



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

CORDA CÓSMICA EM TEORIAS
 $f(R)$

ALMIR DANTAS DE SOUZA

CAMPINA GRANDE - PB
2016

ALMIR DANTAS DE SOUZA

CORDA CÓSMICA EM TEORIAS $f(R)$

Monografia referente a disciplina Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), como registro de conclusão de curso, requisito à obtenção do título de Licenciatura Plena em Física pela Universidade Estadual da Paraíba, sob a orientação do professor Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva.

Área de concentração: Física.

CAMPINA GRANDE - PB
OUTUBRO - 2016

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S729c Souza, Almir Dantas de.
Corda cósmica em teorias $f(R)$ [manuscrito] / Almir Dantas de Souza. - 2016.
52 p. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.

"Orientação: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva, Departamento de Física".

1. Relatividade geral. 2. Teorias $f(R)$. 3. Defeitos topológicos. 4. Corda cósmica. I. Título.

21. ed. CDD 523.12

CORDA CÓSMICA EM TEORIAS $f(R)$

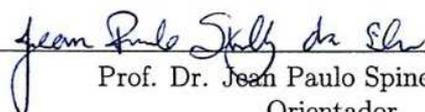
ALMIR DANTAS DE SOUZA

Monografia referente a disciplina Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), como registro de conclusão de curso, requisito à obtenção do título de Licenciatura Plena em Física pela Universidade Estadual da Paraíba, sob a orientação do professor Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva.

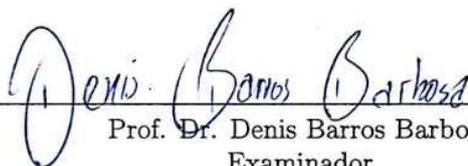
Área de concentração: Física.

Aprovada em 14/10/2016

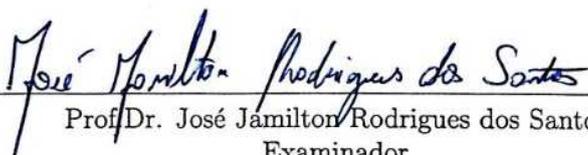
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Orientador



Prof. Dr. Denis Barros Barbosa
Examinador



Prof. Dr. José Jamilton Rodrigues dos Santos
Examinador

À minha Família.

“God used beautiful mathematics
in creating the world.”

Paul Dirac.

AGRADECIMENTOS

À Deus por ter me dado saúde, inteligência e por ter me iluminado durante todo curso. Sem Ele eu não seria nada.

Ao meu orientador, Jean Spinelly, que, durante todo curso, acreditou muito em meus estudos. Pelas horas de estudos, conselhos e brincadeiras. Por ter me ajudado a chegar até aqui. Obrigado por ser meu amigo!

Aos meus pais, Valmir e Luzinete, e por meus irmãos, Gerravole, Aurivan e Aurimar por desde sempre me incentivarem e me ajudarem indiretamente nos estudos.

À minha mulher, Beatriz, e ao meu tudo, Ralnir, que são meus motivos para sempre seguir adiante sem nunca desistir.

Aos meus avós, porque sempre me ajudaram em meus estudos e aos meus familiares, de um modo geral, por todo incentivo e por sempre torcerem por mim. Muito obrigado!

Aos meus amigos: Ângelo, Ronaldo, Felipe, pelas horas de estudos e pelos momentos divertidos que passamos juntos.

A todos os professores e funcionários da Escola Estadual Professora Isabel Ferreira, por terem sempre me acolhido e me ajudado de forma direta e/ou indireta nos meus estudos.

A todos os professores do departamento de física, que contribuíram de forma direta ou indiretamente para minha formação acadêmica.

A todos os motoristas de ônibus que me transportaram em segurança para a realização desse feito.

Enfim, a todos que contribuíram para minha formação.

RESUMO

Teorias de Grande Unificação juntamente com os modelos que explicam a evolução do Universo indicam que, durante as transições de fase que ocorreram no Universo primitivo, surgiram os chamados defeitos topológicos. Na verdade, tais defeitos surgem como consequência de uma quebra espontânea de simetria de gauge local (global), em um sistema composto por campos escalares de Higgs (Goldstone) com auto-acoplamento, devido às transições de fase. Dentre os defeitos, têm-se as paredes de domínio, cordas cósmicas e monopolos global e local. O tipo de defeito formado é determinado pelas propriedades de simetria da matéria e pela natureza da transição de fase. Por outro lado, resultados recentes na Astrofísica e Cosmologia como, por exemplo, as análises de curvas de luz de um grande número de supernovas tipo IA e outras observações, como radiação cósmica de fundo e estrutura em larga escala, dão indícios que o Universo está em expansão acelerada. Para justificar essas observações, existe um modelo que propõe que o Universo é constituído por cerca de 4,860% de matéria bariônica, 25,89% de matéria escura e 69,11% de energia escura. Na tentativa de explicar a aceleração sem a introdução de fontes de energia, surgiram as teorias modificadas da Relatividade Geral, como, por exemplo as teorias $f(R)$. As Teorias $f(R)$ consistem numa modificação na gravidade de Einstein em que substituímos, na ação de Hilbert, o escalar de curvatura R por uma função arbitrária de R . Nesse contexto, a nossa proposta consiste em utilizar teorias $f(R)$ para determinar a geometria do espaço-tempo gerado por uma corda cósmica. Para tanto, consideraremos os casos particulares em que $f(R) = R + \alpha R^2$ e $f(R) = R + \alpha R^{-1}$.

PALAVRAS-CHAVE: Relatividade Geral. Teorias $f(R)$. Defeitos topológicos. Corda cósmica.

ABSTRACT

Grand Theories of Unification along with models that explain the evolution of the Universe indicate that during the phase transitions that occurred in the early universe, there were the so-called topological defects. In fact, such defects appear as a result of a spontaneous breaking of local symmetry gauge (overall) in a system composed of scalar fields boson (Goldstone) self-coupling due to phase transitions. Among the defects have been the domain walls, cosmic strings and global and local monopoles. The type of defect is formed determined by the symmetry properties of the material and the nature of the phase transition. On the other hand, recent results in Astrophysics and Cosmology, for example, the analysis of light curves of a large number of type IA supernovae and other observations, such as the cosmic microwave background and large-scale structure, provide evidence that the universe is booming. To justify these observations, there is a model that proposes that the universe is made up of 4,860% of baryonic matter, 25,89% dark matter and 69,11% dark energy. In an attempt to explain the acceleration without introducing sources of energy, there were modified theories of general relativity, such as theories $f(R)$. Theories $f(R)$ consist of a modification of Einstein's gravity to replace in the action Hilbert, the curvature scalar R by an arbitrary function of R . In this context, our proposal is to use theories $f(R)$ to determine the geometry of the space-time generated by a cosmic string. Therefore, we consider the particular case where $f(R) = R + \alpha R^2$ and $f(R) = R + \alpha R^{-1}$.

KEYWORDS: General relativity. Theories $f(R)$. Topological defects. Cosmic string.

Conteúdo

Introdução	10
1 Defeitos Topológicos	14
1.1 A Cosmologia Padrão	14
1.1.1 A Métrica FRW	15
1.1.2 A métrica FRW aplicada às equações de Einstein	16
1.1.3 A História térmica do Universo	19
1.2 Quebra Espontânea de Simetria e Defeitos Topológicos	21
1.3 Formação de Defeitos Topológicos	24
2 Teorias $f(R)$ no formalismo de Palatini	26
2.1 Equações de campo nas Teorias $f(R)$	27
2.2 Evolução cosmológica pela teoria $f(R)$	30
3 O campo gravitacional da corda em teorias $f(R)$	35
3.1 O Campo gravitacional da corda cósmica para o caso $f(R) = R + \alpha R^2$. .	36
3.2 O Campo gravitacional da corda cósmica para o caso $f(R) = R + \alpha R^{-1}$. .	42
Metodologia	44
Considerações finais	45
Referências	46

ANEXO I - Tensor energia-momento efetivo da teoria $f(R)$ na métrica

FRW

50

Introdução

A Cosmologia Relativística, a qual é descrita com o uso da Teoria da Relatividade Geral, assume que as explicações dos fenômenos cosmológicos estão associadas à geometria do espaço-tempo.

Ainda nos primórdios dessa teoria, em 1917, o astrônomo holandês Willen de Sitter desenvolveu um modelo não estático do Universo. Pouco tempo depois, em 1922, esse modelo foi estudado pelo matemático russo Alexander Friedmann e, em 1927, pelo sacerdote belga Georges Lemaitre, que afirmava que as galáxias são fragmentos proporcionados pela explosão do núcleo, dando como resultado a expansão do Universo. Esse foi o começo da Teoria do Big Bang, modificada em 1948 pelo físico russo, naturalizado americano, George Gamow. Segundo ele, o Universo se originou de uma gigantesca explosão e os diversos elementos foram produzidos durante os primeiros minutos depois da Grande Explosão, quando a densidade e a temperatura, extremamente altas, fundiram partículas subatômicas, transformando-as nos elementos químicos. Por causa de sua elevadíssima densidade, a matéria existente nos primeiros momentos do Universo expandiu-se rapidamente. Ao expandir-se, o hélio e o hidrogênio esfriaram e se condensaram em estrelas e galáxias (ISLAM, 2004; SOUZA, 2004).

Apesar da Teoria do Big Bang ser aceita na literatura, ela pode ser considerada incompleta, pois não consegue explicar várias questões que a Cosmologia relativística e seus dados observacionais nos confrontam, tais como problema do horizonte, problema do achatamento, o problema da flutuação da densidade do Universo, entre outros (MUKHANOV, 2005). Problemas como esses, por sua vez, são resolvidos pressupondo-se que, entre 10^{-38} s e 10^{-22} s após a Grande Explosão, existiu uma era inflacionária.

Nesse período o Universo passou por uma fase de expansão exponencial, em que dobrava de tamanho a, aproximadamente, cada 10^{-34} s. Estas mudanças bruscas causaram diversas quebras espontâneas de simetria. Por este motivo, o Universo precisava encontrar configurações que minimizassem sua energia. Por haverem diversas possibilidades de configurações, formaram-se os defeitos topológicos, dos quais podemos citar três grandes grupos: Paredes de Domínios, Cordas Cósmitica e Defeitos do Tipo Ponto, também conhecidos como Monopolos. O tipo de defeito formado é determinado pelas propriedades de simetria da matéria e pela natureza da transição de fase (VILENKIN e SHELLARD, 1994).

