UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

IVSON PRAXEDES DE SOUZA

POLINÔMIOS E APLICAÇÕES

Campina Grande – PB.
2016

IVSON PRAXEDES DE SOUZA

POLINÔMIOS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado à banca examinadora do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, como exigência para obtenção do título de graduado.

Orientadora: Profª. Drª. Maria Isabelle Silva

Campina Grande – PB.
2016

S729p Souza, Ivson Praxedes de.
Polinômios e aplicações [manuscrito] / Ivson Praxedes de Souza. - 2016.
43 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Profa. Dra. Maria Isabelle Silva, Departamento de Matemática".

1. Polinômios. 2. Equações polinomiais. 3. Matemática. I. Título.

21. ed. CDD 515.55

IVSON PRAXEDES DE SOUZA

POLINÔMIOS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado à banca examinadora do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, como exigência para obtenção do título de graduado.

Aprovado em 08/06/2016

BANCA EXAMINADORA:

Maria Isabelle Silva

Profª. Drª. Maria Isabelle Silva
(Orientadora – / UEPB)

Walber Santiago Colaço

Prof. Me. Walber Santiago Colaço
(Examinador – / UEPB)

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Prof. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano
(Examinador – / UEPB)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente ao Senhor Deus, a Ele toda honra e toda glória, pois só tornou-se possível a conclusão deste curso graças a Ele.

A minha mãe que sempre acreditou e me incentivou a estudar.

Aos meus irmãos Iara e Ivaldo, que fazem da nossa união um exemplo a ser seguido.

A minha amada esposa Claudia que me deu todo apoio, carinho e incentivo para realizar este trabalho.

A minha filha Anna Clara que me presenteia todos os dias com seu amor e seu sorriso maravilhoso.

Aos meus amigos de curso Deleon, Niedja Natielle, Ana Paula, Lidiane, Rosilda e Luana que ao longo se mostraram fiéis a nossa amizade.

A professora Drª Isabelle, agradeço imensamente sua dedicação e orientação para realização deste trabalho.

Dedico este trabalho aos meus pais, Israel Praxedes(*in memoriam*) que com sua paciência e sabedoria me deixou ensinamentos que foram fundamentais na minha trajetória de vida e Neci Ferreira que dedicou sua vida na criação e formação dos seus filhos.

RESUMO

Considerada por muitos “a rainha das ciências” a matemática encanta a humanidade a milhares de anos, mesmo numa época em que a escrita não existia, sua história ficou documentada em papiros e em registros cuneiformes. Porém muitos têm dificuldade em fazer a associação entre a matemática e as situações cotidianas, onde é comum escutarmos “para que serve isso”.

Neste trabalho trataremos dos polinômios, contando uma breve história deles, mostrando seu surgimento e seus principais precursores na luta para descobrir suas resoluções. Tratamos das operações e propriedades dos polinômios, assim como de teoremas relacionados ao tema. Por fim, mostramos aplicações em áreas diversas como indústria, economia e biomedicina.

PALAVRAS CHAVE: Polinômios, equações polinomiais, aplicações de polinômios.

ABSTRACT:

Considered by many "the queen of the sciences" mathematics enchants mankind for thousands of years, even at a time when the writing did not exist, his story was documented on papyrus and cuneiform records. But many have difficulty making the link between mathematics and everyday situations, where it is common to hear "that serves it."

In this work we will deal polynomials, telling a brief history of them, showing its appearance and its main precursors in the fight to find out its resolutions. We handle the operations and properties of polynomials, and theorems related to the topic. Finally, we show applications in areas such as industry, economy and biomedicine.

KEY WORDS: Polynomials, polynomial equations, polynomials applications.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O presente trabalho trata dos polinômios e algumas aplicações. Ao estudarmos sua história, suas definições e aplicações faz-se necessário considerar que tais categorias não são atemporais. Devem ser entendidas como produzidas historicamente, resultantes do tempo e do espaço vivenciados pelos matemáticos que dimensionaram suas pesquisas para este aspecto da matemática. A este respeito grandes matemáticos se relacionam quanto à história dos polinômios, Muhammad Ibri Musa Al-khwakizmi que é considerado fundador da álgebra após suas publicações do tratado sobre o cálculo de Al Jabr, onde a palavra álgebra é uma evolução do termo Al Jabr. Bhaskara destacou-se na segunda metade da idade média, sendo considerado o último matemático medieval importante da Índia, em seu tratado o Lilavati apresenta problemas envolvendo equações do 2º grau, devido a isso ficou conhecido como sendo dele a fórmula para encontrar as raízes em uma equação polinomial do 2º grau em função dos coeficientes.

Em metade do século XV um movimento sócio cultural surgia na Europa, conhecida como renascença, no qual surgiram grandes intelectuais em diversas áreas. Na matemática destacamos Scipione Ferro que conseguiu uma resolução para a equação do 3º grau, Niccolo Tartaglia que ao ser desafiado por Antino Maria Fiori a uma sabatina envolvendo trinta problemas conseguiu também chegar a uma resolução da equação do 3º grau e Girolano Cardano, médico, astrônomo e matemático italiano que conseguiu de Tartaglia a resolução da equação do 3º grau, mais tarde descobriu que Ferro também havia demonstrado antes de Tartaglia e a publicou em seu livro (Ars Magna) que o tornou famoso em todo mundo. Cardano possuía um brilhante discípulo Ludovico Ferrari, que com seu incentivo demostrou a fórmula para resolução da equação de 4º grau.

Podemos destacar também as contribuições, séculos depois das publicações de Cardano os matemáticos Paolo Ruffini, Niels Henrik Abel e Evariste Galois para demostrar que não há resolução por radicais das equações de grau maior que cinco.

O objetivo deste trabalho é tratar de algumas aplicações dos polinômios que estão presentes em diversas situações do nosso cotidiano. A metodologia empregada foi a pesquisa bibliográfica.

Este trabalho está dividido em três capítulos. Inicialmente apresentaremos um resumo da parte histórica dos polinômios, desde seu surgimento nas antigas civilizações (Egípcias e Mesopotâmicas), documentados em papiros e em registros cuneiformes, relatando também a contribuição dos gregos com seus métodos geométricos e dos árabes com seus métodos aritméticos.

No segundo capítulo abordamos a definição de polinômios e suas aplicações, propriedades e teoremas, procurando exemplificar e demonstrar de uma forma onde o leitor possa compreender cada subitem.

No terceiro capítulo mostramos a importância dos polinômios no cotidiano, onde foram citados aplicações em campos variados da ciência como a física, a biomedicina, a economia e sua utilização também na indústria.

CAPÍTULO 1 A HISTÓRIA DOS POLINÔMIOS

Normalmente, quando pensamos em história da matemática, surge logo em nossa mente a época das antigas civilizações, principalmente a egípcia e mesopotâmica. Porém se imaginarmos que a noção matemática mais simples é o processo de contagem verificou que tudo começou pelo homem muito antes de haver escrita ou civilização.

Inicialmente o homem desenvolveu a necessidade de comparar conjuntos de objetos e estabelecer entre eles uma correspondência um a um. Por exemplo, um pastor podia ter noção de seu rebanho ao comparar suas ovelhas com os dedos de suas mãos. Partes do corpo como dedos das mãos ou dos pés, funcionavam como instrumentos naturais de contagem. Pedregulhos, conchas ou grãos, marcas no chão ou na areia, em ossos ou madeira, poderiam ser empregados para qualificar o número de pessoas em uma população ou animais em um rebanho, por exemplo, o modo como os dedos são usados na contagem é um fato histórico. Alguns povos fecham os dedos das mãos ao contar, enquanto outros as abrem. Considerando as evidências de que o processo de contagem iniciou com os dedos, infere-se que a maneira de usá-las foi determinante na escolha das bases para os sistemas numéricos.

