 20 por cento de sua massa em um período de 1 ano?
Solução:
A massa no instante t é dada por $m(t) = m_0 \cdot a$. Como $m(1) = 0,8m_0$ ($0,8$ aparece na fórmula pois a massa em 1 ano desintegra $0,2$ e sobra $0,8$) e portanto, $a = 0,8$. A meia vida é o tempo

em que a massa se reduz à metade. É obtida, portanto, resolvendo a equação $0,8^t = 0,5$. Assim, usando as propriedades de logaritmos, por exemplo, na base 10 obtemos:

$$log\ 0,8^t = log\ 0,5 \Longrightarrow t \log\ 0,8 = \log 0,5 \Longrightarrow t = \frac{\log 0,5}{log 0,8}.$$

Logo,

$$t = \frac{-0,30103}{-0,09691} = 3,10628\ (anos)$$

.

Aplicação 3: O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberto às 23 horas. O médico da polícia chegou às 23 : 30 e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de $34,8°C$. Uma hora mais tarde ele tomou a temperatura outra vez e encontrou $34,1°C$. A temperatura do quarto era mantida constante a $20°C$. Use a lei do resfriamento de Newton para estimular a hora em que se deu a morte. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é $36,5°C$.

Solução:

Segundo a lei de resfriamento, a diferença $T - 20$ entre a temperatura do corpo e a temperatura do ambiente é dada por uma função do tipo exponencial. Assim, $T - 20 = b \cdot a^t$, ou seja, $T = 20 + b \cdot a^t$. Adotando $t = 0$ como o instante em que a temperatura do corpo foi tomada pela primeira vez e medindo tempo em horas, temos $T(0) = 34,8$ e $T(1) = 34,1$. Assim, temos $20 + b \cdot a^0 = 34,8$, o que nos fornece $b = 14,8$. Em seguida, $20 + 14,8 \cdot a^t = 34,1$, de onde tiramos $a = \frac{14,1}{14,8}$. Portanto, temos $T = 20 + 14,8 \cdot (\frac{14,1}{14,8})^t$. Temos

$$16,5 = 14,8 \cdot (\frac{14,1}{14,8})^t$$

$$\frac{16,5}{14,8} = (\frac{14,1}{14,8})^t$$

Aplicando logaritmo na base e em ambos os lados da última igualdade, obtemos:

$$\ln\ 16,5 = t \ln\ \frac{14,1}{14,8} \Longrightarrow -0,04845t = 0,10873 \Longrightarrow t = -2,24$$

O sinal negativo indica que o instante em que a temperatura do corpo era de $36,5°$ é anterior ao momento da primeira meditação.

Assim, a morte ocorreu aproximadamente 2,24 horas, ou seja, 2 horas e 14 minutos antes das 23:30. Isto é, o horário estimado para a morte é 21:16.

Aplicação 4: A água de um reservatório se evapora à taxa de 10 por cento ao mês. Em quanto tempo ela se reduzirá a um terço do que era no início.
Solução:
É necessário, antes de mais nada, interpretar corretamente as informações fornecidas. A taxa de 10 por cento ao mês não implica em que, ao longo de um mês, 10 da água evapore. O valor dado se refere à taxa instantânea de evaporação. Ou seja, se a água continuasse a se evaporar a uma taxa constante e igual à do instante inicial, 10 por da água se evaporaria em um mês. No entanto, a taxa de evaporação é proporcional à quantidade de água existente e é portanto, decrescente ao longo do tempo. como a taxa de evaporação é proporcional à quantidade de água no reservatório, esta é dada por uma função do tipo exponencial. É conveniente expressar esta função na forma $q(t) = q_0 \cdot e^{kt}$, onde q_0 é a quantidade inicial de água no reservatório e k é a constante de proporcionalidade entre a taxa de evaporação e a quantidade de água. O dado do problema é que esta constante de proporcionalidade(logo o valor de k) é igual inicial, devemos resolver a equação

$$q_0 e^{-0,1t} = q_0 \frac{1}{3}$$

Temos: $-0,1t = ln\ \frac{1}{3} = -1,09861$. Logo, $t = 10,9861$, o que indica que a quantidade de água se reduz a $\frac{1}{3}$ de seu valor em aproximadamente 11 meses.

Aplicação 5: Em uma caverna da frança, famosa pelas pinturas feitas por homens pré-históricos, foram encontrados pedaços de carvão vegetal, nos quais a radioatividade de c^{14} era $0,145$ vezes a radioatividade num pedaço de carvão feito hoje. Calcule a idade do carvão e dê uma estimativa para a época em que as pinturas foram feitas.
Solução:
Estabelecendo que a massa de C^{14} ao longo do tempo é dada por

$$m(t) = m_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{5500}}.$$

Se a radioatividade da amostra hoje é 0.45 da observada em uma amostra viva do mesmo material, temos que o tempo t decorrido entre a época em que o material estava vivo e os dias de hoje satisfaz.

$$m_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{5500}} = m_0 0,145 \Longrightarrow (\frac{1}{2})^{\frac{t}{5500}} = 0,145 \Longrightarrow ln\ (\frac{1}{2})^{\frac{t}{5500}} = ln\ 0,145$$

$$\frac{t}{5500} ln(\frac{1}{2}) = \ln 0,145.$$

Logo,

$$\frac{t}{5500}(-0,69315) = -1,93102.$$

Portanto, $t \cong 15322$. Logo, as pinturas foram feitas aproximadamente 15000 anos atrás.