As paredes são objetos bidimensionais que se formam quando uma simetria discreta é quebrada durante uma transição de fase. Cordas cósmicas são objetos unidimensionais que se formam quando uma simetria axial ou cilíndrica é quebrada. São muito finas e extremamente massivas, e podem-se estender ao longo de todo o Universo. Se estas cordas realmente existirem, acredita-se que elas podem ajudar a explicar os mecanismos que geram as estruturas que existem no Universo. Por sua vez, Monopolos têm dimensão zero, ou seja, são pontuais, e formam-se quando uma simetria esférica é quebrada (KIBBLE, 1976; SMITH, 1989). De forma geral, os defeitos topológicos surgiram a medida que o Universo foi expandindo-se e resfriando.

Na década de 1910, Vesto Slipher observou/mediu o primeiro redshift de nebulosas e galáxias, mostrando, com isso, que o universo estava em expansão (THOMPSON, 2016). Por outro lado, resultados recentes na Astrofísica e Cosmologia como, por exemplo, as análises de curvas de luz de um grande número de supernovas tipo IA e outras observações, como radiação cósmica de fundo e estrutura em larga escala (PERLMUTTER, 1998; RIESS et. al, 1988), dão indícios que o Universo está em expansão acelerada. Para justificar essas observações, existe um modelo que propõe que o Universo é constituído de 4,860% de matéria bariônica, 25,89% de matéria escura e 69,11% de energia escura (PLANK results, 2015). A matéria escura refere-se a uma forma de matéria desconhecida

que ainda não foi detectada em laboratório, mas com a propriedade da interação gravitacional, e a energia escura refere-se a alguma forma de energia que não foi detectada diretamente e é o que, teoricamente, causa a expansão acelerada (Observatório Nacional, 2015).

Desde o momento que a TRG foi lançada, pesquisadores tentaram sua generalização. No entanto, não houve motivações fenomenológicas mas apenas pura curiosidade humana de entender a teoria vigente. O início dessas modificações ocorreu em 1919 com Weyl e continuou em 1923 com Eddington ao considerar a inclusão de invariantes de curvatura de ordem superior na ação de Einstein-Hilbert (OLIVEIRA, 2015). Tempo depois, com a tentativa de se estabelecer uma teoria quântica de gravidade, a TRG mostrou não ser renormalizável e que, portanto, não poderia ser quantizada convencionalmente. Tentativas de renormalização levaram à necessidade de se inserir termos na TRG, especificamente na ação gravitacional, de tal forma a produzir, não as equações de campo de 2ª ordem, como se desejava *a priori*, mas equações de 4ª ordem. Fisicamente isso significava introduzir mais graus de liberdade ao sistema tornando-o cada vez mais desafiador (OLIVEIRA, 2015).

Outra tentativa para a generalização da TRG, foi dada pelo desenvolvimento das chamadas teorias $f(R)$. Essas, assumem que o integrando da ação de Einstein-Hilbert seja uma função do escalar de Ricci, R (SOTIRIOU e FARAONI, 2010). Um aporte para essa teoria, foi dada em 2003, quando Dolgov e Kawasaki publicaram um trabalho ao qual podiam explicar a aceleração da expansão do universo sem a necessidade de utilizar ou introduzir fontes como matéria e energia escura em seu modelo.

Naturalmente, assim como acontece na Relatividade Geral, as teorias modificadas admitem que a estrutura geométrica do espaço-tempo é alterada pela presença de matéria e energia contida nele. Diante disso, qualquer um dos defeitos citados acima é capaz de induzir uma mudança na estrutura do espaço-tempo. Então, com a finalidade de conhecermos as alterações provocadas por um determinado defeito, utilizaremos, neste

trabalho, as teorias $f(R)$ para determinarmos a geometria do espaço-tempo gerado por uma corda cósmica. Para tanto, consideraremos os casos particulares em que $f(R) = R + \alpha R^2$ e $f(R) = R + \alpha R^{-1}$. Vale salientar que este estudo foi realizado por Denis Barbosa (2013). Sendo assim, a presente monografia consiste em uma revisão bibliográfica.

Capítulo 1

Defeitos Topológicos

Muito do que observamos atualmente no Universo, foi gerado há bilhões de anos atrás. Galáxias, estrelas e planetas são exemplos disso (Observatório Nacional, 2015). No entanto, existem objetos que surgiram nas fases de transições da evolução do mesmo, como é o caso dos defeitos topológicos, os quais foram gerados como consequência da expansão do Universo, como foi dito anteriormente. Mas, para entendermos o que são e como eles surgiram, devemos primeiramente compreender o conceito de Quebra Espontânea de Simetria.

Neste capítulo, faremos uma breve revisão sobre como surgem os defeitos topológicos. Antes, porém, abordaremos o modelo físico que descreve a evolução do Universo - denominado Modelo Cosmológico Padrão.

1.1 A Cosmologia Padrão

O modelo padrão, também conhecido como modelo do *Big Bang*, é baseado em um pressuposto, conhecido como o princípio cosmológico, que afirma que o Universo é homogêneo e isotrópico (WEINBERG, 1972). Dito de outra forma, tal princípio estabelece que o Universo é o mesmo em todas as direções, a partir de cada ponto do espaço, e que nele não existem pontos privilegiados.

1.1.1 A Métrica FRW

O elemento de linha que descreve o espaço-tempo, levando em conta o princípio cosmológico, pode ser descrito pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2, \quad (1.1)$$

em que t é o tempo físico, $a^2(t)$ é um fator de escala acoplado à métrica para corrigir a escala do espaço e dl^2 representa o elemento de linha num espaço tridimensional de curvatura constante, que é consequência da aplicação do princípio cosmológico.

Nas coordenadas esféricas, o elemento dl^2 é dado por (ISLAM, 1992):

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1.2)$$

onde a constante k define a geometria do espaço-tempo em questão. De fato, no caso em que $k = 1$, a geometria é esférica e o Universo é Fechado; quando $k = -1$, a geometria é hiperbólica e o Universo é aberto; por fim, na situação em que $k = 0$, a geometria é plana e o Universo também é aberto.

Usando (1.2), a métrica (1.1) toma a seguinte forma:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right\}. \quad (1.3)$$

A homogeneidade de matéria do Universo, em larga escala, implica que as linhas de fluxo de um fluido são constantes ao longo das trajetórias (r, θ, φ) , portanto, eles são chamadas de coordenadas comóveis. No entanto, note que as distâncias físicas são determinadas multiplicando distâncias comóveis pelo fator de escala $a(t)$.

Uma variedade de efeitos cinemáticos segue imediatamente a partir da métrica FRW. Por exemplo, se considerarmos duas partículas comóveis e admitirmos que $d\theta = d\varphi = 0$, a distância física entre elas será

$$l(t) = a(t) \int_0^r dr \Rightarrow l(t) = a(t)r. \quad (1.4)$$

Derivando esta equação encontramos que a velocidade entre essas partículas será proporcional à distância que as separa, isto é,

$$v(t) = H(t)l(t) , \quad (1.5)$$

onde $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble, o qual, nos dias de hoje, tem valor estimado em

$$H_0 = (70,5 \pm 1,3) km \cdot sec^{-1} \cdot Mpc^{-1} . \quad (1.6)$$

Esse valor não exato por causa das imprecisões nas medidas de distâncias cosmológicas de longa escala (RICH,2010; Observatório nacional, 2015).

1.1.2 A métrica FRW aplicada às equações de Einstein

Na métrica (1.3), o único termo desconhecido é o fator de escala $a(t)$. Obviamente, admitindo que a TRG é a teoria que descreve a evolução do campo gravitacional, este fator deve obedecer às equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} . \quad (1.7)$$

Onde $\kappa = 8\pi G$.

As componentes covariantes não nulas da métrica de FRW são:

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -a^2/(1 - kr^2), \quad g_{22} = -r^2a^2 \quad e \quad g_{33} = -sen^2\theta a^2 r^2 . \quad (1.8)$$

Levando isto em conta, vemos que as componentes não-nulas do tensor de Ricci são:

$$R_{00} = -3\ddot{a}/a , \quad (1.9)$$

$$R_{11} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)/(1 - kr^2) , \quad (1.10)$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) , \quad (1.11)$$

$$R_{33} = r^2 sen^2\theta(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) . \quad (1.12)$$

E, conseqüentemente, que o escalar de Ricci é

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \Rightarrow R = -6(a\ddot{a} + \dot{a} + k)/a^2 . \quad (1.13)$$

Assim como acontece com a métrica de FRW, o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$, associado ao conteúdo de matéria do Universo, deve satisfazer ao princípio cosmológico. Diante disso, Weyl argumentou que esse tensor deve ser aquele que descreve um fluido perfeito, isto é

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} , \quad (1.14)$$

onde ρ , p e u^μ são, respectivamente, a densidade, a pressão e a quadrivelocidade da matéria¹.

Para observadores comoveis, ou seja, que se movimentam junto com o fluido, temos que $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Considerando observadores comoveis, temos que as componentes não-nulas do tensor energia-momento são dadas por:

$$T_{00} = \rho, \quad T_{11} = pa^2/(1 - kr^2), \quad T_{22} = pr^2 a^2 \quad \text{e} \quad T_{33} = pr^2(\text{sen}^2\theta)a^2 . \quad (1.15)$$

Fazendo $\mu = \nu = 0$ e $\mu = \nu = 1$ nas equações de Einstein, e usando os resultados apresentados, obtemos

$$3(\dot{a}^2 + k) = 8\pi G\rho a^2 \quad (1.16)$$

e

$$2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k = -8\pi Gpa^2 . \quad (1.17)$$

que são, respectivamente, a equação de Friedmann e a equação da aceleração. Essas equações determinam a evolução temporal de $a(t)$ e, conseqüentemente, a dinâmica do Universo.

Derivando (1.16) e substituindo em (1.17) obtemos

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\dot{a}/a = 0 , \quad (1.18)$$

¹Na equação (1.14), para que o princípio cosmológico seja satisfeito, as quantidades ρ e p devem depender apenas de t

que é a equação relativística da conservação da energia em uma geometria de Robertson-Walker. Algo semelhante à equação de continuidade, mas para o fluido cósmico (LEMOS, 2006). A parte em que $3H$ multiplica ρ (o segundo termo) representa a diluição da densidade de energia com o Universo expandindo-se, enquanto o terceiro representa o trabalho realizado pela pressão do fluido.

