UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAUDENOR SILVA TORRES

O ENSINO DE GEOMETRIA: UM RELATO DE CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS COM O USO DE MATERIAL MANIPULÁVEL

Campina Grande – PB

2016

CLAUDENOR SILVA TORRES

O ENSINO DE GEOMETRIA: UM RELATO DE CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS COM O USO DE MATERIAL MANIPULÁVEL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Estadual da Paraíba, Campus I, como parte dos requisitos para obtenção do título graduado em Licenciatura Plena em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aníbal de Menezes Maciel

Campina Grande

2016

T693e Torres, Claudenor Silva.
O ensino de geometria [manuscrito] : um relato de construção de conceitos geométricos com o uso de material manipulável / Claudenor Silva Torres. - 2016.
40 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Aníbal Menezes Maciel, Departamento de Matemática".

1. Modelagem matemática 2. Ensino de geometria. 3. Materiais manipulaveis. 4. Matemática. I. Título.
21. ed. CDD 372.7

CLAUDENOR SILVA TORRES

O ENSINO DE GEOMETRIA: UM RELATO DE CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS COM O USO DE MATERIAL MANIPULÁVEL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Estadual da Paraíba, Campus I, como parte dos requisitos para obtenção do título graduado em Licenciatura Plena em Matemática.

APROVADO EM 28 DE OUTUBRO DE 2016

BANCA EXAMINADORA

Aníbal de Menezes Maciel

Prof. Dr. Aníbal de Menezes Maciel

Mozart Edson Lopes Guimarães

Prof. Me. Mozart Edson Lopes Guimarães

Marcella Luanna da Silva Lima

Prof. Ma. Marcella Luanna da Silva Lima

Campina Grande

2016

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pela vida que tem me dado, pela a oportunidade de viver neste mundo cheio de incertezas, por me fazer conhecer pessoas na qual adorei conhecer, por ser protetor de todas as coisas.

Aos meus familiares, por me apoiarem nessa caminhada longa, por me distraírem com suas risadas, em especial a meus pais, Cícero Vitório Torres e Margarida da Silva Torres, pela paciência e pelo incentivo e compreensão.

À minha noiva Girlene, pelos gestos de incentivos, pelo carinho que teve neste momento tão marcante na minha vida, por me fazer acreditar em seguir em frente, mesmo com todas as dificuldades, obrigado por fazer parte da minha vida, tenho um forte sentimento por ti, amo você.

A Todos (as) os (as) meus amigos (as), que de vivência e colegas da universidade, em especial aqueles tiveram mais presentes em minha vida acadêmica, José Valber, Josênelle Santos, Rodrigo Marcelino, Fabrício Donato, Fabiana Lima, Michele Henrique, Juscelino Araújo, Luciene Rodrigues, Daniela Guedes, enfim, a todos que possa ter esquecido, de mencionar, meu eterno carinho por vocês.

Ao meu orientador, professor Dr. Anibal Menezes, por ter me recebido como seu orientando, pela paciência, por me incentivar a terminar o curso, pelas dicas, compreensão e dedicação. Meu eterno obrigado.

A todos (as) os (as) professores (as), que tive durante todo esse percurso, pelos conhecimentos concebidos por todos (as), desde o início até o término desse curso.

A todos (as) vocês o meu eterno e sinceros agradecimentos...

RESUMO

O referido trabalho tem como tema o processo de ensino-aprendizagem da Geometria, cujo objetivo é o de relatar uma experiência de construção de conceitos geométricos com o uso de material manipulável, tendo como suporte a Modelagem Matemática. A partir da qual apresentamos a importância da Geometria para o ensino de Matemática, como também na influência no desenvolvimento espacial e do raciocínio dos alunos, de uma maneira interativa e dinâmica. Para tal discorremos um pouco sobre a história dessa área de ensino, ressaltamos o seu decaimento durante o Movimento da Matemática Moderna e o resgate da sua importância pelo Movimento da Educação Matemática. Na referida atividade, aplicada na sala de aula, verificamos o uso de objetos do mundo físico, como um meio para facilitar a aprendizagem do ensino de Geometria, na construção de sólidos geométricos, o que pode proporcionar a formação de cidadãos ativos e participativos de uma sociedade, como também promover a implementação de novas metodologias de ensino. Adotamos como metodologia de trabalho a pesquisa participante, na qual professor e alunos são sujeitos ativos no processo de pesquisa. Além do mais, utilizamos a metodologia da resolução de problemas como tônica principal para o ensino dos conteúdos selecionados, quais sejam: área de algumas figuras planas e volumes de alguns sólidos. Os resultados obtidos foram promissores, haja vista termos conseguido mediar a realização de um trabalho baseado na construção de conceitos matemáticos a partir da manipulação de sólidos vinculados ao cotidiano dos alunos para alunos acostumados com o ensino tradicional de Matemática. Houve, assim, uma participação satisfatória da turma.

PALAVRAS CHAVES: Matemática. Ensino de Geometria. Modelagem.

ABSTRACT

This work has as its theme the teaching and learning of Geometry subject, and which its goal is to report an experience of building geometric concepts by using welding materials having as support the Mathematical Modeling. From this experiment, it is shown the importance of the Geometry for teaching mathematics as well as the influence on spatial development and student's reasoning using for that an interactive and dynamic way. To do this we discuss a little about the history of this area of education emphasizing its decay during the Modern Mathematics Movement and the rescue of its importance in by the Movement of Mathematics Education. In the activity, applied in the classroom, it was observed the use of the physical objects to facilitate the learning of Geometry teaching in the construction of geometric solids; it can provide the formation of active and participative citizens in the society as well as promote the implementation of new teaching methodologies. We adopted as a working methodology the one that uses a participatory method in which professors and students are active subjects in the research process. Furthermore, we used the solving problem methodology as a major tonic for the teaching of selected contents such as: area of plane figures and volumes of some solids. The results were promising considering that we could mediate the realization of a work based on the construction of mathematical concepts from the solids handling linked to the daily lives of students for those whose were habituated to the traditional teaching of mathematics. Thus, this was a satisfactory class participation.

KEYWORDS: Mathematics. Geometry teaching. Modeling.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. ASPECTOS GERAIS DA PESQUISA

1.1 INTRODUÇÃO

A palavra Geometria tem origem grega, onde, *Geo* significa *terra* e *metria medida*, ou seja, *medida da terra*. A Geometria é a mais antiga manifestação da atividade Matemática conhecida e é mencionada como um dos primeiros conteúdos a serem estudados pelos grandes matemáticos. Já a cerca de 3000 a.C. os antigos egípcios possuíam conhecimentos de Geometria os quais foram utilizados na época em grandiosas construções como, por exemplo, as pirâmides, como também criaram métodos geométricos diante da necessidade de medir e dividir as terras que ficavam às margens do Rio Nilo. E assim, quando o Rio Nilo alargava as terras demarcadas, teriam que ser remarcada novamente (BRANTI, 2014).

Muitos povos da antiguidade já se preocupavam em utilizar cálculos para resolver problemas de seu cotidiano. Ainda segundo Branti (2014, p. 20), “os povos sumérios abordavam situações de medidas que se referiam às relações de semelhança ao Teorema de Pitágoras e ao cálculo de áreas”. Os sumérios eram curiosos e observavam os movimentos dos astros, contribuindo assim, com o desenvolvimento da Matemática.

Os gregos conseguiram juntar todos os conhecimentos obtidos por essas duas civilizações, citadas anteriormente, mas os transformaram completamente, estabelecendo uma Geometria de forma ordenada, criando uma ciência formal lógica-dedutiva, baseada em postulados, axiomas, definições e teoremas. Assim substituíram a característica empírica da Matemática adotada pelos egípcios e sumérios por um método dedutivo. Onde se estuda até os dias de hoje (BRANTI, 2014).

Quanto ao seu ensino no Brasil, por volta de 1970, a Geometria passou por um processo de desvalorização, tanto no Ensino Fundamental quanto no Médio. Embora seja evidente o grande valor desses fundamentos, o ensino de Geometria foi sendo deixado de lado por diversos motivos, dos quais trataremos a seguir.

Podem-se mencionar três fatores que colaboraram para este declínio. Pavanello (1989) afirma que o primeiro é o não reconhecimento da Geometria ser importante por parte dos próprios professores. Seguido das dificuldades que estes profissionais têm para desenvolver o raciocínio lógico nas crianças, fazendo uso da Geometria. Por fim está relacionado à má formação dos professores, que por sua vez, vão para a sala de aula sem conhecimento suficiente sobre Geometria (CHIEREGATO; RODRIGUES, 2010).

Uma das razões da importância do ensino de Geometria é a sua presença em nossa vida diária. Desde os primeiros dias de vida, as crianças iniciam-se no aprendizado dos movimentos e no reconhecimento dos objetos e espaço ao seu redor, além disso, ela é considerada fundamental para o desenvolvimento cognitivo na construção do pensamento concreto para o abstrato. Nesse sentido é valido salientar que muito está sendo discutido sobre o ensino-aprendizagem da Geometria, mas pouco se tem feito para um bom desempenho nessa área.

