Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Departamento de Estatística

Dinércules Rodrigues da Silva

UMA REVISÃO DE ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS COM APLICAÇÕES EM R

Campina Grande
Outubro de 2016

Dinércules Rodrigues da Silva

UMA REVISÃO DE ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS COM APLICAÇÕES EM R

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Bacharelado em Estatística do Departamento de Estatística do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de bacharel em Estatística.

Orientador:
Tiago Almeida de Oliveira

Campina Grande
Outubro de 2016

S586r Silva, Dinércules Rodrigues da.
Uma revisão de algumas distribuições discreta com aplicações em R [manuscrito] / Dinércules Rodrigues da Silva. - 2016.
38 p.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Estatística) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Tiago Almeida de Oliveira, Departamento de Estatística".

1. Probabilidade. 2. Modelos discretos. 3. Software livre. 4. Software R. I. Título.

21. ed. CDD 519.2

Dinércules Rodrigues da Silva

UMA REVISÃO DE ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS COM APLICAÇÕES EM R

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Bacharelado em Estatística do Departamento Estatística do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de bacharel em Estatística.

Aprovado em: 31/10/2016

Banca Examinadora:

Tiago Almeida de Oliveira

Prof. Dr. Tiago Almeida de Oliveira
Orientador

DMEsteves

Profª. Drª. Divanilda Maia Esteves
Universidade Estadual da Paraíba

Prof. Dr. Sílvio Fernando Alves Xavier Junior
Universidade Estadual da Paraíba

“Se ressucitastes com Cristo, buscai as coisas do alto, onde Cristo está entronizado à direita de Deus.”

Col 3,1

“É preciso amar as pessoas como se não houvesse amanhã!.”

Renato Russo

Dedicatória

À minha família, em especial à minha esposa Elk e meus filhos Gabriel e Rafael, aos meus pais, Antonio (in memorian) e Lucia, aos meus irmãos Tony, Doridarnel, Denecler e Donglei e por fim ao Senhor de tudo e maestro da minha vida, Jesus Cristo.

Agradecimentos

Nada mais justo que agradecer ao meu querido Jesus Cristo que é a razão do meu viver, meu tudo, meu mestre.

Ao professor Doutor Tiago Almeida pela paciência, apoio e orientação a este trabalho e pelo amor com que desempenha esta profissão tão difícil, mas que é uma arte, um dom ser educador, obrigado pelo exemplo.

Aos companheiros Gercino, Fagner, Tiago Almeida (aluno e Amigo), Mauro, Waleska, Tiago Diniz, Kleiton, Fagna e todos aqueles que compartilharam comigo tantos momentos na UEPB.

Gostaria de deixar o meu muito obrigado a todos os professores, funcionários e colegas que passaram ao decorrer do curso. A professora Núbia, ao professor João Gil por todo incentivo e em especial a professora Ruth por estar sempre presente, nos mostrando que somos capazes.

Por fim agradeço a minha esposa Elk aos meus filhos Gabriel e Rafael por todo amor, cumplicidade e força, elementos essenciais para vencer mais um etapa da vida. Aos meus pais, Antonio Rodrigues (in memorian) e Lucia Emilia, aos meus irmãos Tony, Doridarnel, Denecler e Donglei, pelo incentivo e pela força quando pensei em desistir.

Resumo

Nesta monografia apresentamos uma breve introdução sobre o estudo de probabilidades e variáveis aleatórias discretas com o uso de definições, lemas, teoremas e demonstrações. Apresentando ao leitor interessado, seja professor de ensino médio ou algum aluno que se depara com o estudo de estatística na universidade, os modelos probabilísticos discretos com aplicações no software R no contexto de Educação Estatística. O uso do software R como ferramenta estatística de aplicação, permitiu o entendimento dos exercícios propostos.

Palavras-chave: Probabilidade. Modelos discreto. Software Livre.

Abstract

This monograph is a brief introduction to the study of probability and discrete random variables with the use of definitions, lemmas, theorems and proofs. Introducing the interested reader, is a high school teacher or a student who is faced with the statistical study at the university, the discrete probabilistic models with applications in R software in Statistics Education context. Use of R software and application of statistical tool, allowed the understanding of the proposed exercises.

Key words: Probabilities. discrete models. Free Software.

Sumário

1 Introdução

De acordo com a descrição feita pela Escola Nacional de Ciências Estatísticas, o que modernamente se conhece como Ciências Estatísticas, ou simplesmente Estatística, é um conjunto de técnicas e métodos de pesquisa e análise de dados baseados em estudos probabilísticos que entre outros tópicos envolve o planejamento do experimento a ser realizado, a coleta qualificada dos dados, a inferência, o processamento, a análise e a disseminação das informações.

Atualmente existem muitos *softwares* para auxiliar os alunos na aprendizagem da estatística. O R é um *software* gratuito de códigos abertos, reproduzíveis e adaptáveis, desenvolvido para Windows, UNIX e MacOS, que dia após dia tem ganhado espaço na academia e no setor privado;Propõe um manual de utilização do *software* R, com o ensino de Estatística no ensino superior, permitindo aos alunos ter conhecimento de toda a parte gráfica e computacional imprescindível à aplicação da Estatística. Algumas vantagens de se usar o *software* R, De acordo com Muenchen (2011), são:
O R oferece um vasto conjunto de métodos de análise estatística; É constantemente atualizado; Tem uma vasta biblioteca de métodos implementada; É uma ferramenta flexível com gráficos que apresentam boa manipulação e resolução; Muito versátil para tratamento de dados; Permite desenvolver programas específicos e permite alterações nas funções disponíveis.

Existe um aumento do interesse dos professores do ciclo de Ensino Fundamental e do Médio no lecionamento da Estatística. Apesar de a aleatoriedade estar presente fortemente no dia a dia das pessoas, boa parte desses professores de tais níveis não foram e não estão sendo preparados para transmitir tais conhecimentos de forma consistente, dado que a maioria não teve em sua graduação um direcionamento adequado neste sentido.

