Universidade Estadual da Paraíba

Centro de Ciências e Tecnologia

Departamento de Matemática

Curso de Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio

Lucas Cavalcanti Cruz

Princípio Fundamental da Contagem, Combinações, Arranjos e Permutações: Uma Avaliação da Aprendizagem

Campina Grande – PB

2012

Lucas Cavalcanti Cruz

Princípio Fundamental da Contagem, Combinações, Arranjos e Permutações: Uma Avaliação da Aprendizagem

Monografia apresentada à Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio.

Orientador: Prof. Me. José Lamartine da Costa Barbosa

Campina Grande – PB

2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL-UEPB

C957p Cruz, Lucas Cavalcanti.

Princípio fundamental da contagem, combinações, arranjos e permutações [manuscrito] : Uma avaliação da aprendizagem / Lucas Cavalcanti Cruz. – 2012.

69 f. il. color.

Monografia (Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2012.

“Orientação: Prof. Me. José Lamartine da Costa Barbosa, Departamento de Matemática”.

1. Ensino de matemática. 2. Análise combinatória. 3. Ensino Médio. I. Título.

21. ed. CDD 512

Lucas Cavalcanti Cruz

Princípio Fundamental da Contagem, Combinações, Arranjos e Permutações: Uma Avaliação da Aprendizagem

Monografia apresentada à Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências para obtenção do título de Especialista em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio.

Aprovada em: 01 / 03 / 2012

Prof. Me. José Lamartine da Costa Barbosa – Orientador
Departamento de Matemática - UEPB

Prof^{a}. Dr^{a} Abigail Fregni Lins
Departamento de Matemática - UEPB

DMEsteves

Prof^{a}. Dr^{a} Divanilda Maia Esteves
Departamento de Estatística – UEPB

Ao DEUS que é Todo-Amoroso, criador de todas as coisas, inclusive da matemática, e que é o único capaz de contar, desde os grãos de areia da praia, passando pelas estrelas no céu até os fios de cabelo de nossas cabeças.

“Não se vendem cinco pássaros por duas pequeninas moedas? Contudo, nenhum deles passa despercebido diante de Deus. *Mais ainda, até os cabelos da vossa cabeça estão contados.* Não temais: valeis mais do que muitos pássaros.”

(Evangelho segundo São Lucas 12, 6s)

“Só a Fé explica o que a Razão limita”

(Lucas Cavalcanti Cruz)

Agradecimentos

Durante aproximadamente um ano participei do meu primeiro curso de pós-graduação e, nesse tempo, várias pessoas se fizeram presentes, algumas apenas passaram, outras permaneceram durante um pouco mais de tempo, e outras ainda, com toda certeza serão eternas. Mas cada uma delas, independente de quanto tempo estiveram presentes, marcaram minha vida e merecem meus agradecimentos.

Começo agradecendo à minha incrível turma do Curso de Especialização em Educação Matemática para Professores do Ensino Médio. Pessoas que estiveram, durante toda essa jornada nas mais diversas disciplinas do curso, batalhando, ensinando e aprendendo junto comigo. Pessoas de muitos lugares da Paraíba, e até mesmo de outros estados, pessoas de diferentes costumes, mas firmes em um propósito: sermos melhores professores de Matemática. Durante o percurso alguns mudaram de caminho, tiveram filhos, foram aprovados em concursos, enfim, cada um com seu destino, infelizmente nem todos terminamos juntos, mas fizemos parte de uma turma ímpar. Agradeço a todos vocês pelo apoio e ajuda que me deram durante todo esse tempo.

Agradeço, ainda, ao nosso professor e coordenador Silvânio de Andrade por toda atenção e ajuda que dedicou a nossa turma, sempre conversando e discutindo conosco como deveríamos proceder para que o curso fosse agradável a todos.

De forma especial agradecer e parabenizar pelo excelente trabalho de todos os professores que nos lecionaram durante esse tempo. Em particular ao professor José Lamartine da Costa Barbosa, que aceitou o convite para ser meu orientador nesse trabalho, ajudando-me com sugestões de artigos para eu ler, sugestões na escrita do trabalho e correções.

Lembro ainda daqueles que estão comigo aos sábados no mestrado, em outra batalha, e que me ajudam e ensinam bastante, pois tudo aquilo que tenho aprendido com vocês também é muito importante e me ajudou bastante no curso de Especialização.

Agradeço a cada um dos meus amigos que fizeram parte de todos os meus cursos de graduação, pois com a contribuição de vocês pude dar um passo além, e tornar-me especialista.

Muito importante também foram aqueles que estiveram presentes na minha formação básica, me capacitando e me preparando para que alcançasse a universidade e daí pudesse seguir adiante no meio acadêmico. A estes eu agradeço em nome do Prof. Alfredo Codevilla, à todos que fizeram e fazem parte da equipe do colégio GEO, que durante cinco anos de minha vida estiveram presentes quase que diariamente, e mesmo após a conclusão do Ensino Médio sempre me deram bastante suporte, inclusive colaborando com a minha pesquisa para esse trabalho.

Agradeço de forma bastante especial aos meus amigos que formei nas pastorais da igreja, na Crisma e no EJC, pois foi o ombro amigo de vocês que me fez suportar muitos momentos de dificuldade e desânimo. Sempre que os vendo eu podia ver o próprio Cristo e tomando-o como exemplo, sabia que não poderia desistir, ainda não era hora, aliás, jamais seria.

De forma bastante carinhosa agradeço a Vanessa Negreiros, Érick Macêdo, João Henrique e Roberto Meneses, amigos que contribuíram para a minha pesquisa respondendo à lista de exercícios/problemas. A participação de vocês foi extremamente importante.

Aos meus eternos amigos André Clementino, Bruno Carvalho, Danilo Leite, Davi Veloso, Diego Augusto, Glênio Leitão, João Paulo Rodrigues, Lincoln Pontes, Paulo Henrique Cavalcanti, Rafael Targino, Rafael Uchôa e Rodrigo Godoy. Eles que mostram como é a verdadeira amizade, aquela que nem o tempo (cerca de 15 anos) nem a distância (Rio de Janeiro - RJ, Natal - RN, Ponta Grossa - PR ou até mesmo os Estados Unidos) podem acabar. Vocês, mesmo achando que eu sou meio louco, sempre me incentivaram e apostaram no meu sucesso. Muito obrigado.

A todos da minha família: tios, tias, primos, primas, avôs e avós, meus eternos agradecimentos, pois sei que às vezes, a correria do dia-a-dia nos impede de termos um contato maior, mas sempre tive a certeza de poder contar com todos, pois nos momentos de dificuldade o sangue que nos une é mais forte e sabemos que podemos confiar uns nos outros.

Minha namorada, Manuella Dias Carvalho Silva, que por quatro anos está comigo, me suportando (aguentando e dando suporte) e, acima de tudo, amando.

Ela que sempre com toda paciência do mundo me ajuda nas correções ortográficas, na formatação do texto, na correção das referências e em toda parte burocrática da elaboração desse trabalho. Ela que sempre me apoia quando estou à beira de um ataque de nervos, pensando que não vou conseguir terminar a tempo, sempre tem uma palavra de conforto e carinho para me acalmar e recobrar os ânimos. A você, meu amor, meu muito obrigado.

À minha irmã e meu cunhado, Bartyra e Raphael, por sempre me apoiarem nas minhas decisões, ajudando a ver a vida sob novos olhares e perceber que ela é mais bela do que o que eu imaginava. Agradeço também pela colaboração nas sugestões e correções na elaboração do meu trabalho. Ao meu sobrinho Samuel Cruz, que sempre me dá muita alegria e estímulo para continuar, pois um dia, com muita paciência e persistência, seremos cientistas juntos (nós temos um combinado, certo?).

À minha irmã Natália, que sempre me ensina que a vida não é tão fácil quanto parece, mas que apesar de todas as tribulações não podemos perder a fé e a esperança de continuar, na certeza de que um dia alcançaremos a vitória.

À minha mãe, Maria de Fátima, que com seu amor incondicional me deu todo suporte durante toda a vida, mas em especial durante todo o ano do curso o qual morei em outra cidade. Ela, mesmo de longe, sempre preocupada comigo, com minhas viagens, com minha alimentação, com minha saúde. Enfim, ela que, com todo amor de mãe, confia e torce pelo sucesso do filho que tem.

Ao meu pai, José Marcílio, que sempre foi meu maior exemplo de homem, ele que me ensinou valores que me fazem ser o que sou hoje. É através do seu exemplo, pai, que aprendi a gostar a respeitar a profissão que escolhi. Quando você me diz: “o presente que um professor recebe ao ver o sucesso de um estudante não pode comprar nada, mas vale muito mais que dinheiro”, eu posso ver a satisfação e realização que você alcançou sendo professor, e isso é algo que eu sonho em ter um dia. Um verdadeiro Doutor quando o assunto é educação, meus mais sinceros agradecimentos.