Inúmeras pesquisas mostram que o uso de materiais concretos e jogos podem contribuir significativamente para o ensino-aprendizagem da Geometria, contribuindo no que tange as relações entre diferentes formas, indo do concreto ao abstrato de uma forma transparente, dinâmica e elucidativa. Neste sentido Vygotsky (1989), pontua que:

> Os jogos propiciam o desenvolvimento da linguagem, do pensamento e da concentração. O lúdico influencia no desenvolvimento do aluno, ensinando-o a agir corretamente em uma determinada situação e estimulando sua capacidade de discernimento. Os jogos educacionais são uma alternativa de ensino e aprendizagem e ganham popularidade nas escolas. Sua utilização deve ser adequada pelos professores como um valioso incentivador para a aprendizagem, estimulando as relações cognitivas como o desenvolvimento da inteligência, as relações afetivas (...) (VYGOTSKY 1989, p.15).

Durante o curso de Licenciatura Plena em Matemática, ouvimos falar muito sobre o abandono do ensino de Geometria nas escolas e que esse abandono dar-se por vários fatores, um deles é a falta de estrutura das escolas públicas, onde as mesmas não possuem um simples local para guardar materiais, onde os professores (as) possam utilizar em suas aulas, bem como, a inexistência de laboratórios de informática ou simplesmente de computadores em funcionamento, carência de laboratórios de Matemática, como também, de metodologias diferenciadas.

Tais fatores mostraram-se em experiência prática que tive nas disciplinas de Estágio Supervisionado, como desmotivadores não somente para os alunos (as), mas também para o corpo docente. Entretanto é válido salientar que, utilizando novas metodologias nas aulas de Matemática em especial de Geometria, pode-se contribuir para melhoria nesta área de ensino.

Segundo Lorenzato (2006), assim como um médico ou químico tem seu local para desenvolver suas atividades diárias, os professores (as), também precisam de um local para trabalhar, desenvolver suas atividades e poder guardar seus trabalhos, para tal propõe-se a construção de um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM).

> O LEM pode ser um espaço especialmente dedicado a criação de situações pedagógicas desafiadoras e para auxiliar no equacionamento de situações previstas pelo professor em seu planejamento mas imprevistas na prática, devido aos questionamentos dos alunos durante as aulas (LORENZATO, 2006, p. 7).

Nos últimos séculos, muitos educadores famosos ressaltaram a importância de trabalhar com materiais concretos, recentemente, "Maria Montessori legou-nos inúmeros exemplos de materiais didáticos e atividades de ensino que valorizam a aprendizagem através dos sentidos, especialmente do tátil" (LORENZATO, 2006, p. 4).

Segundo Rêgo *et al* (2012), uma maneira de ensinar Geometria de forma dinâmica e proveitosa, seria a criação de um Laboratório de Ensino de Geometria. Além de um LEM, o Laboratório de Ensino de Geometria poderia ser viável para as aulas de ensino de Geometria, pois:

> Reconhecendo a necessidade de promover melhorias no processo de ensino e aprendizagem de Matemática – com destaque na Geometria –, para atender as demandas educacionais postas pela sociedade contemporânea, contém este Laboratório de Ensino de Geometria propostas de atividades visando contribuir para superar as necessidades existentes (REGO *et al*, 2012, p. 2).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's (1997 *apud* SANTOS, 2009), "o ensino de Geometria pode levar o aluno a estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas de conhecimento, se partir da exploração de objetos do mundo físico". Com isso, sugere-se que utilize atividades práticas e dinâmicas, incentivando a criatividade no processo de ensino.

Assim sendo, a escolha do tema para pesquisa visa amenizar as dificuldades de aprendizagem dos alunos (as) e até mesmo do professor (a) em relação ao ensino e aprendizagem da Geometria, em particular os sólidos geométricos, tendo como auxiliadores modelos concretos, partindo-se do visual para poder chegar em um modelo abstrato, inserindo um pouco a realidade do aluno (a), mostrando como a exploração dos objetos do mundo físico e o material manipulável, podem contribuir para o ensino dessa disciplina, que possa ser muito mais eficaz e satisfatório, permitindo que eles vejam a matemática de uma maneira diferente.

1.2 JUSTIFICATIVA

Elenco como movedores para o desenvolvimento do trabalho primeiramente a necessidade pessoal de deixar um estudo para benefício da sociedade em geral, mais particularmente para os alunos (as) do Ensino Médio, almejando que estes (as) jovens tornem-se conscientes sobre a necessidade da Geometria em suas vidas. Estimulado pela minha experiência de vida como aluno (a), pois, não fui agraciado com um ensino de Geometria eficaz, que me permitisse enxergar o quão ela era importante e utilitária, tanto para minha vida, quanto para o mundo em geral, visto que os professores (as) não davam a devida importância ao conteúdo, por falta de tempo ou até mesmo de experiência. Movido também pelo fato que a Geometria desenvolve no aluno (a) raciocínio lógico e espacial, onde ele possa situar-se no espaço onde vive tendo noção de tempo e espaço. Outro fator motivador para o desenvolvimento da pesquisa foram as discussões feitas durante o curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, nas disciplinas Laboratório de Ensino de Matemática e Desenho Geométrico, que me mostrou mais claramente a grande necessidade de tratar o tema com atenção, a sociedade ganhará com o trabalho informações acerca do uso da Geometria de uma forma clara e prática, fazendo assim o uso dela para resolver problemas de situação real.

Portanto, a realização do presente trabalho tem sua importância social, política (contribui para formação da cidadania), pedagógica, pois trata de uma experiência a qual considera o aluno (a) como sujeito ativo da sua aprendizagem, a partir de uma dinâmica de ensino baseado na resolução de problemas para efeito de Modelagem Matemática) e para a Matemática propriamente dita, quando articula a Aritmética e a Geometria logicamente para efeito de construção de conceitos matemáticos.

1.3. OBJETIVOS

Para concretização dessa atividade temos os seguintes objetivos:

1.3.1. OBJETIVO GERAL

Relatar experiência de construção de conceitos geométricos com o uso de material manipulável, tendo como suporte a Modelagem Matemática.

1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Refletir sobre a importância da Geometria para as nossas vidas;
- Apresentar recurso histórico sobre os movimentos que influenciaram (ciam) o Ensino de Matemática, especificamente o de Geometria;
- Valorizar o uso do material manipulável como forma de construção de conceitos matemáticos.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 O ENSINO TRADICIONAL

Sempre nos deparamos, em toda trajetória de nossas vidas, enquanto estudantes no ensino básico e até mesmo no ensino superior, com professores ensinando do modo "tradicional", onde ficamos sentados e eles ensinando os conteúdos na lousa os quais, muitas vezes, tornam-se cansativos, enfadonhos e desinteressantes, por não fazerem uma conexão com a vida prática dos estudantes.

> No ensino tradicional da matemática, é possível observar que o processo de ensino apenas o professor transmite e os alunos recebem e realizam de forma repetitiva e mecanizada os exercícios, acarretando, por parte do aluno, memorizações de como estes exercícios foram desenvolvidos (cabendo ao aluno a responsabilidade em aprender) e que após repetir inúmeras vezes consegue memorizar e dar resultados, mas não funciona com todos, pois as características individuais são determinadas por fatores externos ao indivíduo (VITAL, 2011, p. 01).

Nesta perspectiva, o ensino tradicional resume-se a dominar o conteúdo para poder ensinar bem. Temos que aprender as definições rígidas e teoremas, muitos dos quais, não sabemos seu verdadeiro significado, aplicamos nos exercícios e provas, tornando uma matemática absoluta e acabada. Nesse contexto segundo D'Ambrosio (1989, p. 1) diz que, os "alunos passam a acreditar que a aprendizagem de matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras".

Ainda segundo a autora, quando é utilizada apenas a metodologia de ensino "tradicional", onde não se estabelece uma conexão com o que se explana em sala de aula para os alunos (as), com a vida cotidiana e prática, leva os mesmos (as) a perderem sua "autoconfiança na intuição matemática", além de levá-los (as) a acreditarem em uma super-complexidade matemática e, por consequência, não verem a possibilidade de resolver um problema numa situação real, do mesmo modo que matematicamente, ou seja, não conseguem fazer uso do que aprendem em sala, no seu cotidiano, o que desenha-se como um problema social atual.

Vivemos em uma sociedade onde o conhecimento é hipervalorizado, sendo assim, é exigido que, quase diariamente, novas habilidades sejam adquiridas, não somente no competitivo mercado, mas também, na vida social das pessoas em geral. Desse modo, Lara (2004) afirma que:

> a capacidade de resolver problemas, utilizar a imaginação e a criatividade passam a ser requisitos cada vez mais indispensáveis. Enquanto a capacidade de memorização, repetição e mecanização se tornam insuficientes frente à eficácia do computador e das máquinas em geral (LARA, 2004, p. 2).

Desta forma, segundo Dienes (1989, *apud* ALVES 2006) o processo ensino aprendizagem não está sendo plenamente desenvolvido, visto que, para que o mesmo aconteça, necessita-se de artefatos que vão além dos conteúdos, como, um ambiente rico de materiais e oportunidades.