O objetivo deste trabalho é apresentar alguns dos principais modelos probabilísticos discretos em conjunto com aplicações no software R, com intuito de auxiliar professores e estudantes de estatística.

2 Fundamentação Teórica

Este trabalho está estruturado em seções relativas conhecimento do R, Introdução a Probabilidade e variáveis aleatórias discretas e aplicações dos conceitos vistos com o *Software* R.

2.1 Ensino de Estatística

No ensino médio, a Proposta Curricular para o ensino de matemática permite certa flexibilidade no número de aulas semanais. Esta flexibilidade afeta o modo como o conteúdo é abordado. Nas escolas com grade curricular com duas ou três aulas semanais, não está previsto Estatística em quase nenhum momento. Apenas no 2º ano era previsto análise combinatória e probabilidade. No caso de escolas com 4 ou 5 aulas semanais de matemática pode ser incluído Matemática Financeira ou Estatística, ficando a critério da escola ou do professor.

Os conteúdos de Estatística, ministrados no ensino fundamental e médio, estão incluídos na disciplina de matemática. Cabe então ao professor conhecer o currículo da disciplina de matemática, assim como compreender a importância de se trabalhar estes elementos de Probabilidade e Estatística. Deste modo, não há como negar a grandeza desta contribuição, assim como a importância de que estes elementos de Estatística estejam inseridos adequadamente dentro deste currículo.

Assim, embora presente nos diversos níveis de ensino, a Estatística, na maioria das vezes é tratada apenas como uma disciplina (ou um conteúdo) a mais, focada em fórmulas e exercícios. Para Viali (2008), a Estatística ser abordada apenas como uma aplicação de fórmula, sem focar na análise e interpretação dos dados pode omitir sua significância. Então, a solução seria saber transmitir o conteúdo de forma adequada, porém Viali (2008) cita que muitas vezes os professores preferem não trabalhar com Estatística por falta de preparação com relação aos conteúdos dessa.

2.2 O *Software* R

A linguagem R foi criada originalmente por Robert Gentleman e Ross Ihaka do Departamento de Estatística da Universidade de Auckland em Nova Zelândia, mais conhecidos por "R & R", apelido do qual originou-se o nome R do programa (MUENCHEN, 2011). O objetivo inicial de "R & R", em 1991, era produzir um software para as suas aulas de laboratório baseado na já revolucionária linguagem S, utilizada pelo software comercial S-Plus criado por Jonh M. Chambers da AT & T que atualmente vem contribuindo para o aperfeiçoamento e ampliação das análises estatísticas do R.

Atualmente, o R vem tendo uma aceitação crescente nas universidades e empresas de todo mundo. Hoje em dia, *softwares* estatísticos semelhantes ou até inferiores em termos de análises realizadas, têm preços de aquisição muito elevados, principalmente para empresas de pequeno e médio porte que predominam em nosso país.

Este *software* contem uma linguagem de programação que permite a computação de uma grande variedade de métodos de estatísticos e técnicas gráficas. A maneira mais fácil de inserir dados em objetos no R é a leitura de arquivos. Ele pode ler arquivos de estruturas simples com as extensões .txt. Também é possível importar outros tipos de arquivos mais complexos como .xls mas nesse caso aconselha-se a salvá-lo como .txt. Quando se salva uma área de trabalho, guarda-se o nome e o conteúdo dos objetos. Todos os comandos executados e todos os resultados não armazenados em objetos são perdidos. Esta característica do R recomenda que se trabalhe no R em associação com um editor de texto da sua preferência.

2.3 Introdução a Probabilidade

O estudo das probabilidades teve sua origem na necessidade de quantificar os riscos dos seguros e de avaliar as chances de ganhar em jogos de azar. O surgimento dos seguros está associado 'a perda de carga dos navios (por naufrágio ou roubo), há mais de 5 mil anos. Os estudos matemáticos sobre seguros aparecem no início do século XVI, relacionados a seguros de vida. Iniciados por Gerônimo Cardano (1501-1576) em 1570, não ganharam repercussão. Outra grande contribuição para o estudo de probabilidade está relacionada com jogos de azar, onde a probabilidade de ganhar ou perder depende exclusivamente do acaso, não importando o raciocínio ou habilidade do jogador. Havia a preocupação de enumerar as possibilidades de se obter certo resultado no jogo e os primeiros cálculos de

probabilidade em jogos de azar foram feitos com base em situações concretas.Diz-se que em 1654 Pascal recebeu de se seu amigo Chevalier de Méré o desafio de resolver questões como esta.
Isso desencadeou uma série de correspondências entre ele e Fermat, o que estimulou os estudos de Huygens sobre o assunto. Desta forma, o seguro de navios e os jogos de azar foram a base para se chegar aos modelos de probabilidade que existem nos dias de hoje (DANTE, 2014).

2.3.1 Teoria das probabilidades

A teoria das probabilidades é um segmento da matemática que visa estudar e desenvolver modelos e analisar experimentos e/ou fenômenos aleatórios.

2.3.2 Espaço amostral e eventos

Considerando um experimento cujo resultado não se pode prever com certeza. Entretanto, embora o resultado do experimento não seja conhecido antecipadamente,supondo que o conjuntos de todos os resultados possíveis sejam conhecidos, esse conjunto é conhecido como *espaço amostral* do experimento e é representado pela letra S.
Exemplo: Se o resultado de um experimento consiste na determinação de sexo de um bebê recém nascido, logo

$$\Omega = \{m, f\},$$

onde, m significa masculino e f feminino.

Qualquer subconjunto E do espaço amostral é conhecido como um evento. Se o resultado do experimento estiver contido em E, então dizemos que E ocorreu. No exemplo acima, se $E = m$, então E é o evento em que o bebê é do sexo masculino.(ROSS, 2009)

Suas propriedades pode-se obter algumas das probabilidades que aqui estão sendo estudadas. A probabilidade de um evento A deve ser um número maior que 0 e menor que 1. Isto é:

$$0 < P(A) < 1,$$

para qualquer evento A.