Aplicação 6: Foram injetadas 20 mg de uma certa droga em um paciente. A taxa instantânea de eliminação da droga, imediatamente após a injeção, é de 5mg por hora. Qual é a meia-vida da droga?(Cuidado! A resposta não é 2 horas).

Solução:

A lei da variação da quantidade de droga pode ser expressa na forma $q(t) = q_0 \cdot e^{-kt}$, onde q_0 é a quantidade inicial da droga 20 mg e k é a razão entre a taxa de eliminação e a quantidade de droga. Neste caso,

$$k = \frac{5mg/hora}{20mg} = 0,5horas$$

(note a unidade apropriada para k). Assim $q(t) = 20e^{-kt}$. Para calcular a meia-vida t, resolvemos a equação.

$$20 \cdot e^{-0.25t} = 20 \cdot \frac{1}{2}.$$

Com efeito,

$$e^{-0,25t} = 0,5 \Longrightarrow ln(e^{-0,25t}) = ln\ 0,5 \Longrightarrow -0,25t = ln0,5 \Longrightarrow t = \frac{ln\ 0,5}{ln\ 0,25} = 2,772,$$

ou seja, $t = 2:46$.

Aplicação 7: O pHde uma solução aquosa é definido pela expressão $pH = -\log[H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração, em $mol/1$, de ions de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10. Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que,nela, a concentração de ions de hidrogênio era $[H^+] = 5.4 \cdot 10^-8mol/1$. Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0.30, para $\log 2$, e de 0.48 para $\log 3$. Então qual é o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução?

Solução:

$pH = -\log(5.4 \cdot 10^{-8}) = -(\log 5.4 + \log 10^{-8}) = -\log 5,4 + 8$ (*)

Mas

$\log 5.4 = \log(\frac{27}{5}) = \log 27 - \log 5 = \log 3^3 - \log(\frac{10}{2}) = 3 \cdot \log 3 - (\log 10 - \log 2) = 3 \cdot 0.48 - 1 + 30 = 0.74$

Voltando a (*), $pH = -0.74 + 8 = 7,26$

Aplicação 8: Os habitantes de um certo país são apreciadores dos logaritmos em bases potências de dois. Nesse país, o Banco Zig oferece empréstimo com a taxa(mensal) de juros $T = \log 8225$, enquanto o Banco Zag trabalha com a taxa (mensal) $S = \log\ 215$. Com base nessas informações:

a) estabeleça uma relação entre T e S. b) determine em qual dos bancos um cidadão desse país, buscando a menor taxa de juros, deverá fazer empréstimos. Justifique.

Solução:

a) $T = \log 8225 = \frac{\log 2225}{\log 28} = \frac{\log 215^2}{3} = \frac{2 \cdot 215}{3} = \frac{2}{3} \cdot S$

b) Desde que $T = \frac{2}{3}S$, segue que $T < S$, portanto um cidadão que busque menor taxa de juros deve procurar o Banco Zig.

Aplicação 9:[...] A vantagem de lidar com os logaritmos é que eles são números mais curtos do que as potências. Imagine que elas indiquem a altura de um foguete que, depois de lançado, atinge 10 metros em 1 segundo, 100 metros em 2 segundos e assim por diante. Nesse caso, o tempo (t) em segundos é sempre p logaritmo decimal da altura (h) em metros.

A partir das informações dadas, julgue os ítens: e justificando:

a) Pode-se representar a relação descrita por meio da função $t = \log\ h$.

b) Se o foguete pudesse ir tão longe, atingiria 1 bilhão de metros em 9 segundos.

c) Em $2,5s$ o foguete atinge 550 metros.

Solução:

a) $t = \log h$. De fato

$$h = 10m \Longrightarrow t = \log 10 = 1s \Longrightarrow h = 100m \Longrightarrow t = \log 100 = 2s$$

b) 1 bilhão de metros $\Longrightarrow 10^9 m \Longrightarrow t = \log 10^9 = 9 \cdot \log 10 = 9 \cdot 1 = 9s$

c) Quando $t = 2,5s$ temos

$$2,5 = \log h \Longrightarrow h^2.5 \Longrightarrow h = 10^{\frac{5}{2}} \Longrightarrow h = \sqrt{10^5} = 10^2\sqrt{10} \cong 316,22\ m.$$

Aplicação 11: Suponha que o número de peças produzidas por uma indústria aumente mensalmente de acordo com a função $N(t) = 200 \cdot \log_3(1+t)$. Nessa função, t é o número de meses contados a partir de um certo período e N é o número de peças produzidas.

a) Quantas peças serão produzidas no segundo mês?

b) Quantos meses serão necessários para que a produção obtida seja o dobro da produção do segundo mês?