Atualmente, com o maior respaldo dado a educação, há uma maior preocupação com o ensino eficiente da Matemática, – essa preocupação já existia, no entanto em menor escala, cada vez mais estudiosos estão dedicando-se a buscar metodologias que "facilitem" e/ou auxiliem nessa tarefa. Sabe-se que mudar "costumes" não é fácil, o educar tradicionalmente foi, e é, transmitida geração a geração, tomando muitas das vezes, a configuração de um costume, principalmente, no campo matemático, tido, costumeiramente, como ciência exata e imutável, desta forma, o *costume* pode ser tido como um fator propagador do *ensino tradicional*.

No entanto, há também nos dias atuais, mais responsabilidades por parte dos professores (as), onde os mesmos (as), se veem obrigados (as) pela desvalorização salarial, a manterem mais de um emprego, além da vida social, o que provoca-lhes falta de tempo para programar suas aulas de maneira diferenciada. Nessa perspectiva Júnior (2009, p. 1) diz que:

> A falta de tempo do educador leva-o a certos impedimentos de modificar sua prática pedagógica tendo como referencial um plano que sane as dificuldades diárias. É esse obstáculo na vida profissional do professor, especificamente o de matemática, que o faz viver em constante reflexão acerca de quão grande problemática (JÚNIOR, 2009, p. 1).

É nítida, a necessidade de se trabalhar de maneira diferenciada na Matemática como um todo. Os alunos precisam ser instigados e incentivados a trabalharem juntos com os professores, para que possam enxergar a real necessidade e importância em suas vidas diárias e práticas, no entanto, observa-se que somente com o uso do ensino tradicional, essa faceta não será possível, pois com esse método, os discentes (as) ficam limitados apenas com os conteúdos passados pelos professores (as), e não conseguem interligá-lo com sua vida diária e menos ainda com outras áreas de conhecimento, tornando mais distante a Matemática da prática social. Por outro lado, muitas pesquisas estão sendo estudadas nessa área de conhecimento, e com movimento da Educação Matemática, essas questões ganharam maior importância, como se destaca, brevemente no capítulo que se segue.

2.2 MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA (MMM)

Durante o término da Segunda Guerra Mundial, houve um grande avanço da ciência no Mundo inteiro, onde se aprendeu a produzir mais e a baixo custo. “No pós-guerra nota-se uma grande expansão do mercado consumidor - forçaram uma tendência a tornar a matemática mais acessível” (D’AMBROSIO, 1999).

Neste sentido, D’Ambrosio (1999) pondera que, foi nessa época que surge a Matemática Moderna, mais precisamente na década de 60 e 70, com grandes propostas de inovação no ensino e nos currículos no mundo inteiro. “A Educação Matemática, como disciplina autônoma, é relativamente nova. No entanto, Educação Matemática, como preocupação como uma prática, vem desde a antiguidade” (D’AMBROSIO, 1999).

De acordo com Neto (2001), foi a partir da “Matemática Moderna” que houve um grande desenvolvimento na Teoria dos Conjuntos e na Álgebra, sendo deixada em segundo plano a Geometria que era ministrada de uma forma até então sistemática baseada na Geometria euclidiana. Com isso muitos docentes passaram a se interessar mais pela Álgebra, e foi a partir dessa época que a Geometria foi sendo deixada um pouco de lado.

No Brasil, a *Matemática Moderna* foi encarada como ensinar bem o conteúdo, limitando-se apenas nos livros didáticos, segundo os PCN's, distorcendo um pouco do que se pretendia da nova Matemática que vinha em fase de transformações no mundo inteiro. Contudo:

> Ao longo de sua história, a Matemática tem convivido com a reflexão de natureza filosófica, em suas vertentes da epistemologia e da lógica. Quando se reflete, hoje, sobre a natureza da validação do conhecimento matemático, reconhece-se que, na comunidade científica, a demonstração formal tem sido aceita como a única forma de validação dos seus resultados. Nesse sentido, a Matemática não é uma ciência empírica. Nenhuma verificação experimental ou medição feita em objetos físicos poderá, por exemplo, validar matematicamente o teorema de Pitágoras ou o teorema relativo à soma dos ângulos de um triângulo. Deve-se enfatizar, contudo, o papel heurístico que têm desempenhado os contextos materiais como fontes de conjecturas matemáticas (BRASIL, PCN's, 1998, p. 28).

Ainda no que se refere a Brasil e MMM, pode-se dizer que o mesmo surgiu como uma alternativa para o ensino tradicional, pois apesar do ensino tradicional ter estabilidade em questão de conteúdo, principalmente em livros e programas de ensino, o mesmo sofria várias críticas, uma vez que, "adestrava os alunos em fórmulas e cálculos sem aplicação" (SOARES, 2005).

Diante do exposto necessita-se, por sua vez, dialogar sobre o significado de "moderno", para averiguar se o mesmo se opõe ou não ao "tradicional", nesse sentido Burigo (1990) lembra que, de maneira geral, o "moderno" se opõe ao "tradicional", onde o moderno é considerado mais "eficiente", "de melhor qualidade". Segundo o autor, a expressão "moderno", na época de seu lançamento, era repleta de reconhecimento e valorização positiva.

No entanto, de acordo com Novaes *et al* (2005):

> Em qualquer caso, o termo moderno quando aplicado às matemáticas ensinadas nas escolas, reveste-se de uma certa ambigüidade por não especificar o que é moderno. Seria a terminologia, os programas, os métodos pedagógicos, as idéias matemáticas. Provavelmente sejam todos porque estão estritamente ligados uns com os outros. A crítica também é no sentido de chamar de moderno, teorias matemáticas e pedagógicas produzidas nos séculos anteriores (NOVAES *et al*, 2005 p. 33).

Ainda em conformidade com a autora, há algumas peculiaridades que diferenciam e colocam o movimento em um patamar diferenciado, na época de seu surgimento, como, “maior generalidade, grau de abstração, maior rigor lógico, uso de um vocabulário contemporâneo, precisão da linguagem matemática e método dedutivo”. Desta forma o movimento objetivava reformulação pedagógica, por meio de um sistema que interligasse teoria e prática, fazendo com que houvesse maior interesse por parte dos alunos (as).

2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA

A ideia de Modelagem Matemática não é recente. A evolução da história da Matemática sempre esteve presente o processo de Modelagem, na medida em que se procura explicar fenômenos da natureza, deduzindo fórmulas e aplicadas diante a realidade de cada época, desde a construção de simples objeto, até uma obra mais complexa. Onde quem molda deseja chegarão objeto no qual teve como modelo um objeto do mundo real. Mas muitos professores (as) têm dificuldades em como aplicá-la em sala de aula e em suas práticas educativas.

Ao longo da História da Matemática, a Modelagem começou a ser proposta como um dos possíveis ambientes de aprendizagem matemática. O tema, mais recentemente – últimas décadas – começou a despertar a atenção de pesquisadores do Brasil e do Mundo (NISS, 2001).

Dentro dessa perspectiva, Biembengut (2009) afirma que o modelo matemático é o conjunto de relações matemáticas, que requer uma formulação detalhada e procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno ou um problema de situação real. Pode-se observar ainda, a conceituação de modelo segundo, Swetz (1992, p.65), onde diz que: “modelo matemático é uma estrutura Matemática que descreve aproximadamente as características de um fenômeno em questão”.

É nesse sentido onde se encaixa a modelagem, que é um processo no qual envolve a obtenção deste modelo, ou de maneira mais clara, processo pelo qual os modelos são desenvolvidos ou construídos. Para a elaboração de um modelo matemático, depende do seu grau de conhecimento sobre o conteúdo a ser trabalhado, além de uma criatividade e saber como aplicá-lo em sala de aula (BIEMBENGUT, 2009), bem como da experiência, do modo de agir e de pensar, pois, um modelo pode ser um processo que surge do próprio pensamento, buscando especificar uma forma para compreender o mundo real, ou solucionar problemas que não estão ao nosso alcance.

Para o bom desenvolvimento da modelagem em sala de aula, Barbosa (2001 *apud* MARTINS, 2007, p. 17), aconselha-se que o professor:

> 1. Conheça os limites da instituição de ensino;
> 2. Comece com modelos curtos e mais simples, ou seja, que são possíveis de fazer;
> 3. Analise o tempo, o que é possível fazer dentro dele;
> 4. Analise o seu saber e o saber dos alunos;
> 5. Avalie a disposição e grau de interesse dos alunos, bem como a sua motivação;
> 6. Avalie a disposição e apoio da direção da escola.

Neste contexto a escolha do Material Didático (MD), para que o processo de modelagem no ensino-aprendizagem seja bem elaborado, deve ser feita de maneira minuciosa. Lorenzato (2006) ressalta a importância desses materiais manipuláveis em sala de aula, ajudando no conteúdo na qual se pretende trabalhar.

Como existem vários tipos de materiais manipuláveis, “alguns não possibilitam modificações em suas formas; é o caso dos sólidos geométricos construídos em madeira ou cartolina, por exemplo, que, por serem estáticos, permite só a observação”. (LORENZATO, 2006, p. 18-19). No entanto, para se chegar ao produto final, há toda uma manipulação no processo de construção, desta forma, há total interação entre o aluno e o objeto construído a partir da modelagem.

Na medida em que construímos esses sólidos, fazemos uma relação de observação e criatividade, para chegar ao objeto desejado, além da possibilidade de se ter, por meio de tais modelos, uma real noção de conceitos matemáticos.

