UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WESLEY SANTOS CARNEIRO

SISTEMAS LINEARES E DETERMINANTES

CAMPINA GRANDE-PB
2016

WESLEY SANTOS CARNEIRO

SISTEMAS LINEARES E DETERMINANTES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciatura Plena em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira

CAMPINA GRANDE-PB
2016

C289s Carneiro, Wesley Santos.
Sistemas lineares e determinantes [manuscrito] / Wesley Santos Carneiro. - 2016.
61 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira, Departamento de Matemática".

1. Sistemas lineares. 2. Matrizes. 3. Determinantes. 4. Equações lineares. I. Título.

21. ed. CDD 515.354

WESLEY SANTOS CARNEIRO

SISTEMAS LINEARES E DETERMINANTES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Licenciatura Plena em Matemática.

Aprovado em: 02/12/2016.

BANCA EXAMINADORA

Vandenberg Lopes Vieira

Prof. Dr. Vandenberg Lopes Vieira (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maurício Tavares Barbosa

Prof. Me. Maurício Tavares Barbosa
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Weiller Felipe Chaves Barboza

Prof. Weiller Felipe Chaves Barboza
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

RESUMO

Com base na relevância científica dos Sistemas Lineares, seu grau de complexidade e suas inúmeras aplicações, pretende-se facilitar a sua compreensão e a solução de problemas propostos que envolvam o assunto em questão e, sobretudo, proporcionar ferramentas necessárias à busca de conhecimentos mais amplos e avançados no campo da Álgebra. Para tal fim, retrata-se a história e a composição de um Sistema Linear, com Equações Lineares e suas soluções (chamadas Conjuntos Soluções); diferentes métodos para encontrar tais soluções, dentre os quais se podem citar o método de Gauss, o método de Gauss-Jordan, o método da Matriz Inversa e as propriedades mais relevantes inerentes a cada um; as relações existentes entre os Sistemas Lineares, as Matrizes e os Determinantes, caracterizadas, ou pela praticidade oferecida nas Propriedades Matriciais ou pela importância fundamental do uso de Determinantes em Sistemas Lineares de ordem n; o cálculo de um Determinante pela sua própria definição ou por maneiras alternativas e simplórias, como o Teorema de Laplace e a Regra de Sarrus. Formando um registro de conteúdos sintetizados de forma organizada e objetiva, que atende a necessidades científicas específicas de uma maneira muito trivial.

Palavras-Chave: Sistemas Lineares. Matrizes. Determinantes. Equações Lineares.

ABSTRACT

Based on the scientific relevance of Linear Systems, its degree of complexity and its many applications, it is intended facilitate your understanding and the solution of problems proposed what involving the subject matter and, above all, provide necessary tools to search for broader knowledge and advanced in the Algebra field. To this end, will portray the history and composition of a Linear System, with Linear Equations and its solution (called Solution Set); different methods to find such a solution, among which we can cite the Gauss method, the Gauss-Jordan method, the method of the Inverse Matrix and the most relevant properties inherent in each; the relationship existing between the Linear Systems, the Matrices and the Determinants, characterized, or by the practicality offered in the Matrix Property or by fundamental importance of the use of Determinants in Linear Systems of order n; the calculation of a Determinant by its own definition or by alternatives ways and simpleminded, such as the Theorem of Laplace and the Sarrus Rule. Forming a record of synthesized contents in an organized and objective way, which meets specific scientific needs of a very trivial way.

Keywords: Linear Systems. Matrices. Determinants. Linear Equations.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os Sistemas Lineares (sistemas onde o número de equações é igual ao número de incógnitas) como ferramenta, trouxeram um grande avanço nos mais diversos meios científicos e em estudos sociais. Na matemática principia o estudo de *Álgebra Linear* (que é o ambiente de estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares entre eles) abrindo o conhecimento de um campo muito rico em aplicações.

Essas inúmeras aplicações foram sendo consolidadas ao longo dos séculos, desde os primeiros indícios do surgimento dos Sistemas de Equações Lineares (No antigo Oriente), até os dias atuais, onde é possível constatar a consagração da Ciência Matemática, que engloba a Álgebra Linear e consequentemente, os Sistemas Lineares.

Tantos anos de aprimoramento resultariam em páginas e mais páginas de trabalhos realizados por estudiosos em todo o mundo, trazendo para os novos estudantes e pesquisadores, uma enorme quantidade de conteúdos a serem abrangidos, e daí, surge a necessidade de se compreender o porquê dos números, a lógica por trás das afirmações das fórmulas, das curvas e retas, das formas e dos gráficos, dos teoremas e definições matemáticas.

Com tantos “caminhos” a serem seguidos, este trabalho surge com o objetivo de auxiliar o leitor em sua busca pelo conhecimento científico avançado dos Sistemas Lineares, tornando possível a compreensão de conceitos e definições básicas, mas fundamentais para o desenvolvimento do tema em um nível suprassumo. E no quesito “fundamental” é impossível falar de Sistemas Lineares sem dar a devida importância ao conceito de *Determinantes*, afinal suas inúmeras aplicações na resolução de sistemas lineares, o torna ferramenta indispensável nos primeiros tópicos de álgebra linear. Além é claro, de tratar das *Matrizes* e das operações e propriedades mais importantes de cada conteúdo, rotas alternativas para realizar cálculos com maior brevidade e demonstrações necessárias à compreensão de determinados assuntos.

2 HISTÓRIA DOS SISTEMAS LINEARES DE DETERMINANTES

Os primeiros indícios do surgimento dos sistemas de equações lineares ocorreram no antigo Oriente, enquanto que no Ocidente suas aparições foram limitadas. Os chineses, a partir de suas preferências por diagramas, representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação, que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos desse procedimento encontram-se nos *Nove capítulos sobre a arte da matemática*, um texto que data provavelmente do século II a. C.

Em 1683, o japonês Seki Kowa, em um de seus trabalhos, trouxe à tona a ideia de determinante (como polinômio que se associa a um quadrado de números). Considerado o maior matemático japonês do século XVII, chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas).

Leibniz, dez anos depois, em um de seus trabalhos, iniciou os estudos de determinantes no Ocidente, que também estava ligado a sistemas lineares. Em resumo, Leibniz estabeleceu a condição de compatibilidade de um sistema de três equações a duas incógnitas em termos do determinante de ordem 3 formado pelos coeficientes e pelos termos independentes (este determinante deve ser nulo). Para tanto criou até uma notação com índices para os coeficientes: o que hoje, por exemplo, escreveríamos como a_{12}, Leibniz indicava por 1_2.

A conhecida regra de Cramer, usada para resolver sistemas de n equações a n incógnitas por meio de determinantes, é na verdade uma descoberta do escocês Colin Maclaurin (1698-1746), com provável data em 1729, porém só publicada após a sua morte, em 1748, no seu *Treatise of Algebra*. Apesar desse fato, o suíço Gabriel Cramer (1704-1752), teve sua parcela de méritos. Cramer também chegou à regra de forma independente, mesmo que posteriormente, através da sua *Introdução à análise das curvas planas (1750)*.

O francês Étienne Bézout (1730-1783), autor de textos matemáticos de sucesso em seu tempo, sistematizou em 1764, o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. E coube a outro francês, Alexandre Vandermonde (1735-1796), considerado o "pai dos determinantes", em 1771, empreender a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo dos sistemas lineares, embora também os usasse na resolução destes sistemas.

O importante teorema de Laplace, que permite a expansão de um determinante através dos menores de r filas escolhidas e seus respectivos complementos algébricos, foi demonstrado no ano seguinte pelo próprio Laplace, num artigo que, a julgar pelo título, nada tinha a ver com o assunto: *"*Pesquisas sobre o cálculo integral e o sistema do mundo*"*.

O termo *determinante*, com o sentido hodierno, surgiu em 1812 num trabalho de Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Nesse artigo, apresentado à *Academia de Ciências*, Cauchy sintetizou e simplificou o que era conhecido até então sobre determinantes, melhorou a notação e deu uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes. Mesmo apesar de J. F. M. Binet (1786-1856) ter dado, meses antes, a primeira demonstração deste teorema, a de Cauchy era superior, uma vez que ele tinha uma organização impecável em seus trabalhos e trabalhava meticulosamente todos os detalhes possíveis, levando-o a produzir trabalhos com grande esmero. A notação atual de determinantes, com duas barras verticais ladeando o quadrado de números, só surgiria em 1841 com Arthur Cayley (1821-1895).

Outro nome que também contribuiu significativamente para consolidar a teoria dos determinantes foi o do alemão Carl G. J. Jacobi (1804-1851), que recebeu às vezes a alcunha de "o grande algorista". Deve-se a ele a forma elementar como essa teoria se apresenta hoje. Como algorista, Jacobi era um entusiasta da notação de determinante, com suas potencialidades.

3 SISTEMAS LINEARES

Muitos problemas das ciências naturais, das engenharias e das físicas, tratam de equações que relacionam dois conjuntos de variáveis. Seja uma equação do tipo:

$$y = ax$$

Onde a variável y em termos de variável x e da constante a, é chamada uma equação linear. A palavra linear é usada aqui porque o gráfico da equação acima é uma linha reta. Semelhante à equação:

$$b = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \tag{3.1}$$

Que exprime b em termos das variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e das constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é chamada uma equação linear. Em muitas aplicações conhecemos b e as constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e devemos achar os números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfazem (3.1).

A solução de uma equação linear (3.1) é uma sequência de n números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ que possui a propriedade de satisfazer esta equação, quando obtivermos:

$$x_1 = s_1, \qquad x_2 = s_2, \qquad \ldots, \qquad x_n = s_n$$

Assim, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = -4$ é uma solução da equação linear abaixo, pois:

$$6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13$$
$$6(2) - 3(3) + 4(-4) = -13$$

Esta não é a única solução linear dada, pois $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ e $x_3 = -7$ é outra solução.

$$6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13$$

$$6(3) - 3(1) + 4(-7) = -13$$

Mais geralmente, um sistema de m equações lineares com n incógnitas ou simplesmente, um sistema linear, é um conjunto de m equações lineares, cada uma com n incógnitas. Um sistema linear pode ser convenientemente representado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.2}$$

Os dois índices i e j são utilizados para representar a *i-ésima* equação, no caso do primeiro (i), e a *j-ésima* variável x_j, no caso do segundo (j), enquanto que $b_1, b_2, \ldots, bm$ são os termos independentes. Assim, a *i-ésima* equação é:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

Em um sistema linear (3.2) as constantes a_{ij} devem ser conhecidas, e dados os valores de $b_1, b_2, \ldots, bm$, desejamos achar os valores de $x_1, x_2, \cdots, x_n$, que satisfarão cada uma das equações desse sistema. Esse é o foco principal no estudo de um sistema linear. De fato, em um dado problema para alguma ciência ou engenharia supracitada, que pode ser modelado por equações lineares, deseja-se também encontrar um conjunto de números reais (solução) de modo que justifique a modelagem matemática, mesmo que esse conjunto de números seja um conjunto inicial de soluções.

