



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA – UEPB
CAMPUS VI – POETA PINTO DO MONTEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

BISMARCK MOTA DA SILVA

**O QUEBRA-CABEÇA 4T: UMA APLICAÇÃO DAS
TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DE ROTAÇÃO E
TRANSLAÇÃO.**

Monteiro – PB

2013

BISMARCK MOTA DA SILVA

**O QUEBRA-CABEÇA 4T: UMA APLICAÇÃO DAS
TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DE ROTAÇÃO E
TRANSLAÇÃO.**

*Monografia apresentada ao curso de Licenciatura Plena em
Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, no Campus
VI – Poeta Pinto de Monteiro, no Centro de Ciências Humanas
e Exatas como requisito para obtenção do título de licenciado
em Matemática.*

Prof. Me Tiago Marques Madureira

Orientador (Universidade Estadual da Paraíba – CCHE)

Monteiro - PB

2013

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S586q Silva, Bismark Mota da.

O quebra-cabeça 4t [manuscrito] : uma aplicação das transformações geométricas de rotação e translação / Bismark Mota da Silva. - 2013.

40 p. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2013.

"Orientação: Prof. Me.Tiago Marques Madureira, Departamento de Matemática".

1. Quebra-cabeça 4T. 2. Jogos matemáticos. 3. Transformações geométricas. I. Título.

21. ed. CDD 372.7

BISMARCK MOTA DA SILVA

**O QUEBRA-CABEÇA 4T: UMA APLICAÇÃO DAS
TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DE ROTAÇÃO E
TRANSLAÇÃO.**

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, no Campus VI – Poeta Pinto de Monteiro, no Centro de Ciências Humanas e Exatas como requisito para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Aprovada em: 11/12/2013

Banca Examinadora


Prof. Me Tiago Marques Madureira

Orientador (Departamento de Matemática – Campus VI / UEPB)


Prof. Tony Regy Ferreira da Silva

Examinador (Departamento de Matemática – Campus VI / UEPB)


Prof. Me Marciel Medeiros de Oliveira

Examinador (Departamento de Matemática – Campus VI / UEPB)

Ao único Deus, Jesus Cristo.

Dedico

AGRADECIMENTOS

A **Deus** porque até aqui tem me sustentado e me orientado nas minhas decisões.

Ao Campus VI – Poeta Pinto do Monteiro e ao seu corpo docente por terem me acolhido e me dado estrutura para que esse sonho fosse realizado.

Ao meu orientador **Tiago Madureira** por ter aceitado esse desafio, por ter me direcionado na construção desse trabalho sempre que necessitei e por sua paciência e clareza diante as minhas dúvidas.

Aos meus pais, **Zuleide** e **Bonifácio**, por sempre terem me dado força e estímulo para que eu não desistisse dos meus sonhos e por serem exemplos em minha vida. A minha irmã **Michelle** que nas horas mais difíceis do curso esteve de mãos abertas para me acolher e dar forças para continuar vencendo. Aos meus avôs, **Inês** e **Eliseu**, por sempre terem me apoiado nas minhas decisões e por fazerem parte de minhas conquistas. Aos demais familiares que de certa forma sempre me apoiaram durante esses 4 anos de curso.

Aos meus irmãos de classe, Alcione Gregório, Aky-anny Vidéres, Edgleuma Coelho, Jamíria Silva, José Genildo Alves e em especial ao meu grande amigo **Izaias Nário**, por terem me ajudado nas minhas dificuldades, dividido muitas alegrias e poucas tristezas a cada período de curso que se passava e por termos vencidos juntos essa batalha.

E aos demais que diretamente ou indiretamente me ajudaram nesse mais novo degrau de minha vida, em especial, **Álison Bruno**.

Obrigado!

*“A Matemática é a chave
de ouro com que podemos
abrir todas as ciências”.*

Victor Duruy

RESUMO

Considerando a importância de jogos matemáticos no ensino da Matemática, a qual é defendida em inúmeras pesquisas em Matemática, propomos neste trabalho estudar a aplicação de um conteúdo de geometria na resolução do quebra-cabeça 4T, o qual consiste de uma caixa na forma quadrangular e de 4 peças na forma da letra T. No decorrer de nossa pesquisa apresentaremos os conceitos e definições das transformações geométricas, translação e rotação, necessários para a resolução do quebra-cabeça, bem como demonstraremos por argumentos matemáticos que a solução obtida através das transformações geométricas é válida e faremos a construção do 4T.

PALAVRAS-CHAVE: quebra-cabeça 4T; jogos matemáticos; transformações geométricas.

ABSTRACT

Considering the importance of mathematical games in mathematics education, which is advocated in many studies in mathematics, in this work we propose to study the application of content geometry in solving the puzzle 4T, which consists of a box in square shape and 4 pieces in the shape of the letter T. In the course of our research we will present the concepts and definitions of geometric transformations, translation and rotation needed to solve the puzzle, as well as by mathematical arguments demonstrate that the solution obtained by the geometric transformations is valid and we will build the 4T.

KEYWORDS: puzzle 4T; mathematical games; geometric transformations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - T transforma P em $T(P)$ no sistema OXY	15
Figura 2 - A imagem do segmento de reta PQ é outro segmento $T(P)T(Q) = P'Q'$	17
Figura 3 - A translação determinada pelo vetor v leva toda reta r numa reta paralela e transforma o sistema OXY no sistema $O'X'Y'$, cujos eixos são paralelos a, e têm o mesmo sentido de, OX e OY	18
Figura 4 - Translação determinada pelo vetor u	18
Figura 5 - A translação T_u transforma $ABCDEFGH$ em $A'B'C'D'E'F'G'H'$	19
Figura 6 - As coordenadas de $P' = T(P)$ no sistema $O'X'Y'$ são iguais às coordenadas de P no sistema OXY	20
Figura 7 - Reflexão em torno da reta s	21
Figura 8 - A reflexão R_s transforma $ABCDEFGH$ em $A'B'C'D'E'F'G'H'$	21
Figura 9 - A rotação de centro E e amplitude α leva $ABCDEFGH$ em $A'B'C'D'E'F'G'H'$	22
Figura 10 - A rotação R_α transforma $ABCDEFGH$ em $A'B'C'D'E'F'G'H'$	23
Figura 11 - A caixa e as 4 peças no formato de T.....	24
Figura 12 - Primeira peça encaixada dentro da caixa.....	25
Figura 13 - Segunda peça T sobreposta na primeira.....	25
Figura 14 - Eixo ortogonal OXY nas peças postas	26
Figura 15 - Rotação de 90° da peça no sistema OXY	26
Figura 16 - Rotação de 90° no sentido anti-horário da segunda peça	27
Figura 17 - Translação de m unidades para esquerda no eixo x	27
Figura 18 - Translação de m unidades para cima no eixo y	28

Figura 19 - Translação da segunda peça de modo a encaixar na primeira peça.....	28
Figura 20 - Translação das peças e formação de triângulos.....	29
Figura 21 - Terceira peça sobreposta na segunda.....	29
Figura 22 - Rotação de 90° no sentido anti-horário da terceira peça.....	30
Figura 23 - Translação da terceira peça de modo a encaixar na segunda peça.....	30
Figura 24 - Quarta peça sobreposta na terceira peça, rotacionada 90° no sentido anti-horário e transladada de modo a encaixar na terceira peça.....	31
Figura 25 - Peça T e suas dimensões.....	32
Figura 26 – Encaixe das quatro peças T.....	33
Figura 27 – Sistema de coordenadas ortogonais cartesianas OXY e identificação dos pontos E, F, G, H, I, J, K e L	33
Figura 28 – Definição das retas r, s, t e u	34
Figura 29 – Quadrilátero $ABCD$ formado a partir da intersecção das retas r, s, t e u	36

SUMÁRIO

Capítulo 1

1.1 – Introdução 11

1.2 – A metodologia da pesquisa 13

Capítulo 2

Transformações geométricas 14

2.1 – Translações 18

2.2 – Reflexões 20

2.3 – Rotações 22

Capítulo 3

O quebra-cabeça 4T 24

3.1 – Sua resolução 24

Capítulo 4

Construindo o 4T 32

Capítulo 5

Considerações finais 38

Referências 40

Capítulo 1

Nesse capítulo apresentaremos os conceitos e definições das transformações geométricas, translação e rotação, necessários para a resolução do quebra-cabeça 4T. Mostraremos ainda quais foram os métodos que utilizamos para nos direcionar nesta pesquisa.

1.1 - INTRODUÇÃO

Utilizar jogos matemáticos em sala de aula é um recurso que possibilita trabalhar a Matemática de forma tátil e visual, possibilitando ainda fazer uma ponte entre conteúdos, isso devido à grande abrangência em assuntos matemáticos que um simples jogo pode ter. Um exemplo disso é o quebra – cabeça 4T que nos auxilia em alguns conceitos geométricos como rotação, translação, ângulo, área e perímetro. É nesse quebra-cabeça que os alunos podem aprender, especialmente o conceito de rotação e de translação, e que na execução deste quebra-cabeça podem observar uma ligação entre conteúdos matemáticos. Esse é um dos motivos que podemos ressaltar sobre a importância da utilização desse recurso pedagógico, ou seja, ensinar Matemática de uma forma peculiar, fazendo com que o aluno se envolva mais na aula e, com isso, haja um maior aprendizado e desenvolvimento intelectual.

