



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANA CLÁUDIA GOMES GUIMARÃES

ALGUNS TÓPICOS DA TEORIA DOS GRAFOS E APLICAÇÕES

Campina Grande- PB

Junho de 2015

ANA CLÁUDIA GOMES GUIMARÃES

ALGUNS TÓPICOS DA TEORIA DOS GRAFOS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia - CCT da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB , em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduada no Curso de Licenciatura em Matemática .

Orientadora: Prof. Dra. Maria Isabelle Silva

Campina Grande - PB

Junho de 2015

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

G963a Guimaraes, Ana Claudia Gomes
Alguns tópicos da teoria dos grafos e aplicações [manuscrito] /
Ana Claudia Gomes Guimaraes. - 2015.
32 p. : il. color.

Digitado.

Monografia (Graduação em MATEMÁTICA) - Universidade
Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.

"Orientação: Profa. Dr^a Maria Isabelle Silva, Departamento
de Matemática".

1. Teoria dos Grafos. 2. Emparelhamento. 3. Aplicações. I.
Título.

21. ed. CDD 516.15

ANA CLÁUDIA GOMES GUIMARÃES

ALGUNS TÓPICOS DA TEORIA DOS GRAFOS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia - CCT da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduada no Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em: 19/06/2015

COMISSÃO EXAMINADORA

Maria Isabelle Silva

Prof. Dra Maria Isabelle Silva
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
ORIENTADORA

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Prof. ms Kátia Suzana Medeiros Graciano
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
EXAMINADORA

Walber Santiago Colação

Prof. ms Walber Santiago Colação
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
EXAMINADOR

Agradecimentos

A Deus, o único que é Digno de receber a honra e glória, que me presenteia dia após dias com muitas bênçãos, me capacitando, abrindo muitas portas para alcançar meus objetivos, enchendo-me de sabedoria para que eu pudesse está concretizando este trabalho;

Aos meus Pais, João Antonio e Eurídice Maranhão, os quais me ajudaram desde o dia dos meus primeiros passos de vida até hoje, sempre me aconselhando com muito amor, carinho, paciência e respeito;

A minha orientadora Dra Maria Isabelle Silva, a qual é uma das professoras que me ajudou muito durante o curso, sempre tirando minhas dúvidas e me auxiliando no que fosse possível;

A todos os professores que estudei durante esse curso, onde contribuíram significativamente para minha carreira profissional, onde guardarei e tentarei colocar em prática a todas as qualidades boas que percebi em cada professor;

Aos amigos: Ataniel Santos e Diego Heverton, o quais me ajudaram bastante para concretização deste trabalho;

A todos aos amigos que conquistei durante este curso, podendo desfrutar de muitos momentos de alegria, tornando as minhas manhãs mais felizes;

A todos aqueles que me deram forças para que eu continuasse no curso e não desistisse em meio as lutas, uma vez que não há vitórias sem lutas.

Resumo

No presente trabalho estudamos alguns tópicos da Teoria dos grafos, em especial as Aplicações de Grafos. Tendo em vista, que o conhecimento dessa Teoria é de bastante utilidade para facilitar e resolver muitos problemas que estão presentes em nosso cotidiano. Dessa forma, estudamos as definições de alguns subconjuntos pertencentes a essa teoria, demonstrando alguns fundamentos teóricos dos mesmos, os quais introduzem alguns conceitos da teoria, como: Grau de um vértice, árvores, caminho, conexão, entre outros conceitos. Foi visto algumas definições que foram fundamentais para entender as aplicações, onde utilizemos alguns exemplos do cotidiano para obtenção de um melhor entendimento da Teoria dos Grafos. Analisamos as definições de Emparelhamentos de Grafos, em especial focamos o estudo nas aplicações de Grafos, onde estas aplicações estão presentes em algumas situações reais, tais como: problemas de atribuição pessoal que estão voltados para a designação de tarefas em um determinado campo de trabalho; resolve também situações como a formação de pares em um determinado conjunto de pessoas ou de objetos; presente também em ligações entre redes de computadores com o objetivo de melhorar o serviço e minimizar os custos financeiros; entre outras aplicações.

Palavras-chave: Teoria dos grafos, Emparelhamento de Grafos, Aplicações de Grafos.

Abstract

In the present work we study some topics of the graph theory, in special the graph applications. Having in view, that the knowledge of this theory is of enough usefulness to make easy and to resolve many problems that are present in our life. Thus, we study the definitions of some subsets pertaining to this theory, demonstrating some theoretical bases of same, which introduce some concepts of the theory, like: Degree of a vertices, trees, path, connection, between other concepts. It was seen some definitions that were basic to understand the applications, where we use some examples of the daily life for getting a better understanding of the graph theory. We analyse the definitions of graph pairing, in special we focus the study in the graph applications, where these applications are present in some real situations, such as: problems of personal attribution that are turned for the tasks designation in a determined work field; it resolves also situations as the pairs formation in a determined set of persons or of objects; present also in connections between computers nets with the objective to improve the service and to minimize the financial costs; between other applications.

Keywords: Graph theory, pairing graph, graph applications.

Sumário

Introdução	1
1 O que é um Grafo?	4
1.1 Primeiras Definições	4
1.2 Grau de um Vértice	6
1.3 Seguindo com mais Definições	6
1.4 Isomorfismo	9
1.5 Outras Definições	9
1.6 Tipos de Grafos	10
1.7 Representações por Matrizes	14
2 Emparelhamento de Grafos	16
2.1 Conjuntos Independentes	16
2.2 Cliques	16
2.3 Emparelhamentos	17
2.4 Emparelhamentos em Grafos Bipartidos	18
2.5 Definições de alguns subconjuntos	19
3 Aplicações da Teoria dos Grafos	20
3.1 Aplicações de Grafos	20
Conclusão	29

Introdução

O principal marco referente ao surgimento da teoria dos grafos foi através do famoso Matemático Suíço do século XVIII, Leonard Euler. No qual, ele chegou a resolução de um problema geográfico das Pontes de Königsberg no ano de 1735, problema esse no qual os habitantes da cidade que atualmente é chamada de Kaliningrado na Rússia, estavam deveras intrigados com um problema que se apresentava em seus costumeiros passeios a duas ilhas do Rio Pregel. Essas ilhas ligavam-se às margens do rio por intermédio de seis pontes, além de uma sétima que interligava as duas ilhas. A razão para meditação repousava no fato de que nenhum dos costumeiros frequentadores do local era capaz de percorrer essas sete pontes sem passar mais de uma vez por uma delas. Leonard Euler tornando-se conhecedor desse problema, desenvolveu e apresentou à Academia de S. Petersburgo a primeira demonstração da impossibilidade de resolução do referido problema.