Acima arguimos sobre a Modelagem, cabe, portanto, classificar os casos de Modelagem, visto que a mesma não se apresenta em uma única maneira, segundo Barbosa (2001, p. 8) a classificação dos casos que envolvem a Modelagem se dá da seguinte maneira:

> **Caso 1.** O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução.
> **Caso 2.** O professor traz para a sala um problema de outra área da realidade, cabendo aos alunos a coleta das informações necessárias à sua resolução.
> **Caso 3.** A partir de temas não-matemáticos, os alunos formulam e resolvem problemas. Eles também são responsáveis pela coleta de informações e simplificação das situações-problema.

A partir da conjectura sobre os casos de modelagem apresentada pelo autor, evidencia-se que o presente estudo, aproxima-se mais do caso 1, representado pelo problema inicial, com dados, levado a sala de aula para resolução. Salienta-se ainda que em todos os casos o professor atua como co-participante, e o aluno se mantêm como "protagonista", cabendo a ele, investigar, utilizando o professor como apoio, por isso, acredita-se que o ensino com a modelagem se faz mais eficiente, os discentes estarão com esse método o tempo todo sendo instigados a pensar, a investigar, a criar, a dialogar com o problema e mais estará estabelecendo uma real conexão entre teoria e prática.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

3.1 SUJEITOS DA PESQUISA

O presente trabalho desenvolveu-se com 20 (vinte) alunos (as) matriculados em uma turma do 1° ano do Ensino Médio, da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio José Bronzeado Sobrinho da cidade de Remígio – PB. A qual estudei todo o Ensino Fundamental e Médio. Por termos aprendido muito no período em que fomos aluno da mesma, por isso queremos retribuir com um pouco do conhecimento que obtivemos durante meu curso de Graduação em Licenciatura Plena em Matemática.

Escolhemos desenvolver o estudo com a citada turma, pois, subtendemos que os mesmos já tinham consigo um nível de conhecimento sobre os conteúdos básicos da Geometria, sendo possível assim, trabalharmos esses conhecimentos prévios e aprofundá-los com o auxílio de materiais manipuláveis e assim, aumentarmos as chances de aprovação dos mesmos, em processos seletivos, como por exemplo, Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e nas Olímpiadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

A aula foi ministrada no dia 26 de setembro e o projeto foi aplicado nos dias 27 de setembro e 06 de outubro de 2016, onde implementamos uma metodologia de ensino através de materiais manipuláveis. Após essa aula aplicamos um problema de situação real, no qual pretendíamos verificar se surgiu o entendimento destes alunos (as) sobre os conteúdos trabalhados. No primeiro dia, a aula teve duração de 45 minutos, no qual a turma foi dividida em quatro grupos. Cada grupo era composto por cinco pessoas. Para melhor entendimento da turma, resolvemos optar por grupos: *A, B, C e D.*

3.2 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Utilizamos como instrumentos auxiliadores para coleta de dados, a observação participante, que se configura pela participação efetiva dos pesquisadores nas atividades dos grupos no qual desenvolve-se o trabalho, neste caso, nas aulas ministradas com materiais manipuláveis, seguido com a aplicação do projeto. Segundo Gil (2008, p. 103), pode-se definir esse modelo assim: “observação participante como a técnica pela qual se chega ao conhecimento da vida de um grupo a partir do interior dele mesmo”. Dessa forma, permite uma maior aproximação com a turma, com a interação obtida é mais provável que descubramos se o público-alvo efetivamente aprendeu.

Para o desenvolvimento do estudo, utilizamos materiais manipuláveis, onde trabalhamos com objetos geométricos do mundo físico, como por exemplo, embalagens de diversas formas e tamanhos, começando pelas planificações de embalagens tridimensionais e analisando essas figuras planas, tentando chegar ao conceito de área, perímetro e volume, através dessas embalagens tridimensionais, sem ser dada a fórmula, para que pudéssemos verificar juntos com os alunos (as), através da manipulação, a construção de algumas embalagens e da resolução de problemas que é possível aprender de forma dinâmica. Para instigar os discentes a participarem do estudo, propusemos o seguinte problema:

Um determinado jovem empreendedor da cidade de Remígio, teve a ideia de montar um pequeno negócio: uma loja de embalagens para presentes. Todavia, não sabia inicialmente quanto deveria investir na quantidade de papelão. A princípio, ele pensou em fazer 100 caixas, através de um curso que ele tinha feito no SENAI (Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial) no município de Campina Grande. O mesmo decidiu fazer 70 caixas em formato de prisma, sendo 40 em forma de paralelepípedo e 30 em formato de cubo; e 30 em formato de cilindro. Sabendo-se que a folha de papelão colorido tem dimensões de 48 centímetro de largura e 66 centímetro de comprimento e que cada folha custa R$ 2,00 (dois reais). Quantas folhas ele deve comprar para fazer as 100 caixas e quanto ele deve investir para iniciar o pequeno negócio?

Considerando que as dimensões das caixas para presentes são:

Quadro 1 - Formas geométricas utilizadas como embalagens para presentes, de acordo com suas referidas dimensões.

Paralelepípedo	9 cm de altura, 30 cm de largura e 40 cm de comprimento;
Cubo	$(8\ cm)^3$ (8 cm de altura, 8 cm de largura e 8 cm de comprimento);
Cilindro	10 cm de diâmetro e 15 cm de altura.

Fonte: produção própria.

Considerando as dimensões das tampas dessas respectivas caixas são:

Quadro 2 - Formas Geométricas utilizadas nas tampas de embalagens para presentes, de acordo com suas dimensões.

Paralelepípedo	5 cm de altura, 30,5 cm de largura e 40,5 cm de comprimento;
Cubo	4 cm de altura, 8,3 cm de largura e 8,3 cm de comprimento;
Cilindro	10,3 cm de diâmetro e 5 cm de altura.

Fonte: Produção própria.

A partir do supracitado problema, indagamos aos estudantes quais os conceitos envolvidos para resolução da situação. Após a análise do conhecimento prévio dos(as) mesmos (as), procedemos da seguinte maneira:

1° Passo: Utilizamos um material manipulável para tentarmos deduzir a fórmula de área. Neste caso, utilizamos a malha quadriculada ou tabuleiro confeccionados em papelão, e pequenos blocos em formato de quadrado, onde para os fins da atividade, os mesmos são utilizados como unidade de área, ou seja, não expondo a medida das áreas, deixando assim, os discentes manipularem esses materiais, para que eles e elas possam tirar suas próprias conclusões e chegar por fim, na fórmula de área de uma figura plana, por exemplo, um quadrado ou retângulo. Como também a noção de volume de uma embalagem na forma de um prisma ou cilíndrica, como por exemplo, uma caixa em formato de cubo ou uma lata de leite em pó em forma de cilindro.

2° Passo: No segundo passo, tendo os alunos (as) compreendidos a noção de área de uma figura quadrangular, por exemplo, que a área de um retângulo é a medida da largura vezes a medida de seu comprimento, partimos para a noção de como chegar à área de um círculo. Para isso entregamos uns moldes redondos em formato de círculo de diferentes tamanhos, pedimos para que cada grupo medisse a borda desses círculos e dividisse pelo seu diâmetro, verificando assim, a relação existente entre a o comprimento da borda de um círculo e seu diâmetro que é aproximadamente (3,14...), que foi denominado valor de Pi (π). Fazendo isso por aproximação e tentativa, deixamos os alunos (as) concluírem que Pi (π) é a razão entre o comprimento de um círculo pelo seu diâmetro. Analisando ainda, que o diâmetro é o dobro de seu raio, ou seja, que $D = 2r$, e que ($\pi = C/D$), onde isolando o comprimento (C) e substituindo diâmetro (D) por 2r (duas vezes o raio), chegamos a conclusão de que ($C = \pi.2r$), ou simplesmente ($C = 2\pi r$). Portanto, para chegarmos na área de uma região limitada por um círculo, basta multiplicar a metade do seu comprimento pelo seu raio, ou seja, ($2\pi r.r/2$), ou ainda, (πr^2), e para o volume falta apenas a altura. Analisando assim, que a área de um círculo é igual a (πr^2), o volume é ($\pi r^2 h$), ou seja, o volume de um cilindro ou de um prisma qualquer, é a área da base vezes a altura.

3° Passo: Nesta parte, tendo os mesmos, compreendido, um pouco da noção de área de uma figura plana e de algumas embalagens do mundo real, partimos para a etapa principal do nosso trabalho, que é fazer embalagens para presentes. No qual, procuramos estabelecer as respectivas quantidades de materiais gatos para confeccionar cada uma delas, verificando o preço do material para construí-las, junto com as medidas reais do papelão colorido no mercado consumidor, além dos cálculos das respectivas áreas de cada embalagem, bem como o volume delas, depois de pronta e acabada.

3.3 REFLEXÃO SOBRE OS DADOS

Após as aulas práticas, constatamos de imediato que os alunos (as), não tiveram oportunidade de trabalhar com aulas diferenciadas como estas, visto que os mesmos demostraram bastante dificuldades em relação aos conceitos de áreas, volumes e até mesmo cálculos básicos, onde nunca foram levados a pensar sobre certos conteúdos matemáticos. Verificamos ainda que nunca trabalharam o porquê da Matemática ser dada da forma que é construída, nem se fala sobre a história da mesma.