“Despertar o gosto e o interesse do aluno pela Matemática é fazê-lo sentir, compreender, vibrar com a ciência dos números, isso pode acontecer a partir de uma aprendizagem mais dinâmica e divertida utilizando-se os jogos como recurso.” (MUNHOZ, 2008, p. 2).

Queremos também ressaltar que muitos educadores entendem que os jogos têm como finalidade apenas tornar a aula dinâmica, diferente das outras aulas tradicionais, sendo um componente motivador pedagógico, de modo que os jogos não são relacionados ao conteúdo já trabalhado ou o conteúdo a ser trabalhado. Esse recurso didático, muitas vezes, é utilizado apenas com esse desígnio, impedindo que a Matemática seja vista e aprendida a partir de um caráter interativo, motivador e inovador. Conforme afirma Souza (2007, p. 4)

[...] o jogo é pouco utilizado como elemento de ensino/aprendizagem em matemática, para o Ensino Médio, mas sim como componente motivador pedagógico. Foi tomada como ponto de partida, a indagação sobre a possibilidade do uso do jogo pedagógico, em Matemática para o Ensino Médio, a ser considerado metodologia, para além da metodologia de resolução de problemas, como a voltada para o desenvolvimento do estudante, que ajuda a conduzir à liberdade emancipatória social.

Muitos docentes se preocupam em ensinar Matemática fazendo a relação do jogo (ou quebra-cabeça) com o conteúdo matemático ou vice-versa, porém não obtêm sucesso, pois não elaboram e não estudam adequadamente o material a ser utilizado antes de sua aplicação em sala de aula e, conseqüentemente, não obtêm a devida relação para que o assunto trabalhado seja realmente aprendido. Ou seja, essa junção apenas prejudica o ensino e a aprendizagem do educando, ao invés de desenvolver a sensibilidade, a criatividade, o raciocínio lógico e além de motivar a aprendizagem. Outras vezes o professor se utiliza desse método de ensino e não consegue obter clareza ao confrontar o material manipulável com o conteúdo estudado, fazendo com que o aluno não entenda o que ambos possuem em comum e qual é a finalidade do material.

Os jogos pedagógicos de Matemática, bem elaborados colaboram para construção do conhecimento, é um instrumento de socialização, desenvolve a sensibilidade, motiva, desenvolvem a criatividade, propiciam o desenvolvimento da linguagem, do pensamento e da construção. (MUNHOZ, 2008, p. 3)

O principal motivo pelo qual resolvemos estudar esse tema se deu devido a grandes afinidades, nas aulas de Laboratório de Matemática I e II do curso de Licenciatura em Matemática no campus VI da UEPB, com materiais manipuláveis e, nas aulas de Geometria Plana e Espacial, estudando figuras planas e sólidos geométricos. Outra motivação para nosso estudo provém da Matemática do Ensino Médio, na qual o conteúdo de Geometria Plana e Espacial podem ser abordados através de materiais manipuláveis ou da construção dos mesmos para fins visuais e noções básicas das figuras ou sólidos. Queremos apresentar o material manipulável aqui estudado como um recurso pedagógico eficaz no processo de ensino e aprendizagem.

Finalmente, um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e aspecto curricular que deseja desenvolver. (PCN, 1998, p. 48-49 apud ROSA, 2011)

Neste trabalho temos como principal objetivo aplicar a Geometria de rotação e translação no quebra-cabeça 4T, evidenciando assim que é possível utilizar o 4T em sala de aula através de uma de suas aplicabilidades no ensino de Matemática. Faremos a construção do quebra-cabeça e a verificação da veracidade da resolução estudada. Outra finalidade desse trabalho é apresentar possibilidades de construção e utilização de conceitos geométricos a partir do 4T, tais como área, perímetro, rotação, translação, estudo do triângulo retângulo etc.

1.2 - A METODOLOGIA DA PESQUISA

Nossa pesquisa é de ordem qualitativa, pois vamos trabalhar com resultados de caráter analítico. Na primeira etapa de nossa pesquisa adquirimos o quebra-cabeça 4T. Este tipo de quebra-cabeça pode ser encontrado em feiras ou casas de artesanato. Para que pudéssemos analisar a resolução do 4T levamos as suas medidas para que um artesão o confeccionasse em madeira. De posse do quebra-cabeça o nosso objetivo foi resolvê-lo, levando em consideração que sua execução baseia-se no encaixe das 4 peças de formato T dentro da caixa quadrangular.

Na segunda etapa de nossa pesquisa realizamos uma busca dos livros de geometria da biblioteca do CCHE da UEPB que abordam os conteúdos de transformações geométricas, mais precisamente as transformações de translação e de rotação, necessários para entendermos a matemática aplicada na resolução do quebra-cabeça 4T. Ressaltamos aqui, a defasagem dos livros de geometria com tal conteúdo da biblioteca do CCHE, o que dificultou nossa pesquisa.

Na terceira etapa descrevemos a resolução do quebra-cabeça, bem como comprovamos a sua veracidade por meio de argumentos matemáticos e também apresentamos as medidas para a construção do 4T.

Capítulo 2

Neste capítulo, apresentaremos a definição das Transformações Geométricas como funções que associam a cada ponto do plano outro ponto também do plano e abordaremos as seguintes *isometrias*: translação, reflexão e rotação.

Transformações Geométricas

Uma *transformação* T no plano π é uma função $T: \pi \rightarrow \pi$, isto é, uma correspondência que associa a cada ponto P do plano outro ponto $P' = T(P)$ do plano, chamado *imagem* de P pela função T . Se g é um conjunto de pontos do plano π , então definiremos $g' = T(g)$ como o conjunto das imagens dos pontos de g . Como uma transformação T é uma função, então ela pode ser injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

Lembremos que a transformação $T: \pi \rightarrow \pi$ diz-se *injetiva* quando pontos distintos $P \neq Q$ em π têm sempre imagens distintas $T(P) \neq T(Q)$. Em outras palavras, T é injetiva quando $T(P) = T(Q)$ implica $P = Q$. Diz-se que T é *sobrejetiva* quando todo ponto P' em π é imagem de pelo menos um ponto P , ou seja, para todo P' em π existe P em π tal que $T(P) = P'$.

Uma transformação $T: \pi \rightarrow \pi$ chama-se *bijetiva*, ou uma *bijeção*, quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva. Isto significa que para todo ponto P' em π existe um único ponto P em π tal que $T(P) = P'$.

Uma transformação bijetiva $T: \pi \rightarrow \pi$ tem uma inversa $T^{-1}: \pi \rightarrow \pi$ onde para todo ponto P' de π , $T^{-1}(P')$ é o único ponto P do plano π tal que $T(P) = P'$.

A transformação identidade $Id: \pi \rightarrow \pi$ é definida por $Id(P) = P$ para todo ponto P do plano π .

Por fim, dadas as duas transformações T_1 e T_2 no plano, podemos definir a composta $T_2 \circ T_1: \pi \rightarrow \pi$ como a transformação que a cada ponto P do plano π , associa o ponto

$$P' = (T_2 \circ T_1)(P) = T_2(T_1(P)).$$

Em particular, para qualquer transformação bijetiva T , temos

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = Id,$$

pois

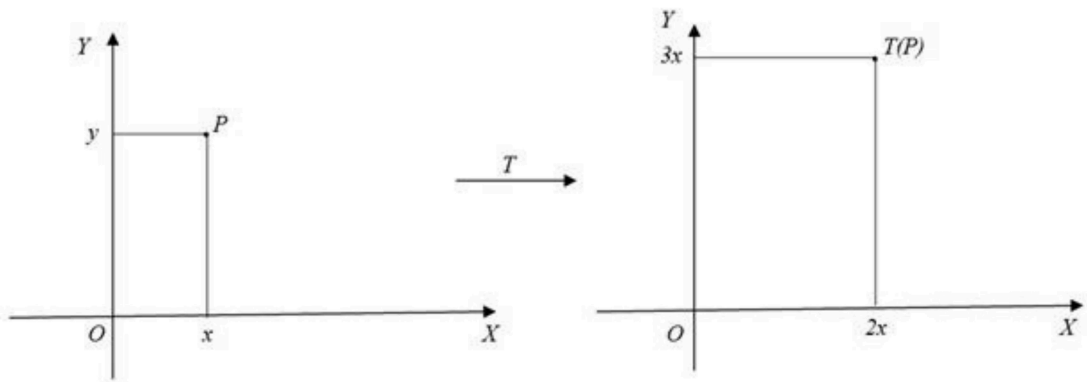
$$T(T^{-1}(P')) = T(P) = P' \text{ e } T^{-1}(T(P)) = T^{-1}(P') = P.$$

Observação: uma vez que um sistema de coordenadas em π tenha sido estabelecido, uma transformação T pode ser descrita por suas *equações*, isto é, pelas expressões das coordenadas (x_1, y_1) do ponto $P' = T(P)$, obtido pela aplicação de T ao ponto $P(x, y)$.