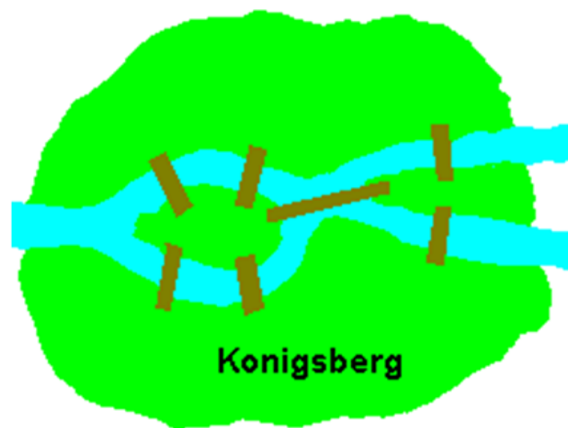


Figura 1: Ponte de Königsberg

<http://www.seara.ufc.br>

Leonard fez uma representação esquemática demonstrando que era impossível percorrer toda a figura sem levantar o lápis do papel (o que equivaleria passar por todas as pontes)

e sem percorrer mais de uma vez a mesma aresta, a qual foi a primeira notícia do emprego de uma figura sintética, retratando fielmente uma circunstância de ordem e continuidade, na demonstração de uma propriedade geométrica, sendo denominada de *grafo*.

Ao resolver o problema, o Matemático notou que podia simplificar o desenho de modo que, as terras seriam os pontos (vértices) e as pontes seriam os arcos(arestas).

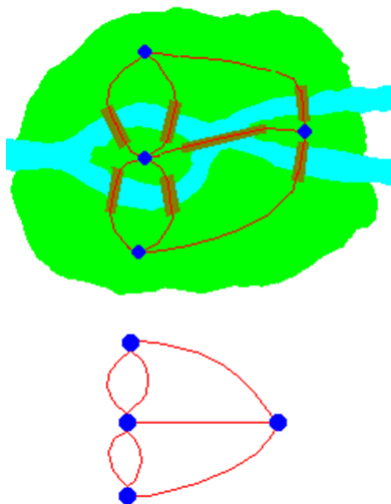


Figura 2: Primeiro Esquema da Ponte de Königsberg

<http://www.seara.ufc.br>

Euler demonstrou que o problema das Pontes não tinha solução, o qual generalizou o resultado e enunciou o teorema em três regras:

- Se há mais de duas áreas às quais leva um número ímpar de pontes, então tal entrada e saída é impossível.
- Se entretanto, o número de pontes for ímpar para exatamente duas áreas, então é possível se começar em qualquer dessas áreas.
- Se finalmente, não existem áreas às quais levam um número ímpar de pontes, então a jornada é possível, iniciando-a a partir de qualquer área.

Esse problema e sua solução foi essencial para inaugurar um nova área da Matemática chamada Topologia, dando assim início a teoria dos grafos.

A teoria dos grafos estuda objetos combinatórios denominados grafos, onde essas estruturas são bastante utilizadas nas áreas da matemática, informática, entre outras, pois relaciona objetos de um determinado conjunto. Vendo a importância do conceito de grafo e suas aplicações em diversos setores na sociedade, será feito um estudo de algumas definições matemáticas, onde será visto também teoremas com suas respectivas demonstrações, e sobretudo as aplicações desses conceitos no cotidiano, uma vez que é de grande importância tornar-se conhecido e aplicável em situações reais da sociedade, para assim facilitar a resolução de problemas do dia-à-dia.

O objetivo principal desse trabalho é estudar as Aplicações da Teoria de Grafos, os quais além de serem bastante interessantes, estão presente em muitas situações do nosso cotidiano, mas que é tão pouco explorado em termo de conhecimento.

Desta forma, o trabalho ficou dividido na seguinte estrutura:

No Capítulo I estudamos algumas definições da Teoria dos Grafos que são necessários para o entendimento das Aplicações de Grafos, tais como: Definição de Grafos, Grau de um Vértice, alguns teoremas de alguns conceitos da teoria dos grafos, Isomorfismo, Tipos de Grafos, entre outras definições.

No Capítulo II estudamos o conceito de Emparelhamento de Grafos, estudamos alguns teoremas com suas respectivas demonstrações relacionados com Emparelhamentos.

No Capítulo III estudamos As Aplicações de Grafos, abordando alguns problemas com situações reais do cotidiano da sociedade. O conhecimento da Teoria de Grafos contribui para solucionar muitos problemas que nos deparamos no dia-à-dia, mostrando se há possibilidade ou não de chegar a uma solução satisfatória.

Capítulo 1

O que é um Grafo?

1.1 Primeiras Definições

Semânticamente a palavra grafo está relacionada a desenho sobre a independência de um sistema de coordenadas cartesiano, mas é caracterizado como uma forma de representação de um conceito ou ideia por meio de ilustração ou escrita.

Um grafo é um conjunto $G = (V, A)$, onde:

V – conjunto não vazio: os **vértices** do grafo;

A – conjunto de pares ordenados $a = (v, w)$, em que v e $w \in V$: as **arestas** do grafo.

Vamos exemplificar com uma situação prática do cotidiano.

Exemplo

Numa escola algumas turmas resolveram realizar um torneio de vôlei. Participam do torneio as turmas $6A, 6B, 7A, 7B, 8A, e 8B$. Alguns foram realizados até agora:

$$\begin{array}{ll} 6A \text{ jogou com} & 7A, 7B, 8B \\ 6B \text{ jogou com} & 7A, 8A, 8B \\ 7A \text{ jogou com} & 6A, 6B \\ 7B \text{ jogou com} & 6A, 8A, 8B \\ 8A \text{ jogou com} & 6B, 7B, 8B \\ 8B \text{ jogou com} & 6A, 6B, 7B, 8A \end{array} \tag{1.1.1}$$

Outra maneira de representar esse torneio de vôlei é através de uma estrutura de grafo.

Veja na figura 1.1

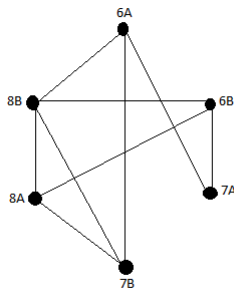


Figura 1.1: Grafo do Campeonato de Vôlei

Apresentamos duas formas corretas de representar esta estrutura:

- Por uma lista, dizendo quem se relaciona com quem.
- Por um desenho, isto é, uma representação gráfica.

