UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1ª ORDEM E APLICAÇÕES

TATIANA CAVALCANTE BARBOSA

CAMPINA GRANDE

Maio de 2016

TATIANA CAVALCANTE BARBOSA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1ª ORDEM E APLICAÇÕES

Trabalho Acadêmico Orientado apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Me. Joselma Soares dos Santos

CAMPINA GRANDE

Maio de 2016

B238e Barbosa, Tatiana Cavalcante.
Equações diferencias ordinárias de 1ª ordem e aplicações [manuscrito] / Tatiana Cavalcante Barbosa. - 2016.
38 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Profa. Ma. Joselma Soares dos Santos, Departamento de Matemática".

1. Teorema de existência e unicidade. 2. Equações diferenciais. 3. Matemática. I. Título.

21. ed. CDD 515.352

TATIANA CAVALCANTE BARBOSA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1ª ORDEM E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologia - CCT da Universidade Estadual da Paraíba - UEPB , em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Graduado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática .

Aprovada pela banca examinadora em 24 de Maio de 2016

Banca Examinadora

Joselma Soares dos Santos

Profº. Me. JOSELMA SOARES DOS SANTOS
Departamento de Matemática - Campus I/UEPB
Orientadora

Kátia Suzana Medeiros Graciano

Profº. Me. Kátia Suzana Medeiros Graciano
Departamento de Matemática - Campus I/UEPB
Examinadora

Onildo dos Reis Freire

Profº. Me. Onildo dos Reis Freire
Departamento de Matemática - Campus I/UEPB
Examinador

Dedicatória

Dedico o presente trabalho a toda minha família. Dedico, especialmente, a minha mãe, à Srª Maria Bernadete Cavalcante Barbosa, o meu pai, Sr Paulo Alves Barbosa, a minha tia Srª Maria de Fatima Cavalcante de Aguiar que em momento algum deixaram de me incentivar para que eu chegasse até aqui.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente sobretudo a Deus, por me ter dado coragem, empenho e força para que eu conseguisse concluir meu curso de graduação e também por ter me permitido bons momentos durante todo o curso de licenciatura.

Agradeço a toda minha família, a minha mãe Maria Bernadete Cavalcante Barbosa, a meu pai Paulo Alves Barbosa e a minha tia Maria de Fatima Cavalcante de Aguiar por sempre me apoiar, pelo incentivo nos estudos e pela compreensão e encorajamento nas minhas escolhas durante todo percurso da graduação. Agradeço também a meus irmãos queridos, Paula Isabela Cavalcante Barbosa, Talita Cavalcante Barbosa, Maviael Cavalcante Barbosa e Vinicíus Cavalcante Barbosa que em momento algum deixou de me apoiar. Essas pessoas tiveram um papel fundamental para que eu chegasse até o final da minha graduação e consequentemente, para que terminasse essa monografia.

A todos os meus professores do curso de licenciatura em matemática, pela paciência, ensinamentos e dedicação disponibilizados ao longo do curso,cada um contribuiu para o desenvolvimento deste trabalho e também para a minha formação profissional.

Agradeço em especial para a minha orientadora professora Joselma Soares dos Santos Vieira pela atenção, dedicação e ensinamento para que eu pudesse concluir este trabalho com êxito.

Agradeço também aos meus amigos e colegas da graduação que foram muito importantes durante o curso, pela força, ajuda e sobretudo o companheirismo nos momentos difíceis.

"A matemática é a mais simples, a mais perfeita e a mais antiga de todas as ciências."

(Jacques Hadamard)

Resumo

O estudo das Equações Diferenciais Ordinárias é uma parte muito importante da matemática, pois permite a resolução de problemas das mais diversas áreas como Estatística, Física, Biologia, Matemática Financeira dentre outras. Neste trabalho estudamos as equações diferenciais, em particular as Equações Diferencias Ordinárias Lineares de 1ª ordem e demostramos o Teorema de Existência e Unicidade para este tipo de equação, com o objetivo de aplicar as definições e resultados estudados na resolução de alguns problemas do nosso cotidiano modelados por uma equação diferencial.

Palavras-chave: Teorema de Existência e Unicidade, Equações Diferenciais Ordinárias, Aplicações.

Abstract

The study of Ordinary Differential Equations is a very important part of Mathematics because it allows the resolution of problems from various fields such as Statistics, Physics, Biology and Mathematical Finance, among others. In this work we studied the differential equations, particularly the Differential Equations ordinary of 1st order and we demonstrated The Theorem of Existence and Unicity for these type of equation , in order to apply the results settings studied in the resolution of some of our everyday problems modeled by a differential equation.

Keywords: Theorem of Existence and Unicity, Ordinary Differential Equations, Applications.

Sumário

Introdução

As Equações Diferenciais Ordinárias tem um papel relevante na Matemática, pois possibilita a interação e a resolução de problemas das mais diversas áreas como Estatística, Física, Matemática Financeira dentre outras. Iremos estudar as Equações Diferenciais, em especial as Equações Diferencias Ordinárias lineares de 1ª ordem. Além disso, iremos enunciar e demostrar um dos principais teoremas, que é o Teorema de Existência e Unicidade das Equações Diferencias Ordinárias Lineares de 1ª Ordem. Com o objetivo de aplicar na resolução de problemas do nosso cotidiano. Para este estudo, o nosso trabalho esta assim dividido:

No capitulo 1 é feito um breve estudo teórico das equações diferencias, bem como a sua classificação quanto ao tipo, ordem e linearidade. Em seguida, estudamos as equações diferencias ordinárias lineares de 1ª ordem, e usamos o Método do Fator Integrante para resolvê-las. Ainda neste capitulo apresentamos e desenvolvemos a demostração de um importante teorema de existência e unicidade das soluções, que diz que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + f(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

tem uma única solução em um intervalo que contém t_0, se $f(t, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas no retângulo $\mathrm{R} = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2; \alpha < t < \beta; \delta < y < \lambda\}$ contendo (t_0, y_0).

No capitulo 2 é dedicado as aplicações das equações diferencias ordinárias, onde foram apresentados problemas na área de Estatística em que trabalhamos o problema envolvendo crescimento populacional, na Matemática Financeira trabalhamos com problemas envolvendo juros e na Física com o problema envolvendo a Lei de Torricelli, onde para cada problema foi modelado um Problema de Valor Inicial conforme apresentado acima, satisfazendo as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade.