Exemplo 1: Tomemos a transformação T descrita pelas equações

$$\begin{cases} x = 2x \\ y = 3x \end{cases}$$

Figura 1 – T transforma P em $T(P)$ no sistema OXY .



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

As transformações iniciais que estudaremos são as *isometrias*, isto é, aquelas que conservam distâncias. Mais precisamente, T é uma isometria quando

$$d[T(P), T(Q)] = d(P, Q)$$

para quaisquer pontos P e Q do plano π . Demonstraremos as proposições referentes as seguintes propriedades fundamentais da isometria:

a) toda isometria é injetiva.

b) a imagem de um segmento de reta por uma isometria é um segmento de reta.

c) uma isometria preserva paralelismo.

d) uma isometria preserva ângulos.

Proposição 1: *Toda isometria $T: \pi \rightarrow \pi$ é injetiva.*

Dem.: Com efeito, se $T(P) = T(Q)$ então

$$d(P, Q) = d(T(P), T(Q)) = 0,$$

logo $P = Q$.

Proposição 2: *Sejam $T: \pi \rightarrow \pi$ uma isometria e P, Q pontos distintos de π . Se $T(P) = P'$ e $T(Q) = Q'$ então T transforma todo ponto R do segmento PQ num ponto R' do segmento $P'Q'$.*

Dem.: Com efeito, como R pertence ao segmento PQ , temos

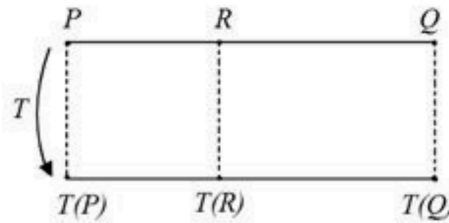
$$d(T(P), T(Q)) = d(T(P), T(R)) + d(T(R), T(Q)).$$

Sendo T uma isometria, temos $d(T(P'), T(Q')) = d(T(P), T(Q))$, $d(T(P'), T(R')) = d(T(P), T(R))$ e $d(T(R'), T(Q')) = d(T(R), T(Q))$. Logo

$$d(T(P'), T(Q')) = d(T(P'), T(R')) + d(T(R'), T(Q')).$$

Portanto R' pertence ao segmento de reta $P'Q'$.

Figura 2 – A imagem do segmento de reta PQ é outro segmento $T(P)T(Q) = P'Q'$.



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

A propriedade acima diz que toda isometria leva pontos colineares em pontos colineares e, mais adiante, preserva a ordenação desses pontos colineares. Daí resulta que a *imagem de uma reta r por uma isometria T é uma reta $r' = T(r)$.*

Proposição 3: *Uma isometria transforma retas paralelas em retas paralelas.*

Dem.: Com efeito, se $T: \pi \rightarrow \pi$ é uma isometria e as retas r, s do plano π são paralelas, suas imagens $r' = T(r)$ e $s' = T(s)$ devem ser paralelas, pois se existisse um ponto P' ao mesmo tempo em r' e em s' teríamos $P' = T(P)$, com P em r e $P' = T(Q)$, com Q em s . Sendo T injetiva, isto obriga $P = Q$, e então as retas r e s teriam um ponto $P = Q$ em comum, contradizendo o fato de que são paralelas.

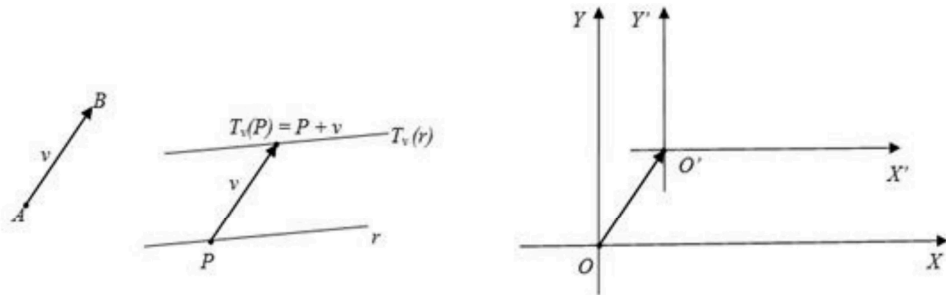
Atenção: A propriedade acima não significa que T transforma qualquer reta r numa reta $T(r) = r'$ paralela a r .

Proposição 4: *Uma isometria preserva quaisquer ângulos.*

Dem.: As isometrias mais simples são as *translações*. A translação $T_v: \pi \rightarrow \pi$, determinada pelo vetor v , é a transformação que leva cada ponto P do plano π no ponto T_v , onde $T_v(P) = P + v$. Como sabemos, se $v = \overrightarrow{AB}$ então $P + v = Q$ é o ponto tal que o segmento orientado PQ é equipolente a AB .

Se, num dado sistema de eixos ortogonais, as coordenadas de v são (α, β) então, para cada ponto $P = (x, y)$ tem-se $T_v(P) = (x + \alpha, y + \beta)$.

Figura 3 – A translação determinada pelo vetor v leva toda reta r numa reta paralela e transforma o sistema OXY no sistema $O'X'Y'$, cujos eixos são paralelos a, e têm o mesmo sentido de, OX e OY .

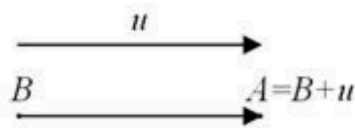


Fonte: LIMA, 2002, p. 142.

2.1 - Translações

A *translação* determinada pelo vetor u é a transformação $T_u: \pi \rightarrow \pi$ que leva cada ponto B do plano π no ponto $A = B + u$ desse plano (figura 4).

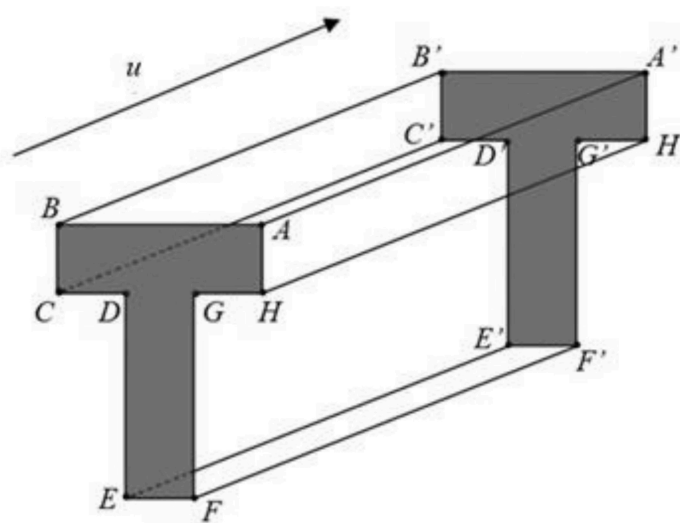
Figura 4 – Translação determinada pelo vetor u .



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

A translação transforma toda reta em mais uma paralela e por se tratar de uma isometria, transforma toda figura em outra congruente. A figura 4 mostra a *translação determinada pelo vetor u* aplicada ao T .

Figura 5 – A translação T_u transforma $ABCDEFGH$ em $A'B'C'D'E'F'G'H'$.



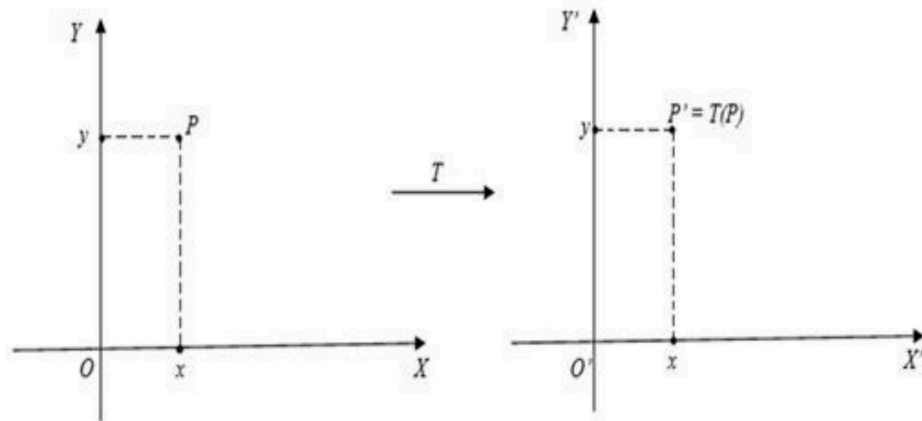
Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

Um sistema de eixos ortogonais OX e OY é transformado por T_v no sistema $O'X'Y'$, cujos eixos são paralelos a, têm o mesmo sentido que, OX e OY .

De modo geral, qualquer isometria T transforma um sistema de eixos ortogonais OXY noutro sistema de eixos ortogonais $O'X'Y'$. Além disso, T transforma um ponto qualquer P do plano noutro ponto $P' = T(P)$, cujas coordenadas no sistema $O'X'Y'$ são as mesmas coordenadas de P no sistema OXY .

Segue-se imediatamente que toda isometria T é uma transformação sobrejetiva. Como já vimos que T é injetiva, concluímos que T é uma bijeção. Sua inversa T^{-1} é evidentemente uma isometria.