Para uma melhor definição do grafo, deve-se analisar a presença de dois conjuntos:

- O conjunto V , dos **vértices**– no nosso exemplo, o conjunto das turmas.
- O conjunto A , das **arestas**– no nosso exemplo, são os jogos realizados

Vértices adjacentes são vértices que são ligados por uma aresta, isto é, quando a aresta é incidente aos vértices. No exemplo do campeonato de vôlei podemos representar o grafo de forma sucinta, como:

$$V = \{6A; 6B; 7A; 7B; 8A; 8B\}$$

$$A = \{(6A; 7A); (6A; 7B); (6A; 8B); (6B; 7A); (6B; 8A); (6B; 8B); (7B; 8A); (7B; 8B); (8A; 8B)\}$$

O número de vértices é simbolizado por $|V|$ ou pela letra n .

O número de arestas é simbolizado por $|A|$ ou pela letra m .

No nosso exemplo, temos $n = 6$ e $m = 9$.

1.2 Grau de um Vértice

Grau de um vértice é o número de vezes que as arestas incidem sobre o vértice v , o qual é simbolizado por $d(v)$.

No grafo da figura-1, podemos ver que o vértice $6A$ tem 3 arestas ligadas a ele, ou seja, $d(6A) = 3$; o vértice $7A$ tem 2 arestas ligadas a ele, ou seja, $d(7A) = 2$, e assim por diante.

Teorema 1.1. *Para todo grafo G*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2.m$$

Isto é: "A soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas".

Demonstração. Quando Contamos os graus dos vértices estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes.

□

Corolário 1.2. Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar.

Demonstração. Se tivéssemos um número ímpar de vértices de grau ímpar a soma dos graus seria ímpar. Mas a soma dos graus é o dobro do número de arestas e, portanto é um número par.

□

1.3 Seguindo com mais Definições

Laço É um conceito atribuído a uma aresta que conecta um vértice a ele mesmo. Por exemplo, ao construir um grafo em que $V = \{2,3,4,5,6\}$ e dois vértices estarão ligados quando tiverem um divisor comum (diferente de 1).

Pela definição do grafo vemos que o 5 não está ligado a nenhum outro vértice, mas tem um laço (como aliás todos os outros vértices deste grafo). Para haver coerência com os resultados da seção anterior, temos que contar o laço duas vezes (uma para cada extremidade) quando calcularmos o grau do vértice. No nosso exemplo:

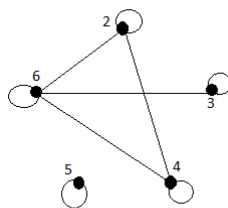


Figura 1.2: Grafo com Laços

$$d(2) = 4; d(3) = 3; d(4) = 4; d(5) = 2; d(6) = 5$$

e o teorema continua valendo.

- **Multigrafo** É o nome especial dado a um grafo, quando há dois vértices ligados por mais de uma aresta, ou quando o grafo apresenta laço. Na figura 1.3 temos um exemplo de Multigrafo.

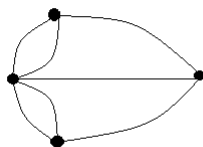


Figura 1.3: Multigrafo

- **Grafos simples** São grafos sem laços ou arestas múltiplas.
- **Caminho** é definido como uma sequência de vértices, tal que cada aresta está ligado aos vértices da sequência e nenhum vértice aparece mais de uma vez nessa sequência. O **comprimento do caminho** é o número de arestas que o caminho tem. O primeiro vértice é chamado de vértice inicial e o último é chamado de vértice final. Pode ser representado por P_n

Nesse grafo G da figura 1.4, o Caminho percorrido de V_1 a V_5 é a sequência: $v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4v_5$.

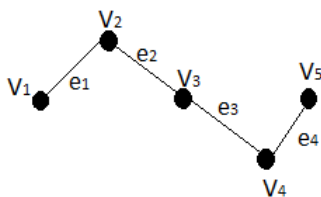
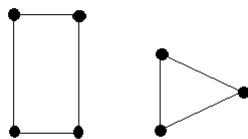
Figura 1.4: P_4 

Figura 1.5:

A figura a seguir 1.5, é um problema de grafo, em que surge uma interrogação: Nessa figura há um grafo ou dois grafos?

Depende da situação. Em princípio parecem dois grafos distintos, onde podem-se ser considerados assim. Mas pode-se pensar que esse grafo representa as ligações entre casas de uma cidade onde passa um rio (Veja figura 1.6).

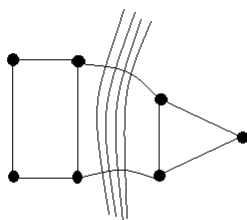


Figura 1.6:

Se as pontes forem destruídas em um temporal a cidade ainda é uma só, apenas foi **desconectada**. O grafo da figura 1.5 poderia ser o que denominamos de grafo desconexo. Cada parte conexa do grafo (no exemplo o *quadrado* e o *triângulo*) é chamada de **componente conexa do grafo**. Afirma-se que um grafo é **conexo** se qualquer par de pontos são ligados por ao menos um caminho.

Em um grafo G , outra forma de definição de conexidade é observar, se e somente se, existe um caminho entre quaisquer dois vértices de G . As componentes conexas podem ser vistas como as **classes de equivalência** da relação:

$$x \simeq y \text{ se, e somente se, existe um caminho ligando } x \text{ a } y$$

1.4 Isomorfismo

Dois grafos G_1 e G_2 são ditos **isomorfos** se existe a mesma quantidade de vértices e apresentam uma correspondência 1-a-1 entre seus conjuntos de vértices que preserve as adjacências.

Vejam os um exemplo:

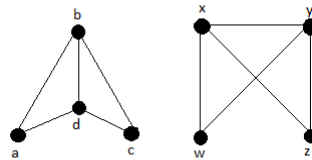


Figura 1.7:

Vamos estabelecer uma correspondência 1-1 entre os conjuntos de vértices:

$$\begin{aligned} f : a &- w \\ &b - x \\ &c - z \\ &d - y \end{aligned}$$

Esta função funciona perfeitamente. Se tomarmos uma aresta no primeiro grafo (digamos (a,d)) a função fará a correspondência com (w,y) que é uma aresta no segundo grafo. Se tomarmos dois vértices que não são ligados por uma aresta (digamos a e c) a função irá corresponder com os vértices $(w$ e $z)$ que também não estão ligados.