Acima de todos esses, eu agradeço a DEUS, incondicionalmente, pelo dom da vida e pela inteligência que me deu, fazendo com que eu sempre alcançasse meus sonhos. Só ele sabe, verdadeiramente, as dificuldades encontradas, mas também por causa da Sua ajuda todas foram superadas. A esse DEUS que eu creio

e que me ama ofereço todo meu trabalho e peço que tudo o que eu aprendi sirva para eu conseguir mostrar a todos o quanto a Sabedoria Divina é superior a nossa, e que só DEUS é a Verdade. Senhor, meu muito obrigado.

Resumo

Este trabalho aborda um tema específico sobre Contagem: A *Análise Combinatória*. Tenta-se encontrar alguma relação entre as dificuldades de aprendizagem desse conteúdo por parte da maioria dos estudantes e a forma como o tema é proposto por alguns livros didáticos usados atualmente no Ensino Médio. Qual deve ser a maneira de abordar o assunto, como apresentá-lo pela primeira vez aos estudantes que estão preocupados, principalmente, com o vestibular e em decorar várias fórmulas. Por que os estudantes não conseguem compreender as diferenças entre as diversas situações nas quais devem usar arranjo, combinação ou permutação? De maneira quantitativa essa pesquisa é dividida em duas partes: estudo do capítulo sobre Análise Combinatória encontrado em cinco livros didáticos do Ensino Médio e aplicação de uma lista de exercícios/problemas entre estudantes do Ensino Médio a fim de obter informações necessárias para respaldar ou contradizer nas hipóteses. Para tanto, a pesquisa inicia-se com uma pequena abordagem histórica sobre o desenvolvimento da Análise Combinatória e depois é feita a análise dos livros didáticos e das respostas dos exercícios/problemas e por fim uma pequena discussão sobre as conclusões.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Princípio Fundamental da Contagem, Arranjo, Combinação, Permutação.

Abstract

This study addresses a specific topic of Counting: Combinatorial Analysis. For trying to find some relationship between the learning difficulties that content from the vast majority of students and how the content is proposed by some of the textbooks currently used in high school. What should be the way to approach the content, how to present it for the first time to students who are concerned primarily with the university exam and keep in mind various formulas. Why do students fail to understand the differences between the various situations in which arrangement, combination or permutation must be used? In a quantitative way this research study is divided into two parts: analysis of the chapter on Combinatorial Analysis found in five textbooks, and implementing a exercises / problems list among high school students in order to obtain necessary information to support or contradict the hypotheses. This research study begins with a short historical approach on Combinatorial Analysis, then there will be the analyses of the responses of textbooks and exercises / problems. Finally a short discussion about the findings is presented.

Key-words: Combinatorial Analysis, Fundamental Principle of Counting, Arrangement, Combination, Permutation.

Lista de Siglas

UEPB: Universidade Estadual da Paraíba

UFPB: Universidade Federal da Paraíba

PFC: Princípio Fundamental da Contagem

PA: Progressões Aritméticas

ENEM: Exame Nacional do Ensino Médio

ProfMat: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

IFPB: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba

CEFET-PB: Centro Federal de Educação Tecnológica da Paraíba

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1. Introdução

O que é a Análise Combinatória ou simplesmente Combinatória? Ela foi definida diferentemente por várias pessoas, em diversas épocas. Em 1666, Leibniz diz que a Análise Combinatória é “o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos” e, um pouco mais tarde, em 1818, Nicholson define-a como “o ramo da Matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si”. A maior parte dos estudantes do Ensino Médio, atualmente, responderia que é o estudo dos arranjos, permutações e combinações. Isso não está errado, porém não contempla toda a Análise Combinatória. Embora arranjos, permutações e combinações façam parte, eles resolvem apenas um tipo de problema da Combinatória: aqueles nos quais se deseja contar tipos de subconjuntos de um conjunto finito dado sem a enumeração de todos eles.

Porém, a Análise Combinatória é muito mais ampla e trata de uma enorme variedade de problemas. Além das técnicas citadas existem outras que tentam solucioná-los, dentre elas destaca-se: o *Princípio da Inclusão-exclusão*, o *Princípio das Gavetas de Dirichlet*, as *Funções Geradoras* e a *Teoria de Ramsey*. Desses, afirma-se ainda, que o Princípio das Gavetas de Dirichlet é tão simples quanto o estudo dos arranjos, permutações e combinações.

Pode-se definir a Análise Combinatória, de maneira geral, como: a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas.

O núcleo de estudo da Análise Combinatória é formado basicamente por dois itens:

1. Dado um conjunto finito, mostrar que existem subconjuntos de seus elementos que satisfazem certas condições;
2. Contar e classificar esses subconjuntos.

Apesar de existirem técnicas gerais que permitem resolver diversos tipos de problemas, sabe-se que na maioria dos casos para que se chegue à solução correta é necessária muita criatividade e engenhosidade, além de uma completa interpretação da situação descrita pelo problema para que se perceba suas particularidades. Nesse ponto chega-se ao grande dilema da Análise Combinatória: a maior parte de seus problemas são facilmente enunciados, porém revelam-se muitas vezes difíceis de serem resolvidos, exigindo bastante raciocínio.

No entanto, como esse trabalho deve voltar-se especialmente ao Ensino Médio, a pesquisa limitar-se-á ao conceito de Análise Combinatória mais comum nesse nível de ensino e aqui ela será tratada como: "o ramo da Matemática que tem o objetivo de estudar técnicas que auxiliem na contagem da quantidade de agrupamentos que podem ser formados a partir dos elementos de um determinado conjunto, sob restrições específicas".

De uma forma ou de outra, percebe-se na prática diária de ensino que esse conteúdo é bastante rejeitado por grande parte dos estudantes e muitas vezes até mesmo pelos professores. Por isso, esse trabalho tem a intenção de pesquisar um pouco mais sobre esse problema. Por que a maioria dos estudantes do Ensino Médio têm dificuldades ou não gostam do conteúdo de Análise Combinatória? Quais são suas maiores dificuldades? Como a Análise Combinatória lhes é ensinada? Como fazem para estudar ou como tentam sanar suas dúvidas?

Para essas e outras perguntas algumas sugestões de respostas são:

- As aulas são ministradas de maneira puramente procedimental sem ênfase na exploração do problema ou uso da criatividade por parte dos estudantes;
- Os professores, em sua maioria, ensinam aos estudantes a memorizarem fórmulas nas quais a aplicação de determinados dados de maneira direta leva ao resultado;
- Os professores, em sua maioria, não ensinam aos estudantes a desenvolverem um raciocínio lógico para tentarem solucionar o problema;
- Os estudantes não compreendem o porquê das fórmulas em cada situação;
- Os estudantes não tentam fazer uma exploração mais ampla do problema buscando suas peculiaridades, para saber se a ordem dos elementos interfere ou não nos resultados;

- Os estudantes muitas vezes não percebem as restrições dos problemas como no caso de um número com mais de um algarismo não poder começar com o algarismo 0;
- Os estudantes não compreendem o que significa utilizar cada uma das fórmulas.

Para auxiliar na busca de respostas a essas perguntas, a pesquisa conta com um pequeno levantamento histórico sobre o desenvolvimento da Análise Combinatória, desde suas origens até os dias atuais, na tentativa de encontrar alguma ligação entre o que era estudado no início e como os estudantes encaram esse conteúdo em suas aulas, como os professores o ministram e como o assunto é abordado pelos livros didáticos.

Para a Análise Combinatória dois princípios são essenciais: o *Princípio Aditivo* e o *Princípio Multiplicativo*. O segundo também é conhecido como *Princípio Fundamental da Contagem*, PFC. É, principalmente, a partir desses princípios que se desenvolve toda a Análise Combinatória. Os estudantes do Ensino Básico têm contato com problemas de contagem que, na sua maioria, os direcionam a compreenderem esses princípios. O PFC está associado, normalmente, a situações do tipo: "se cada objeto de uma dada coleção A de objetos relacionar-se com cada um dos objetos de uma coleção B de objetos, quantos serão os agrupamentos formados?". É importante que esse contato entre estudantes e problemas de contagem ocorra desde cedo para que assim sejam aprendidas as diversas representações que podem ser utilizadas nesse tipo de problema, como diagramas de árvore, tabelas, desenhos, esquemas, etc.

> A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "contar", ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação em problemas de contagem (MORGADO et al., 2006, p. 17).

Verifica-se então que problemas de contagem aparecem em nossas vidas desde muito cedo, porém quando estes problemas se tornam sistematizados pela matemática escolar, afastam-se de nossa realidade e contexto e tornam-se desinteressantes. As aulas de Matemática muitas vezes são ministradas de forma a mostrarem aos estudantes muitas fórmulas que devem ser aplicadas em uma ou outra situação específica, desvalorizando o raciocínio ou a criatividade do estudante na busca de soluções alternativas. Os estudantes ao verem muitas fórmulas e expressões assustam-se ou não entendem seus significados e, por isso, erram problemas simples.