Figura 6 – As coordenadas de $P' = T(P)$ no sistema $O'X'Y'$ são iguais às coordenadas de P no sistema OXY .



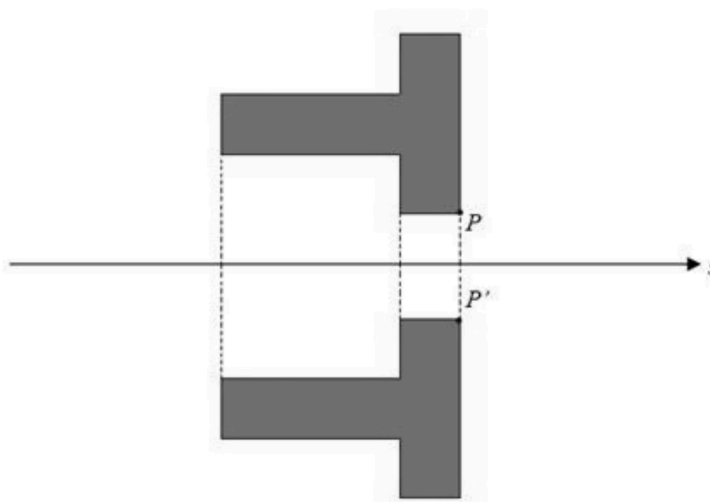
Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

2.2 - Reflexões

Dada uma reta s , falamos que o ponto P' é *simétrico* do ponto P em relação a s quando s é mediatriz de PP' . Se P pertence a s , falaremos que o seu simétrico em relação a s é ele mesmo.

A *reflexão* em volta da reta s (ainda chamada de simetria em relação a s) é a transformação R_s que associa a cada ponto P do plano o ponto $P' = R_s(P)$, simétrico de P em relação a s (figura 6).

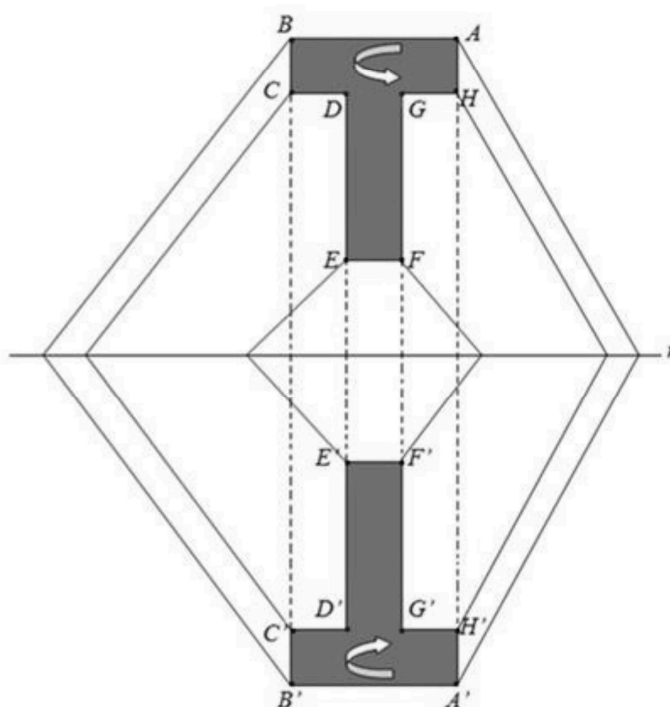
Figura 7 – Reflexão em torno da reta s .



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

A reflexão é uma isometria e, deste modo transforma cada figura G em uma outra G' congruente a G . No entanto, a reflexão torna invertida a orientação do plano, como se pode ver na figura 7, onde a figura $ABCDEFGH$ foi transformada em $A'B'C'D'E'F'G'H'$.

Figura 8 – A reflexão R_s transforma $ABCDEFGH$ em $A'B'C'D'E'F'G'H'$.



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

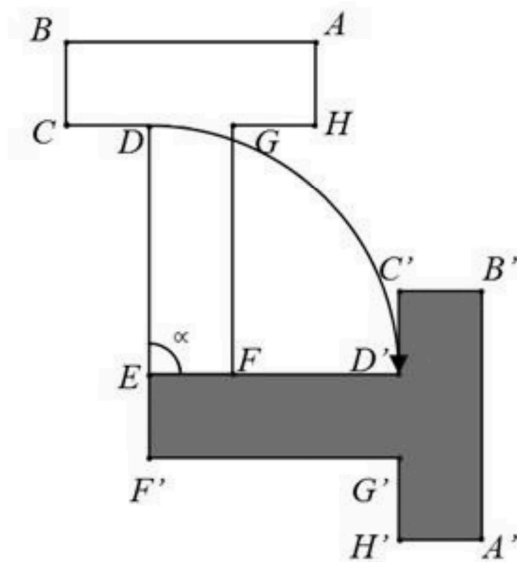
2.3 - Rotações

Definamos um ponto E no plano π agora orientado (o sentido positivo é o anti-horário, como de costume). Dado um ângulo α , a *rotação de centro E e amplitude α* é a transformação que a cada ponto D do plano π associa o ponto $D' = S_\alpha(D)$ de forma que se tenha $ED' = DE$, $\widehat{DED'} = \alpha$ e o sentido de D para D' (em torno de E), positivo (figura 8).

Para todo k inteiro, as rotações de amplitudes $\alpha + k 360^\circ$ são idênticas. Em particular para $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$, a rotação de amplitude $-\alpha$ é igual à rotação de amplitude $360^\circ - \alpha$.

A rotação é uma isometria e, portanto transforma figuras em figuras. A figura 8 mostra como construir a figura $A'B'C'D'E'F'G'H'$, imagem da figura $ABCDEFGH$ por uma rotação de centro E e amplitude α .

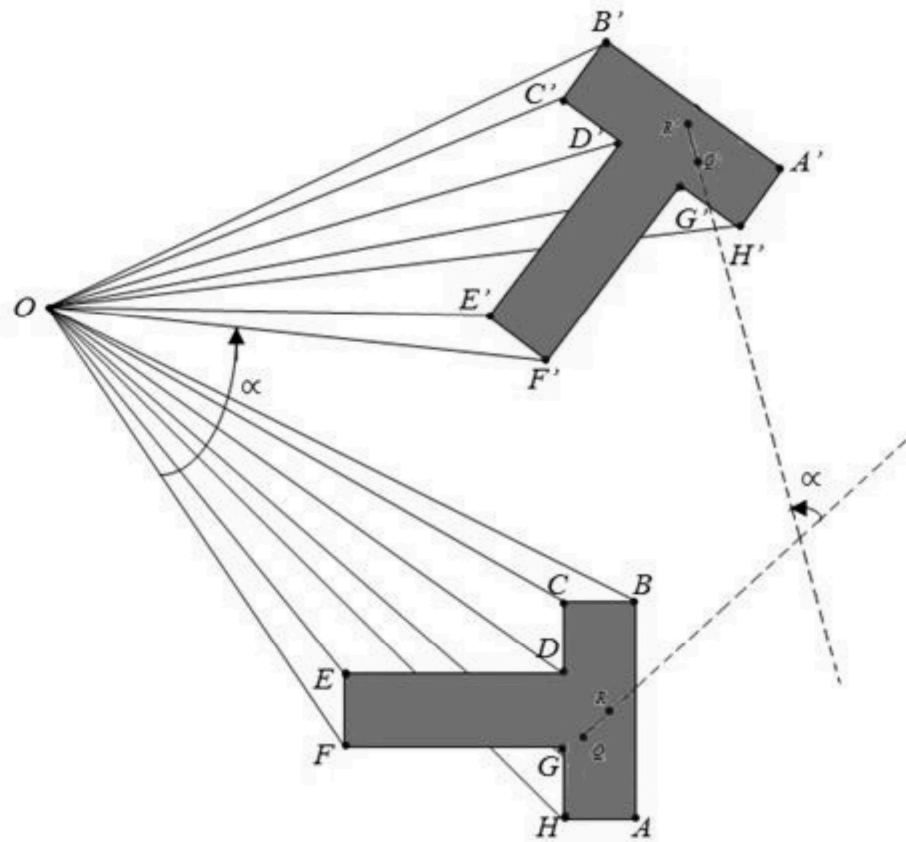
Figura 9 – A rotação de centro E e amplitude α leva $ABCDEFGH$ em $A'B'C'D'E'F'G'H'$.



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

A imagem de uma figura G por uma rotação é uma figura $G' = S_\alpha(G)$ congruente a G . Ainda, se Q e R são pontos de G e se $Q' = S_\alpha(Q)$ e $R' = S_\alpha(R)$ então as retas QR e $Q'R'$ formam ângulo de medida α (figura 9).

Figura 10 – A rotação R_α transforma $ABCDEFGH$ em $A'B'C'D'E'F'G'H'$.



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

Capítulo 3

Traremos neste capítulo uma abordagem sobre o 4T, ou seja, sua definição, características e sua resolução. Mostraremos a partir da Rotação e da Translação que o quebra-cabeça 4T tem solução e apresentaremos todos os passos para resolvermos este quebra-cabeça.