Isolando \dot{a} na equação (1.16) e substituindo em (1.17), obtemos

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a . \quad (1.19)$$

Levando em conta que $\rho > 0$ e $p \geq 0$, temos que $\ddot{a} \leq 0$, (sendo sempre $a \geq 0$). Com isto, temos como consequências da equação anterior que o Universo está se expandindo $\dot{a} \geq 0$, velocidade de expansão diminuindo, ou se contraindo $\dot{a} \leq 0$, velocidade de contração aumentando.

Além disso, da equação de Friedmann, podemos escrever

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} \quad (1.20)$$

sendo $\Omega \equiv \rho/\rho_{crit}$ o parâmetro densidade, onde $\rho_{crit} \equiv 3H^2/8\pi G$ é a densidade que torna o Universo plano. Com esta equação, concluimos que, se $\rho < \rho_{crit}$, a constante k será negativa, e o Universo se expandirá para sempre. Por outro lado, se $\rho > \rho_{crit}$, k será positivo, o que significa que o Universo colapsará algum dia. A explicação para esse fato se deve a força de atração que as estruturas que compõe o Universo exercem umas sobre as outras. Na verdade, se a densidade for maior que a densidade crítica, a força de atração entre as partes será suficiente para parar a expansão, e iniciar uma contração. Porém, se a densidade for menor que a densidade crítica, não haverá força suficiente para parar a recessão e a expansão continuará para sempre. E se forem iguais, se o Universo estiver em expansão, continuará se expandindo e terá geometria plana.

Embora sejamos capazes de analisarmos a evolução do Universo de forma qualitativa, para uma análise específica, necessitamos de uma equação de estado para a matéria, $p = p(\rho)$, pois para cada valor de k (condições discutidas anteriormente), teremos duas equações para três funções desconhecidas, a , p e ρ .

1.1.3 A História térmica do Universo

Atualmente aceitamos que o Universo se formou a partir de uma singularidade do espaço-tempo onde deveria haver densidade e temperatura infinitas em equilíbrio. Essa noção advém do modelo padrão que é o *Big Bang*. Esse fenômeno é o resultado da expansão contínua e de forma acelerada do próprio espaço-tempo, que por sua vez, muitíssimo tempo mais tarde, deu origem as estruturas de matéria como as estrelas e as galáxias que constituem nosso Universo da maneira que o vemos hoje.

A suposição de que o início do Universo estava em equilíbrio térmico, simplifica consideravelmente o seu estudo, porque sua descrição, passa a ser só dependente da temperatura T . Durante grande parte do início da história do Universo, a equação de estado de um gás ideal relativístico se aplica; a densidade de energia a uma temperatura T é dada pela equação:

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} \mathcal{N}(T) T^4, \quad (1.21)$$

onde $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}_b(T) + \frac{7}{8} \mathcal{N}_f(T)$, sendo $\mathcal{N}_b(T)$ e $\mathcal{N}_f(T)$, respectivamente, os números de estados de configurações helicoidais distintos de bósons e férmions com massas $m \leq T$. Para partículas com $m \gg T$, a densidade de equilíbrio é suprimida de forma exponencial. (VILENKIN e SHELLARD, 1994).

Várias espécies de partículas foram sendo criadas a partir do momento em que o Universo ia se expandindo e esfriando. Isso aconteceu, porque houve uma perda do equilíbrio térmico, que existia antes do *Big Bang*, na singularidade. Esse fato ocorreu quando a taxa de interação $\Gamma_{(int.)}$ de uma partícula ficou abaixo da taxa de expansão H , definindo a temperatura do desacoplamento T_d quando $\Gamma_{int.} \approx H$. Partículas com $m \gg T_d$, foram formadas em densidades desprezíveis, mas quando $m < T_d$, essas densidades foram relevantes/significantes.

A equação de estado de um gás ideal relativístico é

$$p = \frac{\rho}{3}. \quad (1.22)$$

Usando (1.22) e considerando que o espaço é plano ($k = 0$) ($\Omega = 1$), segue das equações (1.16) e (1.18) que

$$a(t) = \sqrt{\frac{16\pi G}{3}} t^{1/2}, \tag{1.23}$$

e, conseqüentemente,

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G} \Rightarrow \rho_{crit} = \frac{3H^2}{32\pi G t^2}. \tag{1.24}$$

Conforme argumentamos, quando o espaço é plano, a densidade é igual a densidade crítica. Usando esse fato e admitindo que $\mathcal{N} = const.$, encontramos, a partir das equações (1.21) e (1.24), que

$$t = \left(\frac{45}{16\pi^3 \mathcal{N} G} \right)^{\frac{1}{2}} T^{-2}. \tag{1.25}$$

Esta equação mostra que, sendo $\mathcal{N} = const.$, a temperatura diminui à medida que o Universo se expande.

Dependendo da temperatura em questão, podemos dividir o “tempo de vida” do Universo em períodos em que são compreendidos os processos que aconteceram ao longo de sua evolução/expansão. Analise o quadro a seguir:

Quadro 1.1: Após o nascimento do Universo.

TEMPO DESDE O BIG BANG (Segundos)	TEMPERATURA (Kelvin)	ENERGIA	TIPO DE PROCESSO FÍSICO
10^{-44}	10^{38}	$10^{19} GeV$	<i>Gravitação quântica</i>
10^{-30}	10^{28}	$10^{15} GeV$	<i>Processos de partículas</i>
10^{-12}	10^{16}	$10^3 GeV$	
10^{-4}	10^{12}	$10^2 GeV$	
1	10^{10}	1 MeV	<i>Processos nucleares</i>
10^2	10^9	0,1 MeV	
10^{12}	$4 \cdot 10^3$	0,04 MeV	<i>Processos atômicos</i>
$10^{[12,16]}$	-	-	<i>Processos gravitacionais</i>
$8 \cdot 10^{17}$	2,7	$3 \cdot 10^{-4} eV$	

Retirado de: A história térmica do universo. Módulo 7 – observatório nacional.

A partir dos dados acima, podemos analisar que com a expansão do Universo e, em consequência disso, a diminuição da temperatura do mesmo, processos físicos foram acontecendo e com eles as partículas foram surgindo dando início a formação material do Cosmo (Observatório Nacional, 2015). Além disso, dados do satélite Plank incluindo os dados do WMAP e outros, indicam que a idade do Universo, desde de o *big bang* até hoje, seja cerca de $13,799 \pm 0,021$ bilhões de anos (UFRGS, 2016).

1.2 Quebra Espontânea de Simetria e Defeitos Topológicos

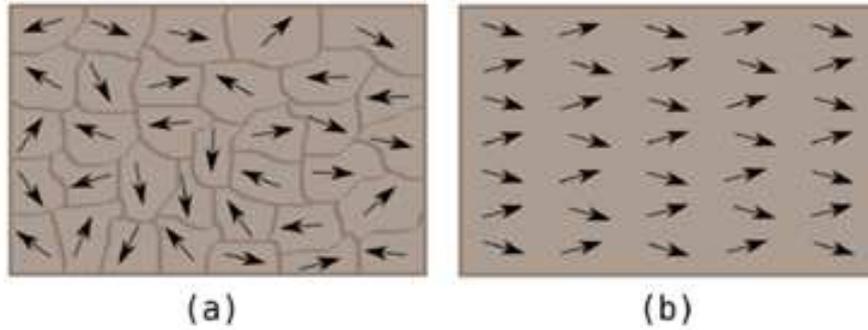
Os defeitos topológicos estão intimamente associados com algum tipo de quebra de simetria que dá origem a um conjunto não trivial de estados fundamentais degenerados, tal como acontece com as orientações dos dipolos magnéticos em materiais ferromagnéticos.

Os materiais ferromagnéticos são constituídos por uma grande quantidade de regiões magnéticas, denominadas domínios magnéticos. Nessas regiões, os dipolos atômicos estão perfeitamente alinhados e a energia magnética assume o valor mínimo². Marie Curie descobriu que existe uma temperatura crítica para cada material ferromagnético acima da qual o material se comporta como paramagnético [Fig. (1.1)]. Na verdade, devido ao movimento térmico, quando a temperatura ultrapassa um certo valor, denominado *temperatura de Curie*, ocorre uma transição de fase de segunda ordem e o sistema não pode mais manter uma magnetização espontânea, mesmo que ainda responda para-magneticamente a um campo externo. De outro modo, abaixo dessa temperatura, há uma quebra espontânea de simetria e os domínios são formados (HALLIDAY et al, 2006). As margens irregulares que separam os domínios que são um exemplo do que os físicos chamam de *defeitos topológicos* - defeitos, porque eles são locais onde as regiões de dipolos alinhados é interrompida, e topológicos porque uma descrição precisa deles envolve idéias de simetria incorporada na topologia, o ramo da matemática que centra-se

²Como todas regiões possuem a mesma energia, dizemos que elas contituem um conjunto de estados degenerados.

no estudo das superfícies contínuas (GANGUI, 2003).

Figura 1.1: Formação de defeito tipo parede.



Retirado de: GANGUI, 2003.

Nas teorias das partículas elementares, a quebra espontânea de simetria é descrita em termos de campos, geralmente chamados de campos de Higgs³. Nesses casos, a quebra ocorre quando o estado fundamental não exibe todas as simetrias da densidade Lagrangiana (VILENKIN e SHELLARD, 1994).

Com o intuito de compreendermos o processo de quebra de simetria em teorias de campo, vamos considerar um modelo simples, que foi primeiramente estudado por Goldstone, em 1961. Ele é descrito pela densidade Lagrangiana clássica:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \bar{\phi}) - V(\phi) , \quad (1.26)$$

onde ϕ é um campo escalar complexo, e o potencial $V(\phi)$, é dado por:

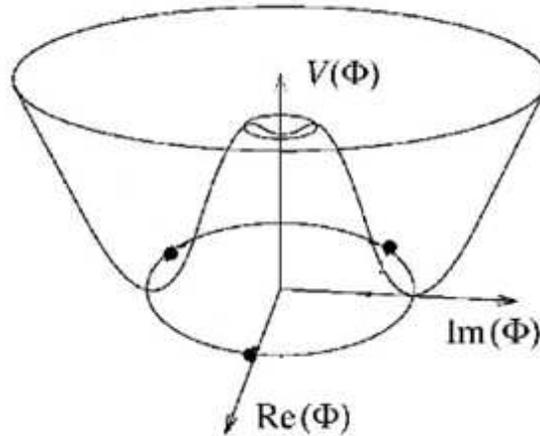
$$V(\phi) = \frac{1}{4} \lambda (\bar{\phi} \phi - \eta^2)^2 , \quad (1.27)$$

sendo que λ e η são constantes positivas. O modelo é invariante por uma transformação de simetria global $U(1)$ do tipo $\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x)$, em que α independe da localização no espaço-tempo.