1.5 Outras Definições

Vizinhança aberta de v é o conjunto de vértices adjacentes a v , onde é denotado por $N(v)$.

Vizinhança fechada de v é o conjunto de vértices adjacentes a v e o próprio vértice. É

denotada e definida por $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.

Por exemplo, no grafo do campeonato (figura 1.1), temos:

$$N(7B) = \{6A; 8A; 8B\} \text{ e } N[7B] = \{6A; 7B; 8A; 8B\}$$

Um vértice é dito **isolado** quando é de grau zero; um vértice de grau 1 é chamado de **pendente**.

A **sequência de graus de um grafo** G é a sequência formada pelos graus dos vértices do grafo em ordem decrescente. Por exemplo a sequência de graus do grafo do campeonato é $(4, 3, 3, 3, 3, 2)$.

Grau mínimo de G é o menor grau de um vértice em G , denotado por $\delta(G)$. **Grau máximo de** G é o maior grau de um vértice em G , denotado por $\Delta(G)$. No caso do campeonato temos: $\delta(G) = 2$ e $\Delta(G) = 4$.

Um **Subgrafo** G_1 de um grafo G é definido como um grafo cujo conjunto de vértices é um subconjunto do conjunto de vértices G e o conjunto de arestas é um subconjunto do conjunto de arestas de G . Por exemplo, na figura 1.7 temos que: $V(G_1) \subseteq V(G)$ e $A(G_1) \subseteq A(G)$.

Seja o grafo G^2 , chama-se G^2 **Subgrafo induzido** de G , se ele tem todas as arestas que aparecem em G sobre o mesmo conjunto de vértices. Na figura 1.8, vemos: O grafo G_2 , o qual é um subgrafo induzido pelo subconjunto $\{a, b, c, d\}$ de $V(G)$, pois todas as arestas incidentes aos vértices de a, b, c, d em G estão presentes em G_2 .

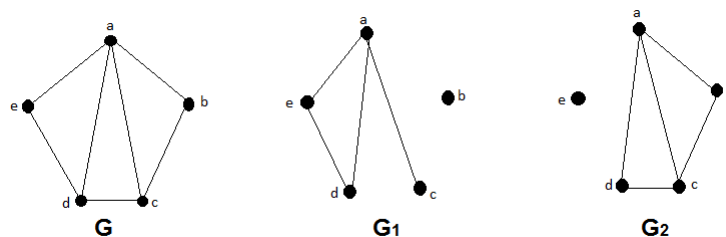


Figura 1.8:

1.6 Tipos de Grafos

- **Grafo Completo** é um grafo G onde todo par de vértices é ligado por uma aresta. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n . No grafo G da figura 1.9 temos um K_6

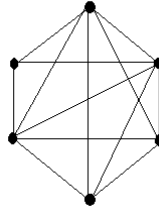


Figura 1.9: Grafo Completo K_6

- **Grafo Complementar** : Seja G um grafo, um grafo \overline{G} é dito complementar de G se \overline{G} possui o mesmo conjunto de vértices de G e a presença das arestas que faltam em G . Na figura 1.10 tem-se um exemplo de dois grafos complementares.

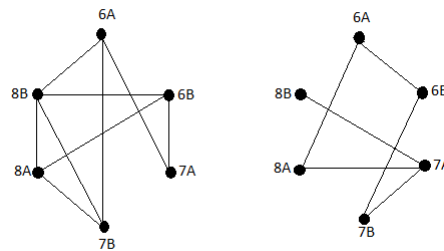


Figura 1.10: Dois Grafos Complementares

- **Grafo Nulo ou vazio**. Um grafo G é nulo quando seu conjunto de arestas $A(G)$ é vazio, ou seja, há presença só do conjunto de vértices. Por exemplo, No grafo representando o Campeonato de vôlei do primeiro exemplo mostrado no início do capítulo, antes de começar o campeonato nenhum jogo havia sido jogado. O grafo ficaria como na figura abaixo:



Figura 1.11: Grafo nulo ou vazio

- **Grafo Regular** É um grafo G que possui o mesmo grau (K), em todos os vértices. É representado por $(k - regular)$. Na figura 1.12, vemos um grafo $3 - regular$, isto é, todos os vértices tem grau 3.

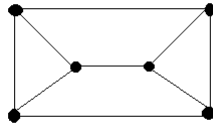


Figura 1.12: Grafo k -regular de grau 3

- **Ciclo** É um grafo conexo regular de grau 2, ou também pode ser definido de caminho fechado, ou seja, $v_0 = v_s$. A notação é C_n

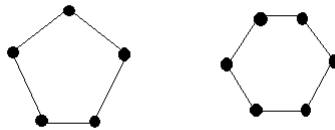


Figura 1.13: C_5 e C_6

- **Árvore:** É um grafo conexo sem ciclos. Nota-se que o fato de não ter ciclos faz com que a árvore seja a maneira mais "econômica" de conectar os vértices.

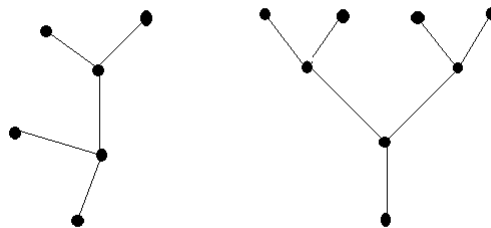


Figura 1.14: Exemplo de árvores

- **Grafos bipartidos** : É um grafo em que o conjunto V de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos distintos V_1 e V_2 , tal que toda aresta de G tem uma extremidade em V_1 e outra em V_2 . Os subconjunto V_1 e V_2 são chamados **subconjuntos independente de vértices do grafo G** , pois não há arestas ligando dois vértices de um mesmo subconjunto.

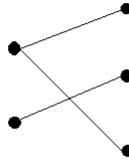
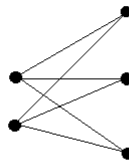


Figura 1.15: Grafo Bipartido

- **Grafos Bipartidos Completos** É um grafo bipartido em que todos vértices de V_1 são ligados a todos os vértices de V_2 . Notação $K_{p,q}$.

Figura 1.16: Grafo bipartido completo $K_{2,3}$

1.7 Representações por Matrizes

Outra maneira de representar estruturas de grafos é por meio de matrizes. Veremos dois tipos de matrizes: Matriz de adjacência e matriz de incidência.