O surgimento das civilizações teve início primeiramente em vales de rios, como no Egito, Mesopotâmia, Índia e China. Porém os registros cronológicos das civilizações nos vales dos rios Indo e Yang-Tse não merecem confiança, mas informações razoavelmente seguras sobre os povos que viveram ao longo do rio Nilo e no crescente fértil dos rios Tigre e Eufrates merecem maior credibilidade.

Cerca de 4.000 anos A.C. tanto os egípcios como os mesopotâmicos possuíam uma forma primitiva de escrita, no qual, os primitivos registrados psicografados, evoluíram com o passar do tempo para uma ordem linear de símbolos mais simples.

Na mesopotâmia usava-se como suporte para suas escritas placas de argila que eram marcadas com estilete e em seguida eram cozidas ou secas ao sol para aumentar sua durabilidade. Esse tipo de escrita chama-se uniforme (da palavra latina *cuneus*, cunha), por causa das formas dos sinais.

Devido à forma que foram confeccionados os documentos cuneiformes tinham grande durabilidade, por isso muitos milhares de tabletes sobreviveram ate nossos dias de hoje.

Vários dos registros sobre a civilização egípcia chegaram ao nossos dias em papiros. O papiro era produzido cortando-se em finas tirar a parte interna do caule da planta de mesmo nome, planta esta abundante no Vale do rio Nilo. Essas tiras eram sobrepostas e cruzadas para em seguida serem prensadas, formando folhas, formavam uma longa fita que depois era colocada em um rolo.

Dentre os inúmeros papiros egípcios encontrados, certa quantidade trazia conteúdo matemático, destes, dois se destacaram um deles o papiro de AHMES, considerado o mais extenso papiro encontrado de natureza matemática, consiste em um rolo de 0,30m de altura e 5,00m de comprimento, também há quem o considere o mais célebre papiro matemático. Ficou conhecido como papiro de Rhind, por ter sido comprado em 1858 numa cidade a beira do Nilo, por um antiquário escocês chamado Herry Rhind. Hoje encontram-se no British Museum, exceto uns poucos fragmentos que estão no Brooklyn Museum.

Figura 1: papiro de Rhind

O outro papiro egípcio de valioso conteúdo matemático é o chamado papiro de Moscou, adquirido pelo russo Vladimir Golemishchev no final do século XIX.

Portanto, a história das equações polinominais é muito antiga, sendo o problema de encontrar as raízes de uma equação algébrica, isto é, de um polinômio, alvo de estudo de muitas pessoas há muito tempo, como veremos a seguir:

Equações Lineares: As equações lineares correspondem as equações do 1º grau, ou seja:

$$ax + b = 0$$

No papiro de Ahmes, o problema 24, pede o valor de “aha”, se “aha” e um sétimo de “aha” é 19. Escrevendo na forma moderna temos:

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

Equações Quadráticas: São as equações do 2º grau, conhecidas pelos babilônios desde 1.700 a.C., onde conheciam regras de resolução sob forma de problemas, como por exemplo, o de achar dois números conhecendo sua soma s e o seu produto *p.* Esses números são as raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$ e, na realidade, achar as raízes de qualquer equação do 2º grau equivale a resolver um problema desse tipo.

Os gregos aperfeiçoaram esse conhecimento demonstrando tais regras e conseguindo, pela utilização de processos geométricos, obter raízes irracionais (representadas por certos segmentos de retas), mesmo numa época em que os números irracionais não eram ainda conhecidos.

Por volta de (714-775) foi construída a cidade de Bagdá pelo califa Abu Jafaral Masur, no qual se tornaria a capital oriental do império Árabe. Muito interessado em filosofia e Astronomia, Masur fundou em seu palácio uma biblioteca, que ficaria conhecida como “Casa da Sabedoria”.

Um dos mais notáveis estudiosos vinculado a essa academia foi o matemático e astrônomo Muhammad Ibn Musa Al khwarizmi (780-850). Duas de suas obras exerceram uma influência decisiva nos rumos tomados pela matemática. A primeira delas é o tratado de aritmética intitulado Livro de Adição e Subtração Segundo o Cálculo dos Indianos. Nessa obra, fez uma exposição bastante completa dos números hindus, ao que tudo indica baseou-se numa tradução árabe do tratado de 628 de Brahmagupta, matemático que viveu na Índia Central. Daí nosso sistema numérico para os inteiros ser chamado indo-arábico, para indicar sua origem provável na Índia e sua transmissão através dos árabes.

A Segunda obra foi o tratado sobre o cálculo da Al-jabr e Al-muqabalah. Esse é considerado o fundador da álgebra como área do conhecimento matemático sendo a palavra álgebra uma evolução do termo Al-jabr.

Os três últimos capítulos desta obra abrangem sucessivamente os casos clássicos de equações quadráticas com três termos; (1) quadrados e raízes iguais a números, (2) quadrados e números iguais a raízes, e (3) raízes e números, iguais a quadrados. As soluções são dadas por regras elementares para "completar o quadrado", aplicadas a exemplos específicos. Uma maneira da álgebra retórica de Al-khwazizmi está no quadro abaixo:

• "Um quadrado é igual a cinco raízes. A raiz do quadrado então é 5, e 25 forma o seu quadrado que é claro, é igual a 5 raizes" O texto apresenta a equação $x^2 = 5x$, sua raiz $x = 5$ e afirma que $x^2 = 25$. • 'Um quadrado e dez raízes são iguais a 39 unidades" A frase faz referencia à equação $x^2 + 10x + 39$.
Al-Khwarizmi reduziu as equações de segundo grau a seis tipos canônicos:
• $ax^2 = bx$ (quadrado igual a uma raiz); • $ax^2 = c$ (quadrado igual a um numero); • $bx = c$ (raiz igual a um numero); • $ax^2 + bx = c$ (quadrado e raiz igual a um numero); • $ax^2 + c = bx$ (quadrado e número igual a uma raiz); • $bx + c = ax^2$ (raiz e numero igual a um quadrado).

Figura 2: Quadro

Na segunda metade da idade Média a Índia produziu muitos matemáticos entre eles Bhaskara (1114-1185). Sendo considerado o último matemático medieval importante da Índia, e sua obra representa a culminação de contribuições hindus anteriores. Em seu tratado mais conhecido, o Lilavati, ele completou problemas de Brahmagupta acrescentando novas observações, além de apresentar numerosos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus, como equações lineares e quadráticas, tanto determinadas quanto indeterminadas. Devido a isso, apresentam-se as raízes de uma equação polinominal de grau dois em função dos coeficientes, como sendo a fórmula de Bhaskara.

Em meados do século XV iniciou-se na Europa o movimento sócio-cultural denominado Renascença, movimento que caracterizou-se por uma renovação do interesse pelas coisas do espírito, na Itália ele se destacou, onde surgiram gênios nas artes plásticas, literatura arquitetos e ciências entre os quais destacamos Leonardo da Vinci, Colombo, Michelangelo e os matemáticos Scipione Ferro, Girolano Cardano, Niccoló Tartaglia, Ludovico Ferrari e Galileu Galilei.

Em 1494, um renomado professor de matemática chamado Frei Luca Pacioli, escreveu o livro “Summa de Aritmética e Geometria’’, nele Pacioli chama a incógnita que chamamos x era “a coisa”, x^2 era “censo”, x^3 era “cubo” e x^4 era “censo censo”. Ele afirmou neste livro que não havia regra geral para a solução de problemas do tipo “cubo e coisa igual a número”, ou seja $x^3 + px = q$.