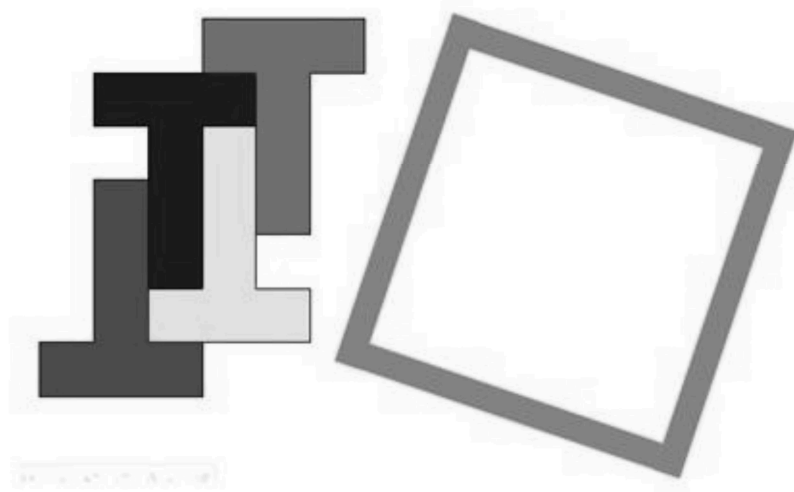
O Quebra-cabeça 4T

O 4T é um quebra-cabeça constituído por uma caixa e quatro peças idênticas. O objetivo é encaixar as quatro peças no interior da caixa e fechá-la. A caixa possui formato quadrangular enquanto que as peças possuem o formato da letra T do alfabeto latino e todas com as mesmas dimensões. A altura do T coincide com a altura da caixa, pois o jogador ao término da montagem precisa fechá-la para que se comprove que as peças foram encaixadas corretamente e que o quebra-cabeça foi resolvido.

3.1 – Sua Resolução

Na figura abaixo apresentamos uma visão plana das peças do quebra-cabeça 4T antes de iniciar o processo de resolução.

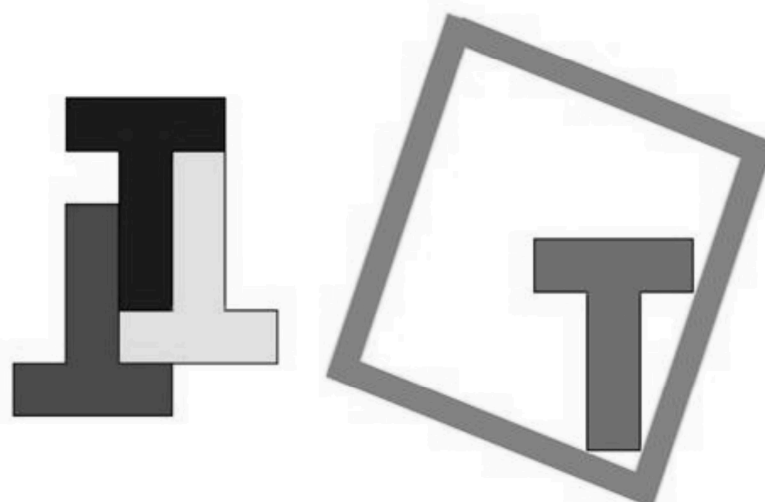
Figura 11- A caixa e as 4 peças no formato de T.



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

De início vamos colocar a primeira peça de modo que o “pé” do T em contato com dois lados da caixa deixem um espaço vazio, espaço esse com o formato de triângulo retângulo e, ao mesmo tempo, o lado direito do T deve estar junto a uma lateral (lado direito) da caixa formando, assim, outro triângulo retângulo, por sua vez, maior que o primeiro triângulo já formado conforme a figura 12.

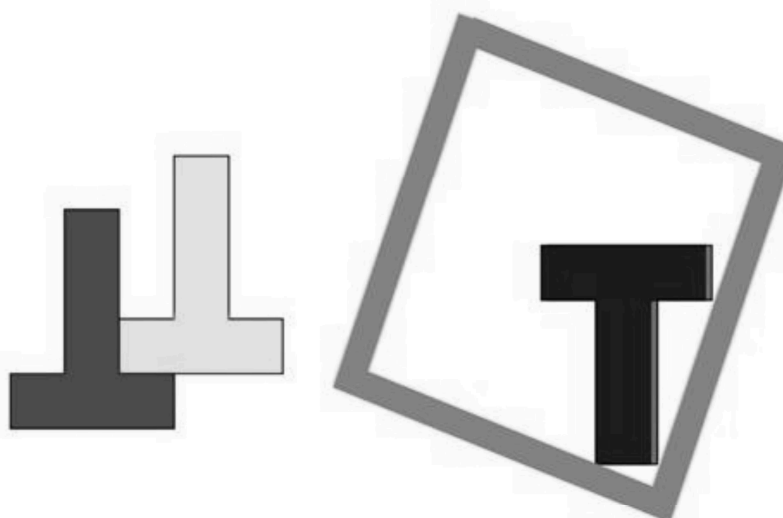
Figura 12- Primeira peça encaixada dentro da caixa.



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

Tendo em vista o estudo das transformações geométricas que fizemos anteriormente, vamos sobrepor a segunda peça na primeira já encaixada, de modo que fique na mesma posição.

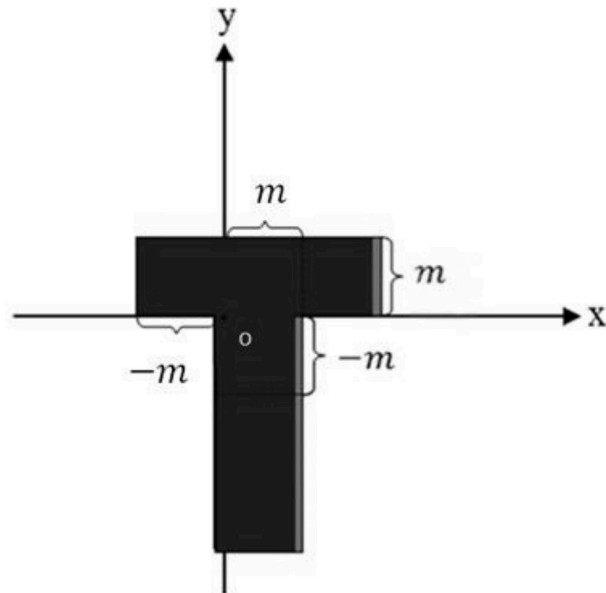
Figura 13 - Segunda peça T sobreposta na primeira.



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

Vamos considerar que estas peças estejam num sistema de coordenadas ortogonais OXY como mostra a figura 14.

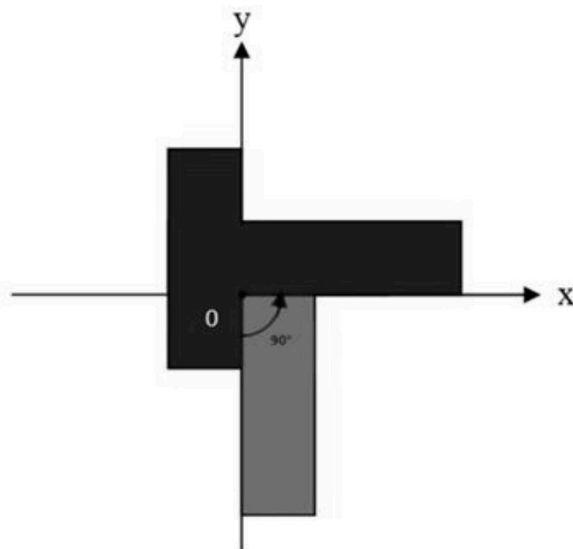
Figura 14 – Eixo ortogonal OXY nas peças postas.



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

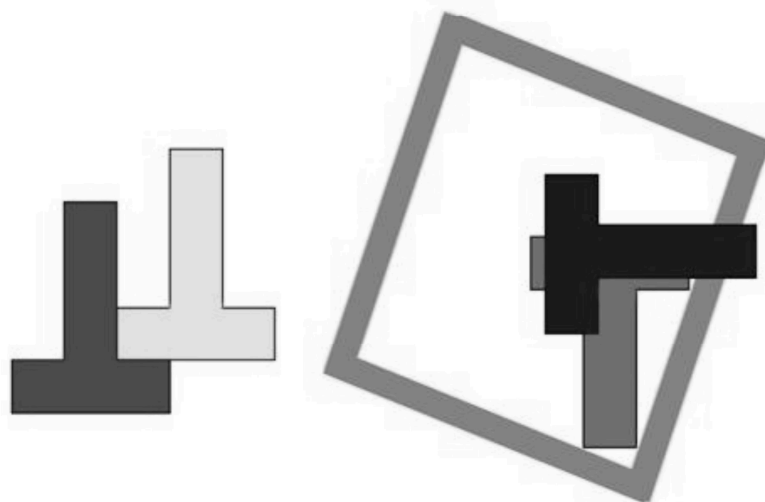
Tomando como referência a primeira peça T vamos rotacionar a peça sobreposta 90° no sentido anti-horário usando conceitos de rotação estudados no capítulo anterior. Observe a figura 15 e a figura 16.

