



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA PLENA EM FÍSICA

RONALDO MARCELINO FELIX DE ANDRADE

ANÁLOGO ACÚSTICO DO BURACO NEGRO

CAMPINA GRANDE - PB
2016

RONALDO MARCELINO FELIX DE ANDRADE

ANÁLOGO ACÚSTICO DO BURACO NEGRO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva

CAMPINA GRANDE - PB
2016

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

A553a Andrade, Ronaldo Marcelino Félix de.
Análogo acústico do buraco negro [manuscrito] / Ronaldo
Marcelino Félix de Andrade. - 2016.
24 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) -
Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e
Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva,
Departamento de Física".

1. Buraco negro. 2. Buraco negro acústico. 3. Fluidos. I.
Título.

21. ed. CDD 523.887 5

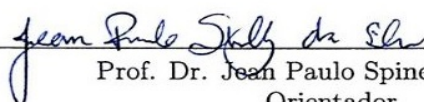
RONALDO MARCELINO FELIX DE ANDRADE

ANÁLOGO ACÚSTICO DO BURACO NEGRO

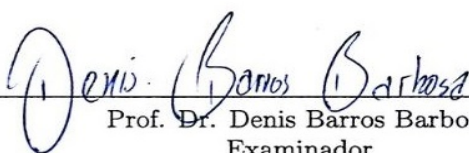
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Licenciatura Plena em Física da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciado em Física.

Aprovado em 24/10/2016.

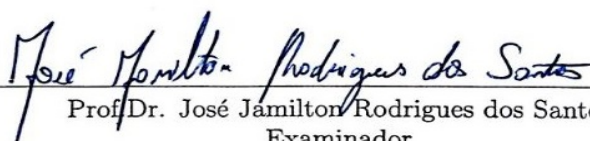
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva
Orientador



Prof. Dr. Denis Barros Barbosa
Examinador



Prof. Dr. José Jamilton Rodrigues dos Santos
Examinador

AGRADECIMENTOS

À Deus, nosso criador, pela saúde e encorajamento para estudar.

À minha família, pelo lar, pelo incentivo aos estudos, por tudo.

À minha noiva, Patrícia Souza, por estar sempre ao meu lado durante toda esta caminhada e pela paciência que ela teve, principalmente nesta reta final de curso.

Ao meu professor, orientador e amigo, Jean Spinelly, que mostrou que a relação aluno-professor é mais do que apenas passar conteúdo.

A todos os amigos da faculdade, principalmente Almir, Ângelo e Felipe, que ajudaram de todas as formas possíveis no decorrer de todo o curso.

A todos os professores que participaram da minha formação, desde os do Ensino Infantil até os do Ensino superior, especialmente aos professores de Física, Manoel e Cândido (in memoriam) que, mesmo com suas ocupações, nunca se negaram a tirar minhas dúvidas nos períodos iniciais do curso.

Enfim, a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para mais este passo da minha vida.

Conteúdo

1	Introdução	5
2	Fundamentação Teórica	6
2.1	Equação de continuidade	6
2.2	Equações do movimento para um fluido ideal	11
3	Buraco negro acústico	13
3.1	Buraco negro não-relativístico	15
3.2	Cálculo da métrica acústica a partir da Lagrangiana	20
4	Considerações finais	22
5	Referências	24

ANÁLOGO ACÚSTICO DO BURACO NEGRO

Ronaldo Marcelino Felix de Andrade¹

RESUMO

Os Buracos Negros são regiões em que, dentro, a gravidade é extremamente forte, de modo que não conseguimos obter nenhuma informação de “objetos” que estejam dentro dessa região. Nesta região, as estrelas colapsam, cada vez mais, até que toda a sua matéria fica concentrada em uma região tão pequena, mas tão pequena, que as leis da física como conhecemos, não valem mais. Dizemos então que foi criada uma singularidade no espaço-tempo. As delimitações dessas regiões são chamadas de horizontes de eventos. Os buracos negro são soluções das Equações de campo de Einstein, Karl Schwarzschild Foi quem obteve em 1915 a primeira solução exata dessas equações para o caso limite de uma massa esférica sem rotação. Essa solução nos levou ao conhecido conceito de Raio de Schwarzschild que é o tamanho do horizonte de eventos de buraco negro sem rotação. Quando um fluido, perturbado por ondas sonoras, atinge uma velocidade maior do que a velocidade do som, as equações fundamentais que descrevem o comportamento desses fluidos, comportam-se de uma forma análoga a de um buraco negro, o que chamamos de buracos negros acústicos.

PALAVRAS-CHAVE: Buraco Negro, Fluidos, Buraco Negro Acústico.

1 Introdução

No início do século XX, com a Relatividade Geral de Einstein, a gravidade passa a ser entendida como uma deformação da geometria do espaço-tempo, de forma que seria associada uma curvatura que influenciaria na trajetória de qualquer partícula.