A história nos mostra que um matemático não acreditou em Pacioli, Scipione Ferro teve a glória de resolver a equação do 3º grau, problema esse que já se perdurava por 3 mil anos. Ferro porém, nunca publicou sua solução, apenas comunicou o segredo a duas pessoas, seus discípulos Annibale Della Nave e Antino Maria Fiore. A descoberta provavelmente ocorreu em 1515 e em 1535 Fiore teve a infelicidade de desafiar Tartaglia para uma disputa matemática esse duelos intelectuais eram freqüentes na época.

Para o duelo cada participante propôs trinta questões para que o outro resolvesse num intervalo de tempo. Tartaglia professor de matemática em Veneza elaborou problemas variados enquanto Fiore apenas sobre equação do 3º grau. Este fato o instigou, pois pelas questões desafiadas por Fiore deduziu que uma fórmula devia existir. Foi o que ocorreu, Tartaglia encontrou a fórmula para resolução equação do 3º grau e consequentemente derrotou Fiore resolvendo todas as questões propostas enquanto seu adversário nada conseguiu resolver.

Girolano Cardano era médico, astrônomo, matemático e filósofo que vivia em Milão, onde consegui melhorar vários assuntos tratados pelo Frei Luca Pacioli, sonhava em publicar um livro de álgebra. Ao saber do triunfo de Tartaglia sobre Fiore e sabendo da sua condição financeira precária utilizou todos os meios para atraí-lo a sua casa, onde mediante promessa de segredo obteve dele, em 1539, a regra para resolver a equação $x^3 + px = q$ sem revelar a prova.

De posse desta resolução, Cardano que tinha um brilhante discípulo, Ludovico Ferrari, não só conseguiu demonstrar a fórmula para equação do 3º grau como incentivou Ferrari que obteve a solução por radicais da equação do quarto grau. Em 1542, Cardano e Ferrari em visita a Bolonha tiveram acesso aos manuscritos deixados por Ferro entre os quais continham a solução da equação $x^3 + px = q$. Este fato deixou Cardano desobrigado de cumprir seu juramento, pois acabará de descobrir que o feito realizado por Ferro havia trinta anos. Então, em 1545, Cardano a publicou em seu grande livro “Ars Magna”, que o tornou famoso em todo mundo. O próximo desafio para os matemáticos seria encontrar uma solução para equação do 5º grau.

Passado dois séculos e meio de tentativas frustradas, surge a desconfiança de que não haveria resolução por meio de radicais para equações de grau maior ou igual a 5. Paolo Ruffini, médico e matemático italiano, confirmou essa impossibilidade para equações de grau igual a 5 e publicou, mas os argumentos foram considerados muito vagos, do ponto de vista matemático.

Euler tentou reduzir a quíntica a uma quártica, para poder resolvê-la, mais falhou em sua tentativa.

Lagrange, analisando todos os métodos de resolução para equações de 2º, 3º e 4º graus, numa tentativa de observar como os métodos funcionavam e como poderiam ser generalizados. Porém ele também não teve êxito.

A primeira prova válida, de que uma equação geral de 5° grau não é solúvel por radicais, foi dada num artigo, escrito pelo jovem norueguês Niels Henrik Abel em 1824.

Abel mostrou que algumas equações de 5º grau eram solúveis por radicais e que algumas equações como,$x^5 - 1 = 0$ são resolvidas facilmente, tendo x = 1 como uma raiz e as outras quatro raízes podem ser encontradas por extração de raiz quadrada.

Abel levantou a questão "Quais equações de grau maior que quatro podem ser resolvidas por radicais?". Ele morreu em 1829, aos 27 anos de idade, sem resolver o problema por ele levantado.

Após Abel, um grande matemático francês chamado Evariste Galois, contribuiu com a importante Teoria dos Grupos, da qual deduz-se a impossibilidade de resolução por radicais as equações de grau maior que quatro.

CAPÍTULO 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 POLINÔMIOS COMPLEXOS

Uma função *P*: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função polinomial complexa quando existem números complexos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tais que:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

para todo $x \in \mathbb{C}$.

Os números $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ são chamados coeficientes. As parcelas $a_0, a_1 x, a_2 x^2\ \ldots, a_n x^n$ são chamadas termos do polinômio p.

2.1.1 Valor Numérico

Dados o número complexo α e o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, chama-se valor numérico de p em α a imagem de α pela função p, logo:

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0$$

Exemplo 1: Dado o polinômio $p(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$, calculando seu valor numérico para $x = 2$.

Temos,

$p(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$, logo:

$p(2) = (2)^3 + 2(2)^2 + 5(2) + 3$

$p(2) = 8 + 2 \cdot 4 + 10 + 3$

$p(2) = 29$

2.1.2 Raiz de um Polinômio

Se o valor numérico de um polinômio $p(x)$ para $x = \alpha$ é $p(\alpha) = 0$, dizemos que α é uma raiz do polinômio $p(x)$.

Exemplo 2: Verifiquemos que o termo $(1 + i)$ é uma raiz do polinômio $p(x) = x^2 - 2x + 2$.

$p(1 + i) = (1 + i)^2 - 2(1 + i) + 2$
$p(1 + i) = 1 + 2i + i^2 - 2 - 2i + 2$
$p(1 + i) = 0$

Logo, $(1 + i)$ é raiz do polinômio $p(x)$.

2.1.3 Identidade - Polinômios Idênticos

Definição1: Dizemos que dois polinômios p e q são iguais (ou idênticos) quando os valores números de p e de q são iguais para todo valor da variável. Neste caso, indicamos:

$$p \equiv q.$$

Temos então que:

$$p \equiv q \Leftrightarrow p(x) = q(x), \forall x \in \mathbb{C}$$

Demonstração: Dados dois polinômios, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$.

Observamos que, se $p(x) = q(x)$ para todo valor x, então decorre:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$,
$\forall x \in \mathbb{C}$, ou ainda:
$(a_n - b_n) x^n + (a_{n-1} - b_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (a_2 - b_2) x^2 + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0) = 0$,
$\forall x \in \mathbb{C}$.

Portanto o polinômio do primeiro membro desta última igualdade deve ser identicamente nulo, o que ocorre para:

$$a_n - b_n = 0, a_{n-1} - b_{n-1} = 0, \dots , a_2 - b_2 = 0, a_1 - b_1 = 0 \; e \;\; a_0 - b_0 = 0$$

Podemos concluir então que:

$$p = q \Leftrightarrow (a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \dots , a_2 = b_2, a_1 = b_1 e \;\; a_0 = b_0)$$

2.1.4 Polinômio Nulo

Um polinômio p é nulo (ou identicamente nulo) se, e somente se, todos os coeficientes de p forem nulos. Sendo $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, temos:

$$p = 0 \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$$

Demonstração: É imediato que $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$ acarreta:

$$p(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x^2 + 0x + 0, \forall x \in \mathbb{C}.$$

Se p é nulo, então existem $n+1$ números complexos $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots , \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0,$ distintos dois a dois, que são raízes de p, isto é:

$$p(\alpha_0) = a_n {\alpha_0}^n + a_{n-1} {\alpha_0}^{n-1} + \cdots + a_2 {\alpha_0}^2 + a_1 \alpha_0 + a_0 = 0$$
$$p(\alpha_1) = a_n {\alpha_1}^n + a_{n-1} {\alpha_1}^{n-1} + \cdots + a_2 {\alpha_1}^2 + a_1 \alpha_1 + a_0 = 0$$
$$p(\alpha_2) = a_n {\alpha_2}^n + a_{n-1} {\alpha_2}^{n-1} + \cdots + a_2 {\alpha_2}^2 + a_1 \alpha_2 + a_0 = 0$$
$$\vdots$$
$$p(\alpha_n) = a_n {\alpha_n}^n + a_{n-1} {\alpha_n}^{n-1} + \cdots + a_2 {\alpha_n}^2 + a_1 \alpha_n + a_0 = 0$$