Para este potencial, o estado de menor energia (estado fundamental) é infinitamente degenerado e é dado por $\phi_0 = \eta e^{i\theta}$, onde θ é um número arbitrário. Em

³Nesse caso, temos sempre campos escalares complexos. Esse campo é o que dá massa as partículas quando houver uma quebra espontânea de simetria, e por isso é comum a expressão mecanismo de Higgs.

Figura 1.2: Mínimos do potencial V .



Retirado de: < http://aether.lbl.gov/eunhwa_webpage_2/birth.html >

outras palavras, os estados de vácuo constituem um círculo $\bar{\phi}_0\phi_0 = \eta^2$, como é mostrado no gráfico do potencial, conforme a figura 1.2. Assim, para “alcançar” o estado de vácuo, o sistema deverá “cair” em um dos possíveis mínimos. Quando isso ocorre, dizemos que a simetria foi espontaneamente quebrada. Diante disso, temos que, no plano, o defeito topológico é um “buraco” com uma energia finita. Se adicionarmos ao modelo uma terceira dimensão e considerarmos que não tem nenhuma dependência com esta direção, então o “buraco” se torna uma linha, ou uma corda.

A fim de entendermos esse processo de quebra, devemos expandir a lagrangiana em torno de um mínimo do potencial. Escolhendo, por simplicidade, que esse mínimo ocorre em $\phi_0 = \eta$, o que equivale fazer $\theta = 0$, a expansão será dada por:

$$\phi = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) . \quad (1.28)$$

Usando a expansão (1.28), a lagrangiana (1.26) torna-se:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 - \frac{1}{2}\lambda\eta^2(\phi_1)^2 + \mathcal{L}_{int} . \quad (1.29)$$

onde a lagrangiana de interação, \mathcal{L}_{int} , inclui termos cúbicos e de ordem superior em ϕ_1 e ϕ_2 . Podemos observar que a lagrangiana (1.29) não apresenta mais a sua simetria original,

ou seja, não é mais invariante segundo a transformação $\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\phi(x)$, indicando que houve uma quebra espontânea de simetria. Além disso, vemos que o campo ϕ_1 representa uma partícula com massa, enquanto ϕ_2 representa uma partícula sem massa. Vale salientar que o surgimento de uma partícula sem massa, denominado *boson de Goldstone* é uma característica geral do processo de quebra espontânea de simetria envolvendo campos.

1.3 Formação de Defeitos Topológicos

Em sistemas de matéria condensada, simetrias que são espontaneamente quebradas podem ser restauradas quando o sistema é aquecido a um nível suficientemente elevado de temperatura (VILENKIN e SHELLARD, 1994). Essa ideia é também aplicada as transições de fases do início do Universo que, como dissemos anteriormente, aconteceu com a expansão e esfriamento dele.

Para um exemplo de transição de fase de segunda ordem, analisemos o modelo de Goldstone dada pela equação (1.26), sendo que agora o potencial efetivo será corrigido levando em conta a temperatura.

De acordo com Vilenkin e Shellard (1994), para altas temperaturas, o potencial efetivo toma a seguinte forma

$$V_{eff}(\phi, T) = m^2(T) |\phi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\phi|^4 \quad (1.30)$$

onde

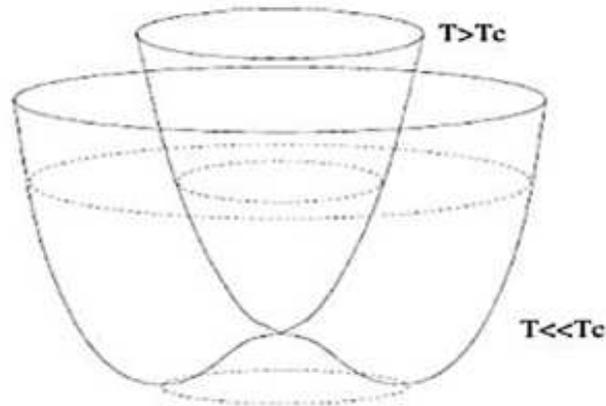
$$m^2(T) = \frac{\lambda}{12} (T^2 - 6\eta^2) \quad , \quad (1.31)$$

sendo $m(T)$ a massa efetiva do campo, a qual será nula quando

$$T = T_c^2 = 6\eta^2 \quad . \quad (1.32)$$

Analisando a expressão do potencial efetivo, vemos que, para $T > T_c$, o mínimo do potencial ocorre quando $\phi = 0$, e o termo de massa $m^2(T)$ será positivo. Por outro lado, quando $T < T_c$ temos que o termo de massa $m^2(T)$ será negativo e o estado de vácuo

Figura 1.3: Gráfico do potencial V_{eff} , mostrando que a simetria é quebrada quando $T < T_{crit}$.



Retirado de: VILENKIN, 1994.

é atingido quando $\phi \neq 0$, ou seja, a simetria é quebrada. Isso mostra que, assim como acontece com materiais ferromagnéticos, a simetria é quebrada quando a temperatura atinge um valor abaixo de um determinado valor crítico. Naturalmente, isso levará a formação de defeitos, conforme discutimos na seção anterior.

O tipo de defeito formado é determinado pelas propriedades de simetria da matéria e pela natureza da transição de fase. As paredes são objetos bidimensionais que se formam quando uma simetria discreta é quebrada durante uma transição de fase. Cordas cósmicas são objetos unidimensionais que se formam quando uma simetria axial ou cilíndrica é quebrada, conforme o caso apresentado acima. São muito finas e extremamente massivas, e podem-se estender ao longo de todo Universo. Se estas cordas realmente existirem, acredita-se que elas podem ajudar a explicar os mecanismos que geram as estruturas que existem no mesmo. Por sua vez, Monopolos têm dimensão zero, ou seja, são pontuais, e formam-se quando uma simetria esférica é quebrada (KIBBLE, 1976; SMITH, 1989). Alguns desses defeitos são estáveis por conta da topologia ou por outras razões, e, portanto, podem estar presentes no Cosmo atual.

Capítulo 2

Teorias $f(R)$ no formalismo de Palatini

Desde o surgimento da TRG, em 1915, foram propostas, a esta, muitas modificações. Uma delas propunha um invariante de ordem maior que dois na ação Einstein-Hilbert. Isso faz com que a teoria, que não é simples, ficasse ainda mais complicada. Dessa maneira, modificar a teoria sem aparente argumentação teórica e/ou experimental não seria atrativa e nem plausível. No entanto, na década de 1960, começaram a aparecer indícios que levariam a possibilidade disso acontecer. Uma delas era que a TRG poderia ser renormalizada se o escalar de Ricci possuísse ordem superior (BARBOSA, 2013).

Quando foi descoberto que o Universo estava se expandindo de forma acelerada, também surgiram outras formas de generalização da TRG, pois esta não prevê esse acontecimento. Uma das teorias que surgiram em favor de manter a relatividade geral, foi a da matéria e energia escura. esta, diz que o Universo é composto por cerca de 69,11% de energia escura, 25,89% de matéria escura e apenas 4,860% de matéria bariônica (o que observamos) (PLANK results, 2015). Essa forma de energia é o que proporciona a expansão acelerada (ON, 2015). No entanto, algumas teorias não necessitam de adições de componentes materiais ou energéticos hipotéticos ao Universo. Um exemplo, são as teorias $f(R)$, que assumem apenas que a ação de Hilbert seja função de uma função do escalar de curvatura R . Nessas teorias não existem restrições, em princípio, sobre as escolhas da função. Na verdade, desde que as condições de energia sejam satisfeitas,

qualquer escolha particular para $f(R)$ é aceitável.

Neste capítulo, apresentaremos as equações de campo gravitacional nas teorias $f(R)$. Além disso, usando tais teorias, discutiremos a evolução Universo.

2.1 Equações de campo nas Teorias $f(R)$

Nas teorias $f(R)$, a ação de Einstein-Hilbert é escrita como

$$S = S_G - 2\kappa S_M , \quad (2.1)$$

em que

$$S_G = \int \sqrt{-g} f(R) d^4x \quad (2.2)$$

e

$$S_M = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}_M d^4x , \quad (2.3)$$

são, respectivamente as ações que descrevem o campo gravitacional os demais campos presentes no sistema.

Naturalmente, para obtermos as equações do campo gravitacional, devemos exigir que a variação da ação de Einstein-Hilbert seja nula, isto é,

$$\delta S = \delta S_G - 2\kappa \delta S_M = 0 . \quad (2.4)$$

Por simplicidade, faremos todas as deduções em um sistema geodésico, isto é, aquele em que os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ são nulos. Isto não implica em perda de generalidade. Pois, como as equações que buscamos envolvem relações entre tensores, elas devem ser válidas em qualquer sistema de referência. Caso contrário, não obedeceriam o princípio geral da covariância.