¹Graduando em Licenciatura em Física pela Universidade Estadual da Paraíba

Alguns meses depois da publicação dos trabalhos de Einstein, a respeito da Relatividade Geral, o físico alemão Schwarzschild obteve a primeira solução para as equações da Relatividade Geral, essa solução assumia um objeto massivo na origem das coordenadas. Ele demonstrou a existência de uma singularidade na sua métrica, onde toda a matéria se concentraria em um único ponto, criando assim uma região de volume nulo e densidade infinita. A solução de Schwarzschild delimita uma região, onde é perdida toda a informação que está contida nela, daí vem o nome *buraco negro*, pois dentro desta região nem mesmo a luz torna-se visível para um observador situado fora dela. A delimitação do buraco negro é chamada de *horizonte de evento*, em que qualquer matéria que aproxime-se muito dessa região será sugada para o seu interior e as informações sobre essa matéria fica retida em seu interior de forma irrecuperável (CARMELI, 1982).

Quando uma onda sonora se propaga através de um fluido em movimento a uma velocidade acima da velocidade do som, forma-se uma região conhecida como horizonte de eventos acústico, onde, a partir dela, o som não é capaz de escapar. Dessa forma, surge o que chamamos de *buracos negros acústicos*. Quando isto acontece, observa-se que estas ondas sonoras se comportam no fluido, como a luz se comporta sob a influência do campo gravitacional (VISSER, 1997; TONIATO, 2010).

Neste trabalho, estudaremos esta analogia, considerando um fluido ideal, irrotacional e barotrópico. Antes porém, faremos uma breve revisão sobre as equações que descrevem a dinâmica de um fluido ideal. Vale salientar que o presente artigo trata-se de uma revisão bibliográfica de um estudo realizado por Júnior Diniz Toniato (2010).

2 Fundamentação Teórica

2.1 Equação de continuidade

A cinemática dos fluidos é o estudo sobre o movimento dos fluidos. Uma das formas de dar seguimento a esse estudo é seguir a trajetória de “objetos” individuais, ou seja, analisar como os vetores posição e velocidade, de cada elemento do fluido, evoluem com

o tempo. Este método é denominado *Descrição Lagrangiana do Movimento do Fluido*, em homenagem ao matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

Do ponto de vista macroscópico, o fluido é considerado como algo contínuo. Porém, uma análise microscópica mostra que ele é constituído por bilhões de moléculas que se chocam continuamente. Assim, a tarefa de acompanhar cada molécula torna-se muito difícil, até mesmo para computadores muito rápidos (ÇENGEL e CIMBALA, 2007).

Diante disso, para descrevermos o escoamento dos fluidos, utilizaremos um método denominado *Descrição Euleriana do Movimento do Fluido*, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783). Este método consiste em especificar a densidade $\rho(x, y, z, t)$ e a velocidade do fluido em cada ponto do espaço e em cada instante de tempo, $\vec{v}(x, y, z, t)$, ao invés de seguir o movimento de cada partícula. Contudo, vale salientar que, embora esse método se dedique a analisar o que acontece em um ponto do espaço e não em uma partícula do fluido, é impossível deixarmos de acompanhar as partículas do fluido, pelo menos em um pequeno intervalo dt , pois é em relação às partículas e não aos pontos que aplicamos as leis da mecânica. (SYMON, 1996)

Qualquer grandeza que for usada para descrever o estado do fluido, por exemplo, a pressão p , será função das coordenadas espaciais x, y, z e do tempo t . Desse modo, haverá um valor específico da função para cada ponto no espaço em cada instante de tempo. A taxa com que a pressão varia em um ponto fixo no espaço é $\partial p / \partial t$. Por outro lado, a taxa de variação da pressão, em relação a um ponto que se move junto com o fluido, é

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \quad (2-1)$$

ou ainda

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p, \quad (2-2)$$

onde \vec{v} é a velocidade do fluido.

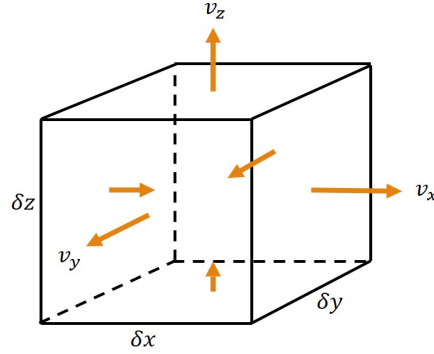
É importante destacarmos que uma relação similar a equação (2-2) é válida entre derivadas parciais e derivadas totais de qualquer grandeza, de modo que podemos escrever,

simbolicamente,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} , \quad (2-3)$$

onde as derivadas total e parcial tem o mesmo significado que o anterior.

Figura 1: Movimento de um elemento do fluido em expansão.