- **Matriz de Adjacência** Trata-se de uma matriz de ordem n (a mesma de G), na qual associa cada linha e cada coluna a um vértice. É a matriz definida por:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } ij \in A(G) \\ 0, & \text{se } ij \notin A(G) \end{cases} \quad (1.7.1)$$

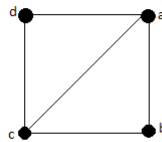


Figura 1.17:

Considere o grafo G da figura 1.17, a matriz de adjacência associada a ele é:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- **Matriz de Incidência** é a matriz $n \times m$, onde n e m representando, respectivamente, os vértices e as arestas, na qual cada linha corresponde a um vértice e cada coluna correspondem as arestas, sendo então definida por:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } e_j \text{ é incidente em } v_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A partir da figura do grafo G , sua matriz de incidência é:

	ab	ac	ad	bc	cd
a	1	1	1	0	0
b	1	0	0	1	0
c	0	1	0	1	1
d	0	0	1	0	1

Teorema 1.2. *Um grafo G é bipartido, se e somente se, não contém ciclos de comprimento ímpar*

Demonstração.

(\Rightarrow) Seja G bipartido. Se não houver ciclo em G , não há o que mostrar. Se há um ciclo em G este alterna vértices de V_1 e V_2 , dois subconjuntos independentes e disjuntos. Por exemplo, partindo de V_1 , para retornar ao ponto de partida teremos que utilizar um número par de arestas. O ciclo é, portanto, de comprimento par.

(\Leftarrow) considerando apenas grafos conexos. Seja G um grafo sem ciclos ímpares. Vamos particionar seu conjunto de vértices em dois subconjuntos V_1 e V_2 , independentes e disjuntos. Tomamos primeiramente um vértice qualquer v . O subconjunto V_1 será formado por todos os vértices w , tais que exista um caminho de comprimento par entre v e w . O subconjunto V_2 será formado por todos os vértices w , tais que exista um caminho de comprimento ímpar entre v e w . Os conjuntos V_1 e V_2 são disjuntos, pois se w estivesse em V_1 e V_2 ao mesmo tempo, haveria um caminho de comprimento par e um caminho de comprimento ímpar ligando v a w . Esses dois caminhos podem se cruzar (ou não) antes de chegar em w , produzindo alguns ciclos. Como o número de arestas usado nestes ciclos é ímpar, o qual é a soma do número de arestas dos dois caminhos, isso produziria pelo menos um ciclo Ímpar em G , contrariando a hipótese.

□

Capítulo 2

Emparelhamento de Grafos

Este capítulo aborda o conteúdo de emparelhamento em grafos, onde veremos algumas definições fundamentais para o entendimento do mesmo, teoremas e alguns tipos de exemplos para uma melhor compreensão do assunto abordado.

2.1 Conjuntos Independentes

Um conjunto independente de um grafo G é um conjunto S de vértices de G , tal que não existem dois vértices adjacentes contidos em S . Em outras palavras, se a e b são vértices quaisquer de um conjunto independente, não há aresta entre a e b .

Todo grafo tem ao menos um conjunto independente: o conjunto vazio. Um grafo pode ter vários conjuntos independentes distintos.

Se S é um conjunto independente de G e não existe um conjunto independente de G maior que S , diz-se que S é um **conjunto independente máximo de G** .

2.2 Cliques

Clique de um grafo G , é um subgrafo completo, em que seus vértices são interligados ou adjacentes dois a dois.

O número de clique de G é o número de vértices da clique máxima, denotado por $\omega(G)$.

Nesse grafo G da figura 2.1, tem-se um clique, no conjunto de vértices 2, 3 e 4.

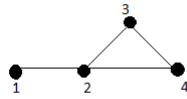


Figura 2.1:

2.3 Emparelhamentos

Dado um grafo $G = (V, A)$, um **emparelhamento** em G é definido como um conjunto independente de arestas, ou seja, duas arestas do emparelhamento não compartilham um mesmo vértice.

Emparelhamento maximal é um emparelhamento que não pode ser aumentado, ou seja, é um emparelhamento que não se pode acrescentar nenhuma outra aresta de G que mantenha um emparelhamento. Ver figura 2.2

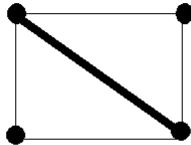


Figura 2.2: Grafo com emparelhamento maximal

Emparelhamento máximo é um emparelhamento que contém o maior número de arestas possível. Ver figura 2.3. Quando o vértice é tocado pelo emparelhamento, diz-se que o **vértice é saturado**, enquanto os vértices que não são tocados pelo emparelhamento são ditos não saturados.

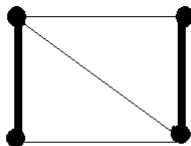


Figura 2.3: Grafo com emparelhamento máximo

Emparelhamento Perfeito de um grafo G é quando há um emparelhamento máximo que satura todos os vértices. Ver figura 2.4

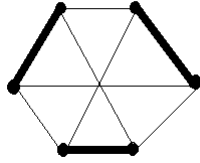


Figura 2.4:

Seja M um emparelhamento de um grafo G , um caminho entre dois vértices não saturados é dito M -**augmentante**, se ele alterna arestas de M e arestas de $G - M$. O grafo G da figura 2.2 é um exemplo de grafo com caminho M -*augmentante*

Teorema 2.1 (Berge). *Um emparelhamento M de um grafo G é máximo se, e somente se, não contém um caminho M -augmentante.*

Demonstração.

(\Rightarrow) Se há um caminho M -augmentante, podemos obter um emparelhamento, uma unidade maior adicionando as arestas do caminho fora de M ao emparelhamento e retirando as arestas em M do emparelhamento. A definição de caminho augmentante garante que o resultado é ainda um emparelhamento.

(\Leftarrow) Se M não é máximo, então existe M' máximo. Considere $D = M \Delta M'$, a diferença simétrica entre M e M' (isto é, o conjunto de arestas de M e M' que não pertencem a $M \cap M'$); como são emparelhamentos, os vértices em D têm grau no máximo 2. Logo, as componentes de D são ciclos pares (alternam arestas de M e M') ou caminhos. Como $|M'| \geq |M|$, uma das componentes, ao menos é um caminho alternando arestas de $|M'|$ e $|M|$ começando e terminando em M' . \square

2.4 Emparelhamentos em Grafos Bipartidos

Um das situações em que o emparelhamento é aplicado é em casos de formação de pares; se o grafo G é bipartido, uma aplicação para o emparelhamento é a formação de casais, onde é estudado de forma diferente.

Seja G um grafo bipartido com partições dos vértices X e Y . Dessa forma, diz-se que há um **emparelhamento de X em Y** quando um emparelhamento de G satura Y , (mas não necessariamente X).