Será útil considerar o espaço todo Ω e o conjunto vazio $\emptyset$ como eventos. O primeiro é denominado evento certo e o segundo, evento impossível (BUSSAB; MORETTIN, 2010), assim:

$$P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$$

2.4 Variáveis aleatórias

Definição 2.1 *Seja E um experimento e S um espaço amostral associado a E. A função X que associa a cada resultado $s \in S$ um número real $x = X(s)$ é chamada variável aleatória unidimensional (MEYER, 1970).*

Exemplos 2.1 *Lançar duas moedas e observar as faces (cara-$\bar{c}$, coroa-c) voltadas para cima(DANTAS, 2013).*

$$\Omega = \{cc, \bar{c}c, c\bar{c}, \bar{c}\bar{c}\}$$

X: Número de caras obtidas no lançamento das duas moedas.

$$Rx = \{0, 1, 2\}$$

O espaço Rx, o conjunto de todos os resultados possíveis de X, é chamado de contra-domínio.

2.5 Distribuição de probabilidade de variáveis aleatórias discreta

Definição 2.2 *É a função que associa a cada valor assumido pela variável aleatória a probabilidade do evento correspondente(MORETTIN, 1999).*

Exemplos 2.2 *Uma moeda é lançada duas vezes sobre uma superfície plana.Em cada um dos eventos pode ocorrer cara(c) ou coroa($\bar{c}$), logo o espaço amostral é o conjunto:(DANTAS, 2013).*

$$\Omega = \{cc, c\bar{c}, \bar{c}c, \bar{c}\bar{c}\}$$

Por suposição obtém-se o número de caras em cada lançamento, assim:

Tabela 1: Ponto amostral e suas probabilidades no lançamento de duas moedas e obtenção do número de caras

Valor de X	Ponto Amostral	Probabilidades
0	$\bar{c}\bar{c}$	$\frac{1}{4}$
1	$c\bar{c}, \bar{c}c$	$\frac{1}{2}$
2	cc	$\frac{1}{4}$

Os valores das probabilidades são obtidas da seguinte forma:

$$P\left[X=0\right] = P\left(\bar{c}\bar{c}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} P\left[X=1\right] &= P\left(\bar{c}c\right) + P\left(c\bar{c}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$P\left[X=2\right] = P\left(cc\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Desta forma define-se a função de probabilidade da variável aleatória discreta.

ou seja:

$$\left\{\Big(x_i, P(x_i)\Big), i = 1, 2, \ldots\right\}$$

Isto é,

$$p(x_i) = P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \ldots$$

Deduz-se do exposto que uma variável aleatória X, discreta, estará bem caracterizada se indicarmos os possíveis valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que ela pode assumir e as respectivas probabilidades $p\left(x_1\right), p\left(x_2\right), \ldots, p\left(x_n\right), \ldots$

Definição 2.3 *A esperança matemática de uma variável aleatória discreta X, definida em um espaço amostral Ω no qual está definida uma probabilidade P é dada por* (DANTAS, *2013):*

$$E(X) = \sum_{w \varepsilon s}^{\infty} X(w)P(w) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

Desde de que,

$$\sum_{w \varepsilon s} |X(w)|P(w) < \infty$$

(DANTAS, 2013) afirma que A esperança matemática de uma variável aleatória X pode ser expressa por meio da distribuição de probabilidade de X.

Como na definição

$$E(X) = \sum_{w \varepsilon S} X(w)P(w)$$

Define-se a variância de uma variável aleatória X da seguinte forma:

Definição 2.4 *Defini-se a Variância de uma variável aleatória X denotada por $Var(X)$ ou $\sigma^2(X)$, da seguinte forma (DANTAS, 2013):*

$$\sigma^2(X) = E(X - E(X))^2$$

Para variáveis aleatórias discreta X a variância será dada por:

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2 P\left[X = x_i\right]$$

Demonstração

Desenvolvendo $E\left[X - E(X)\right]^2$, obtêm-se

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[X - E(X)\right]^2 \\ &= E\left\{X^2 - 2(X)E(X) + \left[E(X)\right]^2\right\} \\ &= E(X^2) - 2E(X)(X) + \left[E(X)\right]^2 \\ &= E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 \end{aligned}$$

A variância de uma variável aleatória fornece uma medida de dispersão dos valores dessa variável em relação à sua esperança.

Definição 2.5 *A raiz quadrada da variância de uma variável aleatória X, denotada $\sigma(X)$, denomina-se Desvio Padrão de X (DANTAS, 2013).*

Exemplos 2.3 *O serviço de meteorologia classifica o tipo de céu que é visível, em termos de graus de nebulosidade. Uma escala de 11 categorias é empregada: $0, 1, 2, ..., 10$, em que 0 representa um céu perfeitamente claro, 10 representa um céu completamente encoberto, enquanto os outros valores representam as diferentes condições intermediárias. Suponha-se que tal classificação seja feita em uma determinada estação meteorológica, em um* *determinado dia e hora. Seja X a variável aleatória que pode tomar um dos 11 valores acima. Admita-se que a distribuição de probabilidade de X seja(MEYER, 1970):*

$$p_0 = p_{10} = 0,05;\ p_1 = p_2 = p_8 = p_9 = 0,15;$$

$$p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = 0,06.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E(X) &= 1(0,15) + 2(0,15) + 3(0,06) + 4(0,06) + 5(0,06) + 6(0,06) + 7(0,06) + 8(0,15) \\ &+ 9(0,15) + 10(0,05) \\ &= 5,0 \end{aligned}$$

A fim de calcular $Var(X)$, necessita-se calcular $E(X^2)$, que é

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1(0,15) + 4(0,15) + 9(0,06) + 16(0,06) + 25(0,06) + 36(0,06) + 49(0,06) \\ &+ 64(0,15) + 81(0,15) + 100(0,05) \\ &= 35,6. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= 35,6 - 25 \\ &= 10,6 \end{aligned}$$

e o desvio-padrão $\sigma = 3,25$.