Dever-se-ia dar mais ênfase aos dois princípios enunciados anteriormente e mostrar que os compreendendo de maneira completa, a maioria das fórmulas pode ser esquecida, se o estudante aprender a usá-los de maneira correta em cada situação.

Os agrupamentos formados a partir de um dado conjunto recebem, na Análise Combinatória, nomes específicos, como: Arranjos, Permutações e Combinações. Tentar-se-á mostrar que todos eles nada mais são que aplicações do PFC considerando-se algumas restrições.

Para a conclusão da pesquisa estudou-se o capítulo sobre Análise Combinatória com a resolução de todos os exercícios/problemas propostos, em um total de aproximadamente 600 exercícios/problemas, para se fazer uma comparação/crítica entre as diferentes abordagens trazidas pelos livros didáticos e pelo grau de dificuldade dos exercícios/problemas. Além disso, foi aplicada uma lista de exercícios à estudantes do Ensino Médio, para averiguação da existência de uma possível relação entre a forma abordada pelo livro didático e como os estudantes estão desenvolvendo suas soluções.

1.1. Objetivos

O objetivo geral dessa pesquisa é tentar identificar possíveis causas para as dificuldades encontradas pelos estudantes para delimitarem uma situação problema como uma situação de permutação, combinação ou arranjo.

Apresentar o Princípio Fundamental da Contagem como o único elemento necessário para a maioria das situações que envolvem contagem e tentar identificar a dificuldade dos estudantes em utilizá-lo.

2. Trajetória pessoal e profissional

Lembro-me de que certa vez me perguntaram qual a matéria que eu mais gostava. Estávamos por volta de 1992, eu tinha cerca de 7 anos de idade e mal sabia o que era “matéria”, porém eu já tinha ouvido essa pergunta sendo feita a outras pessoas e via que a resposta que mais impressionava era: Matemática. Então não hesitei e respondi de imediato: Matemática.

Algum tempo se passou desde essa época, aprendi o que são as matérias e a minha resposta tornou-se cada vez mais verdadeira. Eu já era apaixonado pela Matemática.

Desde as séries iniciais sempre tive bastante facilidade com os números e a Matemática. Gostava de desafios e quebra-cabeças envolvendo esses assuntos: raciocínio lógico, Matemática, números, contas, etc.

Talvez eu tenha aprendido a gostar cada vez mais de Matemática devido aos bons professores que sempre tive, os quais me estimularam a estudar cada vez mais, ministravam boas aulas, com organização e exercícios.

Um ano bastante marcante foi o ano de 2000, quando cursava a 8ª série do Ensino Fundamental (atualmente 9º ano). Tive um professor que eu não gostava, pois ao final de cada capítulo ministrado ele cobrava que fizéssemos todos os exercícios e eu não tinha a menor paciência. Hoje, porém vejo quanto isso foi importante e o quanto é importante fazer exercícios para conseguirmos aprender Matemática. Outro fato que marcou esse ano foi que pela primeira vez eu participei e fui classificado na *Olimpíada Brasileira de Matemática*. O prêmio para os classificados foi o direito de assistir aulas como “estudante especial” no curso de Graduação de Matemática na UFPB. Eu e os outros classificados assistimos às aulas de Matemática Básica I, Cálculo I, Cálculo II, Cálculo Vetorial, etc. Isso tudo ocorreu nos anos de 2001 e 2002, quando eu já cursava o Ensino Médio.

Durante os anos de Ensino Médio comecei a ampliar meu interesse. Já mostrava alguma aptidão para outras matérias da área de exatas, como Física e Química. Comecei tirando dúvidas e ajudando meus amigos que tinham alguma dificuldade nessas matérias e como eu gostava de ensinar passei a ministrar aulas particulares, fazia algo que gostava e ainda conseguia algum dinheiro.

Alguns dos outros que assistiram a essas aulas na universidade comigo hoje já estão terminando seus doutorados. Eu, porém parei apenas nas quatro matérias que citei e mudei um pouco de direção.

Prestei vestibular no ano de 2003 para Direito, na UFPB, e Desenvolvimento de Software para Internet, antigo CEFET-PB, atualmente IFPB. Fui aprovado e ingressei nos dois cursos. Nunca deixei de ministrar aulas particulares e me via cada vez mais interessado pelo ensino. Abandonei o curso de Direito ao final do segundo ano de curso (2005) e prestei vestibular para Matemática – Licenciatura, na UFPB. Fui aprovado e iniciei minhas as aulas em 2006. Terminei minha graduação em Desenvolvimento de Software para Internet em 2007 enquanto prosseguia com as aulas de Matemática. Em 2008 ingressei no curso de Engenharia Elétrica (IFPB) e finalmente em 2009 comecei a cursar Física – Licenciatura (UFPB). No início de 2010 parei o curso de Engenharia Elétrica, pois já não conseguia administrar tantos cursos e o trabalho. No final do mesmo ano acabei a graduação em Matemática e, em 2011, a graduação em Física.

Durante todo esse tempo ministrei aulas particulares, aulas em colégios particulares no Ensino Fundamental, Médio e cursos preparatórios para o vestibular, aulas tanto de Matemática quanto de Física. Prestei alguns concursos públicos para professor de Matemática em algumas cidades da Paraíba, fui aprovado e comecei a ministrar aula para o Ensino Fundamental na rede pública. Finalmente, no ano de 2011 prestei concurso para professor substituto na UEPB, no qual fui aprovado e comecei minha carreira como professor no Ensino Superior.

Durante todo meu período como estudante, seja no colégio ou nos cursos superiores, percebia que a maioria dos estudantes tinha muita dificuldade em Matemática, muitas vezes em assuntos das séries mais básicas. Percebi também que as aulas no Ensino Médio voltavam-se para a aprovação no vestibular e com isso os assuntos eram ensinados de maneira a forçar a memorização e alguns truques para resolver determinados problemas. Não havia um aprofundamento nos conteúdos ou uma teoria para embasar o que se estudava. Já na universidade comprovei que eram poucos aqueles professores que buscavam ensinar preocupados com o aprendizado do estudante e não apenas em cumprir com o conteúdo programático. E com isso, os estudantes que já tinham dificuldades oriundas do Ensino Médio se frustravam cada vez mais com disciplinas de Matemática que não eram capazes de entender.

A partir dessas minhas experiências me interessei cada vez mais por solidificar minha formação para que eu pudesse, ao ministrar minhas aulas, saber exatamente o conteúdo ministrado, para poder aprofundar e discutir com os estudantes esse conteúdo. E, além disso, buscar compreender as dificuldades que existem por parte dos estudantes com assuntos básicos, que deveriam ter sido aprendidos nas séries iniciais, mas que não foram. Tento cada vez mais compreendê-los e tento ajudá-los sempre que possível na busca de sanar alguns problemas. Para isso, pesquiso novas metodologias e procuro fazer que minhas aulas sejam diferentes das usuais, me preocupando sempre com o aprendizado do estudante.

Agora, com essa especialização, pude aprender bastante sobre educação, ensino-aprendizagem, além de assuntos específicos de Matemática e, principalmente, estudei e aprofundei meus conhecimentos no tema objeto desse trabalho: Análise Combinatória.

Em paralelo, curso o mestrado profissional em Matemática, PROFMAT, na busca contínua do aprimoramento e aprofundamento de conteúdos. Sabendo que a vida de professor exige uma atualização eterna e constante.

3. Justificativa

Por que a decisão de privilegiar o estudo do Princípio Fundamental da Contagem, Arranjos, Permutações e Combinações nessa pesquisa?

Existem diversos motivos, dentre eles, em primeiro lugar, porque dos muitos problemas que existem na Análise Combinatória pode-se dizer que esses são os mais simples, de uso mais amplo, que permitem resolver uma grande quantidade de problemas e são os mais comuns. Em segundo lugar, devido a sua grande aplicabilidade em outras áreas de conhecimento como problemas de probabilidade finita, atualmente um campo de aplicação muito importante. Por causa dessa grande aplicabilidade esses conteúdos tornam-se bastante relevantes.

Esses aspectos, entretanto, podem ser analisados de uma maneira “pura” ou “prática” da “ciência pela ciência”, ou seja, o estudo pode proporcionar avanços na própria ciência ou, por outro lado, porque já tem uma aplicação direta.

Esta pesquisa torna-se ainda mais relevante se esses conteúdos forem observados do ponto de vista do estudante do Ensino Médio, seja como um tema necessário na avaliação para ingressar em uma universidade de nível superior ou, ainda, pela importância para o profissional que atua nas mais diversas áreas de atividades humanas.

Há muito tempo existe o interesse humano na contagem de subconjuntos de um conjunto finito, no agrupamento a partir de determinadas condições de elementos de um dado conjunto. Claro que em seu primórdio esse estudo era feito de maneira bastante empírica, listando-se os elementos e depois contando-os um a um. Isso ainda pode ser feito, porém em determinadas situações o processo fica inviável e aumenta-se a possibilidade do erro.