Uma solução de um sistema linear (3.2) é uma sequência de *n* números $s_1, s_2, \cdots, s_n$ que tem a propriedade de satisfazer cada uma das equações desse sistema, quando obtivermos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$. O *Conjunto Solução de um sistema linear* é o conjunto formado por todas as soluções de um sistema linear e que tem a propriedade de satisfazer todas as equações do sistema linear.

Sistemas lineares com várias aplicações dentro do contexto de Álgebra Linear são os *sistemas homogêneos* que são aqueles onde todos os termos independentes são zero. Portanto, um sistema linear homogêneo é um sistema da forma.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \; = \; 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \; = \; 0 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Um sistema linear homogêneo tem ao menos uma solução que é $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, chamada *solução trivial*. Quando $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é a solução do sistema (3.3) em que $x_i \neq 0$ para algum i, então essa solução é chamada *solução não-trivial*. Um sistema linear homogêneo, de m equações e n incógnitas, sempre tem uma *solução não trivial*, quando $m < n$, ou seja, se o número de incógnitas excede o número de equações.

Definição 3.1: *Dizemos que dois sistemas lineares S e S' são equivalentes quando toda solução de S é também uma solução de S' e reciprocamente toda solução de S' é também uma solução de S.*

Os dois exemplos a seguir ilustram casos distintos no que se refere ao conjunto solução de um sistema linear homogêneo.

Exemplo 3.1 – Resolve-se o sistema linear dado, da seguinte forma:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ x + 5y - 2z = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Multiplicando a primeira equação por -1 e somando o resultado obtido à terceira equação, obtemos:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \ [\cdot (-1)] \\ 3x + y + 2z = 0 \\ x + 5y - 2z = 0 \ [+(-x - 2y + 2z = 0)] \end{cases} = \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 3y = 0 \end{cases}$$

Agora, multiplicando a primeira equação por -3 e somando o resultado obtido à segunda equação:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \ [\cdot (-3)] \\ 3x + y + 2z = 0 \ [+(-3x - 6y - 6z = 0)] \\ 3y = 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ -5y - 4z = 0 \\ 3y = 0 \end{cases}$$

$$3y = 0 \Rightarrow y = 0 \qquad 0 - 4z = 0 \Rightarrow z = 0 \qquad x + 0 + 0 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Assim, temos que $x = y = z = 0$, ou seja, o sistema admite apenas a solução trivial.

Exemplo 3.2 – Resolve-se o sistema linear dado, conforme visto no exemplo anterior:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 & [\cdot\,(-1)] \\ x - 3y - 2z = 0 & [+(-x - y - 2z = 0)] \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} = \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -4y - 4z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$-4y - 4z = 0 \Rightarrow y = -z$$

$$x + (-z) + 2z = 0 \Rightarrow x = -z = y$$

Fazendo $z = \alpha$, obtém: $y = -z = -\alpha = -z = x$ e, portanto, as soluções do *Exemplo 3.2* têm a forma $(-\alpha, -\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$. Ou seja, seu *conjunto solução* é $S = \{(-\alpha, -\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Eis algumas soluções particulares:

Para $\alpha = 0$,	$S = (0, 0, 0)$	(Solução trivial)
Para $\alpha = 1$,	$S = (-1, -1, 1)$	(Solução não-trivial)
Para $\alpha = 3$,	$S = (-3, -3, 3)$	(Solução não-trivial)

Observe que se x é uma solução de (3.5), então $x = (-\alpha, -\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$. Ou seja, $x = \alpha(-1, -1,1)$. Daí, as soluções de (3.5) são obtidas multiplicando a terna $\nu = (-1, -1,1)$ por uma escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Na linguagem de Álgebra Linear, dizemos que o conjunto solução é gerado pela terna ν.

Conforme pode ser observado nos *Exemplos 3.1* e *3.2*, usou-se uma técnica para encontrar as suas soluções, chamada "método de eliminação de Gauss". Ela consiste em eliminar algumas das incógnitas de uma equação qualquer do sistema por meio da adição de um múltiplo de outra equação do sistema. No ensino médio, costuma-se trabalhar com esse método nos sistemas lineares em que $m = n$, ou seja, sistemas lineares que têm tantas incógnitas quanto equações.

No entanto, existem sistemas lineares em que $m = n$, $m < n$ e $m > n$. Com efeito, há inúmeras aplicações em que $m \neq n$. Se houver duas, três ou quatro incógnitas, estas serão representadas frequentemente por x, y, z e w.

Exemplo 3.3 – Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x - 3y = \ -3 \\ 2x + y = \quad 8 \end{cases} \tag{3.6}$$

Para eliminar x, subtrai-se duas vezes a primeira equação da segunda, obtendo:

$$7y = 14$$

Uma equação que não tem termos em x.

Conseguindo assim, eliminar a incógnita x, e consequentemente encontrar o valor de y:

$$y = 2$$

E substituindo este valor na primeira equação de (3.6), teremos:

$$x - 3 \cdot (2) = -3 \Rightarrow x = 6 - 3 \Longrightarrow x = 3$$

Para verificar se $x = 3$, $y = 2$ é uma solução de (3.6), verificamos se estes valores de x e y satisfazem cada uma das equações do sistema linear dado.

$$\begin{cases} 3 - 3 \cdot (2) = \ -3 \\ 2 \cdot (3) + 2 = \quad 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - 6 = \ -3 \\ 6 + 2 = \quad 8 \end{cases}$$

Assim, $x = 3$, $y = 2$ é a única solução de (3.6).

Exemplo 3.4 – Agora considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x - 3y = -7 \\ 2x - 6y = 7 \end{cases} \tag{3.7}$$

Para eliminar x, subtraímos duas vezes a primeira equação da segunda, obtendo $0 = 21$. O que não faz sentido. Isto significa que (3.7) não tem solução.

Exemplo 3.5 – Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - 3y + 2z = 14 \\ 3x + y - z = -2 \end{cases} \tag{3.8}$$

Para eliminar x, subtraímos duas vezes a primeira equação da segunda e três vezes a primeira equação da terceira:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 & [\cdot 2]\ e\ [\cdot 3] \\ 2x - 3y + 2z = 14 & [-(2x + 4y + 6z = 12)] \\ 3x + y - z = -2 & [-(3x + 6y + 9z = 18)] \end{cases} = \begin{cases} -7y - 4z = 2 \\ -5y - 10z = -20 \end{cases}$$

Obtendo um sistema de duas equações com incógnitas y e z. Agora, multiplica-se a segunda equação desse sistema por $-\frac{1}{5}$, obtendo:

$$\begin{cases} -7y - 4z = 2 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$$

Que, mudando a ordem das equações, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} y + 2z = 4 \\ -7y - 4z = 2 \end{cases} \tag{3.9}$$

Elimina-se agora y de (3.9) adicionando sete vezes a primeira equação à segunda:

$$\begin{cases} y + 2z = 4 & [\cdot 7] \\ -7y - 4z = 2 & [+(7y + 14z = 28)] \end{cases} = \begin{cases} y + 2z = 4 \\ 10z = 30 \end{cases}$$

$$10z = 30 \text{ ou } z = 3 \tag{3.10}$$

Substituindo esse valor de z na primeira equação de (3.9), verifica-se que $y + 2 \cdot (3) = 4 \Rightarrow y = -2$. Substituindo estes valores de y e z na primeira equação de (3.8), vemos que $x + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (3) = 6 \Rightarrow x = 1$.

Para que $x = 1$, $y = -2$ e $z = 3$ sejam uma solução de (3.8), vamos verificar se eles satisfazem cada uma das equações de (3.8).

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x-3y+2z=14 \\ 3x+y-z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+2\cdot(-2)+3\cdot 3=6 \\ 2\cdot 1-3\cdot(-2)+2\cdot 3=14 \\ 3\cdot 1+(-2)-3=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-4+9=6 \\ 2+6+6=14 \\ 3-2-3=-2 \end{cases}$$

Assim $x = 1$, $y = -2$ e $z = 3$ é a única solução do sistema linear (3.8).

Poderíamos ainda observar que nosso processo de eliminação forneceu em verdade o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ \quad\; y+2z=4 \\ \qquad\quad z=3 \end{cases} \tag{3.11}$$

Obtido usando as primeiras equações de (3.8), (3.9) e de (3.10). A importância do processo reside do fato de que os sistemas lineares (3.8) e (3.11) têm exatamente as mesmas soluções, porém o sistema (3.11) tem a vantagem de poder ser resolvido facilmente, apenas fornecendo os valores acima.

Vimos que o método de eliminação consiste em efetuar repetidamente as seguintes operações:

1. Mudança das posições relativas de duas equações;
2. Multiplicar uma equação por uma constante não nula;
3. Adicionar um múltiplo de uma equação a outra equação.

Considerando o sistema (3.2) abaixo, de uma forma geral, temos o seguinte:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\; \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Toma-se a primeira equação:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \tag{3.12}$$

Multiplica-se por $k \neq 0, k \in \mathbb{R}$:

$$ka_{11}x_1 + ka_{12}x_2 + \cdots + ka_{1n}x_n = kb_1 \tag{3.13}$$

Assim, a m-ésima equação somada ao produto da primeira por k é:

$$(a_{m1} + ka_{11})x_1 + (a_{m2} + ka_{12})x_2 + \cdots + (a_{mn} + ka_{1n})x_n = b_m + kb_1 \tag{3.14}$$

Se a n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é a solução de (3.2), então ela satisfaz a i-ésima e a primeira equação do sistema, logo:

$$\begin{cases} a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m \\ a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \end{cases}$$

E então:

$$\begin{aligned} &(a_{m1} + ka_{11})\alpha_1 + (a_{m2} + ka_{12})\alpha_2 + \cdots + (a_{mn} + ka_{1n})\alpha_n = \\ &= (a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n) + k(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n) = \\ &= b_m + kb_1 \end{aligned}$$

Portanto, a n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ satisfaz a i-ésima equação de (3.2), bem como as demais.