Além dos capítulos temos os anexos onde apresentamos alguns resultados utilizados durante o trabalho.

Portanto, o estudo e desenvolvimento do teorema e as aplicações através das equações diferencias são de suma importância para a compreensão de problemas reais. É possível afirmar que este trabalho é relevante para que o pesquisador posso visualizar que o teorema pode facilitar o estudo das aplicações nas mais diversas áreas, motivando-os a buscar solucionar os mais diversos problemas de equações diferencias ordinárias.

Capítulo 1

Equações Diferencias e o Teorema de Existência e Unicidade

Neste capítulo iremos estudar as Equações Diferenciais, em particular Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem e o Método do Fator Integrante para resolvê-las. Além de enunciarmos o Teorema de Existência e Unicidade para este tipo de equação.

1.1 Equações diferencias

1.1.1 Definição

Uma equação diferencial é uma equação em que as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas destas funções. Numa equação diferencial em que a incógnita é uma função $y(t)$, t é a variável independente e y é a variável dependente.

Vejamos um exemplo em que usamos as equações diferencias para modelar um problema.

Exemplo 1.1. *O movimento de um objeto com massa m caindo na atmosfera perto do nível do mar, é descrito pela função $v(t)$ que satisfaz a equação diferencial*

$$m\frac{dv}{dt} + yv - mg = 0$$

Onde m, g e y são constantes. Nesta equação a incógnita é a função $v = v(t)$, t é a variável independente e v é a variável dependente.

1.1.2 Classificação

As equações são classificadas quanto ao tipo, a ordem e a linearidade.

(a) Quanto ao tipo uma equação diferencial pode ser ordinária ou parcial. Ela é ordinária se as funções incógnitas forem funções de somente uma variável. Caso contrario ela é parcial. Portanto uma equação diferencial é ordinária se as derivadas que aparecem na equação são derivadas ordinárias. Por exemplo , as equações que podem ser escritas na forma

$$F(t, y, y', y'', ...) = 0.$$

(b) Quanto á ordem uma equação diferencial pode ser de 1ª, 2ª,... , de n-ésima ordem dependendo da derivada de maior ordem presente na equação. Uma equação diferencial ordinária de ordem n é a equação que pode ser escrita da forma

$$F(t, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

(c) Quanto a linearidade uma equação diferencial pode ser linear ou não linear. Ela é linear se as incógnitas e suas derivadas aparecem de forma linear na equação, isto é, as incógnitas e suas derivadas aparecem em uma soma em que cada parcela é uma produto de alguma derivada das incógnitas com uma ordinária linear de ordem n é uma equação que pode ser escrita da forma

$$a_0(t)y + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + ... + a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} = f(t).$$

As equações diferencias ordinárias que não podem ser colocadas nessa forma não são lineares.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.2. $y'' - 6y' + 3y = 0$ *(Equação Diferencial Ordinária de 2ª ordem)*

Exemplo 1.3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ *(Equação Diferencial Parcial de 2ª ordem)*

Exemplo 1.4. $y\sqrt{y^2 - 1}dx - \sqrt{1 - x}dy = 0$ *(EDO de 1º ordem)*

1.2 Equações Diferencias de 1ª ordem

As equações diferencias ordinárias de 1ª ordem são equações que podem ser escritas como

$$F(t, y, y') = 0.$$

Iremos estudar as equações de 1ª ordem que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

Uma solução (particular) de uma equação diferencial acima em um intervalo I é uma função $y(t)$ definida no intervalo I tal que a sua derivada $y(t)$ esta definida no intervalo I e satisfaz a equação acima neste intervalo. Ao admitimos que $y(t)$ satisfaz a condição inicial $y(t_0) = y_0$, temos o problema

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

que é chamado problema de valor inicial (PVI). Uma solução de problema de valor inicial acima em um intervalo I contendo t_0 é uma função $y(t)$ que esta definida neste intervalo, tal que a sua derivada também esta definida neste intervalo satisfaz o problema.

1.3 Resolução de Equações diferencias Ordinárias de 1ª ordem

Quando resolvemos uma equação diferencial ordinária(EDO) de 1ª ordem, normalmente obtemos uma família de soluções que dependem de uma constante arbitraria, essa família de soluções é a solução geral da equação. Assim toda solução particular é obtida a partir da solução geral por uma escolha apropriada da constante. No caso do PVI, basta usarmos a condição inicial para obtermos tal constante, e neste caso a solução do PVI, que nada mais é do que uma solução particular da equação diferencial ordinária dada.

1.3.1 Método do Fator Integrante para EDO de 1ª ordem

Vamos considerar as equações da forma

$$\frac{dy}{dt} + P(t)y = q(t). \tag{1.1}$$

Vamos definir uma função auxiliar, $\mu(t)$, de forma que ao multiplicarmos a equação acima por esta função a equação obtida é uma equação linear com $P(t) = 0$, ou seja, do tipo

$$\frac{dy}{dt} = q(t),$$

que é resolvida integrando-se ambos os membros com relação a t,e cuja solução geral é dado por $y(t) = \int q(t)dt + c$. Uma função com esta propriedade é chamada de fator integrante da equação linear.

Considere a função

$$\mu(t) = e^{\int P(t)dt},$$

temos que $\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$ é um fator integrante para a equação (1.1).

De fato, multiplicando a equação (1.1) por $\mu(t)$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(\mu.y) = q(t)\mu(t)$$

pois, pelas regras de derivação

$$\frac{d}{dt}(\mu.y) = \frac{dy}{dt}.\mu(t) + \mu(t).p(t)y$$

.

1.4 Teorema de Existência e Unicidade

Teorema 1.1: Considere o Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Se $f(t, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas no retângulo R $= \{(t, y) \in \mathbb{R}^2; \alpha < t < \beta; \delta < y < \lambda\}$ contendo (t_0, y_0), então o problema (1.2) tem uma única solução em um intervalo que contém t_0.

Demostração:

Existência:

Defina uma sequência de funções $y_n(t)$ dadas por

$$\begin{cases} y_0(t) = y_0 \\ y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds \end{cases}$$

temos como objetivo mostrar que limite de $y_n(t)$ existe, ou seja, $y(t) = \lim y_n(t)$ e $y(t)$ é solução de (1.2).