Teorema 2.2. *Se $K > 0$, qualquer grafo k -regular bipartido admite um emparelhamento perfeito.*

Demonstração. Inicia-se contando as arestas pelas extremidades em X e Y , as partições de vértices. Cada aresta tem uma extremidade em X e outra em Y , logo $k \cdot |X| = k \cdot |Y|$ e, portanto $|X| = |Y|$. Considere $S \subseteq X$, tal que haja r arestas entre S e $N(S)$. Como G é k -regular, temos $r = k|S|$. Do lado de Y temos $r \leq k \cdot |N(S)|$. Logo, $k \cdot |S| \leq k \cdot |N(S)|$ e, finalmente, $|S| \leq |N(S)|$. \square

2.5 Definições de alguns subconjuntos

Coberturas de vértices é um subconjunto de vértices, tal que toda aresta é incidente a um vértice do conjunto. O número de cobertura de vértices de um grafo G é a cardinalidade da menor cobertura de vértice de G e denotado por $\beta(G)$

Coberturas de arestas é um subconjunto de arestas, tal que todo vértice é tocado por uma aresta do conjunto. O número de cobertura de arestas de um grafo G é a cardinalidade da menor cobertura de aresta de G , o qual é denotado por $\beta'(G)$

Capítulo 3

Aplicações da Teoria dos Grafos

Este capítulo aborda as aplicações da teoria dos grafos, em que essa teoria possibilita solucionar algumas situações-problemas, mostrando se é possível ter uma solução satisfatória para determinado problema.

3.1 Aplicações de Grafos

Problema de Atribuição Pessoal

O problema de atribuição ou de alocação pessoal tem como dados n funcionários e n posições numa empresa. Cada funcionário está qualificado a ocupar uma ou mais posições. É possível atribuir uma posição a cada funcionário, de modo que cada funcionário ocupe exatamente uma posição na empresa?

O problema de atribuição pessoal pode apresentar como dados adicionalmente, uma função que represente um valor numérico correspondente a eficiência do funcionário em ocupar determinada posição na empresa. O objetivo agora é encontrar uma atribuição ou uma alocação que maximize a eficiência total dos funcionários. O primeiro caso corresponde ao problema de emparelhamento perfeito, enquanto que o segundo corresponde ao problema de emparelhamento máximo em grafos bipartidos com pesos.

Exemplo

Uma Empresa de Contabilidade dispõem de alguns cargos como mostra a tabela 3.1. O objetivo desse problema é saber se é possível atribuir uma posição a cada funcionário, de modo que cada funcionário ocupe exatamente um cargo.

CARGOS \ FUNCIONÁRIOS	FUNCIONÁRIOS				
	Carla	João	Ricardo	Beatriz	Pedro
Presidência	x		x		
Secretariado	x				x
Marketing		x		x	
Administração		x		x	
Produção			x		x

Figura 3.1: Atribuições de uma Empresa de Contabilidade

O grafo G da figura 3.2 representa a tabela de Atribuições dessa Empresa

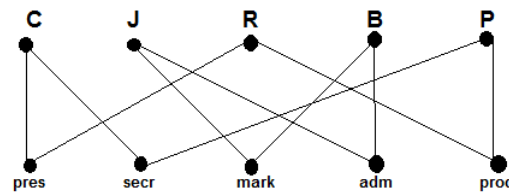


Figura 3.2: Grafo G representando as Atribuições de uma Empresa de Contabilidade

A solução desse problema está representado no grafo G da figura 3.3, o qual corresponde a um *Emparelhamento Perfeito*.

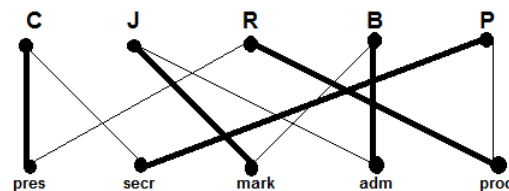


Figura 3.3: Grafo G com Emparelhamento Perfeito

Problema do Casamento

Numa dada festa n homens e n mulheres tem o objetivo comum que é dançar. Sabendo que cada uma dessas pessoas tem uma ordem de preferência em relação a sua escolha, será possível que todos consigam dançar? Qual o número máximo de pares que pode se formar obedecendo o gosto de cada pessoa?

Esse problema corresponde ao problema de emparelhamento de cardinalidade máxima em grafos bipartidos.

Exemplo

Numa festa de formatura 8 homens e 8 mulheres pretendem dançar. Para dançarem, cada pessoa tem uma preferência como mostra na tabela 3.4, por exemplo: Pedro gostaria de dançar com Carol ou com Diana. Dessa forma, será que todas as pessoas conseguem dançar e qual o maior número de casais que podem ser formados seguindo com a preferência de cada pessoa?

HOMENS \ MULHERES	ANA	CAROL	DIANA	BIA	LETÍCIA	MARIA	JAILMA	FABIANA
PEDRO		X	X					
GABRIEL					X	X		
TADEU	X	X		X				
WAGNER					X		X	
EMANUEL	X							X
NATANAEL			X			X		
RICARDO		X		X				
SANDRO							X	X

Figura 3.4: Tabela com as preferências pessoais na formação de casais

Grafo G representando a Tabela das preferências pessoais

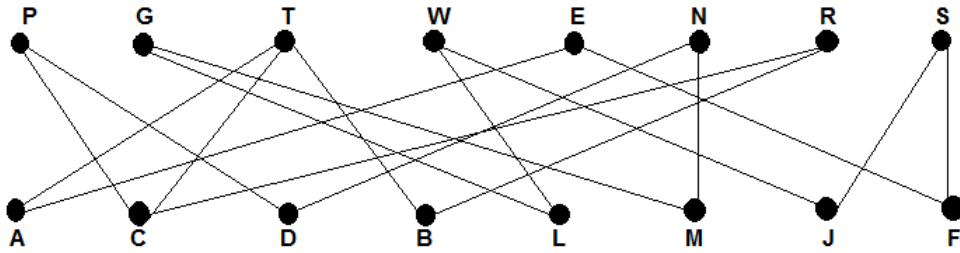


Figura 3.5: Grafo G com as preferências pessoais

A solução desse problema corresponde a um **Emparelhamento de Cardinalidade máxima em um grafo bipartido**, os quais serão formados no máximo sete casais obedecendo a preferência de cada pessoa. Ou seja, nesse problema apenas duas pessoas não conseguem dançar.