A esperança de uma variável aleatória nos dá a ideia da posição da distribuição de probabilidade dessa variável aleatória e que a variância da dispersão dos valores da variável em torno da esperança. A esperança de X^2 é denominada 2º momento da variável aleatória x, para $k = 1, 2, 3, ...$ Para uma variável aleatória discreta X com distribuição de probabilidade que associa os valores $x_1, x_2, ...$ as probabilidades $P[X = x_1], P[X = x_2], ...$ o momento de ordem K, para $K = 1, 2, ...$ é dado por:

$$E(X^K) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k P[X = x_i]$$

2.6 Algumas distribuições probabilísticas discretas

As distribuições de probabilidade de alguns dos principais modelos discretos serão apresentadas abaixo.

2.6.1 Distribuição uniforme discreta

Definição 2.6 *A Variável aleatória X, assumindo os valores distintos $x_1, ..., x_k$,tem distribuição uniforme se,e somente se(BUSSAB; MORETTIN, 2010):*

$$P(X = x_i) = p(x_i) = p = \frac{1}{K}$$

para todo $i = 1, 2, ..., k$

Verificamos que,

$$E(X) = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} x_i$$

e

$$Var(X) = \frac{1}{K}\left[\sum X_i^2 - (\sum x_i)^2\right]$$

Exemplos 2.4 *Seja X a v.a que indica o número de pontos marcados na face superior de um dado quando ele é lançado vejamos a distribuição de probabilidade de X pela tabela a seguir(BUSSAB; MORETTIN, 2010):*

x	1	2	3	4	5	6	*total*
$P(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

A esperança da V.a.u.d

$$E(X) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i$$

$$E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6}$$

A Variância

$$Var(X) = \frac{1}{6}(1 + 4 + 8 + ... + 36) = \frac{(21)^2}{6} = \frac{35}{12}$$

2.6.2 Distribuição de Bernoulli

Suponha-se que o resultado de um experimento ou tentativa possa ser classificado como um sucesso ou fracasso seja realizado.Se $X = 1$ para sucesso e $X = 0$ para fracasso, então a função de probabilidade de X é dada por:

$$p(0) = P(X = 0) = 1 - p$$

$$p(1) = P(X = 1) = p$$

em que, $p = sucesso$ e $q = 1 - p = fracasso$ Logo, uma variável aleatória X é chamada de variável aleatória de Bernoulli, se sua função de probabilidade for dada por essas equações(ROSS, 2009).

Definição 2.7 *A esperança ou valor esperado da distribuição de Bernoulli é o resultado de sucesso, então*

$$E(X) = p$$

e

$$\begin{aligned} Var(X) &= p(1 - p) \\ &= p - p^2 \\ &= p.q \end{aligned}$$

2.6.3 Distribuição Binomial

O que caracteriza este modelo? Se nós considerarmos um experimento em que estamos interessados em um dos seus eventos em particular e ai registrarmos a ocorrência ou não-ocorrência desse evento que denominaremos de sucesso ou fracasso consecutivamente,isto é,o que caracteriza este modelo,onde ao repetirmos o experimento,registramos o sucesso ou o fracasso do evento em observação (DANTAS, 2013).

Exemplos 2.5 *Em uma prova de múltipla escolha, cada questão tem cinco alternativas da qual somente uma é correta. Para cada questão, escolher a alternativa correta corresponde a sucesso e uma das erradas, a falha (DANTAS, 2013).*

Exemplos 2.6 *Uma moeda é lançada três vezes, qual a probabilidade de se obter duas caras?(BUSSAB; MORETTIN, 2010)*

Exemplos 2.7 *Dez peças são extraídas ao acaso, com reposição, de um lote contendo 500 peças, qual a probabilidade de que todas sejam defeituosas, sabendo-se que 10% das peças do lote são defeituosas?(BUSSAB; MORETTIN, 2010).*

Analisados os exemplos acima,vamos agora introduzir uma sequência de ensaios para construir o modelo binomial, onde esses ensaios são denominados de Bernoulli.

Veremos agora as condições para definirmos uma sequência de *Ensaios de Bernoulli*:

i) Em cada ensaio considera-se somente a ocorrência ou não de um certo evento, ou seja, fracasso ou sucesso.

ii) Os ensaios são independentes.

iii) A probabilidade de sucesso, que denotaremos por p, é a mesma em cada ensaio, e a probabilidade de falha denotaremos por $1-p$, ou seja, se repetirmos um ensaio de Bernoulli n vezes, ou, de maneira alternativa, obtemos uma amostra de tamanho n de uma distribuição de Bernoulli. Suponha ainda que as repetições sejam independentes, isto é, o resultado de um ensaio não tem influência nenhuma no resultado de qualquer outro ensaio.

Deste modo, uma amostra particular de ensaios de Bernoulli será constituída a partir de uma sequência de sucessos e fracassos; Repetindo um ensaio de Bernoulli cinco vezes ($n=5$). Supondo um particular resultado $fssfs$ que será o mesmo que $0,1,1,0,1$, como temos p para sucesso e $(1-p)$ para fracasso, a probabilidade de tal amostra será (BUSSAB; MORETTIN, 2010):

$$(1-p)pp(1-p)p = p^3(1-p)^2.$$

Exemplos 2.8 *Consideremos a situação do Ex 2.6, supondo que a moeda seja "honesta", isto é, $P(sucesso) = P(cara) = \frac{1}{2}$ indiquemos o sucesso $(cara)$ por s e fracasso $(coroa)$, por f então, estamos interessados na probabilidade do evento A.*

$$A = \{SSF, SFS, FSS\}$$

ou

$$A = \{(1,1,0);(1,0,1);(0,1,1)\}$$

Logo,

$$P(A) = P(SSF) + P(SFS) + P(FSS),$$

como os eventos são independentes.

$$P(FSS) = P(SSF) = P(SFS) \quad = \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

e assim,

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Pelas condições i) e ii) vemos que a probabilidade de um ponto amostral com sucesso nos k primeiros ensaios e falhas nos $n-k$ ensaios seguintes é $p^k(1-p)^{n-k}$, notemos que esta é a probabilidade de qualquer ponto com k sucessos e $n-k$ falhas em posições fixadas.