Figura 15 – Rotação de 90° da peça no sistema OXY .



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

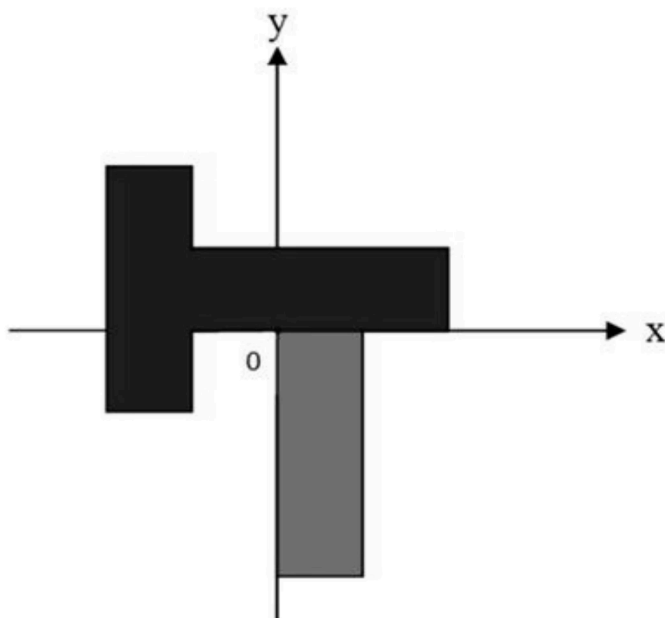
Figura 16 - Rotação de 90° no sentido anti-horário da segunda peça.



Fonte: Dado da pesquisa, 2013.

Conforme visto nas abordagens anteriores a translação determinada pelo vetor u é a transformação $T_u: \pi \rightarrow \pi$ que leva cada ponto B do plano π no ponto $A = B + u$ desse plano. Assim, transladaremos a peça rotacionada m unidades para esquerda no eixo x .

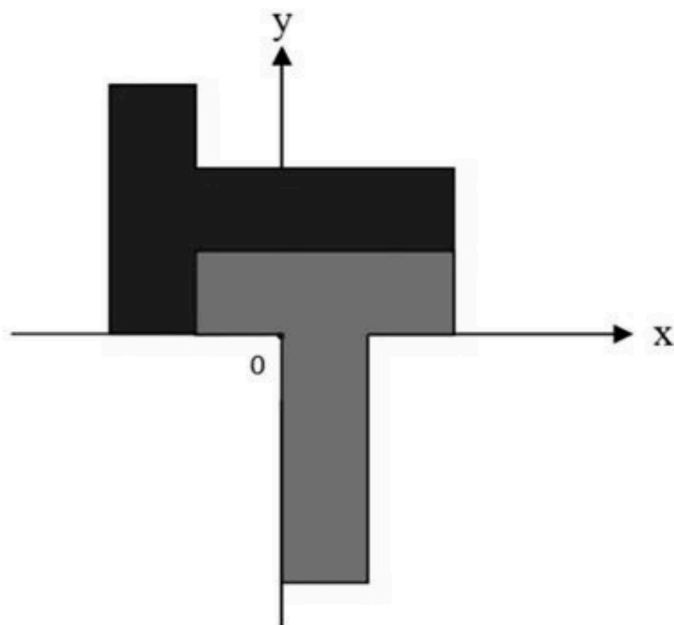
Figura 17 – Translação de m unidades para esquerda no eixo x .



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

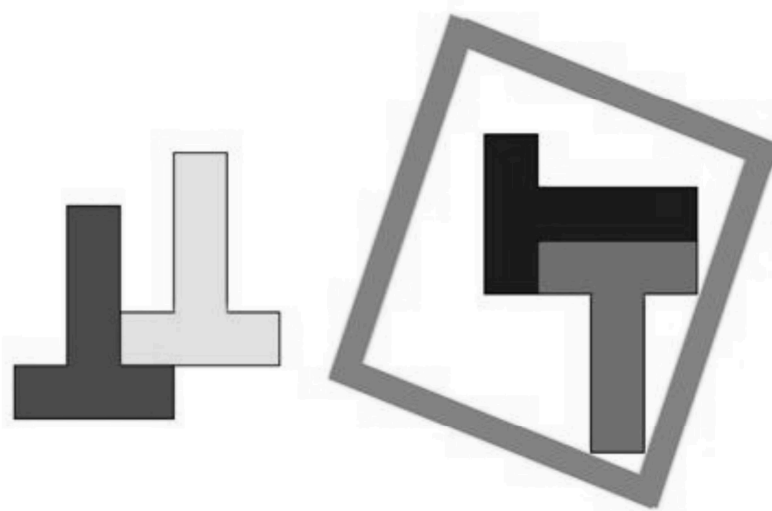
Agora faremos a translação de m unidades para cima no eixo y e conforme mostra as figuras 18.

Figura 18 - Translação de m unidades para cima no eixo y .



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

Figura 19 - Translação da segunda peça de modo a encaixar na primeira peça.

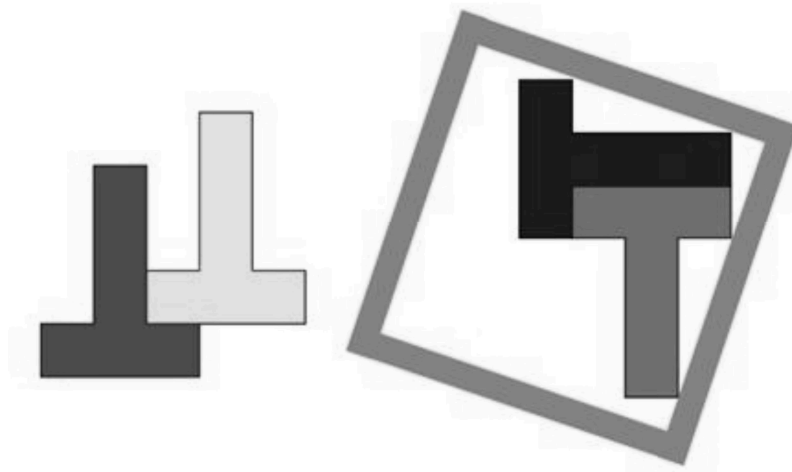


Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

Vamos então transladar as duas peças já colocadas com a finalidade de aumentar o espaço do encaixe das demais, formando assim três triângulos retângulos: o primeiro triângulo com catetos na primeira peça posta (peça verde) e sua hipotenusa está no lado direito da caixa, o segundo triângulo possui catetos no lado direito e no lado superior da caixa e hipotenusa

formada a partir das duas peças, já o terceiro triângulo possui catetos na segunda peça sobreposta (peça azul) e sua hipotenusa está no lado superior da caixa, conforme a figura 20.

Figura 20 - Translação das peças e formação de triângulos.

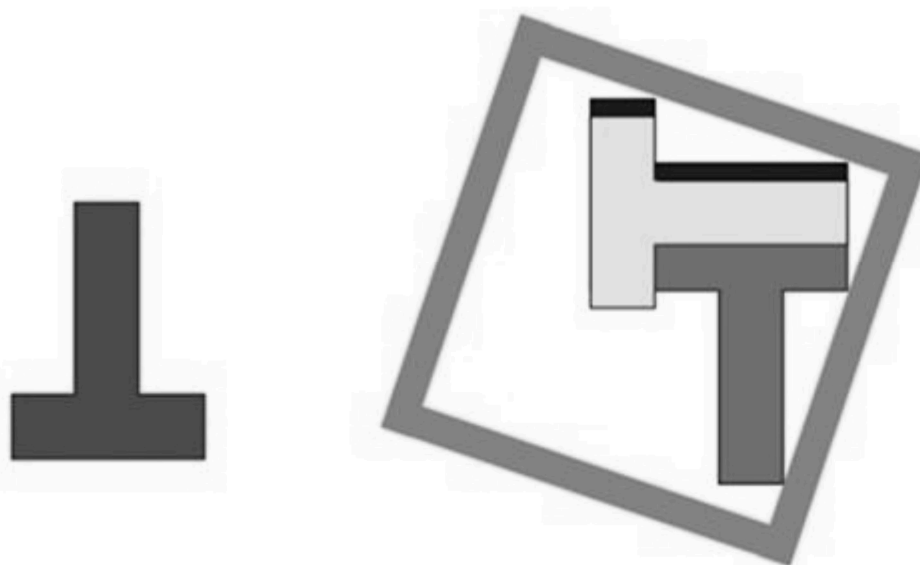


Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

Faremos, então, o mesmo processo de sobrepor, rotacionar e transladar com a terceira peça, isto é:

- Sobreponha a terceira peça na segunda.