Assim estamos diante de um sistema linear homogêneo do tipo $(n+1) \times (n+1)$ cujas incógnitas são $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$. Logo o determinante deste sistema é:

$$D = \begin{vmatrix} {\alpha_0}^n & {\alpha_0}^{n-1} & \cdots & {\alpha_0}^2 & \alpha_0 & 1 \\ {\alpha_1}^n & {\alpha_1}^{n-1} & \cdots & {\alpha_1}^2 & \alpha_1 & 1 \\ {\alpha_2}^n & {\alpha_2}^{n-1} & \cdots & {\alpha_2}^2 & \alpha_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {\alpha_n}^n & {\alpha_n}^{n-1} & \cdots & {\alpha_n}^2 & \alpha_n & 1 \end{vmatrix}$$

não nulo, por tratar-se do determinante de uma matriz de Vandermond e cujos elementos característicos são $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$, todos distintos, o sistema tem uma única solução, que é a solução trivial:

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = a_1 = a_0 = 0.$$

2.1.5 Grau de um Polinômio

Definição 2: Dado um polinômio p(x) com pelo menos um termo de coeficiente não nulo, o grau de p é o maior dos expoentes da variável x dos termos com coeficientes não nulos. Representa-se o grau de p por ∂p.

Se p tem todos os coeficientes nulos, não se define o grau.

Exemplo 3:

i) $f(x) = 6x^4 + 2x^3 + 5x^2 - x + 7 \Rightarrow \partial f = 4$

ii) $g(x) = -5x^3 + 2x - 1 \Rightarrow \partial g = 3$

2.2 OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

2.2.1 Adição

Dados dois polinômios:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a$$
$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b$$

Chama-se soma de p com q o polinômio

$$(p+q)(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Exemplo 4: Somando-se $p(x) = x^3 + 2x + 1$com$q(x) = x^2 - 7x + 2$. Teremos,

$$p(x) = x^3 + 2x + 1$$
$$q(x) = x^2 - 7x + 2$$

Então:

$$(p+q)(x) = (1+0)x^3 + (0+2)x^2 + (2-7)x + (1+2) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$$

2.2.1.1 Propriedades da Adição

Quaisquer que seja os polinômios p, q e r, temos que:

i) Associativa: $p + (q + r) = (p + q) + r$
ii) Comutativa: $p + q = q + p$,
iii) Existência de elemento neutro: $p + 0 = p,$ onde 0 indica o polinômio identicamente nulo.
iv) Existência de inverso aditivo: Existe o inverso de p, indicado por $-p$ tal que $p\ + (-p) = 0$

2.2.1.2 Grau da Soma

Teorema 1: Se $p\ e\ q$ são polinômios não nulos, então o grau de $p + q$ é tal que:

$$\partial(p+q) \leq máx(\partial p, \partial q)$$

Demonstração: Se $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$,$q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$,$\partial p = m$ e $\partial q = n$, com $m \neq n$.

Admitamos sem perda de generalidade que $m > n$.

Assim, sendo $c_i = a_i + b_i$, temos:

$$c_m = a_m + b_m = a_m + 0 = a_m \neq 0, e$$

$$c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0\ \forall\ i > m.$$

Portanto, $\partial(p+q) = m = máx(\partial p, \partial q)$

Se admitirmos $m = n$, temos:

$$c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0\ \forall\ i > m.$$

$$c_m = a_m + b_m.$$

Pode ser nulo, então:

$$\partial(p+q) \leq máx(\partial p, \partial q)$$

2.2.2 Subtração de Polinômios

Tendo em vista a propriedade existência de inverso aditivo, podemos definir a diferença $p - q$ de dois polinômios da seguinte maneira, sejam:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a$$
$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b$$

Definimos a diferença entre p eq como o polinômio $p - q = p + (-q)$, isto é:

$$(p-q)(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

2.2.3 Multiplicação de Polinômios

Dados dois polinômios:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

Existe um único polinômio f tal que $f(x)$ é igual a $p(x).q(x)$ para todo $x \in \mathbb{C}$:

$$(pq)(x) = (a_nb_m)x^{n+m} + (a_nb_{m-1} + a_{n-1}b_m)x^{n+m-1} + \cdots + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_0b_0)$$

Notemos que o produto $p \cdot q$ é o polinômio:

$$f(x) = c_{m+n}x^{m+n} + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0$$

Exemplo 5: Dados os polinômios $p(x) = 2x^2 + 3x$ e$q(x) = x^2 - 7x$, calculemos o produto entre eles.

$$p(x) \cdot q(x) = (2x^2 + 3x) \cdot (x^2 - 7x) = 2x^4 - 14x^3 + 3x^3 - 21x^2$$
$$p(x) \cdot q(x) = 2x^4 - 11x^3 - 21x^2$$

2.2.3.1 Propriedades da Multiplicação

Quaisquer que sejam os polinômios p, q e r. Temos que:

i) Associativa: $p.(q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$
ii) Comutativa: $p \cdot q = q \cdot p$
iii) Distributiva: $p \cdot (q + r) = pq + pr$

2.2.3.2 Grau do Produto

Teorema 2: se $p\ e\ q$ são dois polinômios não nulos, então o grau de $p.q$ é igual a soma dos graus de $p\ e\ q$, isto é:

$$\partial(p \cdot q) = \partial p + \partial q$$

Demonstração: Se $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$,$q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$,$\partial p = m$ e $\partial q = n$, seja $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$ um coeficiente qualquer de $(pq)(x)$.

Temos:

$$c_{m+n} = a_m \cdot b_n \neq 0$$
$$c_k = 0, \forall\ k > m + n \text{ então,}$$
$$\partial(p \cdot q) = m + n = \partial p + \partial q$$

Exemplo 6:

i) Sejam os polinômios $p(x) = 3x^2 - 5x + 2$ e$q(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1$. Temos:

$$\partial(p \cdot q) = \partial p + \partial q$$
$$\partial(p \cdot q) = 2 + 4$$
$$\partial(p \cdot q) = 6$$

2.2.4 Divisão de Polinômios

Dados dois polinômios $p\,(dividendo)$ e $s \neq 0\,(divisor)$, dividir p por s é determinar dois outros polinômios $q\ (quociente)$ e $r(resto)$ de modo que verifiquem se as seguintes condições:

i) $q \cdot s + r = p$;

ii) $\partial r < \partial s$ (ou $r = 0$, caso em que a divisão é chamada exata).

Exemplo 7: Dividindo $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$ por $s(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$. Obtemos, quociente $= x$ e resto $= -4x^2 + 8x + 2$, que satisfazem as duas condições:

i) $q \cdot s + r = (x)(3x^3 - 2x^2 + 4x - 1) + (-4x^2 + 8x + 2) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$;

ii) $\partial r = 2\ e\ \partial s = 3\ \Rightarrow \partial r < \partial s$.

Exemplo 8: Dividindo $p(x) = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$ por $s(x) = x - 2$, obtemos quociente: $5x^2 + 11x + 12$ e resto: 0, logo verificamos novamente as duas condições:

i) $q \cdot s + r = (5x^3 + x^2 - 10x - 24)(x - 2) + 0 = p$;

ii) $r = 0$.

Quando isto acontece, a divisão é exata, dizemos então que p é divisível por s.