Tomando a variação de S_G , temos:

$$\delta S_G = \int [\delta \sqrt{-g} f(R) + \sqrt{-g} \delta f(R)] d^4x . \quad (2.5)$$

Mas, usando a propriedade (CARMELI, 1981)

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (2.6)$$

e o fato que

$$\delta f(R) = \delta f'(R) (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \quad (2.7)$$

onde $f'(R) = dF(R)/dR$, a equação (2.5) torna-se:

$$\delta S_G = \int \sqrt{-g} d^4x \left[f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) \right] \delta g^{\mu\nu} + \int \sqrt{-g} d^4x f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

Fazendo a variação do tensor de Ricci e lembrando que estamos em um sistema geodésico, onde $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = 0$ e $\nabla_\alpha A^\mu = \partial_\alpha A^\mu$, podemos mostrar, após algumas manipulações algébricas, que:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho) - \nabla_\mu (\delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho) . \quad (2.9)$$

Consequentemente, usando o fato de que a derivada covariante do tensor métrico é nulo, isto é, $\nabla_\rho g^{\mu\nu} = 0$, temos:

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g} \partial_\sigma W^\sigma , \quad (2.10)$$

onde W^σ é um tensor de ordem, definido por

$$W^\sigma = g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho . \quad (2.11)$$

Utilizando (2.10), integrando por partes e assumindo que, na fronteira de integração, a variação dos símbolos de Christoffel é nula, encontramos que o último termo da equação (2.8) assume a forma

$$\int \sqrt{-g} d^4x f'(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = - \int d^4x W^\sigma \partial_\sigma [\sqrt{-g} f'(R)] \quad (2.12)$$

Da definição dos símbolos de Christoffel, segue que

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} [\partial_\mu (\delta g_{\lambda\nu}) + \partial_\nu (\delta g_{\lambda\mu}) - \partial_\lambda (\delta g_{\mu\nu})] \quad (2.13)$$

e

$$\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}\partial_{\mu}(\delta g_{\nu\sigma}) . \quad (2.14)$$

Logo, substituindo esses resultados em (2.11), lembrando que estamos em um sistema geodésico e usando que a derivada do tensor métrico é nula, chegamos à seguinte expressão:

$$W^{\sigma} = \partial^{\sigma}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) - \partial^{\mu}(g_{\mu\nu}\delta g^{\sigma\nu}) . \quad (2.15)$$

Então, substituindo (2.12) em (2.12), integrando por partes e assumindo que a variação dos campos é nula na fronteira da integração, obtemos:

$$\int \sqrt{-g} d^4x f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int d^4x [g_{\mu\nu}\partial^{\sigma}\partial_{\sigma}(\sqrt{-g} f'(R)) - g_{\sigma\nu}\partial^{\sigma}\partial_{\mu}(\sqrt{-g} f'(R))] \delta g^{\mu\nu}$$

ou ainda

$$\int \sqrt{-g} d^4x f'(R)g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} [g_{\mu\nu}\square f'(R) - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}f'(R)] \delta g^{\mu\nu} , \quad (2.16)$$

onde, na obtenção da última equação, usando a relação de divergência

$$\nabla_{\mu}V^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}V^{\mu}) , \quad (2.17)$$

e o fato que $\square \equiv \nabla_{\mu}\nabla^{\mu}$.

Portanto, substituindo (2.16) em (2.8), podemos escrever a variação da ação do campo gravitacional como:

$$\delta S_G = \int d^4x \sqrt{-g} \left[f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}f(R) + g_{\mu\nu}\square f'(R) - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}f'(R) \right] \delta g^{\mu\nu} . \quad (2.18)$$

Um vez que conhecemos δS_G , resta-nos, agora, calcular a variação da ação integral dos outros campos, δS_M . Da equação (2.3), segue que

$$\delta S_M = \int \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu})} \delta(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu}) \right] d^4x . \quad (2.19)$$

Mas, levando em conta que $\delta(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu}) = \partial_{\alpha}(\delta g^{\mu\nu})$, integrando por partes e, mais uma vez, admitindo que a variação dos campos se anula na fronteira de integração, a equação acima pode ser reescrita como

$$\delta S_M = \int \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \partial_{\alpha} \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial \partial_{\alpha}g^{\mu\nu}} \right) \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x . \quad (2.20)$$

ou ainda

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x \quad (2.21)$$

onde

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \partial_\alpha \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_F)}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \right] \right\} \quad (2.22)$$

é o tensor energia momento

Finalmente, substituindo (2.16) e (2.21) em (2.4), chegamos às equações

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} f(R) + g_{\mu\nu} \square f'(R) - \nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) = \kappa T_{\mu\nu} . \quad (2.23)$$

Essas equações representam uma generalização das equações de Einstein, para o caso da teoria $f(R)$. Note que, no caso específico, quando $f(R) = R$ (que é o caso da ação de Hilbert-Einstein), as equações da TRG são reestabelecidas.

2.2 Evolução cosmológica pela teoria $f(R)$

A teoria da relatividade geral, ou em outras palavras, as soluções das equações de Friedmann prevêem três condições possíveis para o Universo. A primeira, diz respeito a um Universo que se expande até certo momento e depois se contrai, ou seja, recolapsa. Na segunda e terceira, ele se expande para sempre, no entanto, de forma desacelerada. Por outro lado, dados atuais¹, mostram que o Universo está se expandindo de maneira acelerada. Como a teoria vigente até então (a TRG), não explicava e/ou não previa esse fenômeno, foi-se pensado a possibilidade de a Relatividade Geral ser modificada. Desse empasse, apareceram várias teorias modificadas da Gravitação para tentar explicar esse e outros fenômenos/problemas ainda não bem representados/explicados, e entre elas, surge a teoria $f(R)$, que pomos aqui nosso foco.

Essa teoria, nos possibilita a explicação da expansão acelerada do Universo sem a necessidade de acrescentarmos a ele, elementos energéticos como, por exemplo, matéria e energia escura, como foi discutido no começo/início deste capítulo. Essa vantagem, foi

¹Ver: SCIENTIFIC Background on the Nobel Prize in Physics 2011.

estudada/percebida primeiramente por Dolgov e Kawasaki, em 2003. A explicação surge pela adição de termos extras acrescentados nas equações de Friedmann, como consequência da utilização da teoria modificada em questão. Esses elementos adicionais são os possíveis candidatos a explicarem a expansão acelerada do Cosmo. Vejamos como isso se dá.

Das equações de campo da teoria $f(R)$, dadas pela expressão (2.23), podemos escrever:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{f'} (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{eff}) , \quad (2.24)$$

sendo que

$$T_{\mu\nu}^{eff} = \frac{1}{\kappa} \left[g_{\mu\nu} \left(\frac{f - Rf'}{2} \right) + \nabla_\mu \nabla_\nu f' - g_{\mu\nu} \square f' \right] . \quad (2.25)$$

Considerando o tensor energia-momento como sendo o de um fluido perfeito, dado pela expressão (1.15) e utilizando a equação (2.24), podemos generalizar as equações de Friedmann. Para isso, vamos tratar apenas das componentes $\mu\nu = 00$ e $\mu\nu = 11$. Então, pela métrica dada pela expressão (1.3), encontramos que:

$$T_{00}^{eff} = \frac{1}{\kappa} \left[- \left(\frac{f - Rf'}{2} \right) - 3HF'\dot{R} \right] \quad (2.26)$$

e

$$T_{11}^{eff} = \frac{a^2}{\kappa(1 - kr^2)} \left[- \left(\frac{f - Rf'}{2} \right) + F''\dot{R}^2 + F'\ddot{R} + 2HF'\dot{R} \right] , \quad (2.27)$$

onde $f' = F$ e H é o parâmetro de Hubble.

Para a métrica estudada (FRW), dada pela expressão (1.3), temos que as componentes do tensor de Einstein, serão:

$$G_{00} = 3(\dot{a}^2 + k) \quad \text{e} \quad G_{11} = 2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k \quad (2.28)$$

Daí, para o caso específico em que o espaço é plano ($k = 0$), a substituição dos resultados (2.26), (2.27) e (2.28) em (2.24), nos fornecem as seguintes equações

$$H^2 = \frac{\kappa}{3F} \left[\rho - \frac{1}{2\kappa}(f + RF) - \frac{3H\dot{R}F'}{\kappa} \right] \quad (2.29)$$

e

$$2\dot{H} + 3H = -\frac{\kappa}{F} \left[p + \frac{f - RF}{2\kappa} + \frac{F''\dot{R}^2 + F'\ddot{R} + 2HF'\dot{R}}{\kappa} \right]. \quad (2.30)$$

Podemos definir a densidade de energia e a pressão da geometria efetivas, respectivamente, como sendo:

$$\rho_{eff} = -\frac{1}{2\kappa F}(f + RF) - \frac{3H\dot{R}F'}{\kappa F}, \quad (2.31)$$

e

$$p_{eff} = \frac{f - RF}{2\kappa F} + \frac{F''\dot{R}^2 + F'\ddot{R} + 2HF'\dot{R}}{\kappa F}. \quad (2.32)$$

Daí, as equações (2.29) e (2.30) se tornarão:

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} [\rho + \rho_{eff}] \quad (2.33)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6} (\rho_{eff} - 3p_{eff}). \quad (2.34)$$

Essas equações, possuem a mesma forma que as de Friedmann - Modelo Padrão. Como em cosmologia os fluidos perfeitos obedecem, em geral, à equação de estado:

$$p = w\rho \quad (2.35)$$

onde w é uma constante que não depende do tempo. Então, podemos escrever:

$$w_{eff.} \equiv \frac{p_{eff.}}{\rho_{eff.}} = \frac{(f - RF)/2 + F''\dot{R}^2 + F'\ddot{R} + 2HF'\dot{R}}{-(f + RF)/2 - 3H\dot{R}F'} \quad (2.36)$$

A equação acima, representa o estado de um fluido perfeito na teoria $f(R)$.

Existem três maneiras de interpretar o conjunto das equações da Relatividade Geral. A primeira, é considerar que o tensor energia-momento pode ser obtido a partir de um dado tensor métrico. Mas, ao impormos isso, problemas podem surgir, pois o tensor que descreve a matéria e energia pode ser não-físico. E para confirmar se esse descreve

ou não uma quantidade física real, é necessário submeter aquele as quatro condições de energia que estabelecem algumas restrições sobre o mesmo, afim do acoplamento ao tensor métrico nas equações de Einstein. São elas: condição de energia fraca ($\rho \geq 0$), condição de energia forte ($\rho + 3p \geq 0$), condição de energia nula ($\rho + p \geq 0$) e condição de energia dominante ($\rho - p \geq 0$).

Percebe-se uma certa arbitrariedade na escolha da forma funcional de $f(R)$ na gravidade modificada. Essa escolha, porém, deve conduzir a soluções físicas. Poderíamos impor condições de energia para o tensor energia-momento efetivo na gravidade $f(R)$. Entretanto, este tensor, obtido ao escrever as equações de campo da gravidade alternativa como equações de Einstein efetivas, em geral, viola todas as condições de energia da Relatividade Geral. No sentido de impor condições de energia de maneira geral para a gravidade modificada, em 2007, Santos et al. apresentaram a condição de energia forte e a condição de energia nula no contexto das teorias $f(R)$ através da equação de Raychaudhuri junto à exigência de que a gravidade é atrativa. Já as condições de energia dominante e fraca foram impostas sobre o tensor energia-momento efetivo incluindo a matéria. (CARVALHO, 2011).