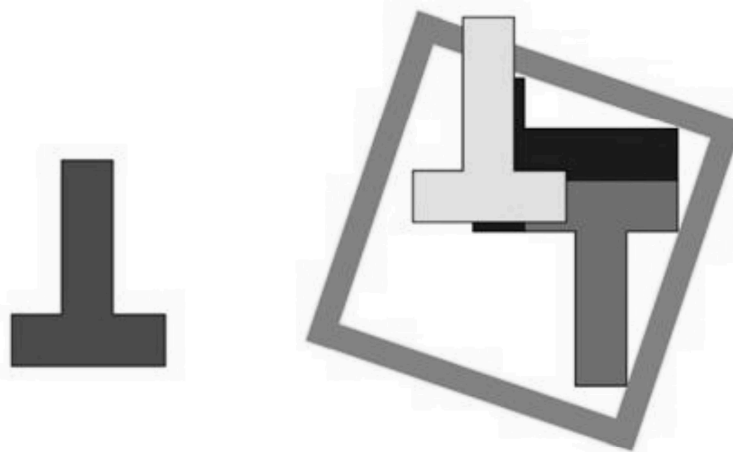
Figura 21 – Terceira peça sobreposta na segunda.



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

- Faça a rotação de 90° no sentido anti-horário.

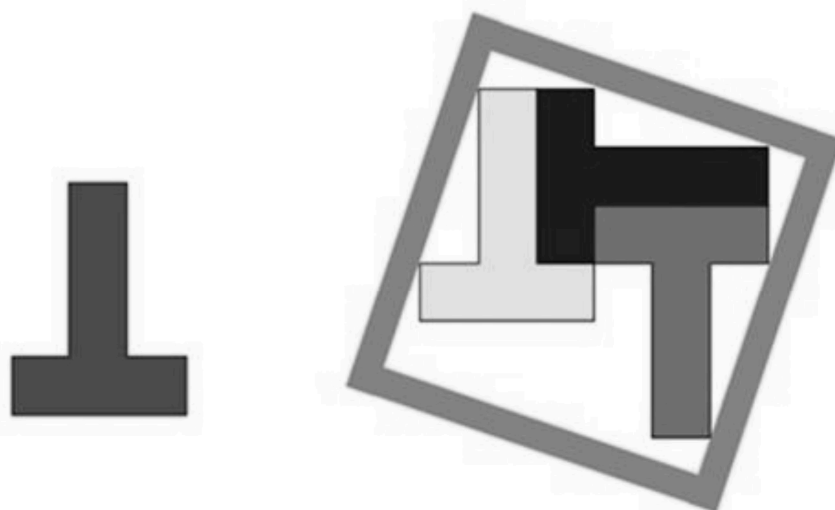
Figura 22 - Rotação de 90° no sentido anti-horário da terceira peça.



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

- Faça a translação para a direita da peça rotacionada.

Figura 23 – Translação da terceira peça de modo a encaixar na segunda peça.



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

O mesmo procedimento será feito para a quarta e última peça.

Figura 24 - Quarta peça sobreposta na terceira peça, rotacionada 90° no sentido anti-horário e transladada de modo a encaixar na terceira peça.



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

Desse modo, podemos observar que ficaram espaços vazios na caixa com formas de triângulos, ou seja, a área da figura que se forma a partir das peças é inferior a área do interior da caixa, conseqüentemente, entende-se que pode haver outras possibilidades de ajustar essas peças no espaço indicado.

Demonstraremos no próximo capítulo que o encaixe das peças realizado anteriormente é válido e que essas peças não podem ser movimentadas dentro da caixa.

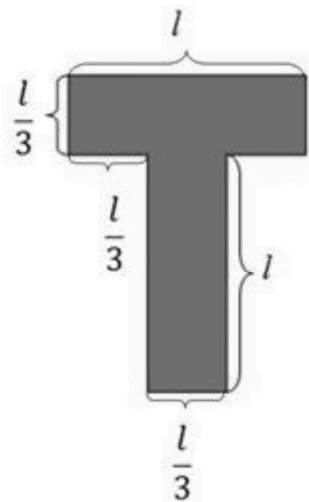
Capítulo 4

Neste capítulo faremos a construção do quebra-cabeça 4T e mostraremos a veracidade das posições do encaixe das peças dentro da caixa. Para realização de nosso estudo descreveremos as peças do quebra-cabeça como figuras planas.

Construindo o 4T

Para construirmos a peça T do quebra-cabeça, vamos considerar suas medidas conforme a **Figura 25**, onde l é um número real.

Figura 25 – Peça T e suas dimensões.



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

Como o quebra-cabeça é constituído por quatro peças T de mesmas medidas, podemos juntá-las como mostra a figura abaixo:

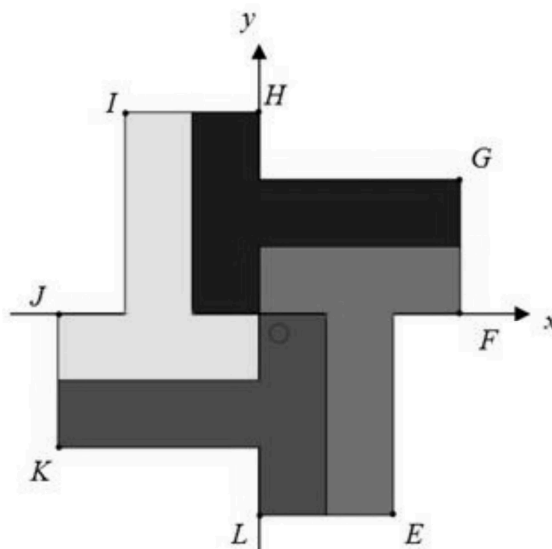
Figura 26 – Encaixe das quatro peças T.



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

A partir da **Figura 26** construiremos um sistema de coordenadas cartesianas OXY onde será possível identificar as coordenadas dos pontos E, F, G, H, I, J, K e L , conforme a **Figura 27**.

Figura 27 – Sistema de coordenadas cartesianas OXY e identificação dos pontos E, F, G, H, I, J, K e L .

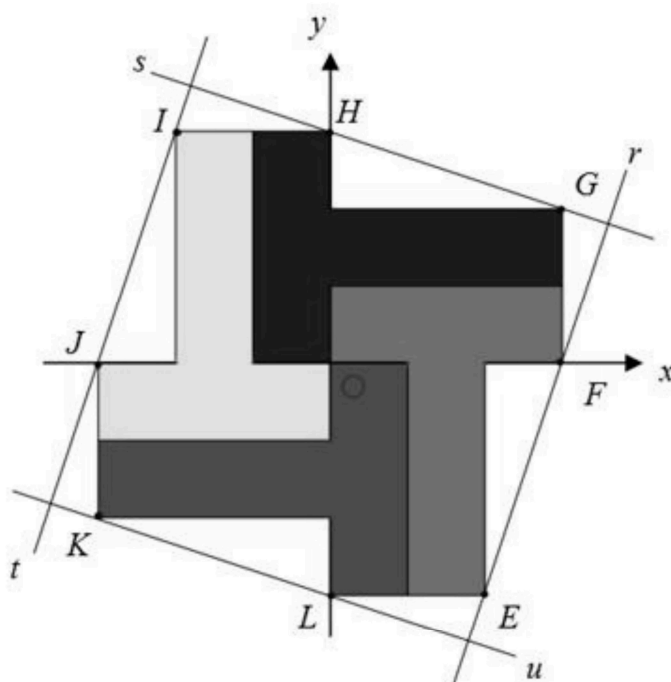


Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

É fácil ver, devido as medidas da peça T, que as coordenadas dos pontos descritos na figura são $E\left(\frac{2l}{3}, -l\right)$, $F(l, 0)$, $G\left(l, \frac{2l}{3}\right)$, $H(0, l)$, $I\left(-\frac{2l}{3}, l\right)$, $J(-l, 0)$, $K\left(-l, -\frac{2l}{3}\right)$ e $L(0, -l)$.

Considere as retas r , s , t e u definidas pelos pontos, respectivamente, E e F , G e H , I e J , K e L . Mostraremos que estas retas definem um *quadrado*.

Figura 28 – Definição das retas r , s , t e u .



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

Sabemos que o coeficiente angular¹ m de uma reta, a qual passa pelos pontos $P(x_0, y_0)$ e $Q(x, y)$, é dado por:

$$m = \frac{y-y_0}{x-x_0}, \text{ com } x \neq x_0. \quad (1)$$

A partir de (1) temos que a equação da reta que passa por $P(x_0, y_0)$ é assim determinada:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0). \quad (2)$$

¹ IEZZI, 2005, p. 62-63.

Vamos utilizar as equações (1) e (2) para determinarmos as equações das retas r, s, t e u . Temos que a reta r é definida pelos pontos $E\left(\frac{2l}{3}, -l\right)$ e $F(l, 0)$, então, utilizando as equações (1) e (2), temos o coeficiente angular e a equação da reta r , respectivamente:

$$m_r = 3 \text{ e } r: 3x - y - 3l = 0.$$

Analogamente, encontramos o coeficiente angular e a equação das outras retas, isto é:

- A reta s , definida pelos pontos $G\left(l, \frac{2l}{3}\right)$ e $H(0, l)$, tem $m_s = -\frac{1}{3}$ e equação $s: x + 3y - 3l = 0$.
- A reta t , definida pelos pontos $I\left(-\frac{2l}{3}, l\right)$ e $J(-l, 0)$, tem coeficiente $m_t = 3$ e equação $t: 3x - y + 3l = 0$.
- A reta u , definida pelos pontos $K\left(-l, -\frac{2l}{3}\right)$ e $L(0, -l)$, tem $m_u = -\frac{1}{3}$ e sua equação é $x + 3y + 3l = 0$.