Solução:

a) $t = 2 \Longrightarrow N(2) = 200\log_3(1+2) = 200$ peças.
b) Devemos determinar t, de modo que $N(t) = 400$

$$400 = 200 \cdot \log_3(1+t) \Longrightarrow 2 = \log_3(1+t) \Longrightarrow 1+t = 3^2.$$

Ou seja, $t = 8$ meses.

Aplicação 12: A função $P(t) = 60 \cdot (1.04)^t$ representa a estimativa do Produto Interno Bruto-PIB em bilhões de dólares de um país no ano. Adotando-se a seguinte convenção:
$t = 0$ representa o ano de 1996;
$t = 1$ representa o ano de 1997;
$t = 2$ representa o ano de 1998;
e assim por diante.

Use a calculadora e responda:
a) Qual é a estimativa do PIB em 2005?
b) Em que ano o PIB será o dobro do que era em 1996? E o triplo?
c) Em geral, em que ano o PIB será igual ao PIB inicial multiplicado por x?
Solução:
a) $t = 9$ representa o ano de 2005. Assim, $p(9) = 60 \cdot (1,04)^9 \cong 85,4$ bilhões.
b) Para 1996, temos $t = 0$ e o PIB é dado por $P(0) = 60 \cdot (1,04)^0 = 60$. Devemos determinar t que corresponda a $p(t) = 120$, isto é, $120 = 60 \cdot (1,04)^t \Longrightarrow 2 = 1,04^t$, que equivale a $t = \log\ 1,042$. Aplicando a fórmula da mudança de base e usando a calculadora, vem:

$$t = \frac{\log\ 2}{\log\ 1,04} = \frac{0,3010}{0,017} \cong 18.$$

Ou seja, ano de 2014.

Analogamente, fazemos $p(t) = 3 \cdot 60$, isto é, $3 \cdot 60 = 60(1,04)^t \Longrightarrow 3 = (1,04)^t$, que equivale a $\log\ 1,043 = t$. Daí vem que

$$t = \frac{\log 3}{\log 1,04} \cong \frac{0,4771}{0,017} \cong 28.$$

Ou seja, ano de 2024.

Em geral, devemos ter $p(t) = x \cdot 60$, isto é,

$$x \cdot 60 = 60 \cdot (1,04)^t \Longrightarrow x = (1,04)^t \Longrightarrow t = \log 1,04x.$$

Aplicação 12: Um automóvel vale hoje RS $20.000,00$. Estima-se que seu valor y daqui a x anos seja dado pela função exponencial $y = ab^x$. Sabendo-se que o valor estimado pra daqui a 3 anos é RS $15000,00$ responda:

a) Qual o valor estimado para daqui a 6 anos?

b) Um outro automóvel tem valor estimado (y) daqui a x anos, dado por $y = c(0,8)^x$. Daqui a quantos anos o valor deste veículo se reduzirá a metade? Adote o seguinte valor $\log 2 = 0.3$.

Solução:

a) $20000 = ab^0 \Longrightarrow a = 20000$ e $b = \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \Longrightarrow 15000 = ab^3$. Daí a lei é $y = 20000\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)$.

Quando $x = 6 \Longrightarrow y = 20000\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^6 = 20000\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 11250$.

b) O valor atual desse veículo é obtido quando $x = 0 \Rightarrow y = c \cdot (0.8)^0 = c$. Devemos determinar x, tal que $y = \frac{c}{2}$. Assim, $\frac{c}{2} = c \cdot (0.8)^x \Longrightarrow 0.5 = 0.8^x \Longrightarrow \log\ 0.8 \cdot 0.5 = x$. Escrevendo em base 10, vem:

$\frac{\log 0.5}{0.8} = \frac{\log 1}{2}\frac{8}{10} = -\frac{\log 2}{\log 8} - \log\ 10 = -\frac{\log\ 2}{3 \cdot \log 2 - 1} = -\frac{0.3}{3 \cdot 0.3} - 1 = \frac{-0.3}{-0.1} = 3.$

Ou seja, 3 anos.

Referências

DANTE, L. R. **Matemática,** vol. único. 1°ed. Edditora Ática, São Paulo: 2005.

IEZZI, Gelson (et. al). **Fundamentos da Matemática Elementar,** vol. 2. Editora Atual, São Paulo: 2004.

SANTOS, C. A.(et. al).**Matemática,** vol. único, 6ªed. Editora Ática, São Paulo: 2002.

BOYER, C. B. **História da Matemática,** 2° ed. Edgard Blucher, São Paulo: 2003.