Notemos que o evento $\{X = k\}$ ocorre se observarmos um ponto amostral que tenha k sucesso e $n-k$ falhas. O número de pontos do espaço amostral que satisfazem essa condição é igual ao número de maneiras com que podemos escolher k ensaios dentre os n para a ocorrência de sucesso, pois nos $n-k$ restante deverão ocorrer falhas. Este número é igual ao número de combinações de n elementos tomados k a k, ou seja, $\binom{n}{k}$.
Podemos definir a probabilidade de tomarmos n ensaios de Bernoulli e observarmos k sucessos.

Definição 2.8 *A variável aleatória X, correspondente ao número de sucessos em n ensaios de Bernoulli independentes todos com probabilidade de sucesso $p(0 < p < 1)$ é definida por:*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

As variáveis aleatórias que assumem valor um (1) ou zero (0) conforme um dado evento pode ser representado por um modelo de urna. Consideremos uma urna com N bolas, das quais M são brancas e $N - M$ são pretas. Retiram-se sucessivamente n bolas da urna recolocando-se após cada retirada a bola selecionada. Vamos considerar sucesso a ocorrência de branca em uma retirada e falha a ocorrência de preta. Assim temos uma sequência de n ensaios de Bernoulli com probabilidade de sucesso igual a $\frac{M}{N}$ e de falha $1-\frac{M}{N}$, logo temos pela *defi. 2.8*, para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$;

$$P(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{M}{k}\right)^{k}\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}. \tag{2.1}$$

As probabilidades também serão indicadas por $b(k; n; p)$ e, quando a V.a.X tiver distribuição binomial com parâmetro n e p escreveremos(DANTAS, 2013).

$$X \sim b(n, p).$$

Exemplos 2.9 *Considere um conjunto com n mulheres grávidas internadas em uma maternidade para dar a luz. O número de filhos do sexo feminino é uma variável aleatória com distribuição binomial, pois, cada nascimento pode ser considerado independente dos demais e a probabilidade de um nascimento do sexo feminino é aproximadamente* $\frac{1}{2}$ *para* $n = 6$. *Denotando-se por* X *o número de filhos do sexo feminino, calculemos* $p(X = 2)$ *usando a equação 2.1 temos(DANTAS, 2013):*

$$P(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{M}{k}\right)^{k}\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} \\ &= 0,23. \end{aligned}$$

Exemplos 2.10 *Usando o Ex 2.7 temos* $n = 10$ *ensaios de bernoulli, cada um com* $P(s)$*=P(peças defeituosas)=0,1 se* X *indicar o número de peças defeituosas na amostra, queremos calcular* $P(X = 10) = b(10; 10; \frac{1}{10})$

$$P(X=10) = \binom{10}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{0}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{10}\right)^{10} \\ &= \frac{1}{10^{10}}. \end{aligned}$$

A esperança matemática de uma variável aleatória discreta X com distribuição Binomial, é dada por:

$$E(X) = n.p$$

e,

$$Var(X) = np(1-p)$$

Exemplos 2.11 *Considerando o Ex 2.7, onde temos $n = 10$ ensaios de Bernoulli, cada um com P(S)=P(peças defeituosas)=P=0,1. Se X indicar o número de peças defeituosas na amostra, queremos calcular $P(X = 10) = b(10; 10; \frac{1}{10})$, então:*

$$E(X) = 10 \cdot \frac{1}{10} = 1$$

$$Var(X) = 10X\frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{10}.$$

2.6.4 Distribuição Hipergeométrica

Essa distribuição representa um modelo para amostragem sem reposição de uma população com número finito de elementos de uma população com N elementos, dos quais n de um tipo atributo A e $N-n$ do atributo B, então poderemos representa-lá por meio de uma urna que contenha, digamos, n bolas brancas e $N-n$ bolas vermelhas. Retira-se da urna z bolas sem reposição, estamos interessados em calcular a probabilidade de que esse grupo contenha X elementos com atributo A(DANTAS, 2013).
Utilizando o princípio

$$P[X = k] = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{z-k}}{\binom{N}{z}}$$

Exemplos 2.12 *Uma caixa contém 15 peças das quais quatro são defeituosas. Retira-se uma amostra de três(3) peças da caixa sem reposição. Calcular a probabilidade que haja duas ou três peças defeituosas na amostra(DANTAS, 2013).*

Deseja-se calcular $P(X=2)+P(X=3)$, assim:

$$\begin{aligned} P(X=2)+P(X=3) &= \frac{\binom{4}{2}\binom{11}{1}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{11}{0}}{\binom{15}{3}} \\ &= 0,153. \end{aligned}$$

A esperança matemática de uma variável aleatória X com distribuição de probabilidade hipergeométrica, é dada por:

$$E(X) = z\frac{n}{N}.$$

A variância da distribuição hipergeométrica é dada por,

$$Var(X) = z\frac{n}{N}\frac{N-n}{N}(1-\frac{z-1}{N-1})$$

Exemplos 2.13 *Pequenos motores elétricos são expedidos em lotes de 50 unidades, antes que uma remessa seja aprovada, um inspetor escolhe cinco (5) desses motores e os inspeciona, se nenhum dos motores inspecionados for defeituoso, o lote é aprovado, se um ou mais forem verificados defeituosos, todos os motores da remessa são inspecionado. Suponha que existem de fato, três (3) motores defeituosos no lote. Qual é a probabilidade de que a inspeção 100% seja necessária(MORETTIN, 1999)?*

Para $X = 0$ número de motores defeituosos

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X=0) \\ &= 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{47}{5}}{\binom{50}{3}} \\ &= 0,2662. \end{aligned}$$

Exemplos 2.14 *Foram impressos vinte exemplares de um boletim, em quatro exemplares falta uma página. Você escolhe cinco exemplares ao acaso entre os vinte.*

a)Qual é a probabilidade que haja dois exemplares com a página faltando entre os cinco?
b)Qual é a probabilidade que pelo menos um tenha página faltando?
c)Qual é a média e a variância que dá o número de exemplares com a página faltando entre os cinco(DANTAS, 2013)?