2.2.4.1. Método dos coeficientes a determinar

Este método, também conhecido como método de Descartes, baseia-se nos seguintes fatos:

i) $\partial q = \partial p - \partial s$, o que é consequência da definição, pois:

$qs + r = p \Rightarrow \partial(qs + r) = \partial p$ e então $\partial q + \partial s = \partial p$

ii) $\partial p < \partial s$, (ou $r = 0$).

Na aplicação deste método, deve-se seguir os seguintes passos:

1. Calculam-se $\partial q \; e \; \partial s$;
2. Constroem-se os polinômios q er, deixando incógnitos os seus coeficientes;
3. Determinam-se os coeficientes impondo a igualdade $q \cdot s + r = p$

Exemplo 9: Dividindo $p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 4$ por $s(x) = x^3 + 1$, obteremos:

$\partial p = 4$ e $\partial s = 3 \Rightarrow \partial(q) = 4 - 3 = 1 \Rightarrow q = ax + b$

$\partial(r) < 3 \Rightarrow \partial(r) \leq 2 \Rightarrow r = cd = x^2 + dx + e$

$q \cdot s + r \Rightarrow (ax + b)(x^3 + 1) + cx^2 + dx + e = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$

Desenvolvendo, temos para todo x:

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + (a + d)x + (b + e) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$

Logo:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ a + d = 4 \Rightarrow 1 + d = 4 \Rightarrow d = 3 \\ b + e = 5 \Rightarrow 2 + e = 5 \Rightarrow e = 3 \end{cases}$$

Portanto, $q = ax + b \Rightarrow q = x + b$ e$r = cx^2 + dx + e$

$\Rightarrow r = 3x^2 + 3x + 3$

2.2.4.2 Existência e unicidade do quociente e do resto

Teorema 3: Dados os polinômios:

$$f = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \; (a_m \neq 0)$$

$$e$$

$$g = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \; (n \neq 0)$$

Existem um único polinômio q e um único polinômio r tais que:

$$q \cdot s + r = p \text{ e } \partial r < \partial s \; ou \; (r = 0).$$

Demonstração:

a) Existência

1º grupo de operações: vamos formar o monômio $\frac{a_m}{b_n} \cdot x^{m-n}$ e construir o polinômio

$$r_1 = f - (q_0 x^{m-n})g \qquad (1)$$

chamado 1º resto parcial. Notemos que:

$$r_1 = (a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots) - \frac{a_m}{b_n} \cdot x^{m-n} \cdot (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots)$$

o que prova o cancelamento de $a_m x^m$ (pelo menos); portanto $\partial r_1 = \alpha < m$.

Para maior comodidade, façamos:

$$r_1 = c_\alpha x^\alpha + c_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + c_{\alpha-2}x^{\alpha-2} + \cdots + c_1 x + c_0$$

2º grupo de operações: vamos formar o monômio $\frac{c_\alpha}{b_n} \cdot x^{\alpha-n} = q_1 x^{\alpha-n}$ e construir o polinômio:

$$r_2 = r_1 - (q_1 x^{\alpha-n})g \qquad (2)$$

chamado 2º resto parcial. Notemos que:

$$r_2 = (c_\alpha x^\alpha + c_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + c_{\alpha-2}x^{\alpha-2} + \cdots) - \frac{c_\alpha}{b_n} \cdot x^{\alpha-n} \cdot (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots)$$

o que prova que o cancelamento de $c_\alpha x^\alpha$ (pelo menos); portanto, $\partial r_2 = \beta < \alpha$.

Para maior comodidade, façamos:

$$r_2 = d_\beta x^\beta + d_{\beta-1}x^{\beta-1} + d_{\beta-2}x^{\beta-2} + \cdots + d_1 x + d_0$$

3º Grupo de operações: vamos formar o monômio $\frac{d_\beta}{b_n} x^{\beta-m} = q_2 x^{\beta-m}$ e construir o polinômio:

$$r_3 = r_2 - \left(q_2 x^{\beta-n}\right)g \qquad (3)$$

chamado 3º resto parcial. Notemos que:

$$r_3 = (d_\beta x^\beta + d_{\beta-1}x^{\beta-1} + \cdots) - \frac{d_\beta}{b_n} x^{\beta-m} \cdot\cdot (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots)$$

o que prova o cancelamento de $d_\beta x^\beta$ (pelo menos); portanto, $\partial r_3 = \gamma < \beta$. Para maior comodidade, façamos:

$$r_3 = (e_\gamma x^\gamma + e_{\gamma-1}x^{\gamma-1} + e_{\gamma-2}x^{\gamma-2} + \cdots + e_1 x + e_0$$

4º grupo em diante: analogamente.

Notamos que, em cada grupo de operações, o grau do resto parcial diminui ao menos uma unidade, concluímos que, após certo número p de operações, resulta um resto parcial r_p de grau inferior ao de g (ou então $r_p = 0$) e,

$$r_p = r_{p-1} - \left(q_{p-q}x^{e-n}\right)g \qquad (4).$$

Vamos adicionar membro a membro as igualdades de (1) a (p):

(1) $r_1 = f - (q_0x^{m-n})g$

(2) $r_2 = r_1 - (q_1x^{\alpha-n})g$

(3) $r_3 = r_2 - \left(q_2x^{\beta-n}\right)g$

… … … … … … … … … … …

(p) $r_p = r_{p-1} - \left(q_{p-q}x^{e-n}\right)g$

$$\underbrace{r_p}_{r} = f - \left(\underbrace{q_0x^{m-n} + q_1x^{\alpha-n} + q_2x^{\beta-n} + \cdots + q_{p-q}x^{e-n}}_{q}\right)g$$

E então $f = qg + r$ com $\partial r < \partial g$ $(ou\, r = 0)$.

b) Unicidade

Admitamos a existência de dois quocientes q_1 e q_2 e dois restos r_1 e r_2 na divisão de f por g, isto é:

$$\begin{array}{l|l} f & g \\ \hline r_1 & q_1 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{l|l} f & g \\ \hline r_2 & q_2 \end{array}$$

e provemos que $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$.

Pela definição de divisão, temos:

$$\begin{cases} q_1g + r_1 = f \\ q_2g + r_2 = f \end{cases} \Rightarrow\ q_1g + r_1 = q_2g + r_2 \Rightarrow (q_1 - q_2)\, g = r_2 - r_1$$

Se $q_1 \neq q_2$ ou $r_1 \neq r_2$, provemos que a igualdade $(q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$ não se verifica:

$$\begin{cases} \partial[(q_1 - q_2)g] = \partial(q_1 - q_2) + \partial g \geq \partial g \\ \partial(r_2 - r_1) \leq máx\{\partial r_2, \partial r_1\} < \partial g \end{cases} \Rightarrow \partial[(q_1 - q_2)g] \neq \partial(r_2 - r_1)$$

Então, para evitar a contradição, devemos ter que $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$.

2.2.4.3 Método da Chave

Devido à existência do quociente e do resto verificado no Teorema anterior, descobrimos como construir esses dois polinômios a partir de p e s.

Podemos representar essa divisão da seguinte maneira:

$$\begin{array}{llll} dividendo \longleftarrow p & \underline{|\ s\quad} & \longrightarrow & divisor \\ resto \qquad \longleftarrow r & \ q & \longrightarrow & quociente \end{array}$$

Exemplo 10: Dados os polinômios $p = x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 7$ e $s = x^2 - x + 2$.

Solução: Dividimos o 1º termo de *p* pelo 1º termo de s, e obtemos o 1º termo de q: $\frac{x^5}{x^2} = x^3$.