Se considerarmos, agora, um pequeno volume de fluido, δV , em forma retangular, com dimensões δx , δy e δz [Fig. (1)], temos:

$$\delta V = \delta x \delta y \delta z , \quad (2-4)$$

O componente x da velocidade do fluido v_x pode ser diferente nas faces da caixa à esquerda e à direita. Se isso acontecer, δx variará com o tempo a uma taxa igual a diferença entre estas duas velocidades (SIMON, 1996):

$$\frac{d}{dt} \delta x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x , \quad (2-5)$$

e, similarmente,

$$\frac{d}{dt} \delta y = \frac{\partial v_y}{\partial y} \delta y \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \delta z = \frac{\partial v_z}{\partial z} \delta z \quad (2-6)$$

Assim, usando (2-5) e (2-6), a taxa de variação com o tempo de δV será:

$$\frac{d}{dt} \delta V = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \delta V . \quad (2-7)$$

Esta demonstração não é muito rigorosa, mas nos dá uma ideia do significado da divergência $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$. Na verdade, para tornarmos a demonstração rigorosa, deveríamos considerar que v_x também depende das coordenadas y e z , e obter a equação (2-7) no limite em que $\delta V \rightarrow 0$. Porém, existe um método mais simples para demonstrarmos a equação (2-7) de forma rigorosa. Consideremos que um volume V de um fluido é constituído por elementos δV , de tal modo que

$$V = \sum \delta V . \quad (2-8)$$

Somando o primeiro membro da Eq. (2-7), teremos:

$$\sum \frac{d}{dt} \delta V = \frac{d}{dt} \sum \delta V = \frac{dV}{dt} . \quad (2-9)$$

Neste caso, o símbolo da soma representa uma integração, pois pretendemos tomar o limite de $\delta V \rightarrow 0$. Então, somando segundo membro, aplicando o limite e usando o teorema da divergência de Gauss, encontramos:

$$\sum \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \delta V = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV = \iint_S \hat{n} \cdot \vec{v} dS , \quad (2-10)$$

onde S é a superfície que limita o volume V e \hat{n} é o vetor normal à superfície e orientado para fora. Como $\hat{n} \cdot \vec{v}$ é a componente da velocidade apontada para fora da superfície dS , o volume adicional devido ao movimento de V é $\hat{n} \cdot \vec{v} dS dt$. Logo, o último termo da equação acima é a expressão apropriada para a taxa de crescimento do volume, isto é,

$$\frac{dV}{dt} = \iint_S \hat{n} \cdot \vec{v} dS . \quad (2-11)$$

Diante disso, podemos afirmar que a equação (2-7) é a expressão correta para a taxa de crescimento do volume, pois ela fornece a expressão correta para a taxa de crescimento de qualquer volume V , quando somada em relação a δV .

Se o fluido for incompressível, o volume de cada elemento deve permanecer constante:

$$\frac{d}{dt} \delta V = 0 . \quad (2-12)$$

Com isso, de acordo com a Eq. (2-7):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 . \quad (2-13)$$

Nenhum fluido é absolutamente incompressível, mas em alguns casos podemos considerar essa hipótese.

A massa de um elemento de um fluido é:

$$\delta m = \rho \delta V , \quad (2-14)$$

e permanecerá constante, mesmo que a pressão e o volume não permaneçam:

$$\frac{d}{dt} \delta m = \frac{d}{dt} (\rho \delta V) = 0 . \quad (2-15)$$

Do segundo membro da Eq. (2-15), temos:

$$\delta V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\delta V}{dt} = 0 . \quad (2-16)$$

Logo, substituindo resultado apresentado em (2-7) na equação (2-16) e dividindo o resultado por δV , chegamos a:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 . \quad (2-17)$$

Utilizando a Eq. (2-3), reescrevemos esta equação em termos de derivadas parciais em relação a um ponto fixo no espaço :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 . \quad (2-18)$$

Usando a propriedade $\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{A}) = \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{A} + \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$, podemos ainda escrever a equação (2-18) como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 . \quad (2-19)$$

Esta é a equação da continuidade para o modelo de matéria contínua, que estabelece, essencialmente, que a matéria não é criada nem destruída; a massa δm , em qualquer volume δV , que se mova com o fluido, permanece constante.

2.2 Equações do movimento para um fluido ideal

Nesta seção, consideraremos o movimento de um fluido ideal, ou seja, um fluido com tensão de cisalhamento inexistente, mesmo estando em movimento. É importante salientar que um fluido, por definição, não suporta tensões de cisalhamento quando se encontra em equilíbrio. Entretanto, todos os fluidos têm viscosidade e, portanto, sempre haverá tensões de cisalhamento entre suas camadas com movimento relativo. Em um fluido ideal não há viscosidade, então só serão considerados fluidos ideais, onde a viscosidade for considerada desprezível.

Supondo que, além da pressão, o fluido esteja sob a ação de uma densidade de força por unidade de volume \vec{f} , há uma força adicional que age no volume δV dada por $\vec{f}\delta V$. Na sequência, calcularemos a densidade de força devido a pressão exercida sobre o elemento de volume.

Considerando o elemento de volume em forma de uma caixa retangular, sendo $\delta V = \delta x \delta y \delta z$. A pressão exercida sobre a face esquerda da caixa provoca uma força igual a $p\delta y\delta z$ e age na direção x . A pressão exercida sobre a face direita também provoca uma força igual a $p\delta y\delta z$, mas age na direção oposta. Como veremos, isso faz com que a componente da força resultante na direção x , $\delta\vec{F}_x$, exercida sobre a caixa, dependa da diferença de pressão entre as faixas direita e esquerda [Fig. (2)].