Reciprocamente, se $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é uma solução de (3.2), ela satisfaz as equações (3.13) e (3.14), portanto ela satisfaz (3.12) e, assim, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução de (3.2).

Conforme a Definição 3.1, o método de eliminação fornece outro sistema linear que tem exatamente as mesmas soluções que o sistema dado. O novo sistema linear pode então ser resolvido do modo mais simples.

Exemplo 3.6 – Considere agora um sistema linear de duas equações e duas incógnitas *x* e *y*:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = c_1 \\ b_1x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{3.15}$$

O gráfico de cada uma dessas equações é uma reta, que representaremos por l_1 e l_2, respectivamente. Se $x = s_1$ e $y = s_2$ é uma solução do sistema linear (3.15), então o ponto

(s_1, s_2) está sobre ambas as retas l_1 e l_2. Reciprocamente, se o ponto (s_1, s_2) está sobre ambas as retas l_1 e l_2 então $x = s_1$ e $y = s_2$ é uma solução do sistema linear (3.15). Chega-se, por um raciocínio geométrico, exatamente às três possibilidades mencionadas, conforme as figuras seguintes.

1. O sistema tem solução única, ou seja, as retas l_1 e l_2 se cruzam em exatamente um ponto.

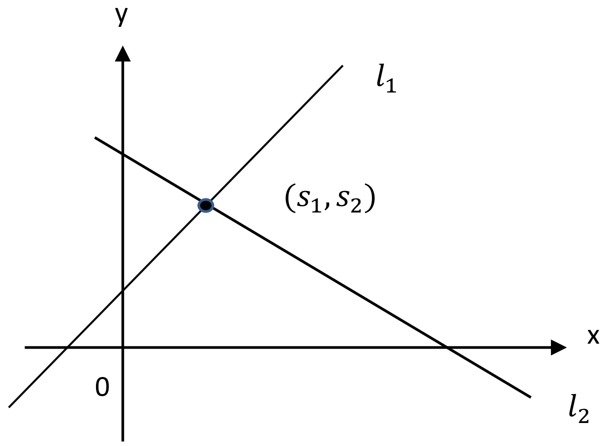


Figura 3.1 – Gráfico das retas l_1 e l_2

2. O sistema não tem solução, ou seja, as retas l_1 e l_2 não se cruzam.

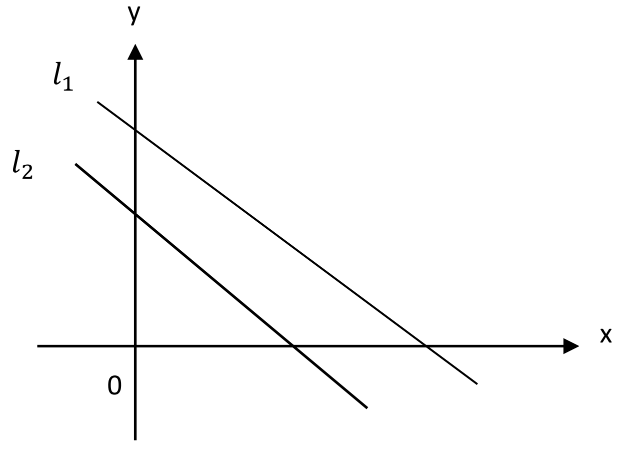


Figura 3.2 – Gráfico das retas l_1 e l_2

3. O sistema tem infinitas soluções, ou seja, as retas l_1 e l_2 coincidem.

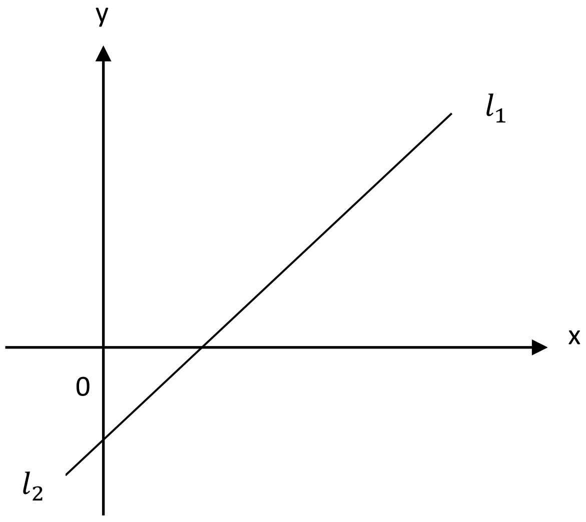


Figura 3.3 – Gráfico das retas l_1 e l_2

Algebricamente pode-se mostrar que se um sistema linear tem mais de uma solução, então terá infinitas soluções.

Proposição 3.1 – *Se* $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ *tem mais de uma solução, então terá infinitas soluções.* (A equação $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ trata-se de equações com matrizes, que será assunto da seção 3).

Demonstração: Observa-se que se $AX = B$ é um sistema linear com n incógnitas e m equações, então uma solução de $AX = B$ é da forma:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sejam X_1 e X_2 soluções. Assim:

$$AX_1 = B \text{ e } AX_2 = B$$

Considere $X = rX_1 + sX_2$, onde $s + r = 1$ e $r, s \in \mathbb{R}$, logo,

$$AX = A(rX_1 + sX_2) = rAX_1 + sAX_2 = rB + sB = (r + s)B = B$$

Essa propriedade não é em parte observada em um sistema não linear. Ou seja, um sistema não linear pode ter apenas uma, duas ou mais soluções, mas em uma quantidade finita de soluções.

Exemplo 3.7 – Resolver o sistema não linear:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ (x+4)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$$

Tem-se que $y = -x$ na primeira equação do sistema não linear dado, e substituindo esse valor na segunda equação do mesmo sistema, temos:

$$(x+4)^2 + (-x-2)^2 = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 + x^2 + 4x + 4 = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2 + 12x + 16 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 6x + 8 = 0$$

Para determinar os pontos comuns, ou seja, a solução do sistema deve-se resolver a segunda equação. As raízes da equação são exatamente $x = -4$ e $x = -2$, substituindo na primeira equação, tem-se $y = 4$, formando o ponto do plano cartesiano $A(-4, 4)$ e $y = 2$, formando o ponto $B(-2, 2)$.

Geometricamente o raciocínio é como mostrado na figura abaixo:

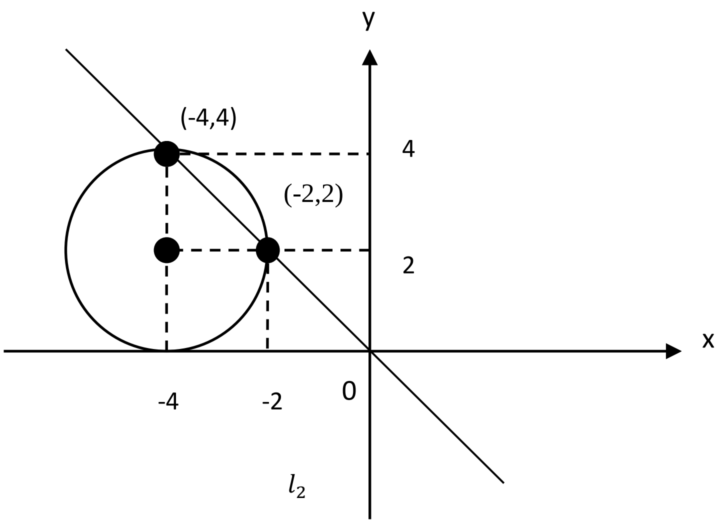


Figura 3.4 – Gráfico de circunferência e reta

Além do método de eliminação de Gauss, existem outros que são utilizados na solução de sistemas lineares, como a regra de Cramer, o método da matriz inversa e o método de Gauss-Jordan, cada um suas próprias vantagens e desvantagens, cabendo ao leitor/pesquisador a escolha do melhor método na solução de determinado sistema linear, e isso, naturalmente virá com a prática.

4 MATRIZES

Chama-se de *matriz* uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. Por exemplo, ao recolher-se os dados referentes a altura, o peso e a idade de um grupo de pessoas, é possível dispô-los em uma "forma organizada", conforme a tabela abaixo:

	Altura (m)	Peso (kg)	Idade (anos)
Pessoa 1	1,61	70	33
Pessoa 2	1,70	80	67
Pessoa 3	1,55	50	12
Pessoa 4	1,68	60	35

Tabela 4.1 – Dados meramente ilustrativos.

Ao abstraírem-se os significados das linhas e das colunas tem-se a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1{,}61 & 70 & 33 \\ 1{,}70 & 80 & 67 \\ 1{,}55 & 50 & 12 \\ 1{,}68 & 60 & 35 \end{bmatrix}$$

Outro exemplo é o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x - 2y = 3 \\ 5x + 2y = 27 \end{cases}$$

Na verdade, este sistema pode ser escrito na forma matricial a seguir:

$$AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} e\ B = \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Simplificando tem-se:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 13 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 27 \end{bmatrix}$$

Conforme mostrado, as matrizes tornam possível escrever um sistema linear de uma forma compacta, além do mais, com as operações matriciais, é possível resolver sistemas lineares de maneira mais rápida e eficiente, e para isso, é preciso definir matematicamente matriz e operações matriciais.

Vale ressaltar, no entanto, que devido à proposta deste trabalho, vamos apresentar um conteúdo sintetizado.