Então, multiplicamos o quociente obtido por todos os termos de s e colocamos os resultados obtidos, com o "sinal trocado", abaixo dos termos semelhantes de p. Em seguida, adicionamos os termos semelhantes.

$$\begin{array}{l|l} x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & x^2 - x + 2 \\ \cline{2-2} -x^5 + x^4 - 2x^3 & \qquad x^3 \\ \cline{1-1} \qquad -3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & \end{array}$$

Verificamos que $\partial(r) > \partial(s)$, então, repetimos o passo anterior até $gr(r) < gr(s)$ ou $r = 0$.

$$\begin{array}{l|l} x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & x^2 - x + 2 \\ \cline{2-2} -x^5 + x^4 - 2x^3 & x^3 - 3x^2 - 5x + 4 \\ \cline{1-1} \quad -3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & \\ \quad\ \ 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad -5x^3 + 9x^2 + 0x - 7 & \end{array}$$

$$5x^3 - 5x^2 + 10x$$

$$4x^2 + 10x - 7$$
$$4x^2 + 4x - 8$$

$$14x - 15$$

Como $\partial(r) < \partial(s)$, a divisão está finalizada, logo, temos:

$$q = x^3 - 3x^2 - 5x + 4$$
$$r = 14x - 15$$

2.2.4.4 Divisão de um polinômio por $x - a$

O caso mais importante de divisão de polinômios é aquele em que o divisor é da forma $x - a$. Sempre que um número a é identificado como uma raiz de um polinômio $p(x)$ podemos concluir que $p(x)$ é divisível por $x - a$.

Este é um caso particular de divisão de polinômios em que o dividendo é um polinômio maior que ou igual a 1, e o divisor é um polinômio de grau 1 do tipo $x - a$, com $a \in \mathbb{C}$.

Sabemos que o grau do resto tem que ser menor que o grau do divisor. Como o grau do divisor, neste caso, é igual a 1, temos que o grau do resto é igual a 0 e, nesse caso, o polinômio r é constante, ou $r(x) = 0$. Assim o resto é um número complexo r, independente da variável x.

Exemplo 11: Dividindo-se $p = x^3 - 2x^2 - 3x^3 + 5 \ por \ h(x) = x - 3,$ utilizando o método da chave, temos:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 - 3x^3 + 5 & x - 3 \\ \cline{2-2} -x^3 + 3x^2 & x^2 + x \\ \hline \qquad x^2 - 3x + 5 & \\ \qquad -x^2 + 3x & \\ \hline \qquad\qquad 5 & \end{array}$$

2.2.4.5 Teorema do resto

Teorema 4: O resto da divisão de um polinômio p por um binômio do tipo $x - a$, com $a \in \mathbb{C}$, é igual a $p(a)$, isto é, $r = p(a)$.

Demonstração:

De acordo com a definição de divisão, temos: $p = (x - a) \cdot q + r$, sendo q o quociente e r o resto.

Como $x - a$ tem grau 1, o grau do resto é 0 ou o resto é nulo. Portanto, r é um polinômio constante. Então podemos escrever a igualdade acima da seguinte forma:

$$p = (x - a) \cdot q + r$$

Calculando $p(a)$:

$$p(a) = (a - a) \cdot q + r$$

Logo, o resto r da divisão é igual a $p(a)$.

Exemplo 12: O resto da divisão $p = x^3 + 5x^2 + 7$ por$s = x - 2$ é:

A raiz do divisor é: $x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$

E o resto r é: $p(2) - 2^3 + 5(2)^2 + 7 = 8 + 20 + 7 = 35$

2.2.4.6 Teorema de D'Alembert

Um polinômio p é divisível por $x - a$ se, e somente se, a é raiz de p.

$$(x - a) \Leftrightarrow p(a) = 0.$$

Exemplo 13: Verificando que $p = 2x^4 - x^2 + 3x - 162$ é divisível por $x - 3$. Temos:

$$p(x) = 2(3)^4 - 3^2 + 3 \cdot 3 - 162$$
$$= 2 \cdot 81 - 9 + 9 - 162 = 0$$

Logo, p é divisível por $x - 3$.

2.2.4.7Algoritmo Briot-Ruffini

Existe uma maneira de dividir um polinômio por um binômio do tipo $(x - a)$, conhecida como algoritmo de Briot-Ruffini.

Esse dispositivo trabalha somente com os coeficientes de um polinômio p e as raízes do divisor, um binômio $x - a$.

Dados os polinômios:

$$p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
$$s = x - a$$

Façamos:

$$q = q_{n-1} x^{n-1} + q_{n-2} x^{n-2} + \cdots + q_2 x^2 + q_1 x + q_0$$

Aplicando o método de coeficientes a determinar, temos:

$$\left.\begin{array}{r} q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \cdots + q_2x^2 + q_1x + q_0 \\ x - a \end{array}\right\} x$$

$$\begin{array}{r} q_{n-1}x^n + q_{n-2}x^{n-1} + \cdots + q_2x^3 + q_1x^2 + q_0x \\ -aq_{n-1}x^{n-1} + \cdots + (q_2 - aq_3)x^3 + (q_1 - aq_2)x^2 + (q_0 - aq_1)x - aq_0 \end{array}$$

Impondo a condição $q \cdot (x - a) + r = p$, resultam as igualdades:

$$q_{n-1} = a_n$$
$$q_{n-2} - a \cdot q_{n-1} = a_{n-1} \Longrightarrow q_{n-2} = a_{n-1} + a \cdot q_{n-1}$$
$$\vdots$$
$$q_1 - aq_2 = a_2 \Longrightarrow q_1 = a_2 + aq_2$$
$$q_0 - aq_1 = a_1 \Longrightarrow q_0 = a_1 + aq_1$$
$$r - aq_0 = a_0 \Longrightarrow r = a_0 + aq_0$$

Os cálculos para obter q er indicados acima tornam-se mais rápidos com a aplicação do dispositivo de Briot-Ruffini.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_2	a_1	a_0
a	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	…	b_1	b_0	r

Exemplo 14: Dividir $x^3 + 3x^2 - 2x - 5$ por $x - 2$ utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini, obtemos:

	1	3	-2	-5
2		$2x1 + 3 =$	$2x5 + (-2) =$	$2x8 + (-5) =$
	1	5	8	11

O quociente é $q(x) = x^2 + 5x + 8$ e o resto é $r(x) = 11$.

2.3 EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Denominamos equação polinomial ou equação algébrica de grau n a equação:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

onde o primeiro membro é um polinômio $p(x)$ de grau n $(a_n \neq 0)$. Os coeficientes de $p(x)$ são também chamados coeficientes da equação. Em particular, a_n é chamado coeficiente dominante e a_0 chamado termo independente.

Exemplo 15:

a. $3x + 2 = 0$ (equação do 1º grau);
b. $x^2 + 4x + 8 = 0$ (equação do 2º grau);
c. $x^3 - 3x^2 + x - 7 = 0$ (equação do 3º grau);

2.3.1 Raiz de uma equação

O número complexo a é denominado raiz ou zero da equação $\Leftrightarrow p(a) = 0$.

Exemplo 16: A equação $x^2 - 7x + 10 = 0$ admite $x = 5$ como raiz.

$$p(5) = 5^2 - 7 \times 5 + 10 = 0$$

$$25 - 35 + 10 = 0$$

2.3.2 Conjunto solução

Chama-se conjunto solução (ou conjunto verdade) de uma equação polinomial em $\mathbb{C}$ o conjunto S cujos elementos são as raízes complexas da equação.

Exemplo 17: Resolver a equação $x^3 + x = 0$ em $\mathbb{C}$.

$x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (x = 0\ ou\ x^2 + 1 = 0)$
De $x^2 + 1 = 0$ vem $x^2 = -1$, logo $x = \pm i$.
Portanto, o conjunto solução em $\mathbb{C}$ é $S = \{0, i, -i\}$.