Com relação ao projeto de construção das embalagens, digamos que foi bastante proveitoso, uma vez que, estes (as) jovens não tinham um conceito sobre os quais precisaríamos para resolver este problema, onde não era incluída só a Matemática para resolver a questão, mas tinham que saber de um pouco fora dela levando-o a questionar sobre o meio em que ele vive e se relaciona com a sociedade, para fazer seu uso na vivência como cidadãos participativos.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Atualmente, percebemos que a grande maioria dos alunos (as) apresentam em maior ou menor proporção, *desinteresse* e/ou *desmotivação* pelas disciplinas escolares, em geral, mas principalmente pelos conteúdos da Matemática, vista por muitos como uma disciplina de maior dificuldade, talvez por não conseguirem correlacionar a teoria com sua vida diária e prática. Nesse sentido o uso da Modelagem Matemática se faz de grande valia, uma vez que, por meio da mesma, conseguimos uma maior compreensão dos conceitos matemáticos, mais desenvolvimento do senso investigativo e do senso crítico. No que se refere ao desenvolvimento de conceitos, esses viabilizam a interdisciplinaridade (BARBOSA, 2001).

Com o intuito de mostrarmos aos discentes que é possível fazer uma conexão do que se aprende em sala com suas vidas, propusemos um problema para ser resolvido em sala de aula. O problema além de objetivar que é possível trabalhar a Matemática de uma forma dinâmica, interativa e proveitosa, possibilita ainda, mostrar que é possível angariar recursos financeiros, usando de conceitos, construção e cálculos matemáticos.

O problema matemático visa solucionar uma dúvida de um provável comerciante, este, não sabia se seria rentável abrir uma loja de embalagens, além de qual gasto inicial seria necessário para iniciar o comércio e saber a quantidade de papelão gasto nessas embalagens, para sanar tal dúvida cálculos deveriam ser feitos. O problema foi levado à turma escolhida para o trabalho em forma de questão, no mais, foi resolvido adiante.

Trabalhar com problemas, principalmente com alunos de educação básica, se faz importante, pois,

> temos que relacionar o conteúdo matemático com a formação profissional do aluno, principalmente em cursos que não se destinam a matemáticos, ou seja, quando destinados a profissionais de outros cursos que ofereçam a disciplina matemática" (MARTINS, 2007, p. 16).

Referindo-nos a essa questão já citada, pretendíamos que os alunos (as) chegassem à solução matemática a seguir:

Considerando-se que a folha de papelão colorido ou duplex, como se chama no mercado consumidor, custa R$ 2,00 (dois reais), cada, pelo problema proposto, queremos fazer um total de 100 embalagens para presentes, sendo 40 em formato de paralelepípedo; 30 em forma de cubo e 30 em configuração de cilindro.

Como as dimensões da folha de papelão, citadas no problema são de: 48 cm de largura por 66 cm de comprimento resultando um total de 3.168 cm^2, pois devemos multiplicar a largura da folha pelo seu comprimento, ou seja, (48 cm x 66 cm).

Para fabricarmos uma embalagem que aloque bem uma camisa, em formato de paralelepípedo, com medidas iguais a 9 cm de altura, 30 cm de largura e 40 cm de comprimento, primeiramente, observamos como encaixar as medidas da folha, comparando com as dimensões da caixa com as dimensões do papelão. Feito isso, sabemos quanto de material gastaríamos na fabricação dessa caixa aberta, ou seja, sem tampa. Na largura somamos: (9 cm + 30 cm + 9 cm = 48 cm). E no comprimento: (9 cm + 40 cm + 9 cm = 58 cm). A largura da caixa planificada coincide com a largura da folha que é 48 cm, no comprimento, no qual é 58 cm, neste caso, multiplicamos a lateral da caixa pelo seu comprimento, (48 cm x 58 cm = 2.784 cm^2). Sobrou um pedaço da folha de 8 cm largura por 48 cm de comprimento. Com isto, gastaríamos uma folha para construir uma caixa aberta, utilizando o máximo de material (figura 01).

Sabemos que, para calcular a superfície lateral de uma caixa fechada, ou seja, com tampa e desprezando-se todas as sobras é da seguinte maneira:

Área das bases mais as áreas de todas as faces, ou seja:

Área total (A_t):

$$\boxed{A_t = 2\,(l \times c) + 2\,(l \times h) + 2\,(c \times h)}$$

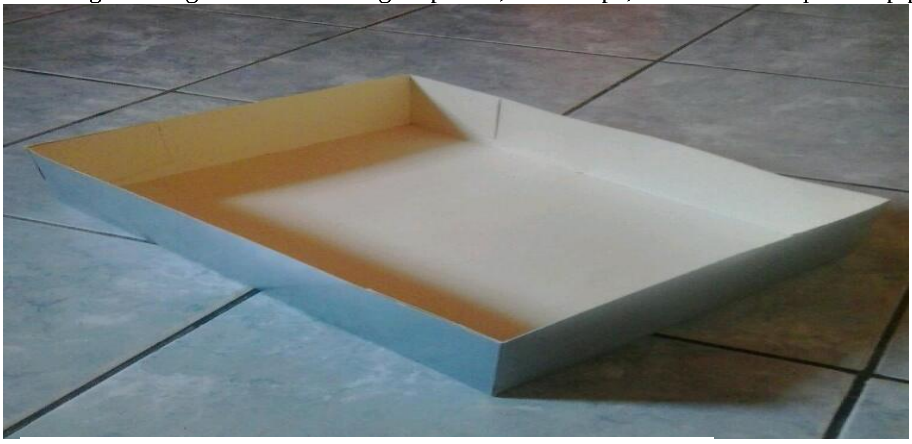
Onde: *l* é a largura, *c* é o comprimento e *h* é a altura.

Como no nosso caso é uma caixa aberta e calculamos o máximo de material gasto, incluindo todas as sobras, então:

$$\boxed{A_t = 2\,(9\text{ cm} \times 30\text{ cm}) + 2\,(9\text{ cm} \times 40\text{ cm}) + 1\,(30\text{ cm} \times 40\text{ cm}) + 4\,(9^2\text{ cm}) = 2784\text{ cm}^2.}$$

Observamos que, comparando as duas resoluções, podemos chegar a solução através de cálculos diferentes, pois na caixa aberta utilizamos as sobras, só desprezando-as depois de pronta. Então, os alunos (as) terão que ter a *noção* de que, quando colocamos as medidas na folha, fica mais *fácil* calcular a área total pelas medidas dadas colocadas na figura plana, do que pelas medias de cada lado. Como feito anteriormente, levando os (as) jovens a pensarem, em quais estratégias utilizadas para chegar a solução mais próxima.

Figura 1: Imagem fotográfica da Embalagem pronta, sem tampa, em formato de paralelepípedo.



Fonte: Produção própria.

Depois de confeccionada a embalagem, podemos calcular seu volume. Segundo Biembengut (2009), chegamos na parte relativo à generalização de conceitos matemáticos, verificando se esta relação é valida para quaisquer medidas, visto que:

Volume de um prisma: largura x comprimento x altura, ou:

$$V = (a \text{ x } b) \text{ x } h$$

Onde, genericamente, *a* é a largura, *b* é o comprimento e *h* é altura, notadamente, tendo as medidas da caixa para verificar o seu volume.

$$(9 \text{ cm x } 30 \text{ cm x } 40 \text{ cm} = 10800 \text{ cm}^3)$$

Sabe-se que a folha de papelão possui uma área de 3168 cm^2. Se quisermos saber a sobra dessa caixa aberta, basta subtrair a área total do papelão, pela área gasta com essa embalagem, onde: (3168 cm^2 – 2784 cm^2 = 384 cm^2). Sobrando apenas uma tira de 8 cm de largura por 48 cm de comprimento, já encontrada anteriormente.

Observamos que, com a as medidas colocadas na folha, fica muito mais simples verificarmos o material gasto, do que depois da caixa pronta, uma vez que forma uma figura plana. Pois, "para calcular a quantidade de material de uma embalagem de qualquer forma basta abrir – planificar – ou supor aberta, fazendo um esboço com as devidas dimensões. A partir daí, calcula-se a área das figuras planas compostas" (BIEMBENGUT, 2009, p. 37).

Para a tampa dessa caixa, queremos que ela encaixe na devida embalagem sem aperto, sendo assim, basta que aumente um pouco apenas na área da base, neste sentido as medidas da tampa foi de: 5 cm de altura, 30,5 cm de largura e 40,5 cm de comprimento. (figura 02).

Pela planificação da figura, temos que:

- Largura: (5 cm + 30,5 cm + 5 cm = 40,5 cm)
- Comprimento: (5 cm + 40,5 cm + 5 cm = 50,5 cm

Visto que, neste caso o material gasto foi de: (30,5 cm x 40,5 cm = 2045, 25 cm^2). Fazendo as comparações com as medidas das folhas, temos na largura; (48 cm – 40,5 cm = 7,5 cm), ficando com uma sobra de 7,5 cm na largura, já no comprimento, fica; (66 cm – 50,5 cm = 15,5 cm), ficando assim com uma sobra de 15,5 cm no comprimento da folha desse material.