Seja, $X = A$ variável aleatória que dá o número de exemplares com a página faltando na amostra de cinco, N=20; M=4; n=5, logo

a)$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{16}{3}}{\binom{20}{5}} = 0,216$

b) $P(X = 1)$ ou $P(X = 2)$ ou $P(X = 3)$ ou $P(X = 4)$,
Então,

$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \quad = \quad 1 - P(X = 0),$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{\binom{16}{5}}{\binom{20}{5}} \\ &= \frac{91}{323}, \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} 1 - P(X = 0) &= 1 - \frac{91}{323} \\ &= \frac{232}{323}. \end{aligned}$$

c) $E(X) = z\frac{n}{N} = 1.$
d)Var(X)

$$Var(X) = z\frac{n}{N}\frac{N-n}{N}(1 - \frac{z-1}{N-1}) = \left(\frac{12}{19}\right).$$

2.6.5 Distribuição Geométrica

Consideremos uma sequência ilimitada de ensaios de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p em cada ensaio. Designamos sucesso por S e falha F. Realizamos os ensaios até que ocorra o primeiro sucesso.

$$\Omega = \{S, FS, FFS, \ldots, FF, \ldots, FS, \ldots\}.$$

Um elemento típico desse espaço amostral é uma sequência de comprimento n em que nas primeiras $n-1$ posições têm F e na n-ésima temos S. Aqui nos afastamos das hipóteses que levaram à distribuição binomial. Na distribuição Binomial, o número de repetições era pré-determinado, enquanto aqui é uma variável aleatória.

Define-se a variável aleatória X como o número de repetições necessárias para obter a primeira ocorrência de sucesso(S), assim , X toma os valores possíveis $1, 2, 3, \ldots,$ como $X = k$ se, e somente se, as primeiras (k-1) repetições derem resultado (F), enquanto a k-ésima repetição dê o resultado (S), teremos(DANTAS, 2013).
Seja X a variável aleatória que fornece o número de falhas que precedem o primeiro sucesso,

$$P(X = k) = q^{k-1}p$$

,

$$n = 1, 2, \ldots,$$

em que,

$$q = (1-p)$$

logo,

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p.$$

O evento (X=k) ocorre se, e somente se, ocorrer falhas nos $k-1$ primeiros ensaios e sucesso no k-ésimo ensaio.

A esperança matemática da distribuição geométrica é dada por

$$E(X) = \frac{1-p}{p}$$

Para calcularmos a variância,

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \frac{1-p^2}{p^2}$$

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Exemplos 2.15 *Um banco de sangue necessita de sangue tipo $O - RH$ negativo.Seja P a proporção de indivíduos na população com esse tipo de sangue. Suponha que as pessoas são escolhidas da população ao acaso para serem examinadas se tem esse tipo de sangue. O número de pessoas examinadas antes de se encontrar a primeira com esse tipo de sangue tem distribuição geométrica com parâmetro P. Calcule para $p = 0,1$ a probabilidade de a primeira pessoa a ser encontrada com esse tipo de sangue ser a quinta, se X designa o número de pessoas examinadas antes de encontrar a primeira com tipo de sangue $O - RH$ negativo. Queremos calcular $P(X = 4)$(DANTAS, 2013).*

$$P(X = 4) = (1 - p)^4 p = (0,9)^4 0,1 = 0,0656.$$

Exemplos 2.16 *Se a probabilidade de um certo ensaio de reação positiva for igual a 0,4, qual será a probabilidade de que menos de 5 reações "negativas"ocorram antes da primeira positiva(MEYER, 1970)?*

Seja X o número de reações negativas antes da primeira positiva, com $p = 0,4$ e $q = 0,6$.

$$P(X = k) = (0,6)^k (0,4)$$

$$P(X = k) = (1 - p)^2 p,$$

em que,

$$(1 - p) = qk = 0,1,2,\ldots$$

$$P(X < 5) = \sum_{k=0}^{4} (0,6)^k (0,4) = 0,92$$

2.6.6 Distribuição de Poisson

Definição 2.9 *A variável aleatória X tem distribuição de Poisson com parâmetro λ se para $k = 0,1,2,\ldots$*

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Teorema 2.1 *Se X tiver distribuição de Poisson com parâmetro λ, então $E(X) = \lambda$ e $Var(X) = \lambda$ conforme(MEYER, 1970).*

A distribuição de Poisson tem grande importância tanto teórica como aplicada.Podemos introduzir essa distribuição como uma aproximação para a distribuição binomial quando o número de ensaios de Bernoulli tende a infinito, porém de modo que o produto $np_n = \lambda$ permanece constante.