Euclides (300 a.C) já trazia em sua obra um método para se encontrar o valor de $(1+x)^2$. Além dos trabalhos com equações polinomiais do 2º grau, Báskhara (1114-1185?) trabalhou situações práticas em que se permutam possibilidades. Trabalhos na era cristã que buscavam compreender a cabala analisavam combinações e permutações entre os números inteiros. Na Idade Média os astrônomos estudaram bastante as conjunções de $2, 3, \dots, n$ planetas através da Análise Combinatória.

Durante o Renascimento, por causa das grandes descobertas e necessidades mercantis, os matemáticos europeus da época buscaram sistematizar o estudo da descrição de situações como: as possibilidades de n pessoas se sentarem em torno de uma mesa, as combinações possíveis de fechaduras, os agrupamentos possíveis de objetos e, principalmente, as chances nos jogos de azar.

Muitas são as motivações humanas para o estudo sistemático da Análise Combinatória, mas para Pascal e Fermat foram os jogos de azar o que mais despertou curiosidade e interesse.

Exemplos simples de questionamentos que podem ser resolvidos com a Análise Combinatória são do tipo: “Possuo 2 pares de sapatos, 3 calças e 5 blusas. De quantas maneiras diferentes posso me vestir utilizando exatamente 1 par de sapatos, 1 calça e 1 blusa?”, “Qual a quantidade máxima de números de telefone de uma cidade que podem ser formados com prefixo 3322, utilizando além do prefixo, quatro outros algarismos?”, ou ainda “Qual a quantidade jogos diferentes para a MEGA-SENA podemos formar?”. Esses exemplos são simples, porém são problemas reais com os quais podemos nos deparar no dia a dia. Diversos outros ramos das ciências também usam desse conhecimento, tais como: a Probabilidade, a Teoria de Grafos, Teoria dos Conjuntos, etc. A Tecnologia está repleta de outros exemplos, em especial um ramo da computação chamado Criptografia.

Portanto, tendo em vista a grande aplicabilidade do assunto, essa pesquisa destina-se a tentar identificar a grande dificuldade que a maioria dos estudantes do Ensino Médio (os futuros profissionais deste país) tem em utilizar o Princípio Fundamental da Contagem. A maior parte dos professores utiliza-se de várias fórmulas para diversas situações, como as fórmulas de permutação, combinação ou arranjo. Porém muitas vezes não tornam claro para o estudante o que essa ou aquela fórmula representa. O verdadeiro motivo para se utilizar uma ou outra, o que significa fazer uma permutação nos elementos de um conjunto, ou ainda qual a diferença entre “combinarmos” ou “arranjarmos” determinados elementos e se em alguma situação elas são equivalentes.

Dessa maneira, tenta-se com esse trabalho mostrar que todas as fórmulas de permutação, combinação e arranjo são derivadas do Princípio Fundamental da Contagem e com isso, ressaltar esse princípio como elemento principal para situações que envolvem contagem, tendo sua importância muito além daquela de decorar fórmulas e situações problemas padrões. O estímulo gradual do raciocínio em diferentes situações problemas, sem o compromisso de utilização de fórmulas, promove o pensar, de forma criativa e crítica, num ambiente lúdico.

Porém, se o ensino e a aprendizagem desses conceitos forem trabalhados sem a devida análise e exploração dos problemas, de uma forma puramente mecânica, na qual sua utilização se dá em situações padronizadas, se o estudante não for habituado e estimulado a pensar e refletir em cada situação pode-se correr o risco de que ele crie a impressão que a Análise Combinatória é apenas um jogo de fórmulas complicadas.

4. Fundamentação Teórica

4.1. Aspectos históricos da Análise Combinatória

O estudo e interesse humano pela Análise Combinatória são bastante antigos. Os primeiros problemas ligados a esse conhecimento dizem respeito ao desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$ e, talvez, mais antigo sejam os problemas sobre a formação dos *Quadrados Mágicos*.

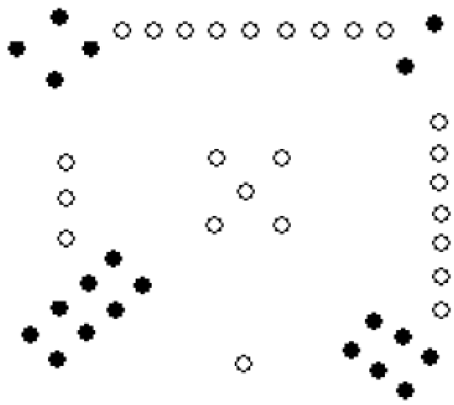
Chama-se de Quadrado Mágico de ordem n uma tabela quadrada com n linhas e n colunas com os números naturais de 1 até n^2 na qual a soma dos elementos de cada linha, coluna ou diagonal possui o mesmo valor. Na Fig. 1 temos um Quadrado Mágico de ordem 3.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fig. 1: Quadrado Mágico de ordem 3 (HIRSCH, [2011?])

Várias lendas e superstições estão associadas a esses quadrados. Acredita-se que o Quadrado Mágico de ordem 3 surgiu no centro da China, há muitos séculos à margem de um rio. Seria a revelação de uma geometria secreta do universo que está por trás de todas as coisas, pois teria sido encontrado inscrito no casco de uma tartaruga, animal que representa longevidade. O primeiro Quadrado Mágico conhecido recebeu o nome de Quadrado Mágico de *Lo Shu* e acredita-se que pode ter sido escrito em torno de 2000 a.C.

A Fig. 2 mostra a associação entre um Quadrado Mágico e o modelo de nove salas de um famoso palácio mítico da dinastia *Ming*, na China, que durou entre os séculos XIV e XVII.



=

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fig. 2: Quadrado Mágico da Dinastia Ming (VAZQUEZ, 2004)

Fazendo a substituição dos símbolos do modelo por números tem-se o Quadrado Mágico de ordem 3 que ficou conhecido como *Saturn*. Esse Quadrado Mágico causava, na época, grande fascinação às pessoas, pois devido as grandes superstições quase toda a geometria ou aritmética eram espantosas. Acredita-se que as ideias dos Quadrados Mágicos passaram dos chineses para os árabes, que os aperfeiçoaram, e construíram Quadrados Mágicos de ordem maior que 3. Na Fig. 3 são apresentados um Quadrado Mágico de ordem 3 e outro de ordem 4.

15	15	15	15	15
15	2	9	4	15
15	7	5	3	15
15	6	1	8	15
15	15	15	15	15

34	34	34	34	34	34
34	1	14	15	4	34
34	12	7	6	9	34
34	8	11	10	5	34
34	13	2	3	16	34
34	34	34	34	34	34

Fig. 3: Quadrados Mágicos de ordem 3 e 4 (NOÉ, [entre 2002 e 2012])

Em 1691, o matemático francês De La Loubère descreveu um método que permite a construção de Quadrados Mágicos de ordem ímpar que aprendeu em Sião, conhecido como “método de fronteira”. Outro matemático francês, Frénicle, pouco tempo depois, em 1693 divulgou os 880 Quadrados Mágicos de ordem 4.

Quanto maior a ordem do Quadrado Mágico, mais difícil a sua construção sem auxílio de computadores. Por isso, o fato de que um grupo de estudantes árabes conhecidos por Ikhwan-al-Safa haver encontrado Quadrados Mágicos de ordem 4, 5 e 6 e, ainda, afirmar que existem os de ordem 7, 8 e 9 foi bastante marcante.

É apresentado na Fig. 4 um Quadrado Mágico de ordem 7.

175	175	175	175	175	175	175	175	175
	22	47	16	41	10	35	4	175
	5	23	48	17	42	11	29	175
	30	6	24	49	18	36	12	175
	13	31	7	25	43	19	37	175
	38	14	32	1	26	44	20	175
	21	39	8	33	2	27	45	175
	46	15	40	9	34	3	28	175

Fig. 4: Quadrado Mágico de ordem 7 (NOÉ, [entre 2002 e 2012])

Até hoje, os Quadrados Mágicos inspiram bastante curiosidade tanto para aqueles que gostam de matemática quanto para aqueles que apenas admiram sua beleza e propriedades. Para os matemáticos, pode-se estudar diversos assuntos a partir de suas propriedades, como *Progressões Aritméticas*, PA, para determinar qual deve ser a soma dos elementos das linhas, colunas ou diagonais. Por exemplo, no Quadrado Mágico de ordem 7 existem $7^2 = 49$ elementos (de 1 até 49), cuja soma de todos pode ser obtida a partir da soma dos elementos de uma Progressão Aritimética. Sendo S a soma desejada, n a quantidade de elementos, $a_1 = 1$ e $a_n = 49$ o primeiro e último elementos, respectivamente, da Progressão Aritmética, podemos obter S a partir da fórmula $S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{49}{2}(1 + 49) = 1225$. Como essa soma deve ser distribuída nas 7 linhas, a soma de cada linha dever ser $1225/7 = 175$, que é o mesmo valor para as colunas ou diagonais.