Figura 2: Imagem fotográfica de embalagem em formato de paralelepípedo com base e tampa.

Fonte: Produção do autor.

Chegamos à conclusão de que, para fabricar uma embalagem completa para uma camisa, por exemplo, gastamos um total de duas folhas completas de papelão colorido. Além disso, notamos que, como pretendíamos fabricar 40 caixas neste formato, gastaríamos um total de 80 folhas desse material e, pelas mediadas dadas no problema para construirmos o cilindro, com as sobras dessas 40 caixas dá para fazer os 30 cilindros.

Na fabricação da caixa para alocar um relógio, no formato de um cubo, com medidas iguais a 8 cm de altura, 8 cm de largura e 8 cm de comprimento.

Como já verificamos que, pelas medidas das embalagens na folha de papelão, ou seja, planificação da figura, no nosso caso do cubo, como feito anteriormente para o paralelepípedo, fica assim, mais *fácil* de calcular a superfície lateral:

- Largura: (8 cm + 8 cm + 8 cm = 24 cm);
- Comprimento: (8 cm + 8 cm + 8 cm = 24 cm);

Ficando assim, com uma área de (24 cm x 24 cm = 576 cm^2), incluindo as sobras, pois queremos o máximo de aproveitamento. Para saber quantas folhas deve usar para fazer um total de 30 embalagens neste formato, usamos a ideia de quantos cabem, 24 cm de lado, cabe duas vezes em 48 cm, sem haver sobra, já no comprimento, 24 cm cabe duas vezes em 66 cm, sobrando um pedaço de papelão de 18 cm por 48 cm. Com essas sobras da pra fazer 3 tampas dessas respectivas caixas, pois, essas tampas tem medidas iguais a 4 cm de altura, 8,3 cm de largura e 8,3 cm de comprimento.

Área da tampa:

- Largura: (4 cm + 8,3 cm + 4 cm = 16,3);
- Comprimento: (4 cm + 8,3 cm + 4 cm = 16,3).

Para facilitar o cálculo da área, podemos arredondar para 16 cm, ou seja,
Área da tampa do cubo: (16 cm x 16 cm = 256 cm^2). Portanto:
Área total do cubo: (576 cm^2 + 256 cm^2 = 832 cm^2)

Figura 3: Imagem fotográfica de modelagem em formato de cubo com base e tampa.

Fonte: Produção do autor.

Com estas aproximações de medidas e das sobras, concluímos que, com uma folha dá para fazer 4 caixas e 3 tampas, sendo assim necessário um total de 8 folhas para fabricar as 30 caixas em formato de cubo, faltando contudo, uma folha para o restantes das tampas, pois (8 x 4 = 32) e (8 x 3 = 24), verificando que, com 8 folhas da pra fazer 32 caixas abertas exatas, mas no nosso caso, queremos 30, deixamos as duas que sobram para fazer as tampas, fazendo alguns ajustes e utilizando o máximo de material, verifica-se que, além das 8 folhas para fazer as caixas, fica faltando mais uma folha para completar o restante das tampas que faltam para confeccionar o resto das tampas desse cubo, gastando-se um total de 9 folhas na construção das 30 embalagens, nesse formato.

Logo, seu volume será:

Volume de um cubo é igual à área da base vezes a altura, mas como em um cubo todos os lados são iguais, então: ($v = l^3$), mas como o lado (l) mede 8 cm:

Volume do cubo: ($v = (8 \text{ cm})^3 = 512 \text{ cm}^3$).

Na construção da embalagem em formato de cilindro, analisa-se o material gasto, sabe-se que, com as sobras das embalagens para alocar camisas, dá para fazer os 30 cilindros, no qual, feito antes, só precisamos fazer uma embalagem de cada tipo, para verificar quanto se gasta de material para fazer o total que pretendido.

Visto que na caixa aberta sobrou, um pedaço com mediadas de 8 cm por 48cm, já na tampa teve sobra de material nos dois lados, ou seja, 7,5 cm por 66 cm e outo lado maior, com 15,5 cm por 48 cm.

O cilindro tem medidas de; 10 cm de diâmetro e 15 cm de altura e a tampa dessa caixa terá medias de; 10,3 cm de diâmetro e 5 cm de altura. Daí segue-se, para calcular a quantidade materiais gastos na confecção dessa embalagem e somar as duas regiões limitadas por dois círculos. Sabe-se que para calcular a superfície lateral de um cilindro, temos que saber qual o comprimento da base desse cilindro e sua altura, através da relação feita entre o comprimento de um círculo e de seu diâmetro, encontrada anteriormente, onde:

O comprimento de um círculo é igual a *pi* vezes o diâmetro, ou seja, ($C = \pi.D$); ($C = (3{,}14) \times 10 \text{ cm} = 31{,}4 \text{ cm}$), daí, o comprimento da base é igual a 31, 4 cm e na altura já temos 15 cm, no qual é dado no problema, como na lateral deu 31,4 cm, para a colagem soma-se mais 2 cm, fica-se então, com 33,4 cm de comprimento por 15 cm de altura e; para a base desse cilindro utiliza-se um quadrado de 12 cm de lado e coloca-se dois círculos um dentro do outro, um de 12 de diâmetro cm e outro de 10 cm de diâmetro, daí faz-se os cálculos da seguinte maneira:

Área lateral do cilindro: (33,4 cm x 15 cm = 501 cm^2);

Agora a área dos dois quadrados de 12 cm de lado (l), sabe-se q a área de um quadrado é (l^2) então, (2 x 12^2 = 288 cm^2). Se fosse para comparar a área de um círculo e a área de um quadrado com mesma medida é claro, observa-se que, no círculo gasta-se menos materiais do que na área de um quadrado. Pois:

Pela área de um círculo de 12 cm de diâmetro temos: ($\pi.r^2$ = 3,14. $(6\ cm)^2$ = 113,04 cm^2), que pode-se arredondar por um valor mais próximo para 113 cm^2. Comparando as medidas dessas duas figuras planas, observa-se nitidamente que, a área de um círculo é menor do que área de um quadrado, neste caso: (144 cm^2 – 113 cm^2 = 31 cm^2), validando-se o que foi dito anteriormente. Mas, no nosso caso, incluímos todas as sobras. Logo, a quantidade de material gasto no cilindro.

Superfície lateral mais área das duas bases mais a área lateral da tampa, ou seja;

$$(501\ cm^2 + 288\ cm^2 + 167\ cm^2 = 956\ cm^2)$$

Depois de pronta a embalagem, despreza-se as sobras e calcula-se o seu volume:

$$(V = \pi.\ r^2.\ h)$$

Onde, genericamente, r é o raio do círculo e h é altura. Como temos as medidas dadas no problema, no qual o raio é igual a 5 cm e a altura é igual a 15 cm, então:

$$(3{,}14) \times (5\ cm)^2 \times 15\ cm = 1177{,}5\ cm^3)$$

Para a tampa desse cilindro foi feito o mesmo processo utilizado na construção de seu “corpo”, com medidas de 10,3 cm de diâmetro e 5 cm de altura. Utiliza-se um quadrado de 12 cm de lado, com dois círculos inscritos, um de 10,3 cm de diâmetro e outro de 12 cm de diâmetro. Visto que, com as sobras de 8 cm por 48 cm, dá para fazer a lateral dessas tampas.

Figura 4: Imagem fotográfica de embalagem em formato de cilindro com base e tampa.

Fonte: produção do autor.

Concluímos que para confeccionar as 100 embalagens para presentes, gastamos um total de 89 folhas de papelão colorido, visto que, cada folha custa R$ 2,00 (dois reais), pelo que foi proposto no supracitado problema, levando em consideração apenas a quantidade de papelão, chegamos a conclusão de que é preciso investir R$ 178,00 (cento e setenta e oito reais), para iniciar o pequeno negócio.

Salientamos que os participantes não eram obrigados a fazer todos os cálculos feitos anteriormente, em virtude do tempo, uma vez que demoraram na construção das mesmas, visamos nos objetivos proposto para essas aulas, a noção de área e de volume de sólidos geométricos, bem como sua aplicação direta na vida prática. O que apresentamos em conformidade com o dizer de Carminati (2008, p. 6) onde o mesmo pondera que, "a partir de conceitos gerais, procura-se mostrar a importância da Matemática para o conhecimento e compreensão da realidade onde se vive".

Dos quatros grupos que fizeram o projeto de construção das embalagens, todos chegaram a uma solução para o problema. Três grupos fizeram alguns cálculos e um grupo, o *D*, chegou no resultado de forma *empírica*, através da observação das medidas das folhas de papelão e pela visualização e construção das mesmas, dizendo que, *gasta 90 folhas desse papelão*, sendo assim importante o processo de construção e do visual, no processo de ensino aprendizagem dessa disciplina.

O grupo *A*, observando as medidas do paralelepípedo, do cudo e do cilindro, procedeu assim:

Paralelepípedo:

48 x 58 = 2784 cm² de material gasto na caixa sem tampa.

40,5 x 50,5 = 2045,25 cm^2 de material gasto para a tampa.

Nessa parte, indaguei-lhes o que fazer com as sobras que quando se cortou na medida da caixa e da tampa. O grupo demorou para verificar que, com as sobras da mesma daria para fazer a embalagem do cilindro, mas perceberam que não podia descartar as sobras, uma vez que tinha que, ficar sempre focado no problema, para não haver muito desperdício de material.