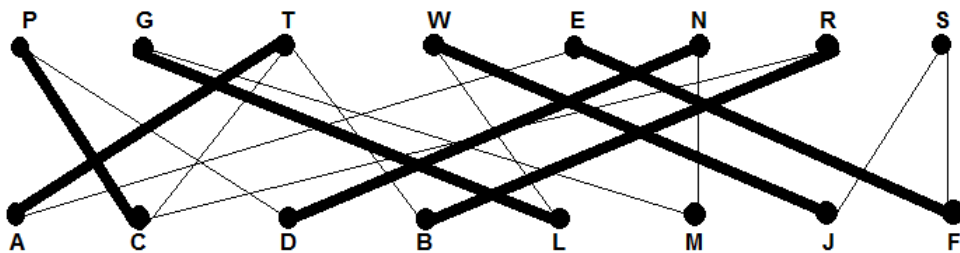


Figura 3.6: Grafo G com Emparelhamento de Cardinalidade Máxima

Problema de Preenchimentos de Vagas de uma Escola

Suponha que um comitê escolar esteja se decidindo sobre candidatos para vagas no corpo docente. O comitê tem vagas para professores em diversas categorias diferentes.

Na tabela da figura 3.7, temos um exemplo dos tipos de pedidos de emprego que um distrito escolar poderia receber para suas vagas. Um x abaixo do número do candidato significa que o candidato se qualifica para o cargo à esquerda do x. Por exemplo, O Candidato 1 está qualificado para lecionar no segundo ano e no terceiro ano e para ser um auxiliar bibliotecário. Os treinadores dão aulas de educação física quando não estão treinando, de modo que não

podem manter um dos cargos de ensino listados. O grafo será representado da seguinte forma: Os vértices são rotulados de 1 a 9 para os candidatos, e com A, S, T, M, I, B, e F para os cargos; de modo que existirá uma aresta ligando o vértice-candidato ao vértice-cargo, caso o candidato possa preencher determinado cargo. O objetivo desse problema é saber se é possível preencher todos os cargos dentre os candidatos considerados aptos. Caso seja possível, dê uma atribuição de pessoas aos cargos.

Cargo \ Candidato	Candidato								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Aux. bibliotecário	x		x	x					
Segundo ano	x	x	x	x					
Terceiro ano	x	x		x					
Matemática nível médio				x	x	x			
Inglês nível médio				x		x	x		
Treinador de Basquete						x	x	x	x
Treinador de Futebol					x	x		x	

Figura 3.7: Tabela com a primeira Amostra de candidaturas às vagas

Na figura 3.8 temos um grafo G representando a tabela da figura 3.7

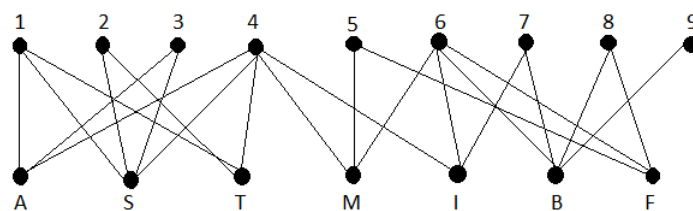


Figura 3.8: Grafo representando a tabela com a primeira amostra de candidaturas às vagas

A solução de tal problema corresponde ao **Problema de Emparelhamento Máximo em Grafos Bipartidos**. Em que a atribuição ficará da seguinte forma: Candidato 1 assumirá o cargo de Aux. Bibliotecário, Candidato 2 assumirá o cargo no segundo ano, Candidato 4 assumirá o cargo do terceiro ano, o Candidato 5 assumirá o cargo de Matemática nível médio, Candidato 6 assumirá o cargo de Inglês, Candidato 7 assumirá o cargo de Treinador de Basquete

e Candidato 8 assumirá o cargo de Treinador de Futebol. Tal atribuição está representado no grafo G na figura 3.9 .

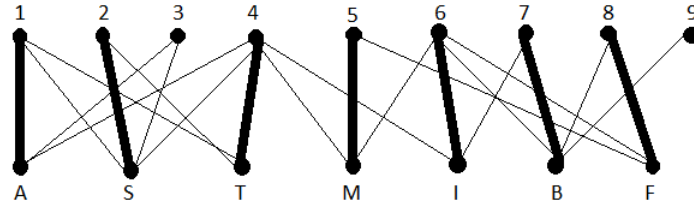


Figura 3.9: Grafo G com a solução do problema.

Na tabela 3.10 tem-se um segundo exemplo dos tipos de pedidos de emprego que um distrito escolar poderia receber para seus cargos. O objetivo desse problema é o mesmo do primeiro exemplo, ou seja, saber se é possível preencher todos os cargos dentre os candidatos considerados aptos. Caso seja possível, dê uma atribuição de pessoas aos cargos.

Cargo \ Candidato	Candidato								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Aux. bibliotecário				x	x				
Segundo ano	x	x	x						x
Terceiro ano	x	x		x			x		x
Matemática nível médio				x	x	x			
Inglês nível médio					x	x			
Treinador de Basquete	x		x			x	x	x	x
Treinador de Futebol				x	x	x			

Figura 3.10: Tabela com a Segunda Amostra de Candidaturas às vagas

O grafo G (figura 3.11) representa a tabela da segunda amostra de candidaturas às vagas.

Esse problema corresponde a um **emparelhamento máximo em grafos bipartidos**, onde não é possível encontrar uma atribuição que preencha todos os cargos, pois não existe um emparelhamento que sature os cargos solicitados.

Chama-se o conjunto $N(S)$ de todos os vértices adjacentes a pelo menos um vértice de S de *Vizinhança de S* ou *Vizinhos de S* . Nesses termos, não há emparelhamento que sature

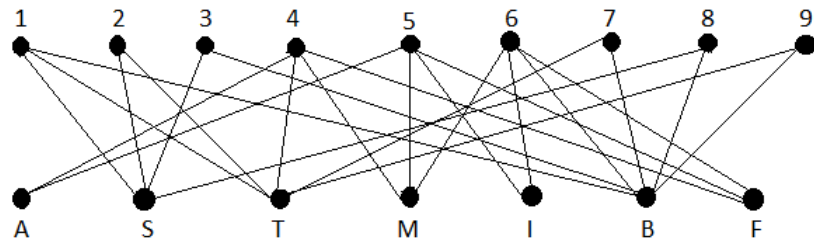


Figura 3.11: Grafo G com a segunda Amostra de candidaturas às vagas

uma parte de X de um grafo bipartido se houver um subconjunto S de X tal que o conjunto $N(S)$ dos vizinhos de S seja menor que S . A partir dessa definição, no grafo G desse exemplo representado na figura 3.11 tem-se um subconjunto:

$$S = \{A, M, I, F\}$$

$$N(S) = \{4, 5, 6\}.$$

Assim: *Os vizinhos de S é menor que o conjunto S*

O emparelhamento máximo fica da seguinte forma: $\{ \{A,4\}, \{S,2\}, \{T,7\}, \{M,5\}, \{I,6\}, \{B,8\} \}$, no qual está representado no grafo G da figura 3.12.