Como por hipótese $f(t, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ são continuas em R, e R é compacto estas funções são limitadas. Logo existem um $a > 0$ e um $b > 0$ tais que

$$|f(t, y)| \leq a \text{ e } |\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)| \leq b, \forall (t, y) \in R. \tag{1.3}$$

Agora, usando o Teorema do Valor Médio (ver Anexo) e a desigualdade (1.3), obtemos:

$$|f(t,y)-f(t,z)| \leq b.|y-z|, \forall \alpha \leq \alpha' < t < \beta' \leq \beta. \tag{1.4}$$

Assim

1) $|\ y_1(t)-y_0\ |=|y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y_0(s))ds - y_0)\ |=|\ \int_{t_0}^{t} f(s,y_0(s))ds\ |$,

pelas propriedades da integral e pela desigualdade (1.3), temos:

$|\ \int_{t_0}^{t} f(s,y_0(s))ds\ |\leq \int_{t_0}^{t}\ |\ f(s,y_0(s))\ |\ ds \leq \int_{t_0}^{t} ads = a\int_{t_0}^{t} ds = a(t-t_0)$

e como $x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$, logo

$$|y_1(t)-y_0| \leq a(t-t_0) \leq a|t-t_0|. \tag{1.5}$$

2) $|y_2(t)-y_1(t)| = |y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y_1(s))ds - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s,y_0(s))ds| =$

$$= |\int_{t_0}^{t}[f(s,y_1(s))-f(s,y_0(s))]ds|$$

onde,

$$|\int_{t_0}^{t}[f(s,y_1(s))-f(s,y_0(s))]ds| \leq \int_{t_0}^{t}|f(s,y_1(s))-f(s,y_0(s))|ds$$

usando a desigualdade (1.4), obtemos

$$\int_{t_0}^{t}|f(s,y_1(s))-f(s,y_0(s))|ds \leq \int_{t_0}^{t} b|y_1(s)-y_0(s)|ds$$

e por (1.5) segue que,

$$\int_{t_0}^{t}|f(s,y_1(s))-f(s,y_0(s))|ds \leq \int_{t_0}^{t} b.a|s-t_0|ds =$$

$$= b.a\int_{t_0}^{t}|s-t_0|ds = b.a\frac{|s-t_0|^2}{2}/_{to}^{t} =$$

$$= b.a\frac{|t-t_0|^2}{2},$$

logo

$$|y_2(t)-y_1(t)| \leq b.a\frac{|t-t_0|^2}{2}. \tag{1.6}$$

3) $|y_3(t)-y_2(t)| = |y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y_2(s))ds - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s,y_1(s))ds| =$

$$= |\int_{t_0}^{t}[f(s,y_2(s))-f(s,y_1(s))]ds| \leq \int_{t_0}^{t}|f(s,y_2(s))-f(s,y_1(s))|ds$$

usando a desigualdade (1.4), obtemos,

$$\int_{t_0}^{t} |f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))| ds \leq \int_{t_0}^{t} b|y_2(s) - y_1(s)| ds$$

por (1.6) segue que

$$\int_{t_0}^{t} |f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))| ds \leq b. \int_{t_0}^{t} b.a\frac{|s - t_0|^2}{2} ds =$$

$$= \frac{b^2.a}{2} \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^2 ds = \frac{b^2.a}{2}.\frac{|s - t_0|^3}{3} /_{t_0}^{t} =$$

$$= b^2.a\frac{(t - t_0)^3}{6} =$$

$$= b^2.a\frac{|t - t_0|^3}{3!},$$

logo,

$$|y_3(t) - y_2(t)| \leq= b^2.a\frac{|t - to|^3}{3!}. \tag{1.7}$$

Vamos supor, por indução, que

$$|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \leq a.b^{n-2}.\frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Daí temos,

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| = |y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s)) ds - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-2}(s)) ds| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))| ds$$

usando a desigualdade (1.4), obtemos

$$\int_{t_0}^{t} |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))| ds \leq b. \int_{t_0}^{t} |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| ds$$

e usando a hipótese de indução

$$\int_{t_0}^{t} |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))| ds \leq b.\frac{a.b^{n-2}}{(n-1)!}. \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^{n-1} ds.$$

Logo,

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq a.b^{n-1}\frac{|t - t_0|^n}{n!}, \tag{1.8}$$

e essas desigualdades são validas para $\alpha \leq \alpha' < t < \beta \leq \beta'$, em que α' e β' são mais que $\delta < y_n(t) < \lambda$ sempre que $\alpha' < t < \beta'$.

Dai,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a.b^{n-1}\frac{|t - t_0|^2}{n!},$$

sabendo que

$$\alpha < t < \beta \text{ e } \alpha < t_0 < \beta,$$

temos

$$\alpha - \beta < t - t_0 < \beta - \alpha \Leftrightarrow -(\beta - \alpha) < t - t_0 < \beta - \alpha,$$

ou seja,

$$|t - t_0| \leq \beta - \alpha \leq |\beta - \alpha|.$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.b^{n-1}\frac{|t-t_0|^n}{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a.b^{n-1}\frac{|\beta-\alpha|^n}{n!}$$

o que implica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a.b^{n-1}\frac{|\beta-\alpha|^n}{n!}. \tag{1.9}$$

Aplicando o teste da razão(ver anexo) em

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.b^{n-1}\frac{|\beta-\alpha|^n}{n!}$$

vemos que a série converge, pois considerando $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ com $a_n = a.b^{n-1}\frac{|\beta-\alpha|^n}{n!}$, temos:

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{a.b^{n-1+1}.(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{a.b^{n-1}.(\beta-\alpha)^n}| =$$

$$= |\frac{a.b^{n-1}.b.(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1).n!}.\frac{n!}{a.b^{n-1}.(\beta-\alpha)^n}| =$$

$$= |\frac{b.(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1).(\beta-\alpha)^n}| = |\frac{b.(\beta-\alpha)^n.(\beta-\alpha)}{(n+1).(\beta-\alpha)^n}| =$$

$$= |\frac{b.(\beta-\alpha)}{(n+1)}| =$$

$$= \frac{b.(\beta-\alpha)}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$$

logo pelo teste da razão a série converge.