4.1 DEFINIÇÃO

Uma matriz $A_{m\times n}$ é um quadro retangular de m e n números reais (ou complexos) dispostos em m linhas horizontais e n colunas verticais.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (4.1)$$

A i-ésima linha de A é

$$[a_{i1} \quad \dots \quad a_{in}], (1 \leq i \leq m)$$

A j-ésima coluna de A é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, (1 \leq j \leq n)$$

Diz-se que A é uma matriz m por n $(m \times n)$. Se $m = n$, diz-se que A é uma matriz quadrada de ordem n, e que os números $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mn}$ formam a diagonal principal de A. Referir-se ao número a_{ij}, que está na i-ésima linha e j-ésima coluna de A, como (i, j)-ésimo elemento (ou coeficiente) de A, e escreve-se (4.1) como,

$$A = [a_{ij}]$$

Para simplificar a discussão, apenas as matrizes cujos coeficientes são reais serão tratadas. No entanto, ressalta-se que as matrizes com coeficientes complexos também são importantes nas aplicações.

4.2 OPERAÇÕES MATRICIAIS

4.2.1 Adição Matricial

Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são matrizes $m \times n$, então a soma de A e B é a matriz $C = \left[c_{ij}\right] m \times n$, definida por:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \; (1 \leq i \leq m) \; e \; (1 \leq j \leq n)$$

Ou seja, C é obtida adicionando elementos correspondentes de A e B.

Exemplo 4.1 – Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, logo:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & -2+2 & 4+(-4) \\ 2+1 & -1+3 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

4.2.2 Multiplicação de um número por uma Matriz

Dado um número k e uma matriz A, a matriz que se obtêm multiplicando por k todos os elementos de A é representada por kA.

Se $A = \left[a_{ij}\right]$, onde kA é a matriz $\left[b_{ij}\right]$, $\forall\, i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e $\forall\, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$: $\left[b_{ij}\right] = k \cdot \left[a_{ij}\right]$.

Exemplo 4.2 – Multiplique a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, por $k = 3$:

$$k \cdot A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

4.2.3 Transposta de uma Matriz

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times n$, então a matriz $n \times m$ $A^T = [a_{ij}^T]$, em que,

$$a_{ij}^T = a_{ji}\ (1 \leq i \leq m) e\ (\ 1 \leq j \leq n)$$

É chamada de *Transposta de* A. Assim, a transposta de A é obtida trocando a posição relativa das linhas e das colunas de A, observe:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2.4 Multiplicação Matricial

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times p$ e $B = [b_{ij}]$ é uma matriz $p \times n$, então o produto de A e B é a matriz $C = [c_{ij}] m \times n$, definido por,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}\ (1 \leq i \leq m)\ e\ (1 \leq j \leq n)$$

A equação acima nos mostra que o (i, j)-ésimo elemento da matriz produto é calculado adicionando todos os produtos obtidos da multiplicação de cada elemento da i-ésima linha de A pelo seu correspondente na j-ésima coluna de B. Assim, o produto de A e B é definido somente quando o número de linhas de B é exatamente igual ao número de colunas de A. A figura (4.1) abaixo ilustra o caso:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Figura 4.1 – Multiplicação de duas matrizes e o resultado

Exemplo 4.3 – Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (1)\cdot(-2) + (2)\cdot(4) + (-1)\cdot(2) & (1)\cdot(5) + (2)\cdot(-5) + (-1)\cdot(1) \\ (3)\cdot(-2) + (1)\cdot(4) + (4)\cdot(2) & (3)\cdot(5) + (1)\cdot(-5) + (4)\cdot(1) \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

A multiplicação matricial exige muito mais atenção do que a adição, pois as propriedades algébricas da multiplicação são diferentes das satisfeitas pelos números reais. O fato é que o produto AB está definido somente quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

Assim se A é uma matriz $m \times p$ e B é uma matriz $p \times n$, logo AB é uma matriz $m \times n$, então podem ocorrer três situações distintas:

a) BA pode não estar definida, isto acontecerá se $m \neq n$.

b) Se BA estiver definida, o que significa que $m = n$, então BA é $p \times p$ enquanto que AB é $m \times n$; assim se $m \neq p$, AB e BA são de formas diferentes.

c) Se AB e BA forem ambas da mesma forma, podem ser diferentes, ou seja, o produto de matrizes não é comutativo.

Exemplo 4.4 – Seja A uma matriz 2×3, e B uma matriz 3×4, então AB é uma matriz 2×4, enquanto que BA não está definida.

Exemplo 4.5 – Seja A uma matriz 2×3 e B uma matriz 3×2, então AB é uma matriz 2×2, enquanto que BA é uma matriz 3×3.

Exemplo 4.6 – Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então: $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Logo $AB \neq BA$.

Vejamos agora um exemplo prático da aplicação de matrizes.

Exemplo 4.7 – Uma pequena confecção de camisas tem contrato para confeccionar 3 tipos de camisas: regata, pólo e social. A quantidade de material empregada em cada tipo de camisa é dada pela matriz:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} Tecido & Linha & Fio \end{array} \\ \begin{array}{c} Regata \\ Polo \\ Social \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}21 & 0{,}005 & 0{,}010 \\ 0{,}41 & 0{,}09 & 0{,}015 \\ 0{,}50 & 0{,}15 & 0{,}006 \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.2}$$

a) Se ela vai produzir 100, 50 e 25 camisas dos tipos regata, pólo e social, respectivamente, quantas unidades de cada material serão empregadas?

SOLUÇÃO: Seja [100 50 25] a “matriz produção”, então para saber quantas unidades de cada material serão empregadas, basta multiplicar a “matriz produção” pela matriz (4.2).

$$\begin{bmatrix} 100 & 50 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}21 & 0{,}005 & 0{,}010 \\ 0{,}41 & 0{,}09 & 0{,}015 \\ 0{,}50 & 0{,}15 & 0{,}006 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 & 4{,}7 & 8{,}65 \end{bmatrix}$$

b) Suponha agora que os preços por unidades de tecidos, linhas e fios sejam, respectivamente, R$ 7,50, R$ 0,005 e R$ 0,001. Qual o preço unitário de cada produto?

SOLUÇÃO: Seja $\begin{bmatrix} 7{,}5 \\ 0{,}005 \\ 0{,}001 \end{bmatrix}$ a “matriz dos preços por unidades” de tecidos, linhas e fios, então para saber os preços unitários de cada produto, basta multiplicar a matriz (4.2) pela “matriz dos preços por unidades”.

$$\begin{bmatrix} 0{,}21 & 0{,}005 & 0{,}010 \\ 0{,}41 & 0{,}09 & 0{,}015 \\ 0{,}50 & 0{,}15 & 0{,}006 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7{,}5 \\ 0{,}005 \\ 0{,}001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}57 \\ 3{,}07 \\ 3{,}75 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

c) Qual o custo total do material empregado?

SOLUÇÃO: Seja $\begin{bmatrix} 1{,}57 \\ 3{,}07 \\ 3{,}75 \end{bmatrix}$ a “matriz dos preços unitários” de cada produto, conforme (4.3), então basta multiplicá-la pela “matriz produção” [100 50 25], obtendo o custo total empregado.

$$\begin{bmatrix} 1{,}57 \\ 3{,}07 \\ 3{,}75 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 & 50 & 25 \end{bmatrix} = [414{,}25]$$

4.2.4.1 Propriedades da Multiplicação Matricial

a) Associativa: Se A, B e C têm as formas apropriadas, então:

$$A(BC) = (AB)C$$

b) Distributiva: Se A, B e C têm as formas apropriadas, então:

$$A(B + C) \ = AB + AC$$

e

$$(A + B)C = AC + BC$$

c) Elemento neutro: A matriz escalar $m \times n$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Cujos elementos sobre a diagonal principal são todos 1 (um) e os demais elementos são 0 (zero), é chamada a *matriz identidade* de ordem n.

d) Se a e b são números reais, então $ab = 0$ quando a ou b for nulo.

No entanto, isso **não é verdadeiro para matrizes**, pois $AB = 0$ sem que A ou B sejam matrizes nulas. Conforme já foi visto, se A e B são matrizes da mesma forma então AB pode ser diferente de BA. Observe:

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, então $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

e) Se a, b e c são números reais para os quais $ab = ac$ e $a \neq 0$, segue-se então que $b = c$. Ou seja, podemos cancelar a. No entanto, **a lei do cancelamento não se verifica para o conjunto das matrizes**, observe:

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, assim:

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = C \cdot B$$

Onde $A \neq B$.

Vale ressaltar que apresentamos apenas as propriedades referentes à multiplicação de matrizes, por seu grau de distinção, pois todas as propriedades das demais operações matriciais, aqui apresentadas, são equivalentemente semelhantes às propriedades dos números reais, necessitando por parte do leitor/pesquisador, de apenas um conhecimento de nível básico para compreensão e comparação do tema, tornando, o aprofundamento do conteúdo em questão, irrelevante à proposta do trabalho, mas sem esquecer-se das diferenças marcantes entre o conjunto dos números reais e o conjunto das matrizes, facilmente encontradas em compêndios afins.

4.2.5 Inversa de uma Matriz

Se a é um número real não nulo, então a admite inverso, tal que $a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a}$. Essa propriedade ocorre em matrizes quando dada uma matriz $A_{n \times n}$ existe uma matriz $b_{n \times n}$ tal que

$$AB = BA = I_n$$

Onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz B é chamada de inversa de A. Se não existir tal matriz B, então A é chamada não-invertível.

Exemplo 4.8 – Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$, como $AB = BA = I_2$, A admite inversa. O fato é que se A e B são matrizes de ordem n e $A \cdot B = I_n$, então $B \cdot A = I_n$.

Teorema 4.1 – *Se uma matriz A tem inversa, então essa inversa é única.*

Demonstração: Sejam B e C inversas de A, então:

$$BA = AC = I_n$$

Assim,

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

De agora em diante, representar-se-á a inversa de A quando existir por A^{-1}.

Exemplo 4.9 – Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$, vamos encontrar a sua inversa.

Consideraremos $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, mas sabemos que $A \cdot A^{-1} = I_2$, logo:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6a + 2c & 6b + 2d \\ 11a + 4c & 11b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} 6a + 2c = 1 \\ 11a + 4c = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 6b + 2d = 0 \\ 11b + 4d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo-os, temos que:

$$a = 2,\ b = -1,\ c = \frac{-11}{2} \text{ e } d = 3.$$

Portanto, a inversa de A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{-11}{2} & 3 \end{bmatrix}$.

4.2.6 Um método prático para calcular a Inversa de uma Matriz

Antes de comentar sobre o método acima citado é preciso familiarizar-se com alguns conceitos que serão definidos a seguir.