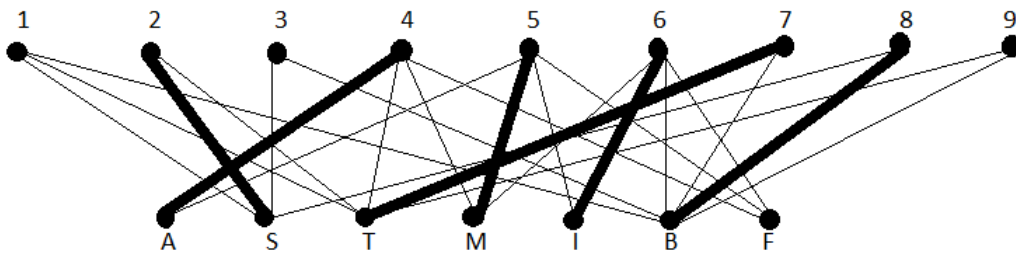


Figura 3.12: Grafo G representando a Segunda Amostra de candidaturas às vagas

Problema do Menor Caminho

Na figura 3.13, temos um grafo G representando um mapa estilizado de algumas cidades no leste dos Estados Unidos (Boston, Nova York, Pittsburgh, Cincinnati, Chicago, Memphis, Nova Orleans, Atlanta, Washington e Miami). Uma empresa tem escritórios principais com centros de processamento de dados em cada uma dessas cidades, e à medida que suas operações cresceram, ela alugou linhas de comunicação dedicadas entre certos pares dessas cidades para permitir a comunicação eficaz entre os sistemas de computação. Cada vértice no grafo G , representa um centro de dados, e cada aresta representa um enlace de comunicação dedicado. Qual é o número mínimo de enlaces que poderiam ser usados para enviar uma mensagem de B (Boston) para NO (Nova Orleans)?

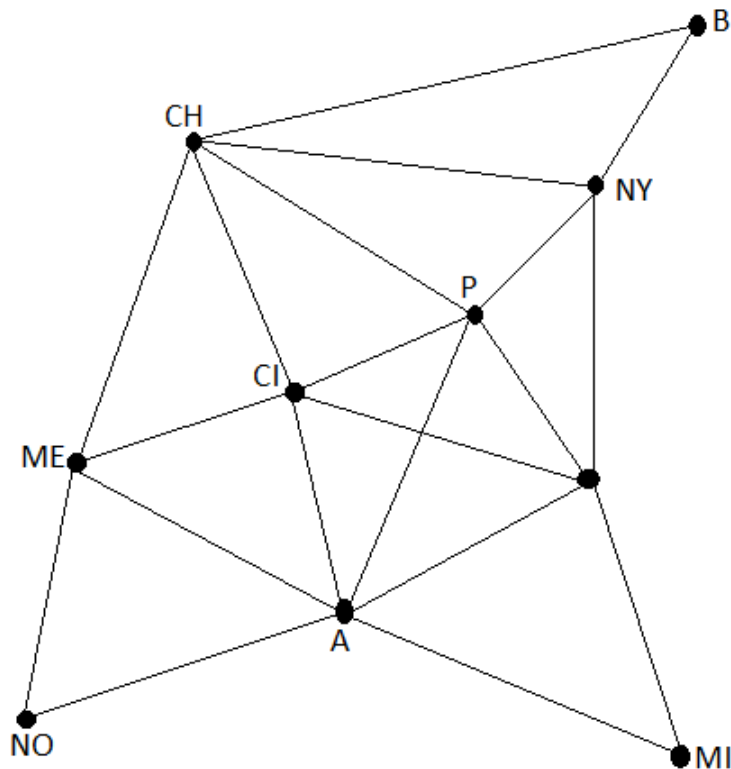


Figura 3.13: Grafo representando algumas cidades do Leste dos Estados Unidos

A solução desse problema corresponde ao problema do menor Caminho, que se dá por meio do menor Comprimento de um Caminho, ou seja, pelo caminho que contém o menor número de arestas. A sequência de vértices será: Boston(BO), Chicago(CH), Memphis(ME) e Nova Orleans(NO), o qual a notação é:

$B\{B,CH\} CH\{CH,ME\} ME\{ME,NO\} NO$

Ou também,

$B,CH,ME,NO.$

Conclusão

Com o estudo de alguns tópicos da teoria dos grafos e aplicações, temos que o objetivo foi alcançado, pois podemos compreender essa teoria por meio de um estudo bibliográfico, utilizando-se de exemplos com situações problemas que estão presentes no nosso cotidiano. A teoria dos grafos é um assunto que embora seja de bastante utilidade, mas que é tão pouco explorado e ensinado nos cursos de graduação. Dessa forma, com o estudo dessa teoria podemos perceber que a Matemática está presente e é de fundamental importância para responder e solucionar muitos problemas da sociedade.

Referências Bibliográficas

- [1] BOAVENTURA NETTO, P.O. **Teoria, Modelos, Algoritmos**. São Paulo, Editora Edgar Blucher Ltda, 1996.
- [2] LIMA, E. L. **Alguns Problemas Clássicos sobre grafos**.. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v.12, 1998, p 36-42, out. 2009.
- [3] LOVÁSZ, L. and M. D. plumer. **Matching Theory**,. Volume 29 of Annals of Discrete Mathematics. North-Holland, 1986.
- [4] LUCCHESI, C.L. **Introdução a Teoria dos Grafos.120**. Colóquio Brasileiro de Matemática. Impa(Instituto de Matemática Pura e Aplicada), 1979.
- [5] STEIN, Clifford. DRYSDALE, Robert L., BOGART, Kenneth. **Matemática Discreta para Ciência da Computação**. São Paulo, Pearson Education do Brasil, 2013.
- [6] SEARA DA CIÊNCIA. **Órgão de divulgação científica e tecnológica da Universidade Federal do Ceará: Euler e as pontes de Königsberg**.2015. Disponível em <http://www.searadaciencia.ufc.br/especiais/matematica/eulergauss/eulergauss4.htm>. Acesso em 02/03/2015.