2.3.2 Equações equivalentes

Dizemos que duas equações polinomiais são equivalentes quando apresentam o mesmo conjunto solução.

Exemplo 18: As equações $x^3 + x = 0$ e $x = 0$ são equivalentes em $\mathbb{R}$ (a única raiz real de ambas é 0). Porém, não são equivalentes em $\mathbb{C}$ (pois a primeira equação apresenta também as raízes $(i, -i)$ e a segunda não).

2.3.3 Teorema Fundamental da Álgebra

Todo polinômio complexo de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa. Embora de fundamental importância para a Álgebra, este Teorema é um Teorema de Análise, e sua demonstração é baseada na continuidade das funções polinomiais complexas.

2.3.4 Teorema da decomposição

Todo polinômio composto $p(x)$ de grau n pode ser fatorado na forma $p(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$, onde c é um número complexo e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as raízes complexas de $p(x)$(possivelmente repetidas). Com exceção da ordem dos fatores, tal decomposição é única.

2.3.5 Multiplicidade de uma raiz

Ao resolvermos uma equação, podemos obter raízes iguais ou diferentes entre si. Dizemos que r é raiz de multiplicidade $m(m \geq 1)$ da equação $p(x) = 0$ se, e somente se,

$$P = (x - r)^m \cdot Q \ e \ Q(r) \neq 0$$

Portanto, se ré raiz de multiplicidade m de$P(x) = 0$, quando o polinômio P é divisível por $(x - r)^m$ e não é divisível por $(x - r)^{m+1}$, ou seja, a decomposição de P apresenta exatamente m fatores igual a $(x - r)$.

Exemplo 19: A equação $x^4 - 11x^3 + 42x^2 - 68x + 40 = 0$ admite as raízes 2 e 5 com multiplicidade 3 e 1, respectivamente, e, embora a equação seja do $4º$ grau, seu conjunto-solução tem só dois elementos $S = \{2, 5\}$.

2.3.6 Relações entre coeficientes e raízes

Dados um polinômio: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, e consideremos suas raízes complexas (não necessariamente distintas) x_1, $x_2, \ldots$ x_n. Como foi visto, $P(x)$ pode ser escrito na forma:

$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Desenvolvendo o produto teremos 2^n termos, correspondente a escolha de um dos dois possíveis termos ("x" ou "$- x_i$") em cada fator. Grupandoos termos semelhantes, podemos exprimir os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ de $p(x)$ em termos das suas raízes x_1, $x_2, \ldots$ x_n.

Iniciando com o termo em x^n, que é formado tomando a parcela "x", em todos os fatores e que é, portanto, igual a cx^n.

Após, formamos o termo em x^{n-1}, obtido escolhendo-se "x" em cada fator exceto em um deles.

$$c(-x_1 - x_2 \ldots - x_n)x^{n-1} = -c(x_1 + x_2 + \cdots x_n)x^{n-1} = -cS, x^{n-1}$$

Onde S, denota a soma das raízes de P.

A seguir, formaremos o termo x^{n-2}, que é igual a:

$$c\big((-x_1)(-x_2) + (-x_2)(-x_3) + \cdots (-x_{n-1})(-x_n)\big)x^{n-2} =$$

$$= -c(x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots x_{n-1} x_n)x^{n-2} = cS_2 x^{n-2}$$

Onde S_2 é a soma dos produtos das raízes de $P(x)$, tomada duas a duas. De modo qual, o termo em x^{m-k} envolve produto de k fatores da forma $(-x_1)(-x_2)\dots(-x_k)$ e é igual a

$$C(-1)^k S_k x^{m-k}$$

Onde S_k é a soma dos produtos das raízes de P, tomados k a k.

Em particular, o termo independente a_0 é dado por:

$$C(-1)^n S_n$$

Onde S_n é o produto de todas as raízes de P. Resumindo a discussão acima, o desenvolvimento de:

$$c(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

Fornece:

$$p(x) = cx^n - cS_1x^{n-1} + cS_2x^{n-2} + \cdots + c(-1)^k S_k x^{n-k} + \cdots + c(-1)^n S_n.$$

Igualando os termos nesse desenvolvimento aos correspondentes em:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Temos condições de relacionar os coeficientes de um polinômio as somas de produtos de suas raízes. A comparação dos termos de mais alto grau fornece $c = a^n$ e, a partir daí, teremos:

$$S_1 = -\frac{a_{n-1}}{C} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$S_2 = -\frac{a_{n-2}}{C} = -\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$S_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{C} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$S_n = (-1)^n \frac{a_0}{C} = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Estas relações nos permitem obter relações entre as raízes de uma equação mesmo sem resolvê-las, permitem também que seja formada, uma equação, a partir de suas raízes.

Exemplo 20: Calculando-se a soma e o produto das raízes da equação $x^3 + 7x^2 - 3x + 5 = 0$.

Pela equação temos: $a_n = 1$, $a_{n-1} = 7$, $a_{n-2} = -3$ e $a_0 = 5$

Assim, obtemos as seguintes relações:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{7}{1} = -7$$

$$S_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = -1 \cdot \frac{5}{1} = -5$$

CAPÍTULO 3

3.1 APLICAÇÕES

Neste capítulo, temos como objetivo mostrar algumas aplicações dos polinômios em nosso cotidiano. Os polinômios são utilizados em diversas áreas como a engenharia, a física, a economia, a criptografia, a biomedicina, a economia entre outras ciências.

Na engenharia, sempre que um engenheiro vai dimensionar um sistema de abastecimento d'água, para uma população futura de uma cidade, deve-se estimar essa população daqui a 20 ou 30 anos. Baseando-se em dados de anos anteriores podemos chegar a uma equação polinomial do crescimento populacional. Na física, no lançamento de um projétil, a trajetória é uma parábola do 2º grau. Em cinemática a aplicação das leis de Newton a um dado sistema quase sempre leva a um sistema polinomial. Na criptografia, sistemas criptográficos baseados em multivariáveis quadráticas utilizam como base o problema, que consiste em resolver um sistema de equações polinomiais multivariáveis quadráticas sobre um corpo finito.

A seguir mostraremos exemplos de aplicações de polinômio no cotidiano.

Aplicação 1:

Um posto de combustível vende 10000 litros de gasolina por dia a R$ 3,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Considerando x o valor em centavos, do desconto dado do preço de cada litro, e V o valor em reais arrecado por com venda da gasolina por dia. Portanto, existe uma expressão que relaciona o valor do desconto x e o valor arrecado V.

Solução:

Pelo enunciado, concluímos que a quantidade de gasolina vendida por dia é:

$$q(x) = 1000 + x \cdot 100$$

Assim, o valor arrecadado por dia é:

$$V = \left(3{,}5 - \frac{x}{100}\right) \cdot q(x)$$

$$V = \left(3{,}5 - \frac{x}{100}\right) \cdot (100x + 10000)$$

$$V = 350x + 35000 - x^2 - 100x$$

$$V = 35000 + 150x - x^2.$$

Aplicação 2:

Para armazenar certo produto, uma indústria deseja confeccionar caixas em forma de cilindro reto ao custo de R$12,00 a unidade. Essas caixas devem ter $1m^3$ de volume e o preço do material empregado em sua confecção é de R$ 2,00 o metro quadrado (m²). Qual deve ser a equação que relaciona o raio em função do custo.