Esse número que representa a soma das linhas, colunas ou diagonais é conhecido como *Número Mágico* de ordem n. Esse raciocínio é utilizado para se obter o Número Mágico de qualquer ordem. Diversas outras propriedades podem ser exploradas e trabalhadas em sala de aula em vários níveis de ensino.

Os Quadrados Mágicos serviram de inspiração para a construção de alguns jogos, dentre eles o *Soduku* e o *Cubo Mágico*.

Na Fig. 5 está ilustrada uma possibilidade para o jogo Soduku que em japonês significa *número único*. Esse jogo consiste de uma tabela 9x9, chamada *grelha*, dividida em 9 Quadrados Mágicos de ordem 3. O objetivo é distribuir os números de 1 a 9 em todas as linhas e colunas sem repeti-los em nenhuma linha, coluna ou Quadrado Mágico.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Fig. 5: Sodoku (PHONE, 2007)

O Cubo Mágico é um jogo nas três dimensões. Esse jogo consiste em um cubo cujas faces são divididas em 9 quadradinhos, e cada face possui uma cor distinta da outra. As peças podem girar embaralhando as cores de cada face. O objetivo do jogo é resolver o Cubo Mágico, ou seja, depois de misturadas as peças, conseguir montar novamente as faces com suas respectivas cores. Na Fig. 6 estão representados um Cubo Mágico “resolvido” e um Cubo Mágico embaralhado.

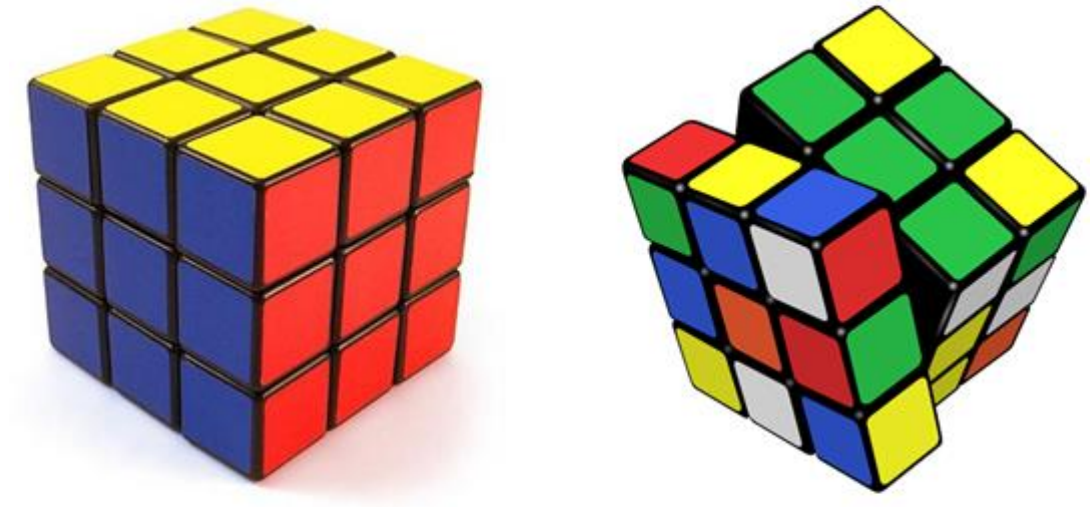


Fig. 6: (À esquerda) Cubo Mágico resolvido (TAVARES, 2008) e (À direita) Cubo Mágico embaralhado (BRANDÃO, 2010)

Báskhara, famoso matemático hindu, muito conhecido no Brasil pela *Fórmula de Báskhara* para resolução de equações polinomiais do 2º grau, já sabia calcular o número de arranjos, permutações e combinações de n objetos. Levi Bem Gerson (1288-1344), matemático e filósofo religioso francês além desse conhecimento sobre análise combinatória tentou demonstrar o 5º Postulado de Euclides.

Para os binômios, o desenvolvimento de $(1+x)^2$ já era conhecido e ele voltou a ser estudado por Euclides em seu livro *Os Elementos*, por volta de 300 a.C. Michel Stifel (1486?-1567) foi o responsável pelo método de calcular $(1+x)^n$ a partir da potência anterior: $(1+x)^{n-1}$, por volta do ano 1550, e introduzir pela primeira vez o termo coeficiente binomial. A teoria de desenvolvimento de binômios está intimamente relacionada com o desenvolvimento do famoso *Triângulo de Tartaglia-Pascal*.

Em torno de 1300, na China, Chu Shih-Chieh já tinha conhecimento desse triângulo e mesmo antes disso existem notícias de que os hindus e árabes também o conheciam.

Na Fig. 7 está ilustrado o triângulo até sua 9ª linha. Na seção 5.5 serão discutidos mais detalhes sobre o triângulo aritmético.

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1

Fig. 7: Triângulo de Tartaglia-Pascal (MATEMÁTICA, 2011)

O símbolo $\binom{n}{p}$ foi criado pelo matemático Leonard Euler. Sendo n e p números naturais tais que, em cada linha, $0 \leq p \leq n$ eles representam a combinação de n elementos escolhidos p a p e é equivalente a $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$. Esse triângulo possui diversas propriedades e sua construção obedece a uma regra que já era conhecida pelo matemático árabe Al-Karaji (final do século X). A lei de formação dos elementos é: $C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$, que pode ser enunciada da seguinte maneira: a soma de dois elementos consecutivos de uma linha resulta no elemento imediatamente abaixo do segundo elemento da soma.

O primeiro registro do Triângulo de Tartáglia-Pascal no Ocidente foi no frontispício de um livro de Petrus Apianus (1495-1552). O triângulo é conhecido por esse nome devido aos trabalhos dos matemáticos Nicolò Fontana Tartaglia (1499-1559) que relacionou seus elementos com as potências de $(x + y)$ e de Blaise Pascal (1623-1662) que escreveu um tratado em 1654 (*Traité du triangle arithmétique*) mostrando como utilizá-lo para achar os coeficientes do desenvolvimento de $(a + b)^n$. A partir da obra de Pascal tem-se o início do desenvolvimento da *Teoria Combinatória*.

Outros trabalhos de grande importância seguiram quase de imediato: *Dissertatio de arte combinatória*, de 1666, escrito por Leibniz; em 1669, *Ars magna sciendi sive combinatória* de Athanasius Kircher e também contribuições de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), Jaime Bernoulli (1713) e De Moivre (1718).

Jaime Bernoulli (1654-1705), utilizando a interpretação de Pascal, demonstrou em sua obra, publicada postumamente em 1713, que: $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$. E, na segunda parte de seu livro, estudou a teoria das combinações e permutações.

Sir Isaac Newton (1646-1727) tem grande importância no estudo do desenvolvimento dos binômios do tipo $(1+x)^n$, pois conseguiu uma forma de calculá-los diretamente sem antes recorrer ao cálculo de $(1+x)^{n-1}$. Ele mostrou que vale a relação $\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r}$, através da qual se pode determinar cada coeficiente usando o anterior. Mais que isso, ele ainda mostrou como desenvolver $(x+y)^r$, sendo r um número racional, obtendo neste caso um desenvolvimento em série infinita. E essa fórmula ficou conhecida por *Binômio de Newton*.

A partir dos estudos de Newton, Leibniz (1646-1716) descobriu e Johann Bernoulli (1667-1748) demonstrou uma generalização para o binômio, que ficou conhecida como *Teorema Multinomial*, que é a consideração das potências da forma $(x+y+\cdots+z)^n$.

Abraham De Moivre (1667-1754), Daniel Bernoulli (1700-1782) e Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856) tiveram êxito no estudo da *Sequência de Fibonacci*, desenvolvendo uma maneira de achar qualquer número da sequência sem a necessidade de calcular os anteriores. A partir daí surgiu uma nova técnica muito poderosa conhecida como *Funções Geradoras*, utilizada para o estudo de *Sucessões Recorrentes*.

Euler, ao receber uma carta do matemático Phillipe Naudé, na qual, dentre outras coisas, questionava sobre a quantidade de maneiras de se obter um inteiro positivo como a soma de outros inteiros positivos, começou a se aprofundar no estudo das *Funções Geradoras*, contribuindo para o grande desenvolvimento desta técnica. Euler publicou em seu clássico livro *Introductio in Analysin Infinitorum* o problema por ele batizado de *Partitio Numerorum* ou *Teoria das Partições*. Por exemplo, o número 3, o qual pode ser escrito como soma de inteiros das seguintes maneiras:

- $1+1+1 = 3$
- $1+2=3$
- 3

Temos nesse caso, que $p(3)=3$ e podemos verificar facilmente que $p(4)=5$ e $p(5)=7$, sendo $p(n)$ a quantidade de partições do número n. Esse problema de determinar o número de partições de um número inteiro perdurou por muito tempo e uma solução para ele só apareceu no século XX, a partir dos trabalhos G. H. Hardy, S. Ramanujan e H. Rademacher.