Como vimos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a.b^{n-1}\frac{|\beta-\alpha|^n}{n!}$$

converge, aplicando o teste da comparação(ver anexo) em (1.9) temos que $\sum |y_n(t) - y_n(t)|$ é convergente.

Como

$$y_n(t) = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(y_k(t) - y_{k-1}(t)), \tag{1.10}$$

pois

$$y_n(t) = y_0 + (y_1(t) - y_0(t)) + (y_2(t) - y_1(t)) + ... + (y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)) + (y_n(t) - y_{n-1}(t)),$$

temos que $y_n(t)$ é convergente, digamos que

$$\lim_{n\to\infty} y_n(t) = y(t).$$

Resta mostrar que y é contínua. Para isto, considere $m > n$, e usando a desigualdade triangular(ver anexo) temos que pela equação (1.10)

$$|y_m(t) - y_n(t)| = |\sum_{k=n+1}^{m}(y_k(t) - y_{k-1}(t))| \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} |(y_k(t) - y_{k-1}(t))|$$

por (1.9) temos

$$|y_m(t) - y_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |(y_k(t) - y_{k-1}(t))| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a.b^{k-1}.(\beta - \alpha)^k}{k!}.$$

Passando o limite com $m \longrightarrow \infty$ e sabendo que $y_m \longrightarrow y$, temos

$$|y(t) - y_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a.b^{k-1}.(\beta - \alpha)^k}{k!} \tag{1.11}$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, para n suficiente grande

$$|y(t) - y_n(t)| < \frac{\epsilon}{3} \tag{1.12}$$

para $\alpha' < t < \beta'$.

Assim , $y(t)$ é continua. De fato, dado $\epsilon > 0$, para s suficiente próximo de t, temos.

$$|y_n(t) - y_n(s)| < \frac{\epsilon}{3}, \tag{1.13}$$

e como,

$$|y(t) - y(s)| = |y(t) - y_n(t) + y_n(t) - y_n(s) + y_n(s) - y(s)|$$

utilizando a desigualdade triangular e a desigualdade (1.12), obtemos

$$|y(t) - y(s)| \leq |y(t) - y_n(t)| + |y_n(t) - y_n(s)| + |y_n(s) - y(s)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

mostrando, que $y(t)$ é contínua. Além disso, para $\alpha' < t < \beta'$, temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(s,y_n(s))ds = \int_{t_0}^{t} f(s,limy_n(s))ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds$$

pois, por (1.4) e (1.8)

$$|\int_{t_0}^{t} f(s,y_n(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds| \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|ds \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} b.|y_n(s) - y(s)|ds \leq b\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{a.b^{k-1}.(\beta-\alpha)^k}{k!}\int_{t_0}^{t} ds =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{a.b^{k-1}.(\beta-\alpha)^k}{k!}.(t-t_0)$$

que tende a zero quando $n \longrightarrow \infty$. Portanto,

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t) = \lim_{n\to\infty}(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y_{n-1}(s))ds) =$$

$$= y_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(s,y_{n-1}(s))ds =$$

$$= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds.$$

Com isto, concluímos que $y(t) = y_o + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds$ é contínua e além disso é solução do problema (1.2), pois

$$\frac{dy}{dt} = 0 + \frac{d}{dt}[\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds] = f(t,y(t)) = f(t,y)$$

e

$$y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s,y(s))ds = y_0 + 0 = y_0.$$

Unicidade:

Suponha que $y(t)$ e $z(t)$ sejam soluções do problema de valor inicial. Isto é

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y(t)); y(t_0) = y_0$$

e

$$\frac{dz}{dt} = f(t,z(t)); z(t_0) = y_0.$$

Seja

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)| ds$$

Assim, como pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} y'(s) ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds$$

e

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} z'(s) ds = \int_{t_0}^{t} f(s, z(s)) ds$$

e temos ainda que

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)| ds = |y(t) - z(t)|$$

segue que

$$u'(t) = |y(t) - z(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |y'(s) - z'(t)| ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds$$

usando a equação (1.4),

$$\int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \leq b. \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(t)| ds$$

ou seja,

$$u'(t) \leq b.u(t).$$

Subtraindo-se $b.u(t)$ em ambos os membros da desigualdade acima, obtemos

$$u'(t) - b.u(t) \leq 0,$$

multiplicando pelo fator integrante $\mu(t) = e^{-bt}$, obtemos

$$u'(t).e^{-bt} - b.u(t)e^{-bt} \leq 0$$

onde podemos reescrever a equação acima como

$$\frac{d}{dt}(e^{-bt}.u(t)) \leq 0.$$

Integrando ambos os membros com relação a t, temos

$$\int \frac{d}{dt}(e^{-bt}.u(t)) dt \leq \int 0 dt$$

usando propriedade de integral, obtemos

$$e^{-bt}.u(t) \leq 0.$$

Como $e^{-bt} = \frac{1}{e^{bt}} > 0$ e $u(t) \geq 0$, portanto $u(t) = 0$ para $\forall t$. Consequentemente,

$$\int_{t_0}^{t} |y(t) - z(s)| ds = 0,$$

o que implica assim $y(t) = z(t), \forall$ t, como queríamos mostrar.

Capítulo 2

Algumas aplicações das EDO

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações das Equações Diferencias Ordinárias em Estatística, Matemática Financeira e Física, onde todos os problemas são modeladas através de um Problema de Valor Inicial, cuja solução é garantida pelo Teorema de Existência e Unicidade estudado.

2.1 Crescimento populacional

Consideremos o modelo matemático mais simples para tratar do crescimento populacional de algumas espécies. Ele é chamado de modelo de crescimento exponencial, onde se supõe que, a variação da população em relação ao tempo denotada por $\frac{dy}{dt}$, é proporcional à população presente, em outras palavras, se $y = y(t)$ é a população temos $\frac{dy}{dt} = Ky$, onde K é uma constante. Assim, considerando que a população inicial é y_0, isto é, $y(0) = y_0$ podemos descrever o problema de encontrar y(t) como o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ky \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dt} - Ky = 0, \tag{2.1}$$

que é uma equação linear de 1º ordem.