Solução:

Sejam, Área da base: $A_b = \pi r^2$

Volume: $V = \pi r^2 h$

$1 = \pi r^2 h$

$h = \frac{1}{\pi r^2}$

Área Lateral: $A_l = 2\pi r h$

$A_l = 2\pi r . \frac{1}{\pi r^2} = \frac{2}{r}$

Calculando o custo (C) da caixa em função de r:

$$C(r) = (2A_b + A_l) . 2$$

$$C(r) = 4\pi r^2 + \frac{4}{r}$$

$$C(r) = \frac{4\pi r^3 + 4}{r}$$

Como o custo de cada caixa deve ser de R$12,00, segue que:

$$\frac{4\pi r^3 + 4}{r} = 12$$

$$4\pi r^3 + 4 = 12r$$

$$4\pi r^3 - 12r + 4 = 0$$

Portanto, $4\pi r^3 - 12r + 4 = 0$ é a equação desejada.

Aplicação 3:

O desenvolvimento da gestação de uma determinada criança, que nasceu com 40 semanas, era de 50,6 cm de altura e com 3446 gramas de massa, foi modelado, a partir da 20° semana, aproximadamente pelas funções matemáticas: $h(t) = 1{,}5t - 9{,}4$ e $p(t) = 3{,}8t^2 - 72t + 246$, em que t indica o tempo em semanas, $t \geq 20, h(t)$ a altura em centímetros e $p(t)$ a massa em gramas. Admitindo p modelo matemático, determine quantas gramas tinha o feto quando sua altura era 35,6 cm.

Solução:

Temos que:

- A altura do feto representado pela equação,

$$h(t) = 1{,}5t - 9{,}4 \qquad (1)$$

- E o peso do feto representado pela equação,

$$p(t) = 3{,}8t^2 - 72t + 246 \qquad (2)$$

Como $h(t) = 35{,}6\ cm$, substituindo na equação (1) obtemos:

$$35{,}6 = 1{,}5t - 9{,}4$$

$$1{,}5t = 35{,}6 + 9{,}4$$

$$1{,}5t = 45$$

$$t = 30$$

Logo, o feto possuía 30 semanas.

Assim, ao substituir o tempo de 30 semanas na equação (2) encontra-se o peso do feto. Segue que:

$$p(30) = 3{,}8 \cdot 30^2 - 72 \cdot 30 + 246$$

$$p(30) = 3{,}8 \cdot 900 - 2160 + 246$$

$$p(30) = 3420 - 2160 + 246$$

$$p(30) = 1506.$$

Portanto, o peso do feto após 30 semanas é de 1506 gramas.

Aplicação 4:

Consideremos o sangue arterial com sua maior concentração de O_2 ligado à hemoglobina. Para o sangue humano sua velocidade é um pouco inferior à do sangue venoso, em média $\eta = 0{,}027$ poise (de Dien et al., 1970, Pág. 558). O sangue flui através de uma arteríola (capilar arterial largo) de comprimento $l = 2\ cm$ e raio $R = 8x10^3\ cm$.

Solução:

Pela formula de Poiseuille, temos que a velocidade pode ser expresso por:

$$v = \frac{P}{4\eta l} \cdot (R^2 - r^2).$$

Assim,

como a diferença de pressão entre as extremidades é de $P = 4x10^3\,\frac{dina}{cm^{-2}}$ (3mm de mércurio, e substituindo os valores na equação acima temos:

$$v = \frac{4x10^3}{4 \cdot 0{,}027 \cdot 2}(64x10^{-6} - r^2)(cm\ s^{-1}) \rightarrow v = 1{,}185 - (1{,}85x10^4)r^2(cm\ s^{-1}).$$

Aplicação 5:

Cortando-se quadrados de lado de $4\ cm$ nos cantos de uma folha quadrada de papelão de $18\ cm$ e dobrando formamos uma caixa sem tampa cujo volume é igual a $400\ cm^3$. Existe algum outro valor do lado do quadrado a ser recortado em cada canto para o qual o volume da caixa resultante também seja igual a $400\ cm^3$.

Solução:

Calculando o volume caixa temos:

$$V = A_b \cdot h$$

$$V = (18 - 2x)^2 \cdot x$$

$$V = (324 - 72x + 4x^2) \cdot x$$

$$V = 4x^3 - 72x + 324x.$$

Sendo $400\ cm^3$ o volume desejado para caixa, temos:

$$400 = 4x^3 - 72x^2 + 324x$$
$$4x^3 - 72x^2 + 324x - 400 = 0.$$

Dividindo por 4 em ambos os membros na equação acima temos:

$$x^3 - 18x^2 + 81x - 100 = 0$$

Do enunciado, sabemos que $x = 4$ é uma raiz da equação, então:

$x^3 - 18x^2 + 81x - 100 = 0$ é divisível por $(x - 4)$.

Usando o dispositivo de Briot-Ruffino, temos:

4	1	- 18	81	- 100
	1	- 14	25	0

Daí, temos: $x^3 - 18x^2 + 81x - 100 = (x - 4)(x^2 - 14x + 25)$.

Logo, as raízes de $x^2 - 14x + 25 = 0$ são:

$$x_1 = \frac{14 + \sqrt{196 - 100}}{2} = \frac{14 + \sqrt{96}}{2} = \frac{14 + 4\sqrt{6}}{2} = 7 + 2\sqrt{6}$$

$$x_2 = \frac{14 - \sqrt{196 - 100}}{2} = \frac{14 - \sqrt{96}}{2} = \frac{14 - 4\sqrt{6}}{2} = 7 - 2\sqrt{6}$$

Logo, as raízes da equação são:

$x_1 = 7 + 2\sqrt{6}$ e $x_2 = 7 - 2\sqrt{6}$.

Como o lado x do quadrado recortado deve ser menor que a metade do lado do quadrado maior, então $7 + 2\sqrt{6}$ não é aceitável, assim $7 - 2\sqrt{6}$ aproximadamente (4,55 cm) é solução do problema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho de conclusão de curso abordamos o assunto: Polinômios e suas aplicações. Primeiramente destacamos a história dos polinômios no capítulo 1. Logo após, mostramos suas definições, operações e teoremas, todos seguidos de exemplos. Finalmente no capítulo 3, mostramos um pouco de como os polinômios são utilizados em diversas áreas.

Procuramos abordar os assuntos de forma a facilitar a compreensão do conteúdo.

Este trabalho veio enriquecer meus conhecimentos, tornando-me um admirador cada vez maior desta ciência que enche a nossa mente de sonhos com histórias magníficas de gênios que deram suas vidas pela matemática.

REFERÊNCIAS

BATSCHELET, Edward. **Introdução à matemática para biocientistas**. Rio de Janeiro-RJ, Editora Interciência LTDA. São Paulo-SP, Editora da universidade de São Paulo, 1978

BOYER, Carl, B. **História da Matemática**. 2ª Ed. Traduzida. São Paulo: EdgardBlücher Ltda., 1996.

DANTE, Luiz Roberto, **Matemática contexto &Aplicações**. 2. Ed. Editora Ática, 2003.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. Tradução HygynoH.Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar v.6 Complexos**, Polinômios,
Equações, 6ª Ed. São Paulo: Atual, 1993.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.(Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio**, vol. 3. Rio de Janeiro, SBM, 2010.

MACHADO, Antônio dos Santos.**Geometria Analítica e polinômios**. São Paulo. Editora Atual, 1988.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática.** Belo Horizonte. CAED-UFMG, 2013.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia, 3. Ensino Médio.** São Paulo. Editora Scipcione. 2011.

Meio Eletrônico:

FANTIN, Silas. Um passeio histórico pelas resoluções de equações algébricas de graus 2 e 3. Disponível em: http://www.revista.vestibular.uerj.br/artigo/artigo.php?seq_artigo=8. Acesso em: 22/02/2016.