Figura 5: Imagem fotográfica de embalagem feita pelos alunos em forma de paralelepípedo.

Fonte: Produção do autor.

Gastam-se 2 folhas para fazer essa caixa.

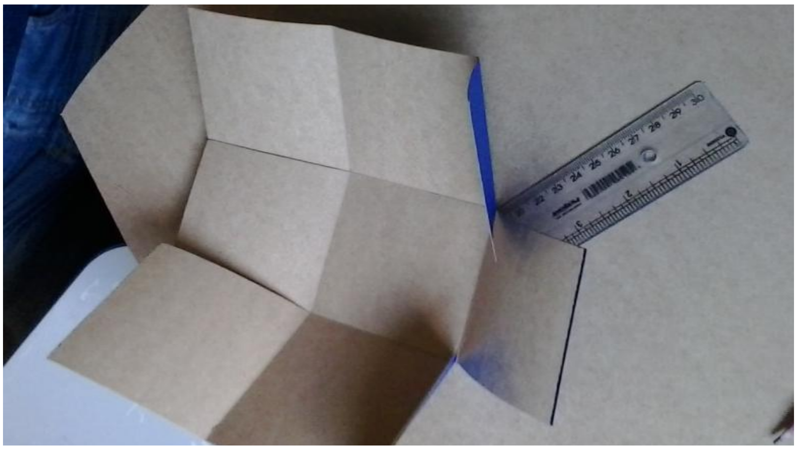
V = 9 x 30 x 40 = 10800 cm

Cubo:

24 x 24 = 576 cm^2, material gasto no cubo sem tampa
16 x 16 = 256 cm^2, material gasto na tampa do cubo
$V = 8^3 = 512\ cm^3$

Gastaríamos um total de 8 folhas, pois queremos 30 desse tipo, vimos que uma folha da para fazer 4 cubo.

Figura 6: Imagem fotográfica de construção do cubo feito pelos alunos.



Fonte: Produção própria.

Cilindro:

$V = \pi x r^2 x h = 3{,}14 x 5^2 x 15 = 1177{,}5 cm^3$

Figura 7: Imagem fotográfica de embalagem feita pelos alunos em forma de cilindro.

Fonte: Produção própria.

O grupo *A* mostrou que sabia fazer os cálculos, logo não se importou com a unidade de área, no qual era dada em centímetros e não fez os cálculos do material gasto no cilindro, dizendo que: *as sobras da caixa dá para fazer os cilindros.* Fazendo assim, apenas o cálculo do volume dessa figura. Com isso o grupo concluiu que: *seria preciso 88 folhas de papelão, que vai precisar de 176 reais para comprar as folhas, pois cada folha* *são 2 reais*. Este grupo fez os procedimentos corretos, mas não analisou que faltava o material para completar as tampas dessa embalagem em forma de cubo, onde precisava de um pouco mais de papelão para confeccionar o restante das tampas, no caso de mais uma folha. Mas apesar de tudo, chegaram ao resultado esperado, uma vez que cada pessoa tem seu modo de pensar, levando em consideração o conteúdo matemático em questão.

O grupo *B* conseguiu conjecturar, mostrando que são capazes de resolver problemas, mesmo tendo dificuldades em descrever matematicamente, uma situação na qual não tenham vivenciado, não só *fórmulas* matemáticas, mas levados a construir objetos que são úteis na sociedade. Chegaram a conclusão de que: *seriam necessários 90 folhas de papelão para fabricar todas essas caixas de presentes, pois 2 x 90 = 180 reais para comprar as folhas*. Descrevendo através de suas conclusões que resolveu a questão, salientando-se que essa foi sua percepção em relação a seus procedimentos e processos de construção. Pautando-se alguns conceitos e entendimentos em relação a unidades de área, no nosso caso centímetros, e assim, como no grupo *A*, errando na colocação dessas unidades no problema, como, por exemplo, não colocando cm^2, nos cálculos das áreas de figuras planas.

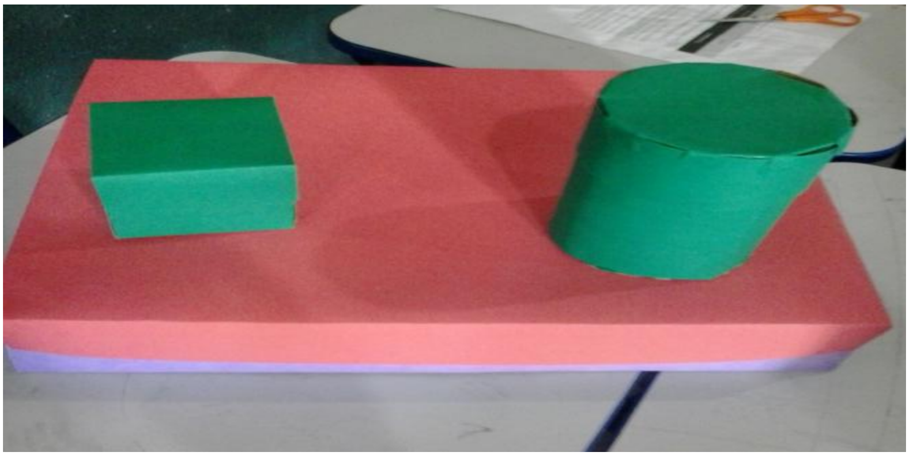
Salientamos, segundo os PCN's (1997), que não devemos subestimar suas capacidades, pois mesmo sendo razoáveis, temos que considerar que, tentaram estabelecer uma relação entre o conhecimento que se tinha com o novo conteúdo.

O grupo *C* conseguiu fazer todos os cálculos previstos, errando em alguns procedimentos matemáticos em relação à colocação de medidas, mas, contudo, conseguiu abstrair a área de figuras planas e de volumes de figuras tridimensionais, chegou ao resultado esperado e acertou o problema proposto dizendo que: *seriam necessário um total de 89 folhas de papelão, porque são 80 folhas para as 40 caixas e das sobras faz os cilindros e 9 folhas para o cubo*. Considera-se que apesar de tudo, os alunos (as) se sentiram envolvidos com tema, salientando-se que gostaram de construir as embalagens, mas tiveram dificuldades nos cálculos.

Escolhemos trabalhar com essa turma de 1° ano, alegando que estes alunos (as), já tenham um pouco de conhecimento sobre a questão dada, tendo em vista que, segundo os PCN's (1997), almejando-se que estes (as) jovens, já deviam ter tido contato com o raciocínio lógico dedutivo, no qual é dado no 4° ciclo do ensino fundamental (8° e 9° anos), constatando-se ainda, erros básicos em todos os grupos.

Escolhemos ainda trabalhar com a turma dividida em grupos, visando maior interatividade entre os mesmos, bem como desenvolver o senso de cooperação entre eles, fazendo desta forma, com que o *aprender* torne-se mais *fácil e prazeroso*. Neste sentido, Haliski (2013, p. 54) diz que, “é possível afirmar que o trabalho em grupo possibilita a troca de ideias fazendo com que um aluno ajude o outro, permitindo a interação que facilita a aquisição do conhecimento”.

Figura 8: Imagem fotográfica de embalagens feitas pelos alunos depois de pronta, em formato de cubo, paralelepípedo e cilindro.



Fonte: produção do autor.

Contudo, a Modelagem pode ser, não somente uma solução, mas também uma ferramenta ou uma alternativa para compreender o ensino, em especial o de Geometria, visando contribuir de forma sistemática e prazerosa, questões de qualquer natureza, seja na educação ou em qualquer área de conhecimento. Como por exemplo, nas obras de artes, onde quem molda deseja chegar ao objeto final, que esteja em sua mente (BIEMBENGUT, 2009).

Sendo necessário também, que as escolas devam possuir um Laboratório de Matemática, para poder concretizar e guardar seus materiais feitos em sala de aula (LORENZATO, 2006).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dentre todos os aspectos mais complexos, optamos por trabalhar na construção de sólidos geométricos, em especial a construções de embalagens para presentes, no qual apoiamo-nos da Modelagem Matemática para o ensino desta disciplina, destacando-se que, a manipulação de um material concreto nem sempre será suficiente para uma aprendizagem significativa, temos que considerar o tempo disponível para a realização destas atividades, o conhecimento dos discentes sobre os conteúdos a serem trabalhados, fomentando-se ainda, sobre alguns aspectos históricos da Matemática e da modernização das sociedades do mundo inteiro.

Salientamos a importância e a necessidade da visualização no processo de ensino da Geometria, pois a visualização faz-se necessária, é o passo inicial e fundamental, em que, partimos do que vemos e do que sentimos, para assim abstrair. No ensino de Geometria esse contexto torna-se de grande valia, pois o mundo que nos cerca está cheio de formas e de belezas naturais. Partimos assim do visual e tátil para o abstrato, sem forçar o aluno (a) a aprender, levando-o (a) a compreender e a gostar da disciplina sem tanto medo.