Definição 4.1 – *Uma matriz $A_{m\times n}$ está em "forma reduzida escalonada por linhas" quando satisfaz as seguintes propriedades:*

a) Todas as linhas que são formadas unicamente por zeros estão situadas abaixo das linhas não nulas da matriz.
b) O primeiro coeficiente não nulo em cada linha que não é composto exclusivamente de zeros é 1, chamado de coeficiente líder de sua linha.
c) Se as linhas i e $i+1$ são duas linhas sucessivas que não consistem exclusivamente em zeros, então o coeficiente líder da linha $i+1$ está à direita do coeficiente líder da linha i.
d) Se uma coluna contém um coeficiente líder de alguma linha, então todos os outros coeficientes nesta coluna são nulos.

Quando uma matriz está na forma escalonada por linhas, os coeficientes líderes das linhas não nulas formam uma "escada". Quando uma matriz A satisfaz as propriedades "a" e "c" dizemos que A está na forma escalonada por linha.

Exemplo 4.10 – Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

A é equivalente por linha a $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, que está na forma reduzida escalonada por linhas.

Definição 4.2 – *Uma "operação elementar sobre linhas" de uma matriz* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *é qualquer uma das seguintes operações:*

a) Troque as posições relativas das linhas r e s de A.
b) Multiplique a linha r de A por $c \neq 0$.
c) Adicione d vezes a linha r de A à linha s de A, $r \neq s$.

Em geral, não é algo prático calcular a inversa através de sistemas lineares. Por exemplo, se uma matriz A tem ordem n, então calcular a inversa de A consiste em resolver n sistemas lineares, cada um com n^2 variáveis. Existe, entretanto, um processo prático para calcular a inversa da matriz A que será mostrado a seguir.

Primeiro passo: Forme a matriz $n \times 2n[A \vdots I_n]$ obtida juntando a matriz identidade I_n à matriz A dada.
Segundo passo: Leve a matriz obtida no primeiro passo à forma reduzida escalonada por linhas usando operações elementares sobre linhas. Lembre-se de que tudo o que for feito com uma linha A deve também ser feito com a linha correspondente de I_n.
Terceiro passo: Suponha que o segundo passo obteve a matriz $[C \vdots D]$ sob forma reduzida escalonada por linhas.

Se $C = I_n$, então $D = A^{-1}$; Se $C \neq I_n$, então C tem linhas de zeros. Neste caso, A é não invertível e A^{-1} não existe.

Exemplo 4.11 – Calcule a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ caso exista.

Primeiro passo: A matriz $3 \times 6[A \vdots I_3]$ é $[A \vdots I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Segundo passo: Transformaremos a matriz obtida no primeiro passo levando-a a forma reduzida escalonada por linhas:

A	I_3	
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	Multiplicando a primeira linha por 5 e subtraindo o resultado obtido da terceira linha, temos:
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{matrix}$	Agora dividindo a segunda linha por 2:
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{matrix}$	Subtraindo os valores da segunda linha nos valores da primeira linha:
$\begin{matrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{matrix}$	Multiplicando a terceira linha por $-\frac{1}{4}$:
$\begin{matrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{matrix}$	Multiplicando a terceira linha por $-\frac{3}{2}$ e adicionando o resultado à segunda linha:
$\begin{matrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{matrix}$	Por fim, multiplicando a terceira linha por $-\frac{1}{2}$ e adicionando o resultado à primeira linha:
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{matrix}$	

Terceiro passo: Como $C = I_3$, concluímos que $D = A^{-1}$. Assim:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Observe agora que se a matriz escalonada reduzida por linhas que está sob A tiver uma linha de zeros, então A é *não-invertível*, pois $C \neq I_n$.

Cada uma das matrizes abaixo de A é equivalente por linhas a A, e uma vez que tenhamos uma matriz abaixo de A com uma linha de zeros, então toda matriz subsequente que seja equivalente por linhas a A terá uma linha de zeros. Portanto, podemos interromper o processo logo que encontrarmos uma matriz F que seja equivalente por linhas a A e que tenha uma linha de zeros. Neste caso, A^{-1} não existe. O exemplo abaixo ilustra um caso de matriz não invertível.

Exemplo 4.12 – Calcule, caso exista, a inversa da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Primeiro passo: A matriz 3×6 $[A \vdots I_3]$ é

$$\begin{array}{c} \\ [A \vdots I_3] = \end{array} \begin{array}{c} \qquad A \qquad\qquad\qquad I_3 \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Segundo passo: Levamos a matriz obtida no primeiro passo à forma escalonada por linhas. Para calcular A^{-1}, procedemos como segue:

$$\begin{array}{ccc|ccc} & A & & & I_3 & \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Subtraindo a primeira linha da segunda:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Multiplicando a primeira linha por 5 e subtraindo o resultado obtido, da terceira, temos:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & -12 & -5 & 0 & 1 \end{array}$$

Multiplicando a segunda linha por 3 e subtraindo o resultado obtido, da terceira, temos:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}$$

Neste ponto, A é equivalente por linha a $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Como F tem uma linha de zeros, paramos e concluímos que A é uma matriz não invertível.

5 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

5.1 INTRODUÇÃO

Diante da infinidade de aplicações dos sistemas lineares e da complexidade de se chegar à solução de alguns, surgiram métodos diferentes e adequados para se atingir o objetivo de solucioná-los com mais rapidez e praticidade.

Atente para este exemplo de uma aplicação dos "sistemas lineares" em química:

Sabe-se que o hidrogênio (H_2) reage com o oxigênio (O_2) para produzir água (H_2O). Mas, quanto de hidrogênio e de oxigênio precisa-se para obter determinada quantidade de água? Pode-se escrever essa mudança da seguinte forma: x moléculas de H_2 reagem com y moléculas de O_2 produzindo z moléculas de H_2O, ou seja:

$$xH_2 + yO_2 \rightarrow zH_2O$$

Como os átomos não são modificados, o número de átomos de cada elemento no início da reação deve ser igual ao número de átomos desse mesmo elemento no fim da reação. Assim para o hidrogênio devemos ter $2x = 2z$, e para o oxigênio, $2y = z$. Portanto, as nossas incógnitas x, y e z devem satisfazer as equações:

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

Agora, na medida em que apresentaremos novos métodos mais eficazes para solucionar os sistemas lineares, teremos elementos suficientes para resolver o problema proposto na introdução desta seção.

5.2 MÉTODO DE GAUSS OU ELIMINAÇÃO GAUSSIANA

O método de Gauss para resolução de sistemas lineares consiste em reduzir a matriz ampliada do sistema a uma matriz sob a forma escalonada por linha, isto é, cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha, tem todos os elementos abaixo desta linha iguais a zero. Uma vez reduzida à matriz ampliada a esta forma, a solução final do sistema é obtida por substituição; é um método dos mais adotados quando se faz uso do computador, devido ao menor número de operações envolvidas.

Considere o sistema (3.2): $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

Pode-se escrevê-lo numa forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ou $A \cdot X = B$ onde:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, é a matriz dos coeficientes;

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, é a matriz das incógnitas;

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, é a matriz dos termos independentes.

Outra matriz que se pode associar ao sistema é:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Que chamamos *matriz ampliada do sistema*. Cada linha desta matriz é uma representação abreviada da equação correspondente no sistema. Também é comum usar a seguinte notação:

$$[A|B]$$

Exemplo 5.1 – Considere o sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$

Vamos resolvê-lo usando o método de Gauss

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right]$$

A última matriz corresponde ao sistema:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = \frac{2}{5} \\ \quad -\frac{7}{2}y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Daí, $y = -1$ e portanto $x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, ou seja, $x = 3$.

5.3 MÉTODO DE GAUSS-JORDAN OU ELIMINAÇÃO DE GAUSS-JORDAN

O método de Gauss-Jordan, na verdade, é uma modificação no processo de eliminação de Gauss feito pelo matemático Camille Jordan. A seguir o passo a passo do processo:

Primeiro passo: Forme a matriz $[A|B]$.

Segundo passo: Leve a matriz ampliada à forma reduzida escalonada por linha, usando as operações elementares sobre linhas.

Terceiro passo: O sistema linear que corresponde à matriz em forma reduzida escalonada que foi obtida no segundo passo tem exatamente as mesmas soluções que o sistema linear dado.

Para cada linha não nula da matriz em forma reduzida escalonada, resolva a equação correspondente para a incógnita que corresponde ao coeficiente líder da linha (o coeficiente que possibilitar calcular o valor da incógnita). As linhas formadas totalmente por zeros podem ser desprezadas, pois as equações correspondentes serão satisfeitas para quaisquer valores das incógnitas.

O exemplo a seguir ilustra o processo de Gauss-Jordan.

Exemplo 5.2 – Considere o sistema linear $\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x - z = 3 \end{cases}$, encontraremos sua solução usando o processo de Gauss-Jordan.

Primeiro passo: A matriz ampliada deste sistema linear é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

Segundo passo: A matriz ampliada é equivalente a matriz abaixo (foi verificado):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Terceiro passo: O sistema linear representado pela matriz acima é:

$$\begin{cases} x \qquad = 2 \\ \quad y \quad = -1 \\ \qquad z = 3 \end{cases}$$

De modo que ele é a única solução procurada:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Observe que o método de eliminação gaussiana é um pouco mais eficiente do que a eliminação de Gauss-Jordan. De fato, o número de operações é menor em relação ao método de Gauss-Jordan. Isto é, o método de Gauss consiste em reduzir a matriz ampliada do sistema à forma "escada" enquanto que o método de Gauss-Jordan apenas os elementos da diagonal principal são não nulos requerendo um maior número de operações para se chegar a tal forma.

5.4 MÉTODO DA MATRIZ INVERSA

Este método é útil em problemas industriais. Muitos modelos físicos são descritos por sistemas lineares. Imagine que certa matriz A está intrinsecamente ligada a um processo químico. Logo qualquer mudança do processo pode ter como resultado uma nova matriz. Na verdade o processo interno não nos interessa. Ou seja, desejamos resolver o sistema linear $AX = B$ quando variamos B. Uma maneira eficiente de tratar o assunto é calcular imediatamente A^{-1}; então, sempre que mudarmos B, achamos a solução X correspondente formando $A^{-1}B$.