Associado aos n ensaios de Bernoulli, definimos a variável aleatória X_n que é igual ao número de sucessos nesses n ensaios, então X_n tem distribuição binomial com parâmetro n e P_n então(DANTAS, 2013):

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= \binom{n}{k} {P_n}^k (1 - P_n)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}\Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^k \Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^n \Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^{-k} \\
&= 1\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big)\frac{1}{k!}(\lambda)^k \Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)\Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^{-k}
\end{aligned}$$

Como o primeiro termo do produto é 1 e os $k-1$ seguintes são iguais a $1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n}, \ldots 1 - \frac{(k-1)}{n}$, respectivamente, que tendem a 1 quando $n \mapsto \infty$

O termo $\Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^{-k}$ também tende a 1, levando-se em conta que no cálculo mostra-se que(DANTAS, 2013):

$$\lim_{n \to \infty} \Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^n = e^{-\lambda}$$

Passando-se ao limite na expressão acima para n tendendo a infinito obtemos:

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Exemplificando agora de forma que compararemos os dois casos (binomial e Poisson) e daremos ênfase a definição acima, ou seja, a distribuição de Poisson pode ser visto como uma distribuição binomial quando o número de ensaios de bernoulli tende a infinito; então veremos agora pelo seguinte exemplo:

Exemplos 2.17 *Em um cruzamento de tráfego intenso, a probabilidade p de um carro sofrer um acidente é muito pequena, digamos $p = 0,0001$. Contudo, durante certa parte do dia, por exemplo das 16 às 18h00, um grande número de carros passam no cruzamento, um valor como $n = 1000$. Nessas condições, qual é a probabilidade de que dois ou mais acidentes ocorram durante aquele período(MEYER, 1970)?*

Adaptado de Meyer (1970) pode-se pensar que para resolver este problema deve-se fazer algumas hipóteses. Admita-se que p seja a mesma para cada carro. Também deve-se supor que o fato de um carro sofrer ou não acidentes seja um evento independente; Assim, pode-se supor que se X for o número de acidentes entre os 1000 carros que chegam então X terá distribuição binomial com parâmetro $p = 0.0001$ (Vale salientar que a hipótese que faz-se, não declarada explicitamente, é que n, o número de carros que passam no cruzamento durante o período em estudo, é pré-determinado, 1000 por exemplo. Obviamente, o próprio n é um "resultado aleatório "; se você fixa o tempo este nº é aleatório, no entanto, basta fixar o nº de acidentes em 1000 para que deixe de ser aleatório. Logo

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} p^k (1 - P)^{n-k} \\ &= \binom{1000}{k} (0,0001)^k (0,9999)^{1000-k} \end{aligned}$$

E a probabilidade procurada é dada por:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} P(X = k) &= 1 - \Big[P(X = 0) + P(X = 1) \Big] \\ &= 1 - \Big[(0,9999)^{1000} + 1000(0,0001)(0,9999)^{999} \Big] \\ &= 0,00467 \end{aligned}$$

Aplicando-se a aproximação pela binomial, visto que $n = 1000$ e $p = 0,0001$ daí $np = \lambda = 0,1$, portanto:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\ P(X = k) &= \frac{e^{-0,1} 0,1^k}{k!} \\ P(X \geq 2) &= 1 - e^{-0,1}(1 + 0,1) = 0,0048 \end{aligned}$$

Exemplos 2.18 *Suponha-se que um processo de fabricação produza peças de tal maneira que uma determinada proporção (constante) das peças sejam defeituosas. Se uma partida de n dessas peças for obtida, a probabilidade de encontrar exatamente k peças pode ser calculada pela distribuição binomial como igual a $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, onde X é o número de peças defeituosas na partida. Se n for grande e p pequeno (como é frequente o caso), poderemos aprox:*

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Suponha-se que para cada 1000 peças uma seja defeituosa, isto é, $p = 0,001$, daí empregando a distribuição binomial, encontraremos que uma partida de 500 peças, a probabilidade de que nenhuma das peças sejam defeituosas será $(0,999)^{500} = 0,609$. Agora aplicando a aproximação de Poisson, esta probabilidade poderá ser escrita como $e^{-0,5} = 0,61$. A probabilidade de encontrar (dois) ou mais peças defeituosas será, de acordo com a aproximação da binomial para a Poisson, $P(X \geq 2) = 1 - e^{-0,5}(1 + 0,5) = 0,085$

Exemplos 2.19 *Um PABX recebe em média, cinco chamadas por minuto. Supondo que a distribuição de Poisson seja adequada nessa situação, obter a probabilidade de que o PABX não receba chamadas durante um intervalo de um minuto(BUSSAB; MORETTIN, 2010):*

Utilizando a distribuição de Poisson para resolver esse problema sem a aproximação binomial, tem-se:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

com $\lambda = 5$,então a probabilidade de não acontecer nenhuma chamada é:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{e^{-5}5^0}{0!} \\ &= 0,0067 \end{aligned}$$

Supondo que queremos obter no máximo duas chamadas em quatro minutos, teremos $\lambda = 20$ chamadas em quatro minutos, logo

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda t}\lambda t^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

onde, λ representa o número médio de ocorrência naquele intervalo. Denotaremos uma v.a. X com distribuição de Poisson de parâmetro λ por, $X \sim POIS(\lambda)$.

3 Aplicação

Nesta seção serão apresentados as resoluções dos exemplos utilizando uma ferramenta computacional gratuita, o software R (TEAM, 2016). Este por se tratar de uma ferramenta de aprendizagem poderosa para visualizar e interpretar os dados possibilita que qualquer pessoa com o conhecimento técnico adequado chegue às conclusões probabilísticas de forma autônoma. Serão apresentados os exemplos relacionados as distruibuições de probabilidade estudadas (Bernoulli, Binomial, Poisson, Hipergeométrica, Geométrica e Uniforme). Pretende-se que o leitor ao final desta aplicação tenha totais condições de utilizar o Software R e fazer o uso em Educação Estatística.

Inicio da aplicação em R.