O ensino de Matemática, especialmente o de Geometria, tem sido desde sempre um dos principais responsáveis pelo desenvolvimento intelectual e espacial nos alunos (as), embasando seu raciocínio lógico matemático ao resolver questões da vida prática. Logo, optamos por um trabalho no qual envolvesse o conteúdo, e o seu grau de aprendizagem dessa disciplina, tendo como procedimentos o da Modelagem, para que possamos trabalhar de forma dinâmica e proveitosa, tendo em vista que, trabalhando com a Modelagem pode surgir várias questões, sabendo-se que o professor (a) pode voltar ao problema sempre que quiser ou tiver dúvida, ou achar uma solução diferente.

Percebemos que, mesmo com metodologias diferentes, os alunos (as) ainda tem muita dificuldade em aprender essa disciplina em especial na Geometria, visto que há um grande desafio em ensinar com a Modelagem por parte do corpo docente, tendo receios de inovar, ou até mesmo por não ter um conhecimento sabre o que seja Modelagem no ensino. Apesar das dificuldades que apareceram em se tratando deste assunto, as aulas foram bastante gratificantes e proveitosas, uma vez que, mesmo com poucos recursos financeiros e materiais, os alunos se empolgaram na construção das embalagens, mesmo não tendo um grau de abstração maior do que o esperado, mas já é um bom começo para pensarmos que a mudança começa dentro de cada um, buscando novos caminhos, para acompanhar as mudanças e as transformações da sociedade.

O trabalho aqui apresentado foi de grande valia, para ambas as partes, desde o seu início até sua conclusão. Vários obstáculos foram superados e lições foram aprendidas. Percebeu-se que, infelizmente, o ensino da Geometria vem perdendo espaço parece algo precipitado a ser dito, mas foi o que ficou claro, ao avaliar que mesmo alunos (as) no primeiro ano do ensino médio, ou seja, alunos com anseios mais elevados de ingressar na vida acadêmica possuem conhecimento insuficiente sobre o conteúdo, visto que, conceitos básicos da matéria, os mesmos não possuíam.

No entanto, evidenciamos também, que estes alunos e alunas sentem-se motivados a dedicar-se mais a disciplina quando estão diante de “aulas práticas” e/ou aulas onde possam relacionar a disciplina com suas vidas, fato este que ficou constatado nas aulas ministradas, os adolescentes estavam empolgados com a aula “diferente”, ou seja, estavam entusiasmados com a metodologia diferente, no caso, com o uso da modelagem.

Desta forma podemos inferir que, os discentes são carentes de metodologias que os estimulem, sabe-se que, em alguns casos, nem mesmo com uma metodologia diferenciada, o aprendizado e a participação nas aulas serão significativos, mas na maioria dos casos, o uso de aulas deste tipo surtirá um grande efeito. O estudo buscou resolver um pequeno problema, que na verdade envolvia vários conceitos, bem como o estimulou os alunos a pensarem de maneira crítica, uma vez que foram conduzidos a resolverem um problema da vida prática.

O trabalho foi imensamente gratificante, ao seu término, e após uma reflexão, percebeu-se que ainda pode-se, por exemplo, voltar ao problema e fazer os alunos participarem ainda mais, visto que percebe-se que quando eles participam efetivamente se empenham mais, isso pode ser feito pedindo para que os mesmos dirijam-se a estabelecimentos que comercializem tais embalagens e verifiquem os preços das mesmas, assim esses alunos vão poder ter a real noção se seria lucrativo ou não montar o negócio, bem como, já teriam uma base do lucro que poderiam obter.

Com isso pode-se dizer, que o ensino não só o de Matemática, analisando-se que estão se tornando cada vez mais cansativo e desinteressante, então. Por que não tentar algo novo? Por que não inovar? Devemos pensar que o ensino é como um rio, que não perde seu rumo, seu curso é o mesmo, mas a água não é a mesma, está sempre renovando. Então, devemos manter o curso da disciplina, mas usar novas metodologias de ensino para no mais, focarmos a atenção dos alunos (as) em relação aos novos desafios da vida.

REFERÊNCIAS

ALVES, Eva Maria Siqueira. **Ludicidade e o Ensino de Matemática**. Campinas - SP: Papirus, 2006.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na educação e os professores: a questão da formação**. Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, ano 14, n. 15, p. 5-23, 2001.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/ SEF, 1997. 142 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/ SEF, 1998. 148 p.

BIEMBENGUT, MARIA S.; HEIN, NELSON. Modelagem Matemática no Ensino. 5 ed. São Paulo: Contexto, 2009.

BÚRIGO, E. Z. Matemática Moderna: progresso e democracia na visão de educadores brasileiros nos anos 60. In: **Pannonica: Teoria & Educação.** v.2, Porto Alegre, 1990, pp. 255- 265.

CARMINATI, L. N. Modelagem Matemática: uma proposta de Ensino possível na Escola Pública, **Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR),** Campina Grande do Sul - PR, 2008.

CHIEREGATO, S. E.; RODRIGUES, S. R. V. **Franca: o ensino de Geometria hoje.** UNIFACEF, 2010. Disponível em: <http://legacy.unifacef.com.br/novo/iv_congresso_de_iniciacao_cientifica/Trabalhos/Inicia%C3%A7%C3%A3o/Socrates.pdf>Acesso em: 15/03/2014.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Entrevista. In: **Revista Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. Ano 6, n° 7, SBEM, Julho 1999.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje. **Temas e Debates. SBEM.** Ano II N, v. 2, p. 15-19, 1989.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6° Ed. São Paulo: Atlas, 2008.

HALISKI, A. M. Utilização da modelagem para explorar conceitos matemáticos por meio de construção de maquete. **Faculdades Integradas de Itararé** – FAFIT-FACIC Itararé – SP – Brasil v. 04, n. 01, jan./jun. 2013, p. 43-56.

JUNIOR, G. T. P. **As dificuldades no Ensino de Matemática**, 2009. Disponıvel em: www. webartigos. <com/articles/5488/1/as-dificuldades-noensino-de-matematica/pagina1. html-37k. Acesso> em: 06/10/2016.

DE LARA, Isabel Cristina Machado. Jogando com a Matemática de 5ª a 8ª série. 2004. Disponível em:

<http://www.miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Encontro_Gaucho_Ed_Matem/minicursos/MC53.pdf > Acesso em: 05/10/2016

LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

MARTINS, A. R.. O Uso da Modelagem Matemática no Ensino Superior**. Universidade Federal de Minas Gerais, Monografia** Minas Gerais, 2007, 61 p.

NETO, S. Di P. Entrevista. In: **Revista de Sociedade Brasileira de Educação Matemática.** Ano 8, n°9/10, SBEM, Abril 2001.

NISS, M. Issues and problems of research on the teaching and learning of applications and modelling. In: J. F. MATOS et. al. Modelling and Mathematics Education. Chichester: Ellis Horwood, 2001. p. 72-88.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de Geometria. Uma visão histórica 1989**. Dissertação (Mestrado em Educação: Metodologia do Ensino) Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas. Disponível em: <http://legacy.unifacef.com.br/novo/iv_congresso_de_iniciacao_cientifica/Trabalhos/Inicia%C3%A7%C3%A3o/Socrates.pdf> Acesso em: 12/03/2014.

RÊGO, R. G. **Laboratório de ensino de geometria** / Rogéria Gaudencio do Rêgo, Rômulo Marinho do Rêgo, Kleber Mendes Vieira. – Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

SOARES, F. Os Congressos de ensino de matemática no Brasil nas décadas de 1950 e 1960 e as discussões sobre a Matemática Moderna, 1 Seminário Paulista de História e Educação Matemática. Outubro de 2005. USP. Disponível em:< http://www.ime.usp.br/~sphem/documentos/sphem-tematicos-5.pdf>. Acesso em: 06/07/2016.

SWETS, F. (1992). Quando e como podemos usar Modelação? Lisboa: Educação e Matemática, n. 23, 3º trimestre.

VITAL, M. J. ENSINO TRADICIONAL DA MATEMÁTICA X RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**, Recanto das letras,** Vitória, ES, 2011. Disponível em: <http://www.recantodasletras.com.br/artigos/3183824 > Acesso em: 05/10/2016.
VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. Martins Fontes. São Paulo, 1989.

ANEXO

ANEXOS PLANO DE AULA

Assuntos:

. Geometria Plana e Espacial/ Estudo dos Sólidos Geométricos.

Conteúdos:

. Conceito de área de figura plana;

. Volume de figuras tridimensionais, caso de Prismas e de Cilindro.

Duração da Aula:

. Cada aula tinha duração de 45 minutos.

Aula Destinada:

. Aos alunos (as) do 1° ano do Ensino Médio.

Objetivos da Aula:

. Ao término dessas aulas, os alunos (as) deverão ter compreendido o conceito de área de figuras planas, saber trabalhar com volume de figuras tridimensionais, como volume de um cilindro e de um prisma de qualquer tamanho e ainda, relacionar embalagens de diferentes formas do mundo físico, bem como, a quantidade de materiais gastos para fazer determinada quantidade de embalagens para presentes, além dos volumes das mesmas.

Metodologia:

. As aulas serão desenvolvidas através de materiais manipuláveis, logo em seguida construção de embalagens para presentes, no qual os mesmos farão alguns sólidos geométricos, utilizando como suporte a modelagem matemática para o Ensino de Geometria.

Recursos Didáticos:

. Régua, compasso, fita métrica, tesoura, papelão, cola, quadro e pinceis (canetas).