Podemos afirmar que, se duas retas distintas a e b possuem o mesmo coeficiente angular,

$$m_a = m_b \tag{3}$$

então a reta a é paralela² a reta b , e denotaremos por $a // b$.

Temos ainda que, se

$$m_a \cdot m_b = -1, \tag{4}$$

então a reta a é perpendicular³ a reta b , ou seja, as retas se interceptam e formam um ângulo que mede 90° . Denotaremos por $a \perp b$ para significar a perpendicular a b .

Utilizando as equações (3) e (4)

- $m_r = m_t \Rightarrow r // t$.
- $m_s = m_u \Rightarrow s // u$.
- $m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow r \perp s$.
- $m_s \cdot m_t = -1 \Rightarrow s \perp t$.
- $m_t \cdot m_u = -1 \Rightarrow t \perp u$.

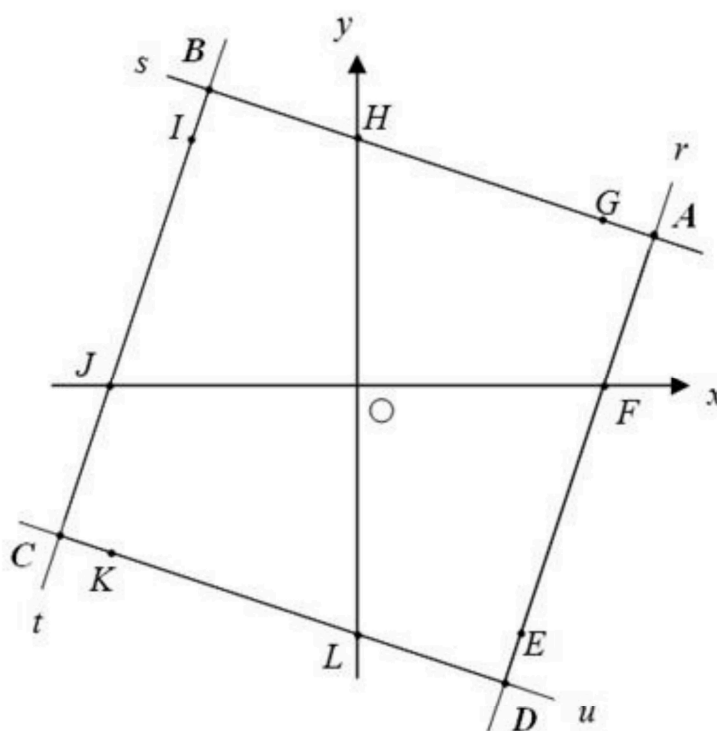
² IEZZI, 2005, p. 67-68.

³ IEZZI, 2005, p. 71-72.

- $m_u \cdot m_r = -1 \Rightarrow u \perp r$.

Portanto, podemos afirmar que a reta r intercepta a reta s no ponto A , as retas s e t se interceptam no ponto B , as retas t e u se interceptam no ponto C , as retas u e r se interceptam no ponto D . Sendo assim, as retas determinam o quadrilátero $ABCD$. Observe:

Figura 29 – Quadrilátero $ABCD$ formado a partir da intersecção das retas r, s, t e u .



Fonte: Dados da pesquisa, 2013.

Vamos agora determinar o comprimento dos lados do quadrilátero $ABCD$ para provar que se trata de um *quadrado*.

Já verificamos que a reta r intercepta a reta s no ponto A . A partir do sistema formado pelas equações das retas, o qual possui apenas as incógnitas x e y , podemos determinar as coordenadas do ponto A . Ou seja, encontramos as coordenadas do ponto A pela resolução de Sistemas de equações⁴. Neste caso resolveremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 3x - y - 3l = 0 \\ x + 3y - 3l = 0 \end{cases}$$

⁴ IEZZI, 2004, p. 128-129.

A solução para este sistema é $A \left(\frac{6l}{5}, \frac{3l}{5} \right)$.

Analogamente, utilizando as equações das retas r, s, t e u , encontramos as coordenadas dos pontos B, C e D . São eles, $B \left(\frac{-3l}{5}, \frac{6l}{5} \right)$, $C \left(\frac{-6l}{5}, \frac{-3l}{5} \right)$ e $D \left(\frac{3l}{5}, \frac{-6l}{5} \right)$.

Conhecendo-se as coordenadas dos pontos A, B, C e D podemos determinar o comprimento dos lados do quadrilátero, isto é, o comprimento dos segmentos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{AC} . Para isso utilizaremos a fórmula⁵ para encontrar a distância entre dois pontos conhecidos P e Q , onde $P(x, y)$ e $Q(x_0, y_0)$:

$$d_{P,Q} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (5)$$

Logo, a partir de (5), podemos afirmar que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AC} = \frac{3l\sqrt{10}}{5}$.

Portanto, como $r // t$, $s // u$, $r \perp s$, $s \perp t$, $t \perp u$, $u \perp r$ e $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AC}$, concluímos que o quadrilátero $ABCD$ é de fato um *quadrado*.

⁵ IEZZI, 2005, p. 6.

Capítulo 5

Nesse capítulo apresentaremos nossas últimas considerações, isto é, traremos em questão os pontos de satisfação que este estudo nos proporcionou e daremos algumas ideias para possíveis estudos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização da presente monografia, que envolveu uma análise da construção e da resolução do quebra-cabeça 4T, contou com a utilização de pesquisas em livros, em artigos e observações na resolução prática do material, com o intuito de compreender conceitos geométricos como translação e rotação e suas aplicações por meio de materiais manipuláveis. Este trabalho visa também promover aos professores de ensino Médio um material que os possibilite enxergar a utilização de mais um recurso pedagógico para suas aulas e a partir dessa pesquisa surgir indagações e futuras pesquisas envolvendo o 4T, bem como outros materiais manipuláveis.

Analizamos a execução do quebra-cabeça e estudamos a sua solução para que tivéssemos um objeto de estudo mais claro, de forma a abrir um leque de possibilidades a nossa frente, de tal modo que esse estudo pode abranger conteúdos da Matemática no nível Fundamental, Médio e Superior, desde que o profissional que o analise esteja apto a entendê-lo.

Estabeleceu-se um diálogo com alguns autores sobre a discussão de como se deve utilizar esse tipo de recurso na sala de aula e suas contribuições no processo de ensino e aprendizagem. Também analisamos conceitos geométricos para fundamentar a construção e a resolução do 4T, provando que a solução aqui estudada realmente é válida.

Ao final deste trabalho não poderíamos deixar de mencionar um ponto merecedor de atenção que deveria ser considerada em pesquisas futuras ou trabalhada por professores em sala de aula, o qual não teve aqui um estudo aprofundado. Ele diz respeito aos conteúdos de área e perímetro de figuras planas e ao estudo de triângulos retângulos, conteúdos estes que notoriamente podem ser abordados através do quebra-cabeça 4T.

O quebra-cabeça 4T por possuir relação direta com os conteúdos já citados tem aspecto pedagógico e instiga os alunos a solucionarem o jogo e entender a relação que há com os conteúdos já estudados. O nosso estudo mostrou que a solução é possível e, ainda

mais, podemos utilizar alguns conteúdos matemáticos para resolver o quebra-cabeça 4T e encontrar a solução, tornando evidente o seu caráter motivador e eficaz no ensino e aprendizagem de vários níveis do ensino .

Por fim, entendemos que a motivação é a chave para uma boa relação entre aluno - professor, aluno – aluno e aluno – escola e, principalmente, a motivação torna o ensino e a aprendizagem dinâmica, prazerosa e eficaz. Isto é, a motivação é extremamente relevante para o sucesso do processo de aprendizagem escolar, pois estar motivado é ter prazer em fazer algo e o prazer é o estímulo da vida.

REFERÊNCIAS

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar 9**. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2005.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar 4**. 7ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar 7**. 5ª ed. São Paulo: Atual, 2005.

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no plano**. 4ª ed. SBM, Rio de Janeiro, 2002.

MUNHOZ, C. I. F; MENEGAZZI, M. **Jogos no ensino da matemática**. Disponível em: <http://guaiba.ulbra.br/seminario/eventos/2008/matematica.html>. Acesso em 30 de novembro de 2013.

ROSA, Sueli M. de S (2011). **A importância da prática do jogo na aprendizagem das quatro operações fundamentais com números naturais**. Disponível em: <http://www.slideshare.net/MItalo/artigo-a-importancia-dos-jogos-na-aprendizagem-matematica-sueli-maria>. Acesso em: 29 de novembro de 2013.

SOUZA, Maria Helena Soares de (2007). **Jogos pedagógicos em matemática no ensino médio: mais que motivação, metodologia**. Disponível em: <http://bibliotecauniversia.net/ficha.do?id=30773493>. Acesso em: 10 de novembro de 2013.

WAGNER, Eduardo. **Construções geométricas**. 2ª ed. SBM: Rio de Janeiro, 1998.