Para resolvemos esta equação, usaremos o Método do Fator Integrante. Determinamos o fator integrante $\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$ onde $P(t) = -K$, ou seja,

$$\mu(t) = e^{\int -Kdt} = e^{-Kt+c},$$

tomando $c = 0$, obtemos $\mu(t) = e^{-Kt}$. Multiplicando a equação (2.1) por $\mu(t) = e^{-Kt}$ obtemos,

$$e^{-Kt}.\frac{dy}{dt} - K.e^{-Kt}.y = 0. \tag{2.2}$$

Mas, pelas regras de derivação

$$\frac{d}{dt}(e^{-Kt}.y) = \frac{d}{dt}(e^{-Kt}).y + e^{-kt}.\frac{dy}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{-Kt}.y) = -Ke^{-Kt}.y + e^{-Kt}.\frac{dy}{dt}. \tag{2.3}$$

De (2.2) e (2.3) temos

$$\frac{d}{dt}(e^{-Kt}.y) = 0.$$

Integrando ambos os membros com relação a t obtemos,

$$\int \frac{d}{dt}(e^{-Kt}.y) = \int 0dt$$

$$\Rightarrow e^{-Kt}.y(t) = c,$$

ou

$$y(t) = c.e^{Kt},$$

que é a solução geral da EDO.

Substituindo $t = 0$ e como $y(0) = y_0$, obtemos

$$y_0 = c.e^{K.0} = c,$$

portanto, a solução do PVI é

$$y(t) = y_0.e^{Kt}.$$

Exemplo 2.1. *Uma população de bactérias cresce a uma taxa proporcional a população presente. Sabendo- se que após uma hora a população é 3 vezes a população inicial, determine a população como função do tempo e o tempo necessário para que a população quadruplique .*

Solução:

Como a população de bactérias cresce a uma taxa proporcional a população presente, conforme vimos acima, isto significa que a população $y(t)$ é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

cuja solução, conforme acabamos de ver é

$$y(t) = y_0.e^{Kt}. \tag{2.4}$$

Sabendo- se ainda que em uma hora a população inicial triplica , temos $y(1) = 3y_0$ *, então substituindo* $t = 1$ *em (2.4) obtemos*

$$y(1) = y_0.e^{K},$$

dai substituindo $y(1)$ *na equação anterior temos*

$$3y_0 = y_0.e^{K} \Rightarrow$$

$$K = ln3.$$

Assim, a equação que descreve como a população de bactérias varia com o tempo é

$$y(t) = y_0.e^{(ln3)t}$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0.(e^{ln3})^t$$

ou seja,

$$y(t) = y_0.3^t.$$

Como queremos saber também o tempo necessário para que a população quadruplique, isto é, o valor de t *tal que* $y(t) = 4y_0$*, basta substituirmos na ultima equação, de onde obtemos*

$$4y_0 = y_0.3^t \Rightarrow 3^t = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ln3)t = ln4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{ln4}{ln3}$$

temos então que $t = \frac{ln4}{ln3} \approx 1,261$ *horas* ≈ 1 *hora e 16 minutos.*

2.2 Juros

Iremos dividir esta aplicação em dois casos.

1º caso:

Vamos supor que façamos uma aplicação de uma quantia s_0 em um banco e que a taxa de variação do investimento $\frac{ds}{dt}$ é proporcional ao saldo em cada instante $s(t)$. Logo existe r

$\in \mathbb{R}$ tal que $\frac{ds}{dt} = r.s$, além disso considerando que a aplicação inicial, no instante $t = 0$ é s_0, temos $s(0) = s_0$, podemos descrever o problema de encontrar $s(t)$ através de problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = r.s \\ s(0) = s_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Observe que podemos reescrever a equação (2.5), como

$$\frac{ds}{dt} - r.s = 0, \tag{2.6}$$

que é uma EDO linear de 1ª ordem, que iremos resolver pelo Método do Fator Integrante.

Determinamos o fator integrante $\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$ onde $P(t) = -r$ dai,

$$\mu(t) = e^{\int -rdt} = e^{-rt+c}$$

tomando $c = 0$, temos o fator integrante $\mu(t) = e^{-rt}$.

Multiplicando a equação (2.6) por $\mu(t) = e^{-rt}$, obtemos:

$$e^{-rt}.\frac{ds}{dt} - e^{-rt}.r.s = 0$$

de onde segue que,

$$\frac{d}{dt}(e^{-rt}.s) = 0.$$

Integrando ambos os membros com relação á t temos

$$\int \frac{d}{dt}(e^{-rt}.s(t)) = \int 0dt$$

$$e^{-rt}.s(t) = C$$

$$s(t) = C.e^{rt},$$

que é a solução geral da EDO .

Como $s(0) = s_0$ temos

$$s_0 = C.e^{r.0}$$

$$\Rightarrow s_0 = C.$$

Portanto a solução do PVI é

$$s(t) = s_0.e^{rt}. \tag{2.7}$$

Note que encontramos o saldo em função do tempo a partir de uma aplicação inicial qualquer s_0. Assim, para cada valor s_0 fixado, teremos uma expressão para encontrarmos o saldo, num instante t qualquer. Porém, este modelo pode não parecer muito realista, pois normalmente os juros são creditados em períodos inteiros igualmente espaçados. Ou seja, se i é a taxa de juros em uma unidade de tempo, então pela fórmula de juros compostos o saldo após n unidades de tempo $s(n)$ é dado por :

$$s(n) = s_0(1+i)^n, \tag{2.8}$$

onde,

i = taxa de juros;

n= unidades de tempo;

s_0= valor inicial do capital.

Substituindo-se t por n na solução do problema de valor inicial obtida em (2.7) e usando a equação (2.8) temos:

$$s_0.e^{rn} = s_0(1+i)^n \Rightarrow$$

$$e^{rn} = (1+i)^n,$$

elevando ambos os membros a $\frac{1}{n}$ temos:

$$e^r = (1+i)$$

aplicando ln em ambos os membros da última igualdade, obtemos

$$e^r = 1 + i \text{ ou } r = ln(1+i). \tag{2.9}$$

Assim, a hipótese inicial de que os juros são creditados é realista desde que a constante de proporcionalidade na equação diferencial r e a taxa de juros i estejam relacionadas por (2.9). Para pequenas taxas de juros os dois valores são muito próximos.