Mesmo se as condições de energia forem satisfeitas, qualquer modelo $f(R)$ deve estar em concordância com o Modelo Cosmológico Padrão, que exige uma sequência de épocas para a evolução do Universo seguidas uma das outras:

- Era inflacionária: segundo ela, aproximadamente na época de quebra de simetria da grande unificação, cerca de 10^{-35} após o Big Bang, o Universo teria passado por uma rápida e enorme expansão. [Observatório Nacional, 2015].
- Uma era de matéria: onde a temperatura seja suficientemente alta para a criação de píons, núcleons e antinúcleons, e outros hadrons, assim como de suas devidas antipartículas. [Observatório Nacional, 2015].
- Um período de radiação durante o qual ocorre a nucleossíntese: o intervalo entre as

idades cósmicas de 1 segundo e 100 segundos é aquele no qual a escala de energia coincide com aquela do processo nuclear. [Observatório Nacional, 2015].

Outra dificuldade provém de um ajuste rebuscado nas condições iniciais do *big bang* para obter um Universo que coincida com as atuais observações, que indica que $\Omega(K)$ deve ser próximo da unidade no Universo primordial, ou seja, um Universo aproximadamente plano. A necessidade desse ajuste fino é conhecido por problema do achatamento.

Nos modelos $f(R)$, a nucleossíntese deve estar bem vinculada e a era de matéria deve durar tempo suficiente para permitir perturbações na densidade primordial geradas durante a inflação em que estruturas observadas hoje são formadas. Além disso, as transições entre essas eras consecutivas devem ser suaves, o que não ocorre em todas as formas funcionais de $f(R)$. Podemos escolher um fator de escala $a(t)$ e integrar a equação diferencial (2.33) para obter a forma funcional de $f(R)$. Dados observacionais da história de $a(t)$, entretanto, são insuficientes para reconstruir $f(R)$, porque produzem uma classe de modelos de forma não unívoca. Desta maneira, precisamos de informações adicionais tais como perturbações nas densidades cosmológicas. (CARVALHO, 2011).

Capítulo 3

O campo gravitacional da corda em teorias $f(R)$

Em 1981, usando as equações linearizadas da relatividade geral, Vilenkin (1981) calculou o campo gravitacional gerado por uma corda cósmica. De acordo com os resultados que obteve, o espaço-tempo exterior à corda infinita, muito fina e cilíndricamente simétrica, difere do de Minkowski apenas globalmente e corresponde ao espaço de Minkowski a menos de uma fatia compreendida pelo ângulo $8\pi\mu$, em que μ é a densidade linear de energia (massa por unidade de comprimento) da corda. No ano de 1985, Hiscock (1985) estendeu este resultado, resolvendo as equações “completas” da relatividade geral para o caso em que a corda cósmica apresenta uma estrutura interna.

Nosso objetivo agora é encontrar soluções, para as equações modificadas de Einstein (2.23), que descrevem o campo gravitacional de uma corda cósmica com estrutura. Por simplicidade, trataremos de uma corda retilínea, homogênea, estática e com densidade linear de massa situada ao longo do eixo z . Como não existem restrições quanto à escolha da função $f(R)$, consideremos aqui as situações em que $f(R) = R + \alpha R^2$ e $f(R) = R + \alpha R^{-1}$. Vale salientar que o presente trabalho se trata de uma revisão, pois essas soluções foram obtidas por Barbosa (2013).

3.1 O Campo gravitacional da corda cósmica para o caso $f(R) = R + \alpha R^2$

Na situação em que $f(R) = R + \alpha R^2$, as equações modificadas tomam a forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + 2\alpha \left[R \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R \right) - \nabla_\mu \nabla_\nu R + g_{\mu\nu} \square R \right] = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

cujo o traço leva à

$$\square R = \frac{\kappa T + R}{6\alpha} \quad (3.2)$$

Como consequência, usando este resultado em (3.1), obtemos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + 2\alpha \left[R \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R \right) - \nabla_\mu \nabla_\nu R + g_{\mu\nu} \left(\frac{\kappa T + R}{6\alpha} \right) \right] = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

ou, simplesmente,

$$G_{\mu\nu} + G_{\mu\nu}^m = \kappa T_{\mu\nu} , \quad (3.4)$$

onde

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

e

$$G_{\mu\nu}^m = 2\alpha \left[R \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R \right) - \nabla_\mu \nabla_\nu R + g_{\mu\nu} \left(\frac{\kappa T + R}{6\alpha} \right) \right]$$

Na equação (3.4), o termo $G_{\mu\nu}^m$ é a parte adicional devido a introdução do fator αR^2 na ação de Hilbert-Einstein.

Parte interna: $r < r_0$

Para resolvermos o conjunto de equações dado na equação (2.23), consideraremos, por simplicidade, uma corda retilínea, homogênea, estática e com densidade linear de massa μ , situada ao longo do eixo z . Nesse modelo, a corda não possuirá nenhuma

dependência com o tempo e, portanto, será considerada estática. Admitiremos, também, uma simetria da corda em relação ao ângulo θ e, por fim, que a mesma se mantenha invariante por *boosts* na direção z .

Neste caso, o elemento de linha que descreve o espaço-tempo no interior da corda cósmica é dado por (VILENKIN e SHELLARD, 1994):

$$ds^2 = A(r)^2 (dt^2 - dz^2) - dr^2 - C(r)^2 d\theta^2 \quad (3.5)$$

Conforme foi dito no capítulo 1, as cordas cósmicas são objetos unidimensionais que se formam quando uma simetria axial ou cilíndrica é quebrada. Nesse caso, podemos dizer que o modelo de Goldstone descreve uma corda, pois a lagrangiana que o representa possui essa característica. Sendo assim, para obtermos o tensor energia-momento da corda, deveríamos partir da lagrangiana (1.26). Porém, a obtenção desse tensor e sua aplicação nas equações de campo nos levariam à equações diferenciais que não nos permitiriam obter soluções analíticas. Então, para simplificar nosso trabalho, admitiremos que o tensor-energia momento associado à corda cósmica, é dado pela expressão:

$$T_{\mu\nu} = \sigma(r) \text{diag}(1, 0, 0, 1) , \quad (3.6)$$

onde $\sigma(r) = \sigma_0$, para $r < r_0$ e $\sigma(r) = 0$, para $r > r_0$, sendo r_0 o raio da corda (VILENKIN, 1981).

Para o elemento de linha (3.5), as componentes não nulas do símbolo de Christoffel são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{A} \frac{dA}{dr}, \quad \Gamma_{00}^1 = A \frac{dA}{dr}, \quad \Gamma_{22}^1 = C \frac{dC}{dr}, \\ \Gamma_{33}^1 = -A \frac{dA}{dr}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{C} \frac{dC}{dr}, \quad e \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{01}^0 . \end{aligned}$$

E, usando os resultados acima e a métrica (3.5), podemos mostrar que as componentes não nulas do tensor de Ricci são dadas por:

$$R_0^0 = R_3^3 = \frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{AC} \frac{dA}{dr} \frac{dC}{dr} + \frac{1}{A^2} \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 , \quad (3.7)$$

$$R_1^1 = \frac{2}{A} \frac{d^2 A}{dr^2} + \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{dr^2} , \quad (3.8)$$

e

$$R_2^2 = \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{dr^2} + \frac{2}{AC} \frac{dA}{dr} \frac{dC}{dr} . \quad (3.9)$$

Além disso, tomando $\nu = 1$ na equação do princípio de conservação da energia, $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$, e usando a equação (3.7), juntamente com alguns dos símbolos de Christoffel, encontramos:

$$\nabla_\mu T_1^\mu = 0 \Rightarrow \partial_\mu T_1^\mu + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu T_1^\alpha - \Gamma_{\mu 1}^\alpha T_\alpha^\mu = 0 \Rightarrow \frac{dA}{dr} = 0 . \quad (3.10)$$

Este resultado mostra que $A(r)$ é uma constante que, sem perda de generalidade, pode ser escolhida como sendo igual a unidade. Na verdade, essa liberdade de escolha está relacionada ao fato que podemos fazer uma mudança nas coordenadas t e z , de modo à “absorver” a constante. Levando isso em conta, as equações (3.7)-(3.9) nos fornecem

$$R_0^0 = R_3^3 = 0 , \quad R_1^1 = R_2^2 = \frac{1}{C} \frac{d^2 C}{dr^2} \quad \text{e} \quad R = \frac{2}{C} \frac{dC}{dr} . \quad (3.11)$$

Dessa forma, tomando $\mu = \nu = 0$, em (3.3), e usando os resultados acima, encontramos:

$$\frac{2}{C} \frac{d^2 C}{dr^2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 24\alpha\kappa\sigma(r)}}{6\alpha} . \quad (3.12)$$

No limite em que $\alpha \rightarrow 0$, a teoria $f(R)$ corresponde à relatividade geral. Sendo assim, nesse limite, a equação acima deve reproduzir o resultado previsto pela teoria da relatividade geral para a corda cósmica. Porém, isto só será possível se o sinal, que multiplica a raiz, for positivo. Adotando o sinal positivo e usando o fato que, na região interior, $\sigma(r) = \sigma_0$, a equação (3.12) torna-se:

$$\frac{d^2 C(r)}{dr^2} + C(r)w_0 = 0 , \quad (3.13)$$

onde

$$w_0 = \frac{1}{12\alpha} (1 - \sqrt{1 - 24\alpha\kappa\sigma_0}) . \quad (3.14)$$

Resolvendo a equação (3.13), encontramos

$$C(r) = c_1 \cos\left(\frac{r}{r_*}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{r}{r_*}\right), \quad (3.15)$$

onde $r_*^{-2} = w_0$.

Sobre o eixo z , a métrica (3.6) deve ser igual a do espaço-plano (HISCOCK, 1985). Porém, para que isto aconteça é necessário que, em $r = 0$, todas as componentes do tensor de Riemann sejam nulas. Além disso, próximo a esse ponto, as componentes da métrica devem se comportar como às da métrica do espaço de Minkowski, escritas no sistema de coordenadas cilíndricas.

Ao calcularmos o tensor de Riemann, vemos que as únicas componentes diferentes de zero são:

$$R_{2112} = -R_{2121} = -\frac{1}{r_*^{-2}} \left[c_1^2 \cos^2\left(\frac{r}{r_*}\right) + c_2^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{r}{r_*}\right) + c_1 c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2r}{r_*}\right) \right]. \quad (3.16)$$

Então, para que o espaço-tempo seja plano, em $r = 0$, devemos fazer $c_1 = 0$.