Se A é uma matriz $n \times n$, então o sistema linear $AX = B$ é um sistema de n equações e n incógnitas. Suponha que A é invertível. Logo A^{-1} existe e podemos multiplicar $AX = B$ por A^{-1} em ambos os lados obtendo:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \qquad \text{ou} \qquad I_n X = X = A^{-1}B$$

Além disso, $X = A^{-1}B$ é claramente uma solução do sistema linear dado. Assim, se A é invertível, temos uma solução única.

Exemplo 5.3 – É possível codificar uma mensagem com o método da matriz inversa. Basta associar as letras do alfabeto aos números, segundo a correspondência abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

Tabela 5.1 – alfabeto

Suponha que a mensagem a ser transmitida seja "ESPERANÇA" podemos formar uma matriz 3×3 assim:

$$\begin{bmatrix} E & S & P \\ E & R & A \\ N & C & A \end{bmatrix}$$

Usando a correspondência numérica da Tabela 5.1 fica:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 18 & 15 \\ 5 & 17 & 1 \\ 13 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora seja D uma matriz qualquer 3×3 invertível, por exemplo:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a matriz M por D, obtendo $M \cdot D$:

$$\begin{bmatrix} 5 & 18 & 15 \\ 5 & 17 & 1 \\ 13 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 69 & 38 \\ -12 & 52 & 23 \\ 10 & 10 & 17 \end{bmatrix}$$

Transmitindo essa nova matriz (na verdade, envia-se a cadeia de números: -13, 69, 38, -12, 52, 23, 10, 10, 17). Quem recebe a mensagem decodifica-a através da multiplicação pela inversa $D^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, conforme é feito a seguir:

$$\begin{bmatrix} -13 & 69 & 38 \\ -12 & 52 & 23 \\ 10 & 10 & 17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 18 & 15 \\ 5 & 17 & 1 \\ 13 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Não resta dúvida que é possível enviar mensagens codificadas a vontade, porém quanto maior a quantidade de letras maior será a matriz chave ou a matriz que admite inversa.

Após a apresentação de diversas formas para solucionar os sistemas lineares, voltaremos ao problema proposto no início dessa seção, relativo à quantidade de hidrogênio e oxigênio necessário para formar água. Sabe-se que:

$$xH_2 + yO_2 \rightarrow zH_2O$$

Onde x, y e z devem satisfazer $\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$. Agora observe:

A matriz ampliada associada ao sistema é: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$

Que, reduzida à forma escalonada, fica assim: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$

Ou seja, z é uma variável livre e se tomarmos $z = \alpha$, teremos:

$$\begin{cases} x - \alpha = 0 \\ y - \frac{1}{2}\alpha = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{1}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note que como foi dito, z é uma variável livre, ou seja, tem-se um grau de liberdade na solução deste sistema. Observe que foi apenas estabelecida a proporção com que os elementos devem entrar em reação, e, para diferentes valores de α, teremos quantidade diferentes de reagentes, produzindo quantidades diferentes de água. Por exemplo:

Se $\alpha = 2$, teremos $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$ e se $\alpha = 4$, teremos $4H_2 + 2O_2 \rightarrow 4H_2O$.

Diante dos métodos apresentados e suas particularidades, fica claro que, um deles pode facilitar o encontro da solução de um sistema linear dado em relação à utilização de outro, cabendo ao leitor/pesquisador, de posse do conhecimento necessário, fazer essa distinção. O ideal é que todos sejam apresentados e estejam disponíveis para que diante de um determinado sistema linear, tenha-se a ferramenta necessária para resolvê-lo.

6 DETERMINANTES

6.1 INTRODUÇÃO

Nesta seção será abordada a noção de determinantes e algumas de suas propriedades. Os determinantes surgiram inicialmente na solução de sistemas lineares, embora os métodos já mencionados para resolver tais sistemas sejam muito mais eficientes do que os que envolvem determinantes, estes são úteis em outros aspectos da álgebra linear. Fica convencionado que só matriz quadrada será utilizada na definição de determinantes.

Consideremos o sistema $ax = b$ com $a \neq 0$. A solução deste sistema é $x = \frac{b}{a}$. Observe que o denominador está associado à matriz dos coeficientes do sistema, ou seja, $[a]$.

Exemplo 6.1 – Considere o seguinte sistema linear 2×2:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{6.1}$$

Para resolver o sistema procede-se da seguinte forma:

Multiplica-se a primeira equação por a_{22} e a segunda por $-a_{12}$, obtém:

$$\begin{cases} a_{11}(a_{22})x + a_{12}(a_{22})y = b_1(a_{22}) \\ a_{21}(-a_{12})x + a_{22}(-a_{12})y = b_2(-a_{12}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = b_1a_{22} \\ -a_{12}a_{21}x - a_{12}a_{22}y = -b_2a_{12} \end{cases}$$

Somando ambas as equações:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = b_1a_{22} - b_2a_{12} \Rightarrow x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

Vamos agora, multiplicar a primeira equação do sistema linear (6.1) por $-a_{21}$ e a segunda equação do mesmo sistema por a_{11}:

$$\begin{cases} a_{11}(-a_{21})x + a_{12}(-a_{21})y = b_1(-a_{21}) \\ a_{21}(a_{11})x + a_{22}(a_{11})y = b_2(a_{11}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_{11}a_{21}x - a_{12}a_{21}y = -b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y = b_2a_{11} \end{cases}$$

Somando ambas as equações:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = b_2a_{11} - b_1a_{21} \Rightarrow y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

Observe que se o número $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$, presente em ambas as equações obtidas, for diferente de zero, o sistema possui uma única solução:

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

Note também que os denominadores são iguais e estão associados à matriz dos coeficientes do sistema:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Exemplo 6.2 – Para um sistema linear 3 × 3:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Ao procurar os valores de x, y e z, encontramos o seguinte denominador (conforme o exemplo anterior):

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Que também está associado à matriz dos coeficientes do sistema.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Estes números são casos particulares do que é chamado determinante de uma matriz quadrada.

De uma forma geral, é preciso abranger outros conteúdos antes de definir o determinante de uma matriz qualquer de ordem n.

Definição 6.1 – Uma aplicação bijetora $\delta \cdot J_n \rightarrow J_n$ é chamada **permutação** do conjunto $J_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}^*$. Denotamos por S_n, o conjunto de todas as permutações de J_n, onde S_n possui $n!$ (“n fatorial”) elementos. Um elemento δ_k, de S_n, será denotado por:

$$\delta_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \delta_k(1) & \delta_k(2) & \cdots & \delta_k(n) \end{pmatrix}, k = 1, 2, \dots, n.$$

A permutação $\delta \; de \; J_n \; tal \; que \; \delta(j) = j \; para \; todo \; 1 \leq j \leq n$, é chamada de *permutação identidade*, e denotada por id.

Exemplo 6.3 – Dado o conjunto $S = \{1, 2\}$, têm-se as permutações:

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = id \qquad \text{e} \qquad \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\delta_1(1) = 1$, $\delta_1(2) = 2$, $\delta_2(1) = 2$ e $\delta_2(2) = 1$

$$S_2 = \{\delta_1, \delta_2\}$$

Exemplo 6.4 – Dado o conjunto $S = \{1, 2, 3\}$, têm-se as permutações:

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id \qquad \delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \delta_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \delta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \delta_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\delta_1(1) = 1$, $\delta_1(2) = 2$ e $\delta_1(3) = 3$

$\delta_2(1) = 1$, $\delta_2(2) = 3$ e $\delta_2(3) = 2$

$\delta_3(1) = 2$, $\delta_3(2) = 1$ e $\delta_3(3) = 3$

$\delta_4(1) = 2$, $\delta_4(2) = 3$ e $\delta_4(3) = 1$

$\delta_5(1) = 3$, $\delta_5(2) = 1$ e $\delta_5(3) = 2$

$\delta_6(1) = 3$, $\delta_6(2) = 2$ e $\delta_6(3) = 1$

$$S_3 = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6\}$$

Definição 6.2 – Dizemos que uma permutação δ_n é par ou ímpar conforme exista um número par ou ímpar de pares (i, j) para os quais $i < j$, mas $\delta_i > \delta_j, 1 \leq i \leq j \leq n$. Definimos o sinal de δ escrito “Sgn” por:

$$Sgn\ \delta = \begin{cases} 1, se\ \delta \text{ é } par \\ -1, se\ \delta \text{ é } ímpar \end{cases}$$

Exemplo 6.5 – Tem-se que $S_2 = \{\delta_1, \delta_2\}$, do *Exemplo 6.3*, onde $\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

E conforme a *Definição 6.2*, sabemos que devem existir, ou não, pares (i, j) que satisfaçam a proposição $i < j\ mas\ \delta_i > \delta_j, 1 \leq i \leq j \leq n$. Logo:

$$(1, 2), 1 < 2\ e\ \delta_1(1) = 1 < \delta_1(2) = 2$$

Dessa forma δ_1 é uma permutação par e $Sgn\ \delta_1 = 1$.

$$(1, 2), 1 < 2\ e\ \delta_2(1) = 2 > \delta_2(2) = 1$$

Logo, δ_2 é uma permutação ímpar e $Sgn\ \delta_2 = -1$.

Exemplo 6.6 – Tomando $S_3 = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6\}$ do *Exemplo 6.4* tem-se que:

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(i, j), i < j\ mas\ \delta_i > \delta_j$$

$$(1, 2), 1 < 2\ e\ \delta_1(1) = 1 < \delta_1(2) = 2$$

$$(1, 3), 1 < 3\ e\ \delta_1(1) = 1 < \delta_1(3) = 3$$

$$(2, 3), 2 < 3\ e\ \delta_1(2) = 2 < \delta_1(3) = 3$$

A condição da *Definição 6.2* não ocorre nenhuma vez, portanto δ_1 é par e o $Sgn\ \delta_1 = 1$.

$$\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(i, j), i < j\ mas\ \delta_i > \delta_j$$

$$(1,2), 1 < 2 \; e \; \delta_2(1) = 1 < \delta_2(2) = 3$$
$$(1,3), 1 < 3 \; e \; \delta_2(1) = 1 < \delta_2(3) = 2$$
$$(2,3), 2 < 3 \; e \; \delta_2(2) = 3 > \delta_2(3) = 2$$

A condição da *Definição 6.2* ocorre apenas uma vez, portanto δ_2 é ímpar e $Sgn\ \delta_2 = -1$.

$$\delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$(i,j), i < j \; mas \; \delta_i > \delta_j$$
$$(1,2), 1 < 2 \; e \; \delta_3(1) = 2 > \delta_3(2) = 1$$
$$(1,3), 1 < 3 \; e \; \delta_3(1) = 2 < \delta_3(3) = 3$$
$$(2,3), 2 < 3 \; e \; \delta_3(2) = 1 < \delta_3(3) = 3$$

A condição da *Definição 6.2* ocorre apenas uma vez, portanto δ_3 é ímpar e $Sgn\ \delta_3 = -1$.