Euler ainda contribuiu de diversas maneiras para a Análise Combinatória. Publicou várias obras sobre probabilidade que continham importantes resultados de Combinatória e ainda o início do desenvolvimento da *Teoria dos Grafos*, graças ao correto enunciado e solução do famoso problema das *Sete Pontes de Königsberg*.

A Teoria dos Grafos, desenvolvida por Euler, G. Kirchhoff e A. Cayley, e Análises de Algoritmos modelam muitos problemas matemáticos como problemas de pesquisa operacional, armazenamento de informações em bancos de dados, além dos problemas de matemática "pura", como o famoso *Problema das 4 cores*. Portanto problemas de enumeração estão em destaque na matemática devido a sua importância e com isso o estudo da Análise Combinatória teve um crescimento explosivo nas últimas décadas.

Outra grande contribuição para a Análise Combinatória é devida ao alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) que formulou o famoso *Princípio de Dirichlet* conhecido ainda como *Princípio das Gavetas* ou *Princípio da Casa de Pombos*. Esse princípio pode ser enunciado da seguinte maneira: se n objetos forem colocados em, no máximo, $n - 1$ gavetas então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.

Mais recentemente temos o desenvolvimento das teorias do matemático húngaro-americano George Pólya (1887-1985) e do lógico inglês F. P. Ramsey (1903-1930). Pólya desenvolveu sua teoria em 1937, introduzindo uma nova e importante técnica de enumeração, com diversas aplicações, tratando de maneira unificada desde a enumeração da quantidade de isômeros de uma substância, até grafos e árvores, problemas que só eram resolvidos por métodos *ad-hoc*.

Pólya classifica sua teoria como uma maneira para enumerar configurações não-equivalentes relativamente a um grupo de permutações dado. Ela pode ser aplicada para determinar o número de tetraedros "diferentes" com faces pintadas com duas cores. Suponha as cores preto e branco. Podem existir tetraedros com uma face branca e as 3 pretas ou com uma face preta e outras 3 brancas ou todo branco ou todo preto, etc. Serão considerados "diferentes" aqueles tetraedros que não puderem ser obtidos de outros a partir de rotações.

A teoria de Ramsey é voltada para a existência de algumas configurações. Um dos exemplos do chamado *Teorema de Ramsey* afirma que se dado um conjunto de, no mínimo, 6 pontos no plano, sendo que 3 quaisquer deles não sejam colineares, unindo-se todos os pontos, 2 a 2, com segmentos de reta utilizando apenas duas cores distintas, por exemplo preto e branco, formar-se-á necessariamente um triângulo com todos os lados da mesma cor.

4.2. Revisão de Literatura

A prática docente diária mostra que é comum encontrar estudantes que não têm nenhum prazer pela matemática ou têm uma imagem negativa dela. Esses estudantes muitas vezes não percebem a conexão que existe entre a matemática e a realidade. Tendo em vista esse problema, têm-se, desde o início do século XXI, intensificado as discussões entre professores de matemática a fim de buscar uma forma alternativa de ensino para alcançar esses estudantes que não gostam ou não compreendem a Matemática.

A maioria desses professores busca produzir um ensino diferenciado daquele que os nossos pais e avós receberam, que foi baseado em processos puramente mecânicos, de forma tradicionalista e com rígidas demonstrações de teoremas. A grande dificuldade é que esses mesmos professores também receberam uma formação desse tipo e, assim, tem que se esforçar bastante para conseguir modificar o método para propor aos seus estudantes uma nova abordagem da Matemática, que os permita, a partir de suas próprias ideias, analisar, discutir e se apropriarem dos conceitos.

O estudo que será feito nessa pesquisa pretende identificar as dificuldades de grande parte dos estudantes em relação a um tópico específico do conteúdo de Matemática do Ensino Médio: Análise Combinatória.

Através de suas pesquisas, Schliemann (2001, apud PINHEIRO, 2007) pôde observar aulas sobre Análise Combinatória e verificar que o ensino está quase sempre limitado à prática de exercícios que usem as fórmulas de arranjo, permutação ou combinação. Dessa maneira isso não proporciona aos estudantes uma reflexão sobre essas fórmulas e como elas poderiam ser facilmente obtidas a partir da compreensão do problema e do uso do PFC.

Assim como afirmam Morgado e seus colaboradores, arranjo, combinação e permutação não representam o universo de situações encontradas no cerne da Análise Combinatória, mas possibilitam a resolução de problemas de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos (MORGADO et al., 2006, p. 1). Para esses autores, a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas.

Este trabalho concentra-se especialmente na análise do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), que é enunciado a seguir:

“Se uma ação é constituída de duas etapas sucessivas, sendo que a primeira etapa pode ser realizada de n maneiras distintas. Para cada uma dessas possibilidades, a segunda etapa pode ser realizada de m maneiras distintas. Então, o número de possibilidades de se efetuar a ação completa é dado por $n\,x\,m$. Esse princípio pode ser generalizado para ações constituídas de mais de duas etapas sucessivas” (IEZZI, 2004, apud BARBOSA, 2005).

Enunciado desta maneira parece bastante simples, porém na prática, na hora de compreender e modelar situações problemas nas quais se necessita utilizar esse princípio, a maioria dos estudantes comete algum tipo de erro.

Trabalhos desenvolvidos no Brasil (STURM, 1999; ESTEVES, 2001; ROCHA, 2002; COSTA, 2003; PINHEIRO E ROZA, 2006 apud PINHEIRO 2007), apontam as dificuldades do ensino de Análise Combinatória nas escolas. Entre as dificuldades, especialmente as de aprendizagem, podemos destacar a falta de compreensão dos textos estruturais dos problemas (ESTEVES, 2001; ROCHA, 2002; PINHEIRO E ROZA, 2006 apud PINHEIRO, 2007) e a diferença entre problemas de arranjo e combinação (STURM, 1999; ESTEVES, 2001; COSTA, 2003; PINHEIRO E ROZA, 2006 apud PINHEIRO). Por outro lado, existem diversos trabalhos que sinalizam propostas de Ensino de Análise Combinatória que venha minimizar ou superar algumas das dificuldades apontadas anteriormente ou que mostram as dificuldades encontradas pelos professores ao ministrarem aulas de Análise Combinatória. (STURM, 1999; ESTEVES, 2001 e COSTA, 2003, PINHEIRO E ROZA, 2006 apud PINHEIRO).

Pode-se introduzir o tema de Análise Combinatória de várias maneiras diferentes e este assunto pode ser bastante contextualizado. Em muitas situações cotidianas estão presentes problemas de contagem, porém uma forma didática e bastante interessante encontra-se em uma famosa poesia inglesa do século XVIII, no ano de 1730:

> A caminho de St. Ives,
> Encontrei um homem com sete esposas;
> Cada esposa tinha sete sacos,
> Cada saco tinha sete gatos,
> Cada gato tinha sete gatinhos,
> Gatinhos, gatos, sacos e esposas,
> Quantos iam a caminho de St. Ives? (TIC na Educação, 2011)

Essa pequena poesia é, muitas vezes, interpretada como uma brincadeira ou uma adivinhação. Pois se o narrador está a caminho de St. Ives e os outros estão em sentido contrário e, ainda, se não se considera o narrador a resposta é nenhum, porém se se considera o narrador a resposta é um e ainda pode-se considerar o caso de todos estarem a caminho de St. Ives e tem-se como resposta o somatório de potências de sete.

Interessante é a relação que se pode fazer entre essa pequena poesia e os versos encontrados no famoso livro de Leonardo de Pisa, que ficou conhecido como Fibonacci. Ele escreveu em 1202 um livro que ficou conhecido como *Líber Abaci* (ou *Líber Abbaci*), que significa *Livro do Cálculo* ou *Livro do Ábaco*. Através dessa obra, foi introduzida na Europa, dentre outros assuntos, a numeração hindu-arábica, a notação posicional e o zero. Trazendo ainda a solução de um famoso problema sobre o crescimento de uma população hipotética de coelhos com determinadas restrições que posteriormente ficou conhecida como sequência de Fibonacci. Os versos que podem ser analisados sobre a visão da Combinatória são:

> Há sete velhas mulheres na estrada para Roma;
> Cada mulher tem sete mulas;
> Cada mula carrega sete sacos;
> Cada saco contém sete pães;
> E com cada pão estavam sete facas;
> E cada faca está colocada em sete bainhas;
> Quantos há ao todo na estrada para Roma? (TIC na Educação, 2011)

Em ambos pode-se perceber a repetição do número *sete*. Não se sabe exatamente o porquê, uma das hipóteses é devido ao valor místico que esse número possui, até hoje. Outra especulação é que para as civilizações mais antigas as regras básicas de contagem bem como suas aplicações eram ensinadas e aprendidas a partir da repetição exaustiva até a sua memorização. Essa ideia apoia-se nos versos encontrados no problema 79 do famoso *Papiro Egípcio de Rhind*, datado de cerca de 1650 a.C. que também é muito semelhante aos dois anteriores:

> Um homem tinha sete casas,
> Cada casa tinha sete gatos,
> Para cada gato havia sete ratos,
> Para cada rato havia sete espigas de trigo,
> E cada espiga tinha sete medidas de grão.
> Quantas coisas ele possuía,
> Casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão? (TIC na Educação, 2011)

É, normalmente, durante o estudo da Análise Combinatória que os estudantes utilizam pela primeira vez o símbolo de *fatorial*. Esse símbolo, porém, foi adotado de várias maneiras durante o desenvolvimento da Análise Combinatória, tendo, cada matemático, utilizado de uma maneira diferente. Para Gauss (1777-1855) a representação do produto dos n primeiros números naturais era feita através do símbolo $\pi(n)$. A. M. Legendre (Paris, 1811) utilizou o símbolo $\Gamma(n+1)$, a notação $|\underline{n}$ foi usada por muitos autores e atualmente a notação é $n!$, que foi introduzida por Cristian Kramp (1808). Arbogast (1800) foi o primeiro a utilizar o termo fatorial.