Exemplo 2.2. *Vamos supor que uma aplicação renda juros de 2% ao més (continuamente). Vamos encontrar o saldo como função do tempo e o saldo apos 12 meses se o saldo inicial é de R$ 300,00.*

Solução:

Conforme vimos, podemos descrever o problema de encontrar $s(t)$ pelo problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = rs \\ s(0) = 300 \end{cases}$$

onde pelo que já mostramos anteriormente temos que $r = ln(1+i)$, *logo*

$$r = ln(1+0,02) = ln(1,02) = 0,019 \approx 0,02,$$

temos então que

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = 0,02s \\ s(0) = 300. \end{cases} \tag{2.10}$$

Reescrevendo (2.10) obtemos,

$$\frac{ds}{dt} - 0,02s = 0, \tag{2.11}$$

que é uma EDO linear de 1ª ordem, que iremos resolver novamente pelo Método do Fator Integrante.

Temos que encontrar o fator integrante $\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$, *sendo* $P(t) = -0,02$ *dai,*

$$\mu(t) = e^{\int -0,02dt} = e^{-0,02t+c},$$

tomando $c = 0$, $\mu(t) = e^{-0,02t}$.

Multiplicando a equação (2.11) por $\mu(t) = e^{-0,02t}$ *temos,*

$$e^{-0,02t}.\frac{ds}{dt} - 0,02s.e^{-0,02t} = 0 \Rightarrow$$

o que implica ,

$$\frac{d}{dt}(e^{-0,02t}.s) = 0.$$

Integrando ambos os membros com relação á t *obtemos:*

$$\int \frac{d}{dt}(e^{-0,02t}.s(t)) = \int 0dt$$

$$\Rightarrow e^{-0,02t}.s(t) = C$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{C}{e^{-0,02t}},$$

ou

$$s(t) = C.e^{0,02t},$$

que é a solução geral da EDO.

Como $s(0) = 300$, *temos:*

$$300 = C.e^{0,02.0}$$

$$\Rightarrow C = 300.$$

Logo a solução do PVI é,

$$s(t) = 300.e^{0,02t}.$$

Assim em 12 *meses, isto é, para* $t = 12$*, o saldo é:*

$$s(12) = 300.e^{0,02.12} = 300.e^{12,02}$$

$$\Rightarrow s(12) \approx 381,37$$

.

2º caso:

Vamos supor, agora, que além do investimento inicial s_0 façamos depósitos ou saques continuamente a uma taxa constante d (positivo no caso de depósitos e negativo no caso de saques), então neste caso o modelo que descreve esta situação é o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = r.s + d \\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

Onde a equação é linear e pode ser reescrita como

$$\frac{ds}{dt} - r.s = d \tag{2.12}$$

para resolvermos temos que determinar o fator integrante $\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$, onde $P(t) = -r$, daí

$$\mu(t) = e^{-rdt} = e^{-rt+c},$$

tomando c = 0, temos $\mu(t) = e^{-rt}$.

Multiplicando a equação (2.12) por $\mu(t) = e^{-rt}$ obtemos

$$e^{-rt}.\frac{d}{dt} - r.e^{-rt}.s = d.e^{-rt}$$

de onde segue que

$$\frac{d}{dt}(e^{-rt}.s) = de^{-rt}$$

Integrando ambos os membros com relação a t temos

$$\int \frac{d}{dt}(e^{-}rt.s) = \int de^{-rt}$$

$$\Rightarrow e^{-rt}.s(t) = -\frac{d}{r}e^{-rt} + c,$$

ou

$$s(t) = c.e^{rt} - \frac{d}{r},$$

que é solução geral da EDO.

Como $s(0) = s_0$, substituindo na equação acima, obtemos

$$s_0 = c.e^{r.0} - \frac{d}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = s_0 + \frac{d}{r}.$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$s(t) = (s_0 + \frac{d}{r}).e^{rt} - \frac{d}{r}$$

ou seja,

$$s(t) = s_0.e^{rt} + \frac{d}{r}(e^{rt} - 1). \tag{2.13}$$

Vamos comparar este resultado com o caso em que além dos juros serem creditados em intervalos constantes os depósitos ou saques de valor D são feitos em intervalos constantes. Neste caso o saldo após n unidades de tempo $s(n)$, pelas fórmulas de juros compostos, é dado por

$$s(1) = s_0(1+i) + D$$

$$s(2) = [s_0(1+i) + D](1+i) + D = s_0(1+i)^2 + D(1+i) + D$$

$$s(3) = [s_0(1+i)^2 + D(1+i) + D](1+i) + D = s_0(1+i)^3 + D(1+i)^2 D(1+i) + D$$

$$s(4) = s_0(1+i)^4 + D(1+i)^3 + D(1+i)^2 + D(1+i) + D$$

.

.

.

$$s(n) = s_0(1+i)^n + (D + D(1+i) + D(1+i)^2 + ... + D(1+i)^{n-1}). \tag{2.14}$$

Temos que $(D + D(1+i) + D(1+i)^2 + ... + D(1+i)^{n-1})$ é a soma dos termos de uma PG finita, que é dada pela fórmula

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Assim,a soma dos termos da PG obtida é:

$$s_n = \frac{D.(1-(1+i)^n)}{1-(1+i)}$$

$$\Rightarrow s_n = D.(\frac{1-(1+i)^n}{-i})$$

$$\Rightarrow s_n = D(\frac{(1+i)^n - 1}{i}). \tag{2.15}$$

Substituindo (2.15) em (2.14) obtemos

$$s(n) = s_0(1+i)^n + D(\frac{(1+i)^n - 1)}{i}). \tag{2.16}$$

Substituindo t por n na solução de problema de valor inicial (2.13) e comparando com a equação (2.16) obtemos que

$$s_0 e^{rn} + \frac{d}{r}(e^{rn} - 1) = s_0(1+i)^n + D(\frac{(1+i)^n - 1)}{i})$$

temos ainda que, pelo 1º caso, $1 + i = e^r$, daí

$$s_0 e^{rn} + \frac{d}{r}(e^{rn} - 1) = s_0 e^{rn} + D(\frac{e^{rn} - 1}{i}),$$

ou seja,

$$\frac{d}{r} = \frac{D}{i}.$$

Usando a igualdade (2.9), se $r = ln(1+i)$, segue que

$$\frac{d}{ln(1+i)} = \frac{D}{i}$$

$$\Rightarrow d = \frac{ln(1+i)D}{i},$$

ou, se $i = e^r - 1$, temos

$$\frac{d}{r} = \frac{D}{e^r - 1}.$$

Logo,

$$d = \frac{ln(1+i)D}{i} \text{ ou } D = \frac{(e^r - 1).d}{r}. \tag{2.17}$$

Podemos também neste caso usar o modelo contínuo em que os depósitos ou saques são feitos continuamente desde que a taxa contínua de depósitos d e os depósitos constantes D estejam relacionados como vemos em (2.17).