Continuando: δ_4 é par e $Sgn\ \delta_4 = 1$, δ_5 é par e $Sgn\ \delta_5 = 1$ e δ_6 é ímpar e $Sgn\ \delta_6 = -1$.

Seja A uma matriz de ordem n, onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Considere o produto de n elementos de A tal que, um e somente um elemento provém de cada linha e um e somente um elemento provém de cada coluna. Tal produto pode ser representado por: $a_1\delta_1\ a_2\delta_2 \dots a_n\delta_n$ onde $S = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$. Cada permutação de S determina um produto de forma já citada.

Com as definições já descritas nessa seção, agora é possível definir o determinante de uma matriz quadrada.

Definição 6.3 – Chama-se determinante de uma matriz de ordem n o número real:

$$detA = |A| = \sum (Sgn\ \delta)\ a_{1[\delta(1)]}\ a_{2[\delta(2)]} \dots a_{n[\delta(n)]}$$

Vejamos como calcular o determinante de uma matriz de ordem n, com $n \geq 3$.

Para $n = 1$, temos que $A = [a_{11}]$ e S_1 possui uma única permutação $\delta_1 = (1)$, portanto, $detA = (Sgn\ \delta)a_{1[\delta(1)]} = (1)a_{1[\delta_1(1)]} = a_{11}$

Para $n = 2$, temos que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e S_2 possui duas permutações $\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, logo:

$$detA = \sum (Sgn\ \delta)\ a_{1[\delta(1)]}\ a_{2[\delta(2)]} = (1)a_{1[\delta_1(1)]} \cdot a_{2[\delta_1(2)]} + (-1)a_{1[\delta_2(1)]} \cdot a_{2[\delta_2(2)]} \Rightarrow$$
$$detA = a_{1[1]}a_{2[2]} + (-a_{1[2]}a_{2[1]}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Para $n = 3$, temos que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ e S_3 possui seis permutações $\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\delta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\delta_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\delta_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Utilizando os valores obtidos no *Exemplo 6.6*, dos sinais dos δ_n $(Sgn\ \delta)$, vamos direto à aplicação da *Definição 6.3*.

$$\begin{aligned} detA = {} & (1)a_{1[\delta_1(1)]}a_{2[\delta_1(2)]}a_{3[\delta_1(3)]} + (-1)a_{1[\delta_2(1)]}a_{2[\delta_2(2)]}a_{3[\delta_2(3)]} + \cdots \\ & \cdots + (-1)a_{1[\delta_3(1)]}a_{2[\delta_3(2)]}a_{3[\delta_3(3)]} + (1)a_{1[\delta_4(1)]}a_{2[\delta_4(2)]}a_{3[\delta_4(3)]} + \cdots \\ & \cdots + (1)a_{1[\delta_5(1)]}a_{2[\delta_5(2)]}a_{3[\delta_5(3)]} + (-1)a_{1[\delta_6(1)]}a_{2[\delta_6(2)]}a_{3[\delta_6(3)]} \Rightarrow \\ detA = {} & a_{11}a_{22}a_{23} + (-a_{11}a_{23}a_{32}) + (-a_{12}a_{21}a_{33}) + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \cdots \\ & \cdots + (-a_{13}a_{22}a_{31}) \Rightarrow \\ detA = {} & (a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

Vale salientar a enorme dificuldade de se calcular um determinante de ordem $n \geq 4$ através da definição. Assim, nas próximas seções abordaremos algumas propriedades que facilitarão o cálculo do determinante de uma matriz.

6.2 PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

I. Os determinantes de uma matriz e de sua transposta são iguais, isto é, $|A| = |A^t|$. Essa propriedade vai permitir substituir "linha" por "coluna" em muitas das propriedades adicionais dos determinantes;

II. Se a matriz B resulta da matriz A pela troca da posição relativa de duas linhas (colunas) de A, então $|B| = -|A|$;

III. Se duas linhas (colunas) de A forem iguais, então $|A| = 0$;

IV. Se uma linha de A consiste somente em zeros, então $|A| = 0$;

V. Se B é obtida de A multiplicando uma linha (coluna) de A por um número real c, então $|B| = c|A|$.

VI. Se $B = [b_{ij}]$ for obtido de $A = [A_{ij}]$ adicionando a cada elemento da r-ésima linha (coluna) de A c vezes o elemento correspondente das s-ésimas linhas (colunas) $r \neq s$ de A, então $|B| = |A|$;

VII. Se uma matriz $A = [a_{ij}]$ é triangular inferior (superior), isto é, tem zeros acima ou abaixo da diagonal principal, então $|A| = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$, ou seja, o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos sobre a diagonal principal;

VIII. O determinante de um produto de duas matrizes é o produto de seus determinantes, ou seja,$|AB| = |A||B|$.

IX. Se A é invertível, então $|A| \neq 0$ e além disso, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

X. Apenas matriz quadrada possui determinante.

Exemplo 6.7 – Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, calcule o determinante.

Solução pela *Propriedade III*. $detA = 0$, pois a primeira e a segunda linha são iguais.

Exemplo 6.8 – Sejam $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$detB = -2 \qquad \text{e} \qquad detC = 5$$

Além disso $\quad BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \quad$ e $\quad detBC = -10 = detB \cdot detC$

6.3 REGRA DE SARRUS

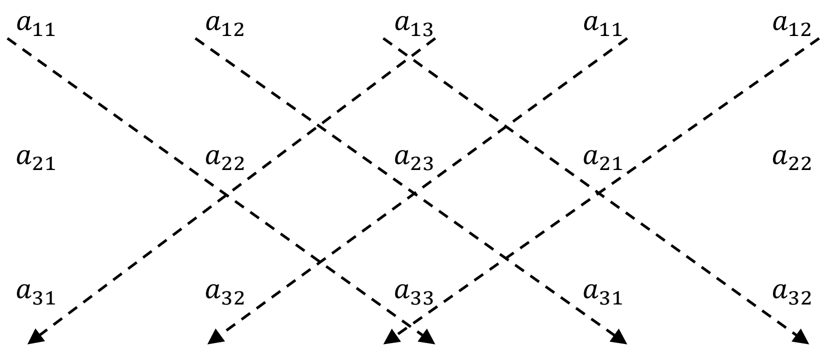
Sarrus (pronuncia-se Sarrí), cujo nome completo é Pierre Frederic Sarrus (1798-1861). Foi professor da universidade francesa de Strasbourg. A regra de Sarrus foi provavelmente escrita no ano de 1833, muito prática, porém só se aplica a determinante de ordem 3.

No cálculo de um determinante de ordem 3, temos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{D_{11}} - a_{21} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{D_{21}} + a_{31} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}_{D_{31}} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot$$

$$a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}$$

Pode-se obter esse resultado anotando uma matriz qualquer de ordem 3, repetindo do lado direito, a primeira e a segunda coluna, e somando os produtos indicados no seguinte esquema:



$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Figura 5.1 – Regra de Sarrus

Exemplo 6.9 – Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ usando a regra de Sarrus.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 8 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$-[4 \cdot 4 \cdot (-3)] - [1 \cdot 8 \cdot 0] - [2 \cdot (-1) \cdot 2] + [1 \cdot 4 \cdot 2] + [2 \cdot 8 \cdot (-3)] + [4 \cdot (-1) \cdot 0] =$$
$$= +48 - 0 + 4 + 8 - 48 + 0 = 12$$

Para calcular determinantes de ordem maior do que 3, aplica-se a definição, tantas vezes forem necessárias, até recair em determinantes de ordem 3; então termina-se o cálculo empregando a regra de Sarrus, porém deve-se acrescentar que é uma maneira extremamente tediosa quando a ordem da matriz for razoavelmente grande.

6.4 COFATOR

Desenvolver-se-á agora um método diferente para calcular o determinante de uma matriz $n \times n$, que reduz o problema ao cálculo de determinantes de matrizes de ordem $n - 1$. Pode-se então repetir o processo para estas matrizes $(n-1) \times (n-1)$ até chegar a uma matriz 2×2.

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}, n \geq 2$, denominamos cofator do elemento a_{ij} ao produto de $(-1)^{i+j}$ pelo determinante da matriz que se obtém eliminando em A a linha i e a coluna j qual denotaremos por $|M_{ij}|$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|$$

Exemplo 6.10 – Os cofatores dos elementos $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ e a_{33} da matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, são:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4+3) = -1$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (8-3) = -5$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2+1) = -1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (0+1) = -1$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4-1) = -5$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1-0) = -1$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0+1) = 1$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3-2) = 5$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1-0) = 1$$

Definição 6.4 – Seja $A[a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$. A matriz $adjA$, chamada de “adjunta de A”, é a transposta da matriz dos cofatores de A.

Exemplo 6.11 – Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ a matriz dada.