Sendo $\vec{F}_{1x} = p(x, y, z)\delta y\delta z\hat{x}$ e $\vec{F}_{2x} = -p(x + \delta x, y, z)\delta y\delta z\hat{x}$, temos:

$$\delta\vec{F}_x = \{p(x, y, z)\delta y\delta z - p(x + \delta x, y, z)\delta y\delta z\} \hat{x} . \quad (2-20)$$

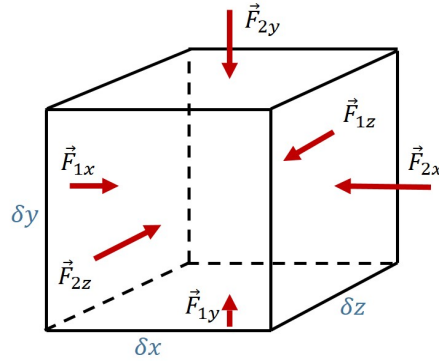
Expandindo $p(x + \delta x, y, z)$ em série de Taylor e descartando termos de ordem superior a δx , encontramos

$$p(x + \delta x, y, z) = p(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial x}p(x, y, z)\delta x . \quad (2-21)$$

Levando isso em conta, a equação (2-20) torna-se:

$$\delta\vec{F}_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\right) \delta y\delta z\hat{x} . \quad (2-22)$$

Figura 2: Na figura, as forças \vec{F}_{1x} e \vec{F}_{2x} são, respectivamente, aquelas que atuam nas faces localizadas nas posições x e $x + \delta x$, ao longo do eixo x . O mesmo raciocínio serve para as forças \vec{F}_{1y} , \vec{F}_{2y} , \vec{F}_{1z} e \vec{F}_{2z} .



Expressões semelhantes são obtidas para os componentes da força nas direções y e z , seguindo os passos utilizados para se chegar à equação (2-22). Diante disso, podemos definir a força total como:

$$\delta \vec{F} = \left(-\hat{x} \frac{\partial p}{\partial x} - \hat{y} \frac{\partial p}{\partial y} - \hat{z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \delta V \quad (2-23)$$

ou

$$\delta \vec{F} = -\vec{\nabla} p \delta V . \quad (2-24)$$

Portanto, concluímos que a densidade de força por unidade de volume, devido a pressão, será $-\vec{\nabla} p$.

De posse das informações obtidas, podemos escrever a equação de movimento para um elemento δV do fluido, como

$$\rho \delta V \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} \delta V - \vec{\nabla} p \delta V , \quad (2-25)$$

Dividindo a equação (2-25) por δV , obtemos a equação na forma que é mais usual:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{\nabla} p = \vec{f} . \quad (2-26)$$

Utilizando a equação (2-3) e dividindo a equação acima por ρ , obtemos uma expressão,

em termos das derivadas, em relação a um ponto fixo:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \rho = \frac{\vec{f}}{\rho}, \quad (2-27)$$

onde $\frac{\vec{f}}{\rho}$ é a força por unidade de massa. Esta expressão é denominada equação do movimento de um fluido, de Euler.

3 Buraco negro acústico

A Relatividade Geral, determinada em sua forma definitiva em 1915 por Albert Einstein, pode ser resumida dizendo-se que o espaço e o tempo, que já tinham sido unificados como espaço-tempo pelo próprio Einstein dez anos antes, têm suas propriedades modificadas pelo conteúdo subjacente de matéria e energia. Assim, a matéria e a energia determinam a forma como as propriedades do espaço-tempo se organizam tanto no espaço como no tempo (MATSAS, 2005). Esta relação entre matéria e energia é descrita pela equação de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3-28)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia momento, R é o escalar de curvatura de Ricci, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e $\kappa = 8\pi G/c^4$ é uma constante. Os buracos negros são soluções dessa equação, sendo o buraco negro de Schwarzschild, o qual é descrito pelo elemento de linha

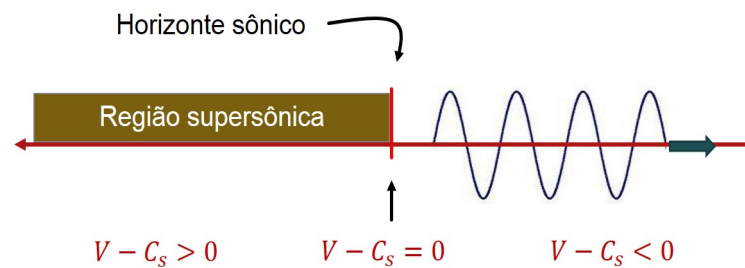
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (3-29)$$

a solução mais simples, por ser estático e não possuir carga. Na fronteira $r = r_s$ existe o que chamamos de horizonte de eventos, na qual a componente g_{rr} tende ao infinito. Acontece que, a partir $r = r_s$, a curvatura é tão grande, que nem mesmo a luz conseguiria escapar para o infinito. Desta forma, seria impossível se observar o que acontece além dessa fronteira. Devido a esse fato, a métrica ficou conhecida como a solução para *Buraco Negro*.