Exemplo 2.3. *Uma conta de poupança acumula 6% de juros por ano, compostos continuamente, e saques contínuos são efetuados a uma taxa de R$ 900,00 por ano.Escreva e resolva o PVI onde a equação diferencial seja satisfeita pelo saldo $s(t)$ da conta no tempo t.*

Solução:

Nesse caso, temos o PVI

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = r.s - d \\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

Onde

d- taxa de saque por ano(relacionada com relação a D)

r- constante de proporcionalidade (relacionada com relação a i)

s_0- valor inicial do capital.

Sendo assim temos ainda que o PVI pode ser escrito por

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = 0,06.s - 900 \\ s(0) = s_0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Reescrevendo a equação temos,

$$\frac{ds}{dt} - 0,06.s = -900 \tag{2.19}$$

Onde calculando o fator integrante $\mu(t) = e^{\int P(t)dt}$ da nossa equação linear, sendo $P(t) = -0,06$ temos

$$\mu(t) = e^{\int -0,06dt} = e^{-0,06t+c}.$$

Tomando $c = 0$, obtemos o fator integrante

$$\Rightarrow \mu(t) = e^{-0,06t}$$

Multiplicação a equação (2.19) por $\mu(t) = e^{-0,06t}$ obtemos

$$e^{-0,06t}.\frac{ds}{dt} - 0,06.e^{-0,06t}.s = -900.e^{-0,06t}$$

de onde segue que,

$$\frac{d}{dt}(e^{-0,06t}.s) = -900.e^{-0,06t}.$$

Integrando ambos os membros com relação a t temos

$$e^{-0,06t}.s(t) = \frac{900}{0,06}.e^{-0,06t} + c$$

$$\Rightarrow e^{-0,06t}.s(t) = 1500.e^{-0,06t} + c,$$

ou seja,

$$s(t) = c.e^{0{,}06t} + 1500, \tag{2.20}$$

que é solução geral da EDO.

Como $s(0) = s_0$*, substituindo* $t = 0$ *e* $s = s_0$ *, obtemos*

$$s_0 = c.e^{0{,}06.0} + 1500$$

$$\Rightarrow s_0 = c + 1500$$

$$\Rightarrow c = s_0 - 1500. \tag{2.21}$$

Substituindo (2.21) em (2.20), temos que a solução do PVI é

$$s(t) = (s_0 - 1500).e^{0{,}06t} + 1500$$

ou seja,

$$s(t) = s_0.e^{0{,}06t} - 1500(e^{0{,}06t} - 1).$$

2.3 Lei de Torricelli

A Lei de Torricelli diz que a taxa com que um liquido escoa por um orifício situado a uma profundidade h é proporcional a $\sqrt{h}$. Ou seja

$$\frac{dv}{dt} = k.\sqrt{h}, \text{ onde k é uma constante.} \tag{2.22}$$

Mas, existe uma relação em v e h, pois o volume depende da profundidade h, isto é, $v = v(h)$, que depende da forma do tanque. Como $v = v(h)$, pela regra da cadeia temos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh}.\frac{dh}{dt},$$

substituindo em (2.22) temos,

$$\frac{dv}{dh}.\frac{dh}{dt} = k.\sqrt{h}$$

o que implica,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k.\sqrt{h}}{\frac{dv}{dh}}.$$

Então a altura, $h(t)$ é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = \frac{k.\sqrt{h}}{\frac{dv}{dh}} \\ h(0) = h_0. \end{cases}$$

Exemplo 2.4. *Um tambor cônico com vértice para baixo, de 3 metros de altura e base circular de raio 1 metro, esta cheio de água. Se fizermos um furo no fundo e em 40 minutos a altura da coluna de água cair pela metade, determinar a altura h em função do tempo e em quanto tempo o tanque esvazia.*

Conforme vimos, a altura $h(t)$ é a solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = \frac{k.\sqrt{h}}{\frac{dv}{dh}} \\ h(0) = h_0. \end{cases} \tag{2.23}$$

Onde o volume de um cone e dado por

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Inicialmente temos o volume total do tambor, ou seja, temos um cone com altura H e base com raio R. Após ser feito um furo, em t minutos teremos um novo volume, ou seja teremos um cone com altura h e base com raio r. Assim,

$$\frac{h}{H} = \frac{r}{R} \Rightarrow r = \frac{h.R}{H}.$$

Dai o volume em função da altura é dado por

$$v(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\frac{h.R}{H})^2 h = \frac{1}{3}\pi h^3(\frac{R}{H})^2.$$

Derivando a função $v(h)$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dh} &= \frac{1}{3}\pi 3h^2(\frac{R}{H})^2 \\ \Rightarrow \frac{dv}{dh} &= \pi h^2(\frac{R}{H})^2 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Substituindo a igualdade (2.24) em (2.23) obtemos,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k.\sqrt{h}}{\pi h^2(\frac{R}{H})^2} = \frac{k}{\pi}(\frac{H}{R})^2 h^{-2}\sqrt{h}$$

ou seja,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k}{\pi}(\frac{H}{R})^2.h^{-\frac{3}{2}}$$

onde denotaremos porwa constante $w = \frac{k}{\pi}(\frac{H}{R})^2$. Então o problema modelado resulta no PVI,

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = wh^{-\frac{3}{2}} \\ h(0) = 3, h(40) = 1 \end{cases}$$