O exemplo (2.1), é um exemplo de variáveis aleatórias, espaço amostral

Exemplo 2.1

```
S0 <- tosscoin(2, makespace = FALSE)
> S0
toss1 toss2
1     H     H
2     T     H
3     H     T
4     T     T
```

O exemplo (2.2) trata da distribuição de V.a Discreta do espaço amostral

Exemplo 2.2

```
S0 <- tosscoin(2, makespace = TRUE)
> S0
toss1 toss2 probs
1     H     H  0.25
2     T     H  0.25
3     H     T  0.25
4     T     T  0.25
```

O exemplo (2.3) é um exemplo da variância de uma variável aleatória

Exemplo 2.3

```
> escala=seq(0,10,1)
> Prob=c(0.05,0.15,0.15,0.06,0.06,0.06,0.06,0.06,0.15,0.15,0.05)
> Ex=weighted.mean(escala,Prob)
> Ex
[1] 5
> Ex2=weighted.mean(escala^2, Prob)
> Varx=Ex2-Ex^2
> Varx
[1] 10.6
> sqrt(Varx)
[1] 3.255764
```

Exemplo (2.4) de variância de distribuição Uniforme

Exemplo 2.4

```
U <- Unif(1,6)
> EU=E(U) ## uses explicit terms
> EU
[1] 3.5
>
> VU=var(U)
> VU
[1] 2.083333
```

Os exemplos (2.6),(2.9),(2.10)e(2.11), são exemplos da distribuição Binomial.

Exemplo 2.6 - Trata-se da obtenção de duas caras no lançamento de três moedas.

```
S <- tosscoin(3, makespace = TRUE)
> S
toss1 toss2 toss3 probs
1     H     H     H 0.125
2     T     H     H 0.125
3     H     T     H 0.125
4     T     T     H 0.125
5     H     H     T 0.125
6     T     H     T 0.125
7     H     T     T 0.125
8     T     T     T 0.125
>
> P_HH=S[2,4]+S[3,4]+S[5,4]
> P_HH
[1] 0.375
```

Exemplo 2.8

```
SSS <- tosscoin(3, makespace = TRUE)
> SSS
toss1 toss2 toss3 probs
1     H     H     H 0.125
2     T     H     H 0.125
3     H     T     H 0.125
4     T     T     H 0.125
5     H     H     T 0.125
6     T     H     T 0.125
7     H     T     T 0.125
8     T     T     T 0.125
>
> A=c(S[1,1,1],S[1,1,2],S[2,1,1])
> A
[1] 1 1 2
```

Exemplo 2.9 - Relacionado ao conjunto de Mulheres grávidas.

```
> Pb=dbinom(2,6,0.5)
> Pb
[1] 0.234375
```

Exemplo 2.10 - Peças defeituosas.

```
> Pb2=dbinom(10,10,0.1)
 > Pb2
 [1] 1e-10
```

O exemplo (2.11) é um exemplo de esperança de uma distribuição Binomial

Exemplo 2.11

```
 > EB=10*0.1
 > EB
 [1] 1
```

O exemplo (2.13),(2.14) e (2.15) são exemplos referentes a distribuição Hipergeométrica

Exemplo 2.13

```
1-phyper(0, 5,47,3)
[1] 0.2662896
```

Exemplo 2.14

```
> #a
> p=dhyper(2,5,15,4)
> p
```

```
[1] 0.2167183
>
> #b
> phyper(0,5,15,4, lower.tail = F)
[1] 0.7182663
>
>
> #c
> mu=sum(0:5*dhyper(0:5,5,15,4))
> mu
[1] 1
>
> #d
> va=c(sum((0:5)^2*dhyper(0:5,5,15,4)))-mu^2
> va
[1] 0.6315789
```

Os exemplos de (2.15),(2.16) são referentes
a dsitribuição Geométrica

Exemplo 2.15

```
> dgeom(4,0.1)
[1] 0.06561
```

Exemplo 2.16

```
> pgeom(4,0.4)
[1] 0.92224
```

Os exemplos(2.18) e (2.19) são referentes a dsitribuição de Poisson

Exemplo 2.18 - Fabricação de Peças

```
> 1-ppois(1,0.5)
[1] 0.09020401
```

Exemplo 2.19 - PABx

```
> dpois(0,5)
[1] 0.006737947
```

4 Conclusão

O estudo de algumas distribuições discretas é um tópico de grande relevância no estudo das probabilidades e suas aplicações. Neste trabalho, foi apresentado uma teoria das probabilidades e falado a respeito de espaço amostral caracterizando alguns exemplos, foi mostrado o que é uma variável aleatória e uma distribuição de probabilidades, trabalhou-se com algumas distribuições de probabilidade tais como Uniforme, Bernoulli, Binomial, Hipergeométrica, Geométrica e Poisson, todas estás distribuições discretas, fazendo sempre menção aos exemplos e deixando claro a aplicação dessas distribuições.

O uso do software R como ferramenta estatística de aplicação, permite a simplificação do entendimento dos exercícios propostos permitindo atingir o objetivo proposto neste trabalho de auxiliar professores e estudantes em seu uso na Educação Estatística, foi assim que aplicado o Software R se conseguiu realizar as soluções dos exemplos nesse trabalho de uma forma mais dinâmica.

Referências

BUSSAB, W. d. O.; MORETTIN, P. A. *Estatística básica*. [S.l.]: Saraiva, 2010.

DANTAS, C. A. B. *Probabilidade: Um Curso Introdutório*. [S.l.]: Edusp, 2013.

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações: Ensino médio são paulo: Ática, 2014. *Volume único*, 2014.

MEYER, P. L. Probabilidade: aplicações à estatística. In: *Probabilidade: aplicações à estatística*. [S.l.]: Livro Técnico, 1970.

MORETTIN, L. G. *Estatística Básica–Volume 1–Probabilidade–7ª edição*. [S.l.]: São Paulo: Pearson Makron Books, 1999.

MUENCHEN, R. A. *R for SAS and SPSS users*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.

ROSS, S. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*. [S.l.]: Bookman Editora, 2009.

TEAM, R. C. R: A language and environment for statistical computing. r foundation for statistical computing, vienna, austria. 2015. url h ttp. *www. R-project. org*, 2016.

VIALI, L. O ensino de estatística e probabilidade nos cursos de licenciatura em matemática. *Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística*, v. 18, 2008.