Os sistemas análogos para a Relatividade Geral começaram a ser desenvolvidos no início da década de 80 com o físico canadense Willian G. Unruh. Unruh demonstrou

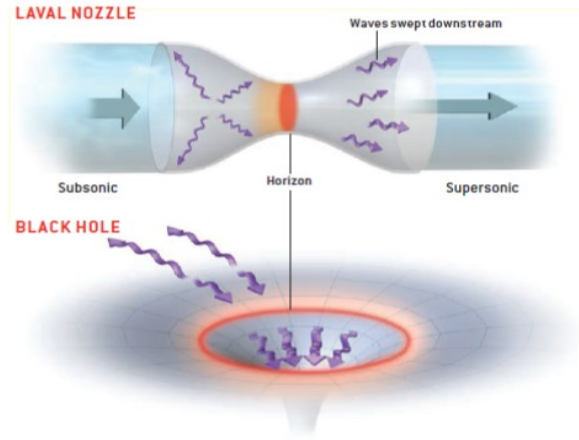
que ondas sonoras se propagando em um fluido em movimento é fenômeno semelhante ao da luz quando viaja em um espaço-tempo curvo. As ondas sonoras também sofrerão uma variação de frequência à medida que se propagam, contra ou a favor, da direção de escoamento do fluido. Em especial, se o fluido atinge velocidades supersônicas, em um determinado ponto se formará uma barreira sonora tal como o horizonte de eventos de um buraco negro gravitacional. Assim, as ondas sonoras que estiverem dentro da região onde o fluido se movimenta mais rápido que a velocidade do som, nunca conseguirão escapar, definindo assim o buraco negro acústico (TONIATO, 2010). Podemos observar o relatado, na figura 3.

Figura 3: Buraco Negro Acústico



Um buraco negro acústico, como o citado acima, pode ser criado usando um bocal convergente-divergente, mais comumente chamado de bocal de Laval [Fig. 4]. O bocal é um instrumento que acelera o escoamento de velocidades subsônicas para supersônicas no ponto mais estreito sem alterar as propriedades do fluido (JACOBSON E PARENTANI, 2015). Observando a figura, podemos fazer uma comparação entre o buraco negro acústico e o gravitacional. Sendo a região interior do buraco negro acústico, a região supersônica, a região exterior a subsônica e a parte que separa essas duas partes o horizonte sônico. Quando ondas eletromagnéticas se aproximam da região de horizonte, que delimita o buraco negro, estas são sugadas para seu interior. O mesmo acontece quando as ondas sonoras passam próximas ao horizonte de eventos sônicos.

Figura 4: Bocal de Laval.



Fonte: Jacobison e Parentani (2005, p.73)

3.1 Buraco negro não-relativístico

Nesta seção, descreveremos o buraco negro acústico a partir da propagação de uma onda sonora não relativística em um fluido ideal, livre da ação de uma densidade de força, irrotacional e barotrópico. Para isso, utilizaremos as equações da continuidade (2-19) e a de Euler (2-27), onde a primeira trata do estudo do movimento de matéria contínua, enquanto que a segunda é utilizada para descrever o movimento de fluidos ideais.

O fato do fluido ser irrotacional, $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$, nos permite escrever a velocidade como sendo o gradiente de um potencial velocidade $\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi$. Além disso, por ser barotrópico, o que significa que a densidade do fluido, ρ , depende apenas da pressão, p , podemos escrever a entalpia como:

$$h(p) = \int_0^p \frac{dp'}{\rho(p')}, \quad (3-30)$$

ou

$$\vec{\nabla}h = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p. \quad (3-31)$$

Primeiramente, obteremos uma equação de onda para o potencial velocidade. Para tanto, partiremos da equação de Euler, admitindo que $\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi$. Seguindo esse

procedimento e utilizando a propriedade:

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) , \quad (3-32)$$

temos que a equação de Euler, torna-se:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + h + \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \phi \right)^2 = 0 . \quad (3-33)$$

As ondas sonoras produzem alterações nas características do meio no qual se propagam. Em outras palavras, a onda provoca variações nas densidade, pressão e velocidade das partículas que constituem o fluido que preenche o meio de propagação. Formalmente, a propagação das ondas sonoras são descritas como sendo uma perturbação linear das variáveis dinâmicas, (ρ, p, ϕ) , isto é,

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \vartheta(\varepsilon^2) , \quad (3-34)$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \vartheta(\varepsilon^2) \quad (3-35)$$

e

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \vartheta(\varepsilon^2) , \quad (3-36)$$

onde o índice 0 indica as quantidades sem perturbação e o índice 1, as quantidades com perturbação em primeira ordem em ε . Naturalmente, as quantidades com o índice 0 devem satisfazer às equações (2-19) e (2-27). Por outro lado, para obtermos as equações descritas pelas quantidades rotuladas pelo índice 1, devemos efetuar uma perturbação linear em (2-19) e (2-27).