Usando este resultado e lembrando que $A(r) = 1$, a métrica (3.5) assume a seguinte forma:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \beta^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{r}{r_*}\right) d\theta^2 - dz^2. \quad (3.17)$$

Como sabemos, próximo a $r = 0$, a aproximação $\operatorname{sen}^2(r/r_*) \approx (r/r_*)^2$ é válida. Então, para que a métrica (3.5) corresponda à métrica de Minkowski, na região $r \approx 0$, precisamos escolher $c_2 = r_*$. Diante disso, chegamos à conclusão que a métrica que descreve a região interior da corda é

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r_*^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{r}{r_*}\right) d\theta^2 - dz^2. \quad (3.18)$$

A não ser pela constante r_* , esta métrica é idêntica àquela obtida por Hiscock (1985), a partir das equações de campo da relatividade geral, e, no limite em que $\alpha \rightarrow 0$, concorda com essa solução.

Parte Externa: $r > r_0$

O espaço-tempo exterior à corda deve ser estático, cilindricamente simétrico e solução das equações de Einstein no vácuo. A forma mais geral para este tipo de solução foi obtida por Levi-Civita (1917), e é dada por

$$ds^2 = r^{2m} dt^2 - r^{-2m} \left[r^{2m^2} (dr^2 + dz^2) + a^2 r^2 d\theta^2 \right], \quad (3.19)$$

onde m e a são constantes.

De acordo com Vilenkin (1981), a corda cósmica deve ser invariante de Lorentz na direção z . Como consequência, as componentes g_{00} e g_{33} devem ser iguais. Comparando esses dois valores, encontramos uma equação de segundo grau, em que m poderá ser $m = 0$ ou $m = 2$. No entanto, o uso de $m = 2$ não é muito comum, pois, para esta escolha, o comprimento de uma circunferência aumenta à medida que o seu raio diminui, sendo infinito quando $r \rightarrow 0$. Daí, devemos escolher $m = 0$. Fazendo isso, a expressão (3.19) tomará a forma:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - a^2 r^2 d\theta^2 - dz^2. \quad (3.20)$$

Para relacionarmos a constante a com as características da corda, devemos levar em conta que a métrica e a sua derivada primeira são contínuas em $r = r_0$. De fato, fazendo isto, chegamos às seguintes equações:

$$g_{22}^{ext}|_{r=r_0} = g_{22}^{int}|_{r=r_0} \Rightarrow ar_0 = r_* \sin\left(\frac{r_0}{r_*}\right) \quad (3.21)$$

e

$$\frac{dg_{22}^{ext}}{dr}|_{r=r_0} = \frac{dg_{22}^{int}}{dr}|_{r=r_0} \Rightarrow a^2 r_0 = r_* \sin\left(\frac{r_0}{r_*}\right) \cos\left(\frac{r_0}{r_*}\right). \quad (3.22)$$

E, conseqüentemente, comparando as expressões (3.21) e (3.22), encontramos:

$$a = \cos\left(\frac{r_0}{r_*}\right). \quad (3.23)$$

Contudo, para obtermos uma relação que concorda com resultado da Relatividade Geral, é necessário expressarmos a constante a em função da densidade de massa da corda, que, nesse caso, é linear. Essa densidade é definida como sendo a integral da densidade de energia $T_0^0 = \sigma(r)$, na superfície t e z constantes:

$$\mu = \int \sqrt{g^{(2)(int)}} T_0^0 d^2x , \quad (3.24)$$

sendo $g^{(2)(int)}$, o determinante do tensor métrico interno, nessa superfície.

Usando $g^{(2)(int)} = r_*^2 \text{sen}^2(r/r_*)$ e lembrando que, no interior da corda, $\sigma(r) = \sigma_0$, a expressão acima resulta em

$$\cos\left(\frac{r_0}{r_*}\right) = 1 - \frac{\mu}{2\pi\sigma_0 r_*^2} . \quad (3.25)$$

Logo, das equações (3.23) e (3.25), obtemos

$$a = 1 - \frac{\mu}{2\pi\sigma_0 r_*^2} , \quad (3.26)$$

ou ainda,

$$a = 1 - \frac{\mu}{24\alpha\pi\sigma_0} \left(1 - \sqrt{1 - 24\alpha\kappa\sigma_0}\right) . \quad (3.27)$$

Sendo assim, a métrica externa à corda cósmica, para o caso particular $f(R) = R + \alpha R^2$, terá a seguinte forma:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - dz^2 - \left(1 - \frac{\mu}{2\pi\sigma_0 r_*^2}\right)^2 r^2 d\theta^2 \quad (3.28)$$

Se fizermos a mudança de coordenadas $\theta' = a\theta$, obteremos a métrica do espaço-tempo de Minkowski, na qual o ângulo θ' varia entre 0 e $2\pi a$. Isto mostra que a métrica exterior à corda difere da métrica de Minkowski apenas globalmente e que localmente elas são equivalentes. A diferença do ponto de vista global está associado ao déficit angular $\delta\theta$, dado por $\delta\theta = 2\pi[1 - a] = \mu/\sigma_0 r_*^2$. Este resultado é semelhante ao obtido pela TRG. (BARBOSA, 2013).

Vale salientar que, assim como acontece com a solução anterior, na situação limite em que $\alpha \rightarrow 0$ o resultado acima corresponde ao que foi obtido por Hiscock (1981).

Contudo, diferentemente dos resultados apresentados por Hiscock, as soluções obtidas aqui dependem da densidade de energia da corda cósmica.

3.2 O Campo gravitacional da corda cósmica para o caso $f(R) = R + \alpha R^{-1}$

A solução para o caso de $f(R) = R + \alpha R^n$ não é objetivo nosso, pois essa não permite solução analítica para qualquer valor de n , e assim a necessidade da particularização. Vamos agora, analisar o modelo para o qual $n = -1$, ou seja, $f(R) = R + \alpha R^{-1}$. Daí, substituindo esse caso específico na equação (2.23), teremos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R + \alpha \left[(\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) R^{-2} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R - \frac{R_{\mu\nu}}{R^2} \right] = \kappa T_{\mu\nu} . \quad (3.29)$$

Tomando o traço de (3.29), encontraremos:

$$\square R^{-2} = - \left(\frac{\kappa T + R}{3\alpha} \right) - \frac{1}{R} \quad (3.30)$$

Conseqüentemente, substituindo (3.30) em (3.29), teremos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R + \alpha \left[\nabla_\mu \nabla_\nu R^{-2} - \frac{g_{\mu\nu}}{3\alpha}(\kappa T + R) - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R - \frac{R_{\mu\nu}}{R^2} \right] = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.31)$$

Assumindo que a região interna da corda é descrita pela métrica (3.5), na qual podemos fazer $A(r) = 1$, a componente, $\mu = \nu = 0$ da expressão (3.31) produz uma equação diferencial semelhante à expressão (3.12), dada por:

$$\frac{2}{C} \frac{d^2 C}{dr^2} = -\kappa \sigma(r) \pm \sqrt{\kappa^2 \sigma(r)^2 + 3\alpha} . \quad (3.32)$$

Como se trata da mesma situação física, onde queremos calcular a métrica de uma corda cósmica de raio r_0 com densidade linear de massa μ e densidade de energia $\sigma(r)$, as condições de contorno descritas pelas expressões (3.21) e (3.22), que foram impostas sobre a solução externa para o caso anterior em que $f(R) = R + \alpha R^2$, podem ser usadas também para o caso presente, e dessa forma, determinamos a solução interior e exterior da corda, pelo mesmo procedimento adotado.

Sendo assim, a métrica que descreve o espaço-tempo no interior de uma corda cósmica, para o caso específico $f(R) = R + \alpha R^{-1}$, é dada por:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - R_*^2 \sin^2 \left(\frac{r}{R_*} \right) d\theta^2 - dz^2 \quad (3.33)$$

onde $R_*^{-2} = s_0$, sendo

$$s_0 = \frac{1}{2} \left(\kappa \sigma_0 + \sqrt{\kappa^2 \sigma_0^2 + 3\alpha} \right) . \quad (3.34)$$

Do mesmo modo, a solução exterior é:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - dz^2 - \left(1 - \frac{\mu}{2\pi\sigma_0 R_*^2} \right)^2 r^2 d\theta^2 . \quad (3.35)$$

Como essas soluções são semelhantes às do caso anterior, as considerações também são equivalentes.

Metodologia

Com a finalidade de atingir os objetivos estabelecidos, realizamos revisões bibliográficas de artigos e livros que abordam os conceitos necessários para o desenvolvimento desta pesquisa. Nestas revisões, fizemos um estudo aprofundado sobre alguns temas, tais como formulação, Modelo Cosmológico Padrão, quebra espontânea de simetria na formação de defeitos topológicos e equações de campo em teorias $f(R)$, os quais foram de fundamental importância para o que nos propomos a investigar.

Ao longo do período correspondente a este trabalho, efetuamos reuniões regulares semanais. Nessas reuniões, os conteúdos estudados, durante a semana anterior, eram apresentados via seminários informais ou na forma de resumos explicativos.

Considerações finais

Neste trabalho, encontramos as soluções que descrevem o espaço-tempo exterior e interior a uma corda cósmica, no contexto das teorias $f(R)$ da gravitação.

Para obtermos tais soluções, resolvemos as equações de campo modificadas para os casos específicos em que $f(R) = R + \alpha R^2$ e $f(R) = R + \alpha R^{-1}$. Nos dois casos, vimos que, assim como acontece com a solução da TRG, obtida por Hiscock (1981), a métrica exterior à corda difere da métrica de Minkowski apenas globalmente e que localmente elas são equivalentes. Por sua vez, a métrica que representa a região interior também possui a mesma forma daquela encontrada por Hiscock. A única diferença entre as soluções obtidas aqui e as que foram determinadas a partir das equações da TRG, é que as soluções das teorias $f(R)$ dependem da densidade de energia da corda cósmica.

Como era de esperar, nos dois casos, no limite em que $\alpha \rightarrow 0$, os resultados concordam com os que foram obtidos por Hiscock. Além disso, podemos observar que, nos dois casos, as soluções interna e externa possuem as mesmas formas/estrutura. Isso mostra que a escolha da função $f(R)$, pelo menos para os casos específicos tratados aqui, não modifica o aspecto das soluções das equações de campo.

Referências

ADAM, R. et al. **Planck 2015 results.** (Overview of products and scientific results). V. 594. 38 p. 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201527101>.