O ensino de Análise Combinatória se desenvolveu bastante e hoje ela é a base de várias teorias da Análise Matemática: *Teoria das Probabilidades*, *Teoria dos Números*, *Teoria dos Grupos*, *Topologia*, *Determinantes*, etc. E ainda assim, não existe na literatura uma definição completamente satisfatória para essa ciência.

Acredita-se que a maior dificuldade dos estudantes para identificarem uma situação como combinação, arranjo ou permutação é o fato de não terem sido devidamente treinados com o PFC para aplicá-lo em qualquer caso obedecendo às restrições do problema, assim, é como se os estudantes fossem preparados apenas para executar um algoritmo, um procedimento padrão, envolvendo alguns números e algumas fórmulas.

Será proposta uma nova maneira de se abordar o tema, sem muita ênfase na memorização de fórmulas, mas na tentativa de aumentar a compreensão sobre como manipular o PFC em diversas situações problemas diferentes.

5. Sobre Análise Combinatória

Neste capítulo será feita uma abordagem do conteúdo de Análise Combinatória a partir de como ele é tratado em alguns livros didáticos do Ensino Médio.

A divisão desse assunto não é unânime, mas esse capítulo, normalmente, aborda os seguintes temas:

1. Princípio Fundamental da Contagem;
2. Fatorial;
3. Números Binomiais;
4. Binômio de Newton;
5. Triângulo de Tartaglia-Pascal;
6. Arranjos simples;
7. Arranjos com repetição;
8. Permutações simples;
9. Permutações circulares;
10. Permutações com elementos repetidos;
11. Combinações simples.

Nem todos esses tópicos aparecem com a mesma definição nos diversos livros didáticos pesquisados e nem todos aparecem no capítulo sobre Análise Combinatória ou sequer são apresentados nessa sequência. Alguns autores preferem fazer o estudo sobre *Números Binomiais*, *Binômio de Newton*, *Triângulo de Tartaglia-Pascal* em um capítulo a parte.

Neste capítulo, será dada uma breve apresentação sobre cada um desses tópicos e no capítulo 7 será descrita a análise específica de cada livro, assim como comentários sobre alguns dos exercícios e as análises das listas que foram aplicadas. O capítulo 7 descreverá também os resultados obtidos com a pesquisa.

5.1. Princípio Fundamental da Contagem

O *Princípio Multiplicativo*, também conhecido como *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) junto com o *Princípio Aditivo* formam os dois princípios básicos da Análise Combinatória. Apesar disso, o Princípio Aditivo não é bastante discutido nos livros didáticos, talvez por parecer muito intuitivo ou natural. Podemos enuncia-lo como segue: *"se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos"* (MORGADO et al., 2006, p. 18). Denotaremos por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto X.

Os exemplos a seguir servem para ilustrar esse princípio:

1. Possuo apenas 3 camisa brancas e 2 azuis. Vou sair para uma festa e preciso escolher uma camisa. De quantas maneiras posso me arrumar?

   Seja A o conjunto das camisas brancas e B o conjunto das camisas azuis. A possui 3 elementos e B possui 2. Logo posso me arrumar escolhendo uma camisa de $n(A \cup B) = 3 + 2 = 5$ maneiras distintas.

2. Uma família é composta por 1 casal e 4 filhos. De quantas maneiras um membro da família pode ser escolhido?

   Seja A o conjunto formado pelo casal e B o conjunto formado pelos filhos. A possui 2 elementos e B possui 4. Logo se pode escolher um membro da família de $n(A \cup B) = 2 + 4 = 6$ maneiras distintas.

O PFC é apresentado em todos os livros didáticos analisados, que serão discutidos no capítulo 7 e ele trata sobre as possibilidades de escolha quando a tomada de decisão envolve mais de uma etapa: "*se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2* é xy" (MORGADO et al., 2006, p. 18). Esse princípio estende-se para uma quantidade qualquer de decisões.

Modificando os exemplos anteriores pode-se ilustrar esse princípio:

1. Possuo apenas 3 camisas e 2 calças. Vou sair para uma festa. De quantas maneiras posso me vestir escolhendo uma camisa e uma calça.

A primeira decisão pode ser, por exemplo, escolher a camisa. Isso pode ser feito de 3 maneiras. Escolhida a camisa, a segunda decisão será escolher a calça, o que pode ser feito de 2 maneiras. Portanto posso me vestir de $3 \times 2 = 6$ maneiras distintas.

2. Uma família é composta por 1 casal e 4 filhos. De quantas maneiras podemos formar uma dupla composta por um dos pais e um dos filhos? A primeira decisão pode ser, por exemplo, a escolha de um dos pais, o que pode ser feito de duas maneiras (o pai ou a mãe). Tomada essa decisão, resta-nos escolher um dos filhos, o que pode ser feito de 4 maneiras. Portanto podemos escolher uma dupla com um dos pais e um dos filhos de $2 \times 4 = 8$ maneiras distintas.

5.2. Fatorial

É devido ao matemático francês Cristian Kramp o uso da notação $n!$ para representar o produto dos n primeiros números naturais. O termo *fatorial de* n foi dado pelo, também matemático francês, Arbogast. Fatorial de um número natural n é definido como:

- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n,\ n > 1$
- $0! = 1! = 1$

O fatorial pode ser compreendido como uma função dos naturais nos naturais, que não é injetiva (pois $0! = 1! = 1$), nem sobrejetiva (pois não existe nenhum número natural n tal que $n! = 7$, por exemplo) mas é uma função que cresce rapidamente a partir do 1, isso pode ser verificado a partir de alguns exemplos:

- $2! = 2$
- $3! = 6$
- $4! = 24$
- $5! = 120$
- $6! = 720$
- $7! = 5040$

5.3. Números Binomiais

Dados n e p números naturais, tais que $n \geq p$, chamamos de *número binomial de classe* p e usamos a notação $\binom{n}{p} = C_n^p = C_{n,p}$ para representar o número $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$.

O número n é chamado de *numerador* e o número p de *denominador* do *número binomial*.

Os números binomiais apresentam diversas relações e propriedades. Dentre as quais, destaca-se:

- Relação de Stifel: $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$
- Números binomiais complementares: dois números binomiais de mesmo numerador são complementares quando a soma dos denominadores é igual ao numerador. Números binomiais complementares são iguais.

  Ex.: $\binom{5}{4} = \frac{5!}{(5-4)!4!} = 5$ e $\binom{5}{1} = \frac{5!}{(5-1)!1!} = 5$, são complementares.

5.4. Binômio de Newton

O Binômio de Newton recebeu esse nome em homenagem ao grande cientista que estudou o desenvolvimento de binômios da forma $(x + a)^n$. Antes dele já era conhecido o caso $n = 2$ e já se sabia calcular qualquer potência n a partir da potência anterior $(n - 1)$. Ele desenvolveu o cálculo desses binômios sem a necessidade de recorrer à potência anterior e mostrou a seguinte expressão: $(x + a)^n = \binom{n}{0}x^n a^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 a^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} a^p$.