Fazendo uma perturbação na equação da continuidade, isto é, substituindo (3-34) em (2-19), obtemos:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}_0) = 0 \quad (3-37)$$

e

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{v}_0 - \rho_0 \vec{\nabla} \phi_1) = 0 . \quad (3-38)$$

Utilizando (3-35), fazendo uma expansão em serie de Taylor e levando em conta a condição barotrópica, a entalpia assume a seguinte forma:

$$h(p) = h(p_0 + \varepsilon p_1 + \vartheta(\varepsilon^2)) = h_0 + \varepsilon \frac{p_1}{\rho_0} + \vartheta(\varepsilon^2) . \quad (3-39)$$

Sabendo desses resultados, ao realizarmos a perturbação linear na equação de Euler, encontramos:

$$-\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + h_0 + \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \phi_0 \right)^2 = 0 \quad (3-40)$$

e

$$-\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_0} - \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 = 0 . \quad (3-41)$$

Usando (3-35) na condição barotrópica, $\rho = \rho(p)$, e fazendo uma expansão em série de Taylor, chegamos à expressão

$$\rho(p) = \rho(p_0 + \varepsilon p_1 + \vartheta(\varepsilon^2)) = \rho_0 + \frac{d\rho}{dp}(\varepsilon p_1) + \vartheta(\varepsilon^2) . \quad (3-42)$$

que comparada com (3-34), nos fornece

$$\rho_1 = \frac{d\rho}{dp} p_1 , \quad (3-43)$$

ou ainda, segundo a equação (3-41),

$$\rho_1 = c_s^{-2} p_0 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 \right) , \quad (3-44)$$

onde $c_s^{-2} \equiv d\rho/dp$.

Substituindo (3-44) em (3-38) podemos reescrever a equação da continuidade como

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left[c_s^{-2} \rho_0 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho_0 \vec{\nabla} \phi_1 - c_s^{-2} \rho_0 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi_1 \right) \vec{v}_0 \right] = 0 , \quad (3-45)$$

A equação de onda encontrada acima descreve a propagação do potencial velocidade. E, como essa possui as equações (3-41) e (3-43), que determinam p_1 e ρ_1 , respectivamente,

descreve completamente a propagação das perturbações acústicas (TONIATO, 2010). Ao compararmos (3-45) com a equação de onda,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}^2} = 0 , \quad (3-46)$$

identificamos que c_s é a velocidade local do som.

A equação descrita pelo potencial velocidade, numa perturbação acústica, pode ser escrita como

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_1) = 0 , \quad (3-47)$$

onde

$$f^{\mu\nu} \equiv \frac{\rho_0}{c_s^2} \begin{bmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots & & \dots \\ -v_0^i & \vdots & (c_s^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{bmatrix} \quad (3-48)$$

e $\partial_\mu = (\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, sendo que os índices gregos variam de 0 a 3 e os latinos de 1 a 3.

Fazendo

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} , \quad (3-49)$$

onde g é o determinante da matriz $g_{\mu\nu}$ (inversa de $g^{\mu\nu}$), a equação (3-47) torna-se

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_1) = 0 , \quad (3-50)$$

a qual é semelhante a equação de Klein-Gordon de um campo escalar sem massa, no espaço curvo quadrimensional descrito pela métrica $g_{\mu\nu}$.

Usando a relação (3-49), obtemos:

$$\det(f^{\mu\nu}) = (\sqrt{-g})^4 g^{-1} = g . \quad (3-51)$$

Por outro lado, ao calcularmos o determinante em (3-48), temos:

$$\det(f^{\mu\nu}) = -\frac{\rho_0^4}{c_s^2} . \quad (3-52)$$

Então, comparando a última equação com (3-51), chegamos a:

$$g = -\frac{\rho_0^4}{c_s^2} \Rightarrow \sqrt{-g} = \frac{\rho_0^2}{c_s} . \quad (3-53)$$

Assim, encontramos a matriz dos coeficientes da métrica contravariante:

$$g^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\rho_0 c_s} \begin{bmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \cdots & & \cdots \\ -v_0^i & \vdots & (c_s^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j) \end{bmatrix} \quad (3-54)$$

para obter a matriz covariante, basta calcular a inversa da matriz anterior. Para isso, precisamos escreve-la na forma (4x4), assim:

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{\rho_0 c_s} \begin{bmatrix} -1 & -v_{0x} & -v_{0y} & -v_{0z} \\ -v_{0x} & c_s^2 - (v_{0x})^2 & -v_{0x}v_{0y} & -v_{0x}v_{0z} \\ -v_{0y} & -v_{0y}v_{0x} & c_s^2 - (v_{0y})^2 & v_{0y}v_{0z} \\ -v_{0z} & -v_{0z}v_{0x} & -v_{0z}v_{0y} & c_s^2 - (v_{0z})^2 \end{bmatrix} \quad (3-55)$$

Daí, temos que a inversa é dada por:

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\rho_0}{c_s} \begin{bmatrix} -(c_s^2 - v_0^2) & \vdots & -v_0^j \\ \cdots & & \cdots \\ -v_0^i & \vdots & \delta^{ij} \end{bmatrix} . \quad (3-56)$$

Consequentemente, o elemento de linha acústico pode ser escrito como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{\rho_0}{c_s} [-c_s^2 dt^2 + (dx^i - v_0^i dt) \delta_{ij} (dx^j - v_0^j dt)] . \quad (3-57)$$

Esse resultado mostra que o som se propaga como se o espaço fosse curvo. Porém, para entendermos isso, devemos lembrar que, para obtermos essa equação, partimos das equações que descrevem a dinâmica dos fluidos em um espaço plano. Sendo assim, podemos afirmar que o fluido está se movendo em uma espaço plano, mas o fluido, quando o som interage com ele, sente os efeitos de um espaço curvo.