Multiplicando a equação por $h^{\frac{3}{2}}$ *temos:*

$$h^{\frac{3}{2}}\frac{dh}{dt} = w.$$

Como

$$\frac{d}{dh}(\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}) = h^{\frac{3}{2}},$$

daí

$$\frac{d}{dh}(\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}})\frac{dh}{dt} = w,$$

e usando regra da cadeia

$$\frac{d}{dt}(\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}) = w.$$

Integrando ambos os membros com relação a t.

$$\int \frac{d}{dt}(\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}})dt = \int wdt$$

o que implica,

$$\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} = wt + c$$

ou ainda

$$h^{\frac{5}{2}} = \frac{5(wt+c)}{2}.$$

Fazendo, $w' = \frac{5w}{2}$ *e* $c' = \frac{5c}{2}$, *obtemos*

$$h^{\frac{5}{2}} = w't + c',$$

de onde segue que

$$h(t) = (w't + c)^{\frac{2}{5}}. \tag{2.25}$$

Como $h(0) = 3$,*substituindo* $t = 0$ *e* $h = 3$ *em (2.25) obtemos*

$$3 = (w'.0 + c')^{\frac{2}{5}}$$

$$3 = (0 + c')^{\frac{2}{5}}$$

$$3 = c'^{\frac{2}{5}}$$

$$c' = 3^{\frac{5}{2}},$$

e como $h(40) = 1,5$ *substituindo* $t = 40$ *e* $h = 1,5$ *em (2.25) temos,*

$$1,5 = (40w' + c')^{\frac{2}{5}}$$

$$1,5^{\frac{5}{2}} = 40w' + c'$$

onde ja obtemos que $c' = 3^{\frac{5}{2}}$ *substituindo na igualdade acima temos*

$$1,5^{\frac{5}{2}} = 40w' + 3^{\frac{5}{2}}$$

$$40w' = 1,5^{\frac{5}{2}} - 3^{\frac{5}{2}}$$
$$w' = \frac{1,5^{\frac{5}{2}} - 3^{\frac{5}{2}}}{40}$$

Assim a função que descreve como altura varia com o tempo é dada pela substituição de c' *e* w' *em (2.25)*

$$h(t) = (w't + c')^{\frac{2}{5}} = (3^{\frac{5}{2}} + \frac{1,5^{\frac{5}{2}} - 3^{\frac{5}{2}}}{40}t)^{\frac{2}{5}} \tag{2.26}$$

Como também queremos saber em quanto tempo o tanque esvazia e sabendo que o tanque estará vazio quando $h = 0$*, daí substituindo em (2.26) encontramos* t*,*

$$(3^{\frac{5}{2}} + \frac{1,5^{\frac{5}{2}} - 3^{\frac{5}{2}}}{40}t)^{\frac{2}{5}} = 0$$

$$3^{\frac{5}{2}} + \frac{1,5^{\frac{5}{2}} - 3^{\frac{5}{2}}}{40}t = 0$$
$$1,5^{\frac{5}{2}} - 3^{\frac{5}{2}}t = -40.3^{\frac{5}{2}}$$
$$t = -\frac{40.3^{\frac{5}{2}}}{1,5^{\frac{5}{2}} - 3^{\frac{5}{2}}}$$
$$t \approx 49min$$

Logo, o tanque estará vazio após aproximadamente 49 minutos.

Anexo

Proposição 2.1 (Derivada da soma). *Se u e v são funções deriváveis dx, então a soma das duas , $u + v$ é derivável em qualquer ponto onde ambos sejam deriváveis. Nessas pontos,*

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Demonstração: *Ver [6].* ■

Proposição 2.2 (Derivada do produto). *Se $u + v$ são deriváveis em x, então o produto uv também é, e*

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

A derivada do produto uv é multiplicado pela derivada de v somado a v multiplicado pela derivada de u.

Demonstração: *Ver [6].* ■

Teorema 2.1 (A regra da cadeia). *Se f(u) é derivável no ponto $u = g(x)$ e g(x) é derivável em x, então a função composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é derivável em x e*

$$(f \circ g)(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

Onde $\frac{dy}{du}$ é calculado em $u = g(x)$

Demonstração: *Ver [6].* ■

Teorema 2.2 (**Teorema do Valor Médio**). *Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em um intervalo fechado [a,b] e derivável no intervalo aberto (a,b). Então há pelo menos um ponto em (a,b), tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\cdot$$

Demonstração: *Ver em [6].* ■

Teorema 2.3 (**Teorema Fundamental do Cálculo**). *Se f é contínua sobre [a,b] e se F é uma primitiva de f neste intervalo, então*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Demonstração: *Ver [1].* ■

Proposição 2.3. *Seja $f : A \subset R^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável. Então, $|f(x)|$ é integrável e:*

$$\left|\int_A f(x)dx\right| \leq \int_A |f(x)|dx\cdot$$

Demonstração: *Ver [2].* ■

Proposição 2.4 (**Teste da Razão**). *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não nulos e suponhamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = L$. Então*

a) Se $L < 1$ a série é absolutamente convergente.

b) Se $L > 1$ a série é divergente.

c) Se $L = 1$ o teste é inconclusivo.

Demonstração: *Ver [3].* ■

Proposição 2.5 (**Teste de Comparação**). *Dadas as séries de termos não negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, se existir uma constante $C >$ o tal que $a_n \leq Cb_n$, para todon $\in \ltimes$, então a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica a de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica a de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Demonstração: *Ver [3].* ■

Referências Bibliográficas

[1] FLEMMING, Diva Marília. GONÇALVES, Mirian Buss. Cálculo A: funções, limite, derivação e integração, São Paulo, Pearson Prentice Hall 2006.

[2] LOUREDO, Aldo Trajano. OLIVEIRA, Alexandro Marinho. LIMA, Osmundo Alves. Cálculo Avançado, Campina Grande: Eduepb, 2010.

[3] MACIEL, Aldo Bezerra. LIMA, Osmundo Alves. Introdução à Análise Real . Campina Grande, EDUEP 2005

[4] SANTOS, Reginaldo J. Introdução às Equações Diferencias Ordinárias. Belo Horizonte, Imprensa Universitária da UFMG, 2011

[5] SOTOMAYOR, Jorge. Equações Diferenciais Ordinárias, São Paulo. Textos Universitários do IME - USP, 2011.

[6] WEIR, Hass Giordano Cálculo George B. Thomas. Volume 1. São paulo, Addilson Wesley, 2009.