BARBOSA, D. B. **Cordas Cósmicas em Teorias de Gravitação Modificadas.** Tese de Doutorado em Física. João Pessoa, 2013.

BRANS, C. e DICKE, R. H. **Mach's principle and a relativistic theory of gravitation.** Physical Review D. Estados Unidos: The American Physical Society, vol. 3, no 124, 1961, p. 925-935.

CAPOZZIELLO, S. e FARAONI, V. **Beyond Einstein Gravity, A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics.** New York: Springer, 2011.

CARMELI, Moshe. **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory.** New York: John Wiley and Sons, 1982.

CARVALHO, Gabriela Coutinho de. **Soluções de Corda Cósmica em Teorias $f(R)$ da Gravitação.** Dissertação de Mestrado em Física. Niterói, 2011.

COSMOLOGIA: da origem ao fim do Universo. **A História térmica do Universo.** Módulo 7. Observatório Nacional - ON. Ministério da Ciência, tecnologia e inovação. Ensino a distância, 2015.

COSMOLOGIA: da origem ao fim do Universo. **Nem todos aceitam o Big Bang: as teorias alternativas.** Módulo 8. Observatório Nacional - ON. Ministério da Ciência, tecnologia e inovação. Ensino a distância, 2015.

COSMOLOGIA: da origem ao fim do Universo. **Novas ideias sobre o Universo.** Módulo 10. Observatório Nacional - ON. Ministério da Ciência, tecnologia e inovação. Ensino a distância, 2015.

GARCÍA, N. M. et al. **Modified Gravity and the Energy Conditions.** J. Phys. Conf. Ser. Estados Unidos: IOP Publishing, vol. 314, conf. 1, 2011, p. 1-4.

DOLGOV, A. D. Kawasaki, M. **Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion?**, arXiv:astro-ph/0307285v2. 2003.

HALLIDAY, D., RESNICK, R. e WALKER, J. **Fundamentos de Física vol. 3: Eletro-magnetismo,** Editora LTC, 7ª edição, 2006.

HISCOCK, W. A. **Exact gravitational field of a string.** Physical Review D. Estados Unidos: The American Physical Society, vol. 31, no 12, 1985, p. 3288-3290.

ISLAN, J. N. **An introduction to mathematical cosmology.** Cambridge university press, 1992.

KIBBLE, T. W. B. **Topology of Cosmic Domains and Strings.** Journal of Physics A. Bristol: IOP Publishing Ltd, vol. 9, no 9, 1976, p. 1387-1398.

LEMOS, Nivaldo A. **Mecânica analítica**. 2^a ed. Editora: Livraria da Física. São Paulo, 2007. 386 p.

LEVI-CIVITA, T. **Rend.Accad.Naz.Lincei**. 26, 1917, p. 307.

MUKHANOV, V. F. **Physical Foundations of Cosmology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

NETO, Álvaro Gomes dos Santos. **Defeitos Topológicos em Teorias Escalares-Tensoriais da Gravitação**. Universidade de Brasília/DF - Instituto de Física. Dissertação de mestrado, 2006.

OLIVEIRA FILHO, Kepler de Souza. **Cosmologia: O Universo como um Todo**. Encontrado em: < [http : //astro.if.ufrgs.br/univ/univ.htm#MAP](http://astro.if.ufrgs.br/univ/univ.htm#MAP) >. Acesso em: 15/10/2016.

OLIVEIRA, Thiago Bruno Rafael de Freitas. **Um estudo sobre a violação de causalidade em teorias $f(R)$ de gravidade**. Tese de doutorado em Física. Natal, 2015.

PERLMUTTER, S., et. al. **Supernova Cosmology Project**. Nature, vol. 391, no 51, 1998.

RICH, James. **Fundamentals of Cosmology**. 2^a ed. Editora: Springer. New York, 2010. 328 p.

RIESS A. G., et. al. **Supernova Search Team, Astron. J**. Bristol: IOP Publishing Ltd, vol. 116, no 3, 1998, p. 1009.

SCIENTIFIC Background on the Nobel Prize in Physics 2011. **The Accelerating Universe**. Encontrado no site: *Nobelprize.org*. Acesso em: 07/07/2016.

SMITH, A. G., **The Formation and Evolution of Cosmic Strings**. In: Cambridge Workshop, 1989, Cambridge. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

SOTIRIOU, T. P. e FARAONI, V. **f(R) Theories of Gravity**. Rev. Mod. Phys. Estados Unidos: The American Physical Society, vol. 82, no 1, 2010, p. 451.

SOUZA, R. E., **Introdução a cosmologia**. São Paulo: Edusp, 2004.

THOMPSON, Laird A. **Vesto Slipher and the First Galaxy Redshifts**. Astronomy Department. University of Illinois Urbana-Champaign. Encontrado em: < <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1108/1108.4864.pdf> >. Acesso em: 15/10/2016.

VILENKIN, A. **Cosmic Strings and Domain Walls, Physical Reports**. Estados Unidos: Elsevier B.V, vol. 121, 1985, p. 263.

VILENKIN, A. e SHELLARD, E. P. S. **Cosmic String and Other Topological Defects**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 517p.

WEINBERG, Steven. **Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity**. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1972. 657 p.

ANEXO I - Tensor energia-momento efetivo da teoria $f(R)$ na métrica FRW

Como uma teoria do Universo deve seguir o modelo padrão, e nele a métrica considerada deve ser a FRW, dada por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right\},$$

então, comecemos pela apresentação das componentes não nulas do símbolo de Christoffel:

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{(1 - Kr^2)}, \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2, \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2,$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r(1 - Kr^2), \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \Gamma_{23}^3 = \cot\theta,$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{Kr}{1 - Kr^2}, \Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \sin^2\theta, \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a},$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r(1 - Kr^2) \sin^2\theta, \Gamma_{33}^2 = -\sin\theta \cos\theta.$$

Lembrando, nessa demonstração, que K é a constante da métrica FRW e $k = \kappa = 8\pi G$, que é a constante de Einstein.

Devido a esses valores, do símbolo de Christoffel, teremos as componentes do tensor de Ricci, dadas por:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a},$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K}{1 - Kr^2},$$

$$R_{22} = r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K),$$

$$R_{33} = r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2K) \sin^2 \theta.$$

Da métrica FRW, tiramos que o escalar de Ricci é:

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right].$$

Sendo, as componentes do tensor de Einstein, descritas por:

$$G_{00} = 3 \left[\left(\frac{\ddot{a}}{a} \right)^2 + \frac{K}{a^2} \right],$$

$$G_{11} = -\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + K}{1 - Kr^2},$$

$$G_{22} = -r^2 (2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + K),$$

$$G_{33} = r^2 (2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + K) \sin^2 \theta.$$

Utilizando as equações modificadas:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{k}{f'(R)} (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{eff.}),$$

onde temos que

$$T_{\mu\nu}^{eff.} = \frac{1}{k} \left[\frac{g_{\mu\nu} (f(R) - Rf'(R))}{2} + \nabla^\alpha \nabla^\beta f'(R) (g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}) \right],$$

O tensor energia-momento do fluido perfeito é dado por:

$$T_{\mu\nu} = \text{diag} \left(\rho, \frac{(1 + Kr^2)p}{a^2}, \frac{p^2}{r^2 a^2}, \frac{p}{r^2 a^2 \sin^2 \theta} \right)$$

podemos encontrar as equações de Friedmann generalizadas no modelo $f(R)$. Para tal, vamos considerar apenas as componentes $\mu\nu = 00$ e $\mu\nu = 11$. Calculando a componente 00, temos:

$$T_{00}^{eff.} = \frac{1}{k} \left[\frac{g_{00} (f(R) - Rf'(R))}{2} - \nabla^1 \nabla^1 f'(R) g_{00} g_{11} - \nabla^2 \nabla^2 f'(R) g_{00} g_{22} - \nabla^3 \nabla^3 f'(R) g_{00} g_{33} \right],$$

podemos escrever

$$\nabla^\alpha \nabla^\beta f'(R) = g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho} \nabla_\sigma \nabla_\rho f'(R),$$

então,

$$T_{00}^{eff.} = \frac{1}{k} \left[\frac{g_{00} (f(R) - Rf'(R))}{2} - g^{11} \nabla_1 \nabla_1 f'(R) - g^{22} \nabla_2 \nabla_2 f'(R) - g^{33} \nabla_3 \nabla_3 f'(R) \right],$$

Se observarmos o escalar de Ricci, notamos que ele só depende da coordenada temporal, daí:

$$g^{11} \nabla_1 \nabla_1 f'(R) = \frac{1 - kr^2}{a^2} \left(-\frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} \right) f'(R) \dot{R} = -\frac{\dot{a}}{a} f'(R) \dot{R}$$

$$g^{22} \nabla_2 \nabla_2 f'(R) = \frac{1}{r^2 a^2} (-ara^2) f'(R) \dot{R} = -\frac{\dot{a}}{a} f'(R) \dot{R}$$

$$g^{33} \nabla_3 \nabla_3 f'(R) = \frac{1}{r^2 a^2 \sin^2 \theta} (-r^2 a^2 \sin^2 \theta) f'(R) \dot{R} = -\frac{\dot{a}}{a} f'(R) \dot{R}$$

Se tomarmos $f'(R) = F(R)$ e utilizarmos o conceito de derivada covariante ($\nabla_\alpha \nabla_\sigma F(R) = \partial_\alpha \nabla_\sigma F(R) - \Gamma_{\sigma\alpha}^\rho \nabla_\rho F(R)$), teremos:

$$T_{00}^{eff.} = \frac{1}{k} \left[-\frac{(f(R) - Rf'(R))}{2} - 3H f'(R) \dot{R} \right],$$

Onde $H = \dot{a}/a$, que é o parâmetro de Hubble.

De maneira análoga a esse caso, quando $\mu\nu = 11$, teremos:

$$T_{11}^{eff.} = \frac{g_{11}}{k} \left[\frac{g_{00} (f(R) - Rf'(R))}{2} - g^{00} \nabla_0 \nabla_0 f'(R) - g^{22} \nabla_2 \nabla_2 f'(R) - g^{33} \nabla_3 \nabla_3 f'(R) \right],$$

que produz:

$$T_{11}^{eff.} = \frac{a^2}{k(1 - Kr^2)} \left[-\left(\frac{f - Rf'}{2} \right) + F'' \dot{R}^2 + F' \ddot{R} + 2HF' \dot{R} \right].$$