Fazendo a transformação de coordenadas

$$d\tau = dt + \frac{(\vec{v}_0 \cdot \vec{dx})}{c_s^2 - v_0^2} , \quad (3-58)$$

o elemento de linha (3-57) toma a forma

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s} \left[-(c_s^2 - v_0^2) d\tau^2 + \frac{(\vec{v}_0 \cdot \vec{dx})^2}{(c_s^2 - v_0^2)} + \vec{dx}^2 \right] . \quad (3-59)$$

Podemos observar que, ao fazermos essa mudança de coordenadas, transformamos a métrica acústica encontrada em (3-57) em uma métrica estacionária, já que os termos cruzados entre as coordenadas temporais e espaciais foram eliminados (TONIATO, 2010).

Por fim, assumindo que a velocidade do fluido é radial, isto é, $\vec{v}_0 = v_r \hat{r}$, chegamos a

$$ds^2 = \frac{\rho_0}{c_s} \left[-c_s^2 \left(1 - \frac{v_r^2}{c_s^2} \right) d\tau^2 + \left(1 - \frac{v_r^2}{c_s^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2 \right]. \quad (3-60)$$

O “espaço curvo” descrito por essa métrica é semelhante ao de Schwarzschild. Nela, podemos ver que haverá um horizonte de eventos quando a velocidade de fluido se tornar igual a do som. Neste caso, assim como a luz, que se propaga no espaço-tempo de Schwarzschild, não escapará da região delimitada pelo horizonte de eventos, as ondas sonoras que estiverem se propagando na região em que $v_r > c_s$ não conseguirão escapar, caracterizando, assim, o que chamamos de buraco negro acústico.

3.2 Cálculo da métrica acústica a partir da Lagrangiana

Na subseção anterior, descrevemos um buraco negro acústico a partir da propagação sonora em um fluido ideal. Agora, obteremos a métrica (3-57) de uma outra forma, partiremos da densidade lagrangiana não relativística, que tem por solução a equação de Schrodinger, escrevendo o potencial escalar em termos de quantidade hidrodinâmicas. assim, obteremos as equações de movimentos e, conseqüentemente, a métrica. A lagrangeana não relativística utilizada, será:

$$L = i\phi^+ \partial_0 \phi - \frac{1}{2m} \partial_j \phi^+ \partial^j \phi + b(\phi\phi^+)^2. \quad (3-61)$$

Como se trata de um modelo acústico, o potencial ϕ será descrito em função de variáveis hidrodinâmicas, essa aproximação é conhecida como aproximação de Madelung (PASHAEV E LEE, 2001). dessa forma, o potencial é descrito como:

$$\phi = \sqrt{\rho(\vec{x}, t)} e^{iS(\vec{x}, t)}, \quad (3-62)$$

sendo S a fase e ϕ a densidade. Assim, substituindo esse campo escalar na lagrangeana (3-61), obteremos:

$$L = \frac{i}{2}\partial_0\rho - \rho\partial_0S - \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{4\rho}\partial_j\rho\partial^j\rho + \rho\partial_jS\partial^jS \right) + b\rho^2 . \quad (3-63)$$

A partir da equação de Euler-Lagrange, obteremos as equações do movimento para S e ρ , utilizando a equação acima. dessa forma, temos:

$$\partial_j \left(\frac{\rho}{m}\partial^j S \right) - \partial_0\rho = 0 \quad (3-64)$$

e

$$-\frac{1}{2m}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\partial_j\partial^j\sqrt{\rho} + \partial_0S + \frac{1}{2m}\partial_jS\partial^jS - 2b\rho = 0. \quad (3-65)$$

Porém, o primeiro termo da última equação, que descreve a hidrodinâmica dos fluidos, é um termo de potencial quântico $1/\sqrt{\rho}(\partial_\mu\partial^\mu\sqrt{\rho})$ que é negligenciado na região hidrodinâmica. assim, devemos desconsiderá-lo (XIAN-RUI GE E SANG-JIN SIN, 2010).

Por outro lado, vimos na subseção anterior que, matematicamente, uma onda sonora pode ser representada a partir de uma perturbação das equações que descrevem a onda em um meio. Assim, as equações de movimento, descritas por S e ρ , seguem da seguinte forma:

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \vartheta(\varepsilon^2) \quad (3-66)$$

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon\rho_1 + \vartheta(\varepsilon^2), \quad (3-67)$$

Substituindo (3-67) em (3-64) e (3-65), obtemos as equações perturbadas para a fase e para a densidade, dadas respectivamente por:

$$\frac{1}{m}\partial_j(\rho_0\partial^j S_1 + \rho_1\partial^j S_0) - \partial_0\rho_1 = 0 \quad (3-68)$$

e

$$\partial_0 S_1 = \frac{1}{m}(\partial_j S_0\partial^j S_1) - 2b\rho_1 = 0. \quad (3-69)$$