A matriz dos cofatores de A é $\begin{bmatrix} -18 & 17 & -6 \\ -6 & -10 & -2 \\ -10 & -1 & 28 \end{bmatrix}$ e, portanto a adjunta de A é:

$$adjA = \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

Teorema 6.1 – Se $A[a_{ij}]$ é uma matriz $m \times n$, então: $A(adjA) = (adjA)A = |A|I_n$

Exemplo 6.12 – Considere a matriz do *Exemplo 6.11*. Então:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -94 & 0 & 0 \\ 0 & -94 & 0 \\ 0 & 0 & -94 \end{bmatrix} = -94 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E

$$\begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -94 & 0 & 0 \\ 0 & -94 & 0 \\ 0 & 0 & -94 \end{bmatrix} = -94 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Corolário 6.1 – Se A é uma matriz $n \times n$ e $|A| \neq 0$, então:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\ A) = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

Exemplo 6.13 – Considere mais uma vez a matriz do *Exemplo 6.11*, onde o $|A| = -94$, e

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\ A) = \begin{bmatrix} \frac{18}{94} & \frac{6}{94} & \frac{10}{94} \\ -\frac{17}{94} & \frac{10}{94} & \frac{1}{94} \\ \frac{6}{94} & \frac{2}{94} & -\frac{28}{94} \end{bmatrix}$$

6.5 DESENVOLVIMENTO DE LAPLACE

O desenvolvimento de Laplace é muito importante e igualmente útil no cálculo de um determinante. Trata-se de uma fórmula de recorrência que permite calcular o determinante de uma matriz de ordem n, a partir dos determinantes das submatrizes quadradas de ordem $n-1$. Em grande parte dos casos ele simplifica muito o cálculo do determinante.

Sabe-se que o determinante de uma matriz quadrada de ordem $n, n \geq 2$, é igual a soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) qualquer, pelo seus respectivos cofatores. No caso da matriz de ordem 2, temos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

1ª linha:

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} = a_{11}(-1)^{1+1} \cdot a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2} \cdot a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2ª linha:

$$\det A = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} = a_{21}(-1)^{2+1} \cdot a_{12} + a_{22}(-1)^{2+2} \cdot a_{11} = -a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$$

1ª Coluna

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} = a_{11}(-1)^{1+1} \cdot a_{22} + a_{21}(-1)^{2+1} \cdot a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2ª Coluna

$$\det A = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} = a_{12}(-1)^{1+2} \cdot a_{21} + a_{22}(-1)^{2+2} \cdot a_{11} = -a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$$

Verifica-se que os quatro desenvolvimentos levam ao mesmo resultado, que coincide com a *Definição 6.3*:

$$\det A = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

NOTA: Lembre-se que o determinante da matriz inicial 3×3 pode ser expresso em função dos determinantes de submatrizes 2×2.

De uma forma geral, tem-se o seguinte teorema:

Teorema 6.2 – Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$.
Então, para cada $1 \leq i \leq n$, $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$ (desenvolvimento de $|A|$ segundo a i-ésima linha).
E para cada $1 \leq j \leq n$, $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$ (desenvolvimento de |A| segundo a j-ésima coluna).

Exemplo 6.14 – Calcule o determinante da matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: A terceira coluna possui três zeros, portanto o desenvolvimento ocorrerá por esta coluna, o que irá facilitar o cálculo:

$$detA = 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + 0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$detA = 0 + 4 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 4 \cdot (-1) \cdot 3 = -12$$

6.6 REGRA DE CRAMER

O cálculo da inversa de uma matriz fornece outro método de resolução de sistemas lineares de equações. Este só se aplica aos sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas. Suponha-se que se deseja resolver o sistema linear de n-equações e n-incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Pode-se escrever este sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad A \cdot X = B$$

Onde:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, é a matriz dos coeficientes;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ é a matriz das incógnitas;}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \text{ é a matriz dos termos independentes.}$$

Para esta equação suponha-se que $\det A \neq 0$ e portanto, que A tenha a inversa A^{-1}, então:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$
$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$
$$I_n X = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

Usando o *Corolário 6.1*, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Onde $\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$ é a matriz adjunta de A, então:

$$x_1 = \frac{b_1 A_{11} + \cdots + b_n A_{n1}}{|A|}$$

Mas note que o numerador desta fração é igual ao determinante da matriz que obtemos de A, substituindo a primeira coluna pela matriz dos termos independentes. De fato, usando o desenvolvimento de Laplace, obtemos:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 A_{11} + \cdots + b_n A_{n1}$$

Ou seja

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}$$

Fazendo deduções análogas, obtém:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}$$

Para $i = 1, 2, \ldots, n$

Observe que no denominador temos o determinante da matriz dos coeficientes ($detA \neq 0$), e no numerador aparece o determinante da matriz obtida de A, substituindo a i-ésima coluna pela coluna dos termos independentes. Este método de resolução de um sistema linear de n equações e n incógnitas, que só pode ser aplicado quando o determinante da matriz dos coeficientes for não nulo, é chamado Regra de Cramer.

Exemplo 6.15 – Resolva o sistema $\begin{cases} 11x + 23y = 19 \\ 10x + 17y = -29 \end{cases}$.

Resolução: Usando a Regra de Cramer observa-se que o determinante da matriz incompleta do sistema é:

$$D = \begin{vmatrix} 11 & 23 \\ 10 & 17 \end{vmatrix} = 11 \cdot 17 - 10 \cdot 23 = -43$$

D_x é o determinante da matriz que se obtém trocando, na matriz incompleta, a coluna dos coeficientes de x pela coluna dos termos independentes:

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & 23 \\ -29 & 17 \end{vmatrix} = 19 \cdot 17 - (-29) \cdot 23 = 990$$

D_y é o determinante da matriz que se obtém trocando, na matriz incompleta, a coluna dos coeficientes de y pela coluna dos termos independentes:

$$D_y = \begin{vmatrix} 11 & 19 \\ 10 & -29 \end{vmatrix} = 11 \cdot (-29) - 10 \cdot 19 = -509$$

Tem-se, então:

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{990}{43} \; e \; y = \frac{D_y}{D} = \frac{509}{43}$$

Exemplo 6.16 – Resolver o sistema linear dado usando a Regra de Cramer.

$$\begin{cases} -2x + 3y - z = 1 \\ x + 2y - z = 4 \\ -2x - y + z = -3 \end{cases}$$

Solução:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Portanto,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Observa-se que a Regra de Cramer é aplicável somente no caso em que há n equações e n incógnitas e em que a matriz A dos coeficientes admite inversa. A regra de Cramer torna-se computacionalmente ineficiente para $n > 4$, e é então melhor usar o processo de eliminação de Gauss ou de Gauss Jordan. Muitos problemas costumam envolver um número grande de incógnitas, de ordem 100 ou 1000, por exemplo. Nestes casos, os métodos apresentados aqui podem não ser adequados. Nos meios computacionais existem métodos mais eficientes para a solução desses problemas, chamados métodos iterativos, que são vistos em cursos de nível superior.

6.6.1 Determinante de uma Matriz Quadrada Qualquer

Foi considerado o determinante de uma matriz 2×2 e 3×3. Mas, como proceder quando se tratar de uma matriz de ordem maior? Existem outros métodos práticos para calcular determinantes?

Já foi comentado sobre esse assunto no início dessa seção e existem sim, regras práticas, que para serem aplicadas, necessitam de afinidade com todo o conteúdo visto até aqui.

Já é conhecido o determinante de ordem 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Considerando a matriz quadrada de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

O determinante de A é o número:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{D_{11}} - a_{21} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{D_{21}} + a_{31} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}_{D_{31}}$$

Onde observa-se que:

D_{11} é o determinante da matriz que se obtém eliminando, em A, a linha 1 e a coluna 1;
D_{21} é o determinante da matriz que se obtém eliminando, em A, a linha 2 e a coluna 1;
D_{31} é o determinante da matriz que se obtém eliminando, em A, a linha 3 e a coluna 1;

Exemplo 6.17 – Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ -4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ tem-se que seu determinante é:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ -4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (0 - 20) - 3 \cdot (7 - 15) + (-4) \cdot (4 - 0) =$$

$$= -40 + 24 - 16 = -32$$

Em geral, o determinante da matriz quadrada de ordem n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

É o número

$$detA = a_{11}D_{11} - a_{21}D_{21} + a_{31}D_{31} - \cdots + (-1)^{n+1} \cdot a_{n1}D_{n1}$$

Onde $D_{11}, D_{21}, D_{31}, \dots, D_{n1}$ são os determinantes das matrizes obtidas, eliminando em A, junto com a coluna 1, respectivamente, as linhas $1, 2, \dots, n$.

7 CONCLUSÃO

Com o objetivo de contribuir para o aprimoramento do saber matemático no campo da Álgebra Linear, e consequentemente em outros conteúdos matemáticos mais avançados, que possuem uma relação de dependência com os assuntos comentados e explicados neste trabalho, foi possível formar uma opinião sólida a respeito da importância dos sistemas lineares, matrizes e determinantes, compreender as relações e as conexões que existem entre eles e auxiliar o leitor/pesquisador na sua busca pela compreensão de um tema tão complexo e fundamental.

Pode-se dizer que uma vez de posse do conhecimento da natureza dos determinantes, conforme foi proposto nesse trabalho, das propriedades referentes às matrizes e dos métodos para a solução de sistemas lineares, o estudante terá dado o primeiro passo para compreender e analisar a complexidade da abstração que envolve o aprendizado da álgebra.

O presente estudo não teve por objetivo abranger outros campos da Álgebra, e sim ficou restrito apenas à Álgebra Linear e Elementar. Pois partindo do pressuposto que o leitor, domina os conteúdos básicos de Álgebra Elementar, foi apresentada uma série de teoremas, gráficos, tabelas e exemplos, entre outros elementos necessários, que facilitaram a demonstração do conjunto dessa pesquisa, com o único objetivo de abrir as portas para um longo caminho no abstrato mundo da Álgebra.

Contribuir de forma tão sintetizada, mas com a apresentação de uma gama de conteúdos correlacionados em um único trabalho, traz ao estudante mais uma alternativa de pesquisa a cerca de um tema tão relevante, e com a satisfação de apresentá-lo de forma clara e objetiva, sem deixar lacunas que impeçam o aprendizado, acreditamos ter atingido o nosso objetivo.

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, J. L. et. al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo-SP: Harper & Row do Brasil, 1980.

DOMINGUES, H. H. **História da Matemática:** Origem dos Sistemas Lineares e determinantes. Disponível em: <www.somatematica.com.br> Acesso em 21 Mar. 2016.

IEZZI, G. et. al. **Matemática:** 2ª série segundo grau. 9. ed. rev. São Paulo-SP: Atual, 1990.

KOLMAN, B. **Introductory Linear Algebra With Applications**. Rio de Janeiro-RJ: Editora Guanabara, 1987.