Ao isolarmos ρ_1 na equação (3-69) e substituímos em (3-68), obteremos uma equação semelhante a (3-45). De modo análogo ao que foi feito na subseção anterior, vamos comparar a equação obtida com a equação de Klein-Gordon para encontrar a métrica. Assim, segue que:

$$\rho_1 = \frac{1}{2b} \left(\partial_0 S_1 + \frac{1}{m} \partial_j S_0 \partial^j S_1 \right) , \quad (3-70)$$

como foi dito, substituindo esta última equação em (3-68), chegamos a:

$$-\partial_0 \left\{ \frac{1}{2b} [\partial_0 S_1 + v_{0j} \partial^j S_1] \right\} + \partial_j \left\{ \frac{\rho_0}{m} \partial^j S_1 - v_{0j} \left[\frac{1}{2b} (\partial_0 S_1 + v_{0k} \partial^k S_1) \right] \right\} = 0 , \quad (3-71)$$

onde $v_{0j} = \partial_j S_0 / m$ é a velocidade. colocando $1/2b$ em evidência, temos que a velocidade do som é dada por $c_s^2 = 2b\rho_0$ (redefinindo $\rho_0/m = \rho$). Assim, a equação de onda acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$-\partial_0 \left\{ \frac{\rho_0}{c_s^2} [\partial_0 S_1 + v_{0j} \partial^j S_1] \right\} + \partial_j \left\{ \frac{\rho_0}{c_s^2} [c_s^2 \partial_j S_1 - v_0^j (\partial_0 S_1 + v_{0k} \partial^k S_1)] \right\} = 0 , \quad (3-72)$$

ao escrevermos as derivadas em termos do operador ∇ , temos:

$$-\partial_0 \left\{ \frac{\rho_0}{c_s^2} [\partial_0 S_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} S_1] \right\} + \vec{\nabla} \cdot \left\{ \frac{\rho_0}{c_s^2} [c_s^2 \vec{\nabla} S_1 - v_0 (\partial_0 S_1 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} S_1)] \right\} = 0 , \quad (3-73)$$

como previsto, obtemos uma equação de onda semelhante a (3-45), que foi obtida considerando a propagação de uma onda sonora em um fluido e que após alguns cálculos, foi obtida a métrica (3-56). Daí, podemos perceber que partindo de (3-73) chegaremos a mesma métrica, já que os passos a serem seguidos serão os mesmos.

4 Considerações finais

Neste trabalho, estudamos a analogia que pode ser feita entre um som que propaga-se em um fluido e um buraco negro gravitacional.

Observamos que quando um fluido em movimento interage, com o som a uma velocidade supersônica, uma região de buraco negro acústico é criada. Para tanto, inserimos perturbações de primeira ordem nas equações que descrevem a dinâmica de um fluido

ideal e, como consequência, obtivemos a métrica semelhante a do buraco negro de Schwarzschild. Também conseguimos descrever essa analogia partindo de uma lagrangiana que, quando perturbada, nos leva a uma métrica efetiva idêntica a que foi obtida à partir das equações do fluido.

Vale salientar que fizemos todo tratamento considerando um fluido não-relativístico. Uma análise posterior seria fazer toda a discussão admitindo um fluido relativístico.

ANALOG ACOUSTIC BLACK HOLE

Ronaldo Marcelino Felix de Andrade¹

ABSTRACT

The Black holes are regions where, inside, gravity is extremely strong, so we could not get any information from “ objects’ that are within that region. In this region, the star collapses, more and more, until all its matter is concentrated in such a small area, but so small that the laws of physics as we know, are not worth more. We say that a singularity in space-time was created. The boundaries of these regions are called event horizon. The black holes are solutions of the Einstein field equations, Karl Schwarzschild was the one who developed in 1915 the first exact solution of these equations for the limiting case of a spherical mass without rotation. This solution led us to the concept known Schwarzschild’s radius which is the size horizon black hole event without rotation. When a fluid disturbed by sound waves reaches a speed greater than the speed of sound, the fundamental equations which describe the behavior of these fluids behave in a manner analogous to a black hole, what we call acoustic black holes.

Keywords: Black Holes, Fluids, Acoustic Black Holes.

¹Undergraduate Degree in Physics from the State University of Paraíba

5 Referências

CARMELI, M., **Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory**. New York: John Wiley and Sons, 1982.

Çengel, Y.A; Cimbala, J.M. 2007. *Mecânica dos Fluidos - Fundamentos e Aplicações*, McGraw-Hill Interamericana do Brasil Ltda, 819 p.

JACOBISON, A; PARENTANI, Renaud. An Echo of Black holes. *Scientific American*. vol 293, nº 6, dezembro, 2005.

LUNA, Gabriela Coltinho. **Radiação Hawking de um Buraco Negro Acústico Não-Comutativo**. 61 folhas. Dissertação (mestrado) - Física, Universidade Federal de Campina Grande, 2016.

MATSAS, G. E. A. Gravitação semiclássica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, n. 1, p. 137 - 145, (2005).

TONIATO, Júnior Diniz. **Modelo Acústico Análogo ao Buraco Negro de Schwarzschild**. 73 folhas. Dissertação (mestrado) - Física, Universidade Federal do Espírito Santo, 2010.

SYMON, Keith R. *Mecânica*. Rio de Janeiro: Campos, 1996.

VISSER, Matt. Acoustic black holes: horizons, ergospheres, and Hawking radiation. **Classical and Quantum Gravity**, Saint Louis, vol 15, dezembro, 1998.