5.5. Triângulo de Tartaglia-Pascal

O *Triângulo Aritmético*, *Triângulo de Pascal* ou ainda, *Triângulo de Targalia-Pascal* é uma disposição de números que obedece a uma rigorosa formação, associada aos números binomiais e que possui inúmeras propriedades. Dentre essas propriedades pode-se destacar que a formação desses números segue a Relação de Stifel (Fig. 8) e, nesse triângulo aparece, ainda, a famosa sequência de Fibonacci (Fig. 9). O Triângulo de Tartaglia-Pascal é apresentado, normalmente, como triângulo retângulo ou ainda, como triângulo equilátero, sendo o retângulo mais comum nos livros:

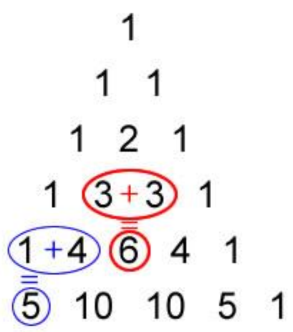


Fig. 8: Triângulo de Tartaglia-Pascal e a relação de Stifel (MAKIYAMA, 2009)

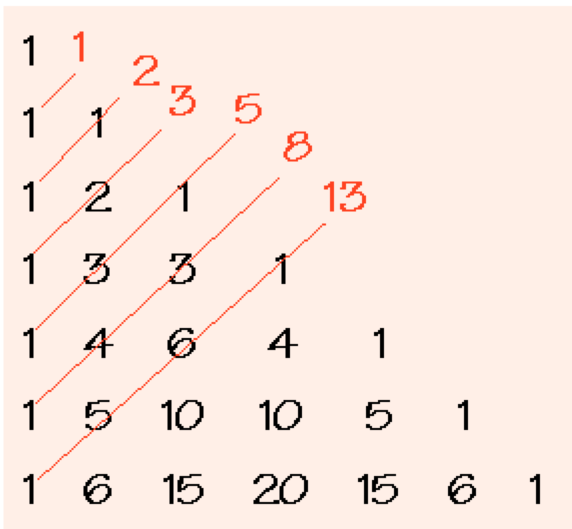


Fig. 9: Triângulo de Tartaglia-Pascal e a sequência de Fibonacci (VARANDAS e SARAIVA, [2002?])

Os números do triângulo estão relacionados com os números binomiais conforme ilustrado na Fig. 10, a seguir:

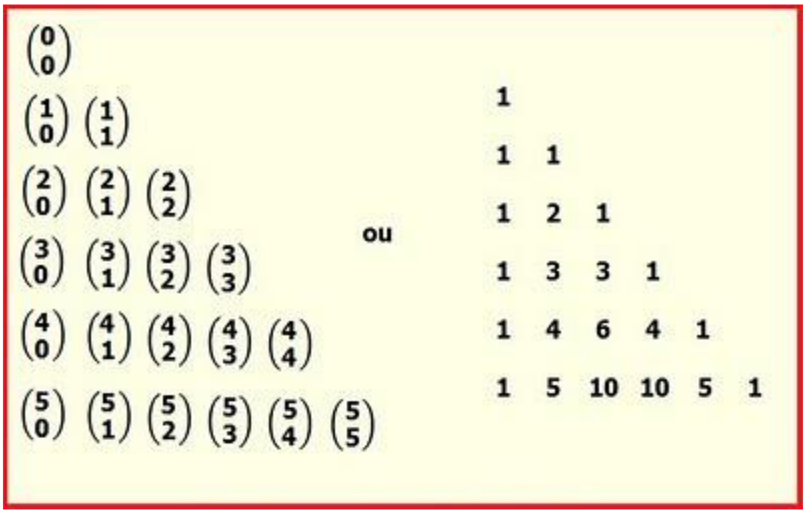


Fig. 10: Triângulo de Tartaglia-Pascal e Números Binomiais (SÉRGIO, 2009)

5.6. Arranjos simples

Dada uma coleção A com n objetos, deseja-se saber quantos são os agrupamentos distintos de $1, 2, 3, \ldots, n$ objetos que se pode formar com os objetos dessa coleção. Se agrupamentos distintos são caracterizados pela mudança na ordem ou natureza dos objetos então se tem uma situação de *arranjo*, muitas vezes enunciada como: “Arranjos são caracterizados quando a ordem dos elementos é importante”. Se todos os objetos do agrupamento escolhido forem, necessariamente, distintos, então, serão *arranjos simples*.

Se deseja-se escolher p dos n objetos da coleção será dito: “*arranjos simples de n objetos (elementos) tomados p a p”*. Ou simplesmente: “*arranjo de n, p a p.*”

O número de arranjos simples de n objetos tomados p a p é denotado por $A_{n,p} = A_n^p$ e pode ser calculado diretamente, sem a necessidade de listar todos os agrupamentos mediante a fórmula: $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$.

A seguir uma situação de arranjo simples a partir do seguinte exemplo:

- Dada a coleção A com as seguintes palavras: $A = \{matemática, física, química\}$ queremos saber quantos são os arranjos simples que podemos formar com apenas duas dessas palavras. Podemos listar todas as opções:
  - $A_1 = \{matemática, física\}$
  - $A_2 = \{física, matemática\}$
  - $A_3 = \{matemática, química\}$
  - $A_4 = \{química, matemática\}$
  - $A_5 = \{física, química\}$
  - $A_6 = \{química, física\}$

  Utilizando a fórmula, temos: $A_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6$ arranjos simples.

OBS.: as coleções de objetos utilizadas nas situações de arranjo, bem como os agrupamentos escolhidos, nem sempre são conjuntos, mas por simplificação será utilizada a mesma notação, representando-se seus elementos entre *chaves* “{ }”. Sem essa observação os agrupamentos A_1 e A_2, por exemplo, seriam conjuntos e por tanto, seriam iguais. Porém pela definição, essas coleções são distintas, pois os seus “elementos” estão em outra ordem.

5.7. Arranjos com repetição

Toma-se, novamente, uma coleção A com n objetos. No caso de ser possível a formação de agrupamentos escolhendo-se repetidas vezes algum dos objetos da coleção, então esses agrupamentos serão chamados de *arranjos com repetição*. Será utilizada a notação $(AR)_{n,p} = (AR)_n^p$. O número de arranjos com repetição é dado por: $(AR)_{n,p} = (AR)_n^p = n^p$.

O exemplo anterior será modificado para uma situação de arranjo com repetição:

- Dada a coleção A com as seguintes palavras: $A = \{matemática, física, química\}$ queremos saber quantos são os arranjos com repetição que podemos formar com apenas duas dessas palavras. Podemos listar todas as opções:
    - $A_1 = \{matemática, física\}$
    - $A_2 = \{física, matemática\}$
    - $A_3 = \{matemática, química\}$
    - $A_4 = \{química, matemática\}$
    - $A_5 = \{física,\ \ química\}$
    - $A_6 = \{química, física\}$
    - $A_7 = \{matemática, matemática\}$
    - $A_8 = \{física, física\}$
    - $A_9 = \{química, química\}$

  Ou ainda $(AR)_{3,2} = (AR)_3^2 = 3^2 = 9$.

5.8. Permutações simples

A noção de *Permutação* está muito associada à ideia de troca de ordem, de mexer, misturar. Portanto quando se tratar de permutações considerar-se-ão sempre agrupamentos com a mesma quantidade de objetos e desses serão distintos dois quaisquer que tenham os elementos em posições diferentes. Ou seja, permutar n objetos significa formar agrupamentos com os n objetos e trocar suas posições.

Se dentre os n objetos da coleção não houver objetos repetidos, então a permutação será chamada de *permutação simples*. O número de permutações simples de n elementos será representado por P_n e é calculada pela fórmula: $P_n = n!$

Observa-se que permutações simples são casos particulares de arranjos simples quando são escolhidos todos os objetos, ou seja, $A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = P_n$.

A partir do exemplo anterior, modifica-se apenas a pergunta para ilustrar uma situação de permutação:

- Dada a coleção A com as seguintes palavras: $A = \{matemática, física, química\}$ deseja-se saber quantos são as permutações simples que se pode formar com essas 3 palavras. Listando todas as opções tem-se:
  - $A_1 = \{matemática, física, química\}$
  - $A_2 = \{matemática, química, física\}$
  - $A_3 = \{física, matemática, química\}$
  - $A_4 = \{física, química, matemática\}$
  - $A_5 = \{química, matemática, física\}$
  - $A_6 = \{química, física, matemática\}$

  Calculando diretamente, sem listar os agrupamentos: $P_3 = 3! = 6$.

Outro exemplo bastante frequente nos livros didáticos é a situação de dispor n pessoas em uma fila, de quantas maneiras isso pode ser feito?

5.9. Permutações circulares

Nos casos em que os objetos aparecem ou estão dispostos de maneira circular nas quais duas posições serão consideradas iguais se for possível obter uma nova disposição, a partir de rotações da outra, então esta será uma situação de *permutações circulares*. Na Fig. 11 está representada uma dessas situações: dispor 4 objetos ao redor de um círculo.

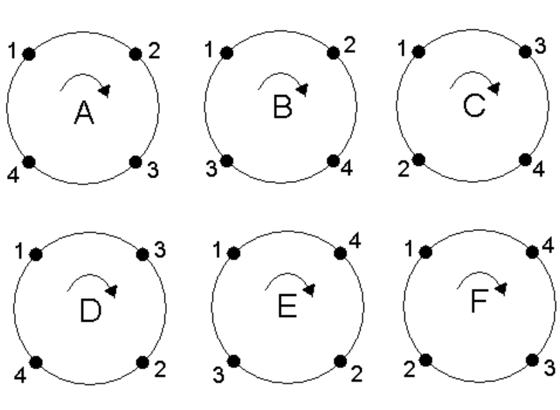


Fig. 11: Permutação circular de 4 objetos (MARQUES, 2008)

Com o auxílio da figura pode-se perceber que existem exatamente 6 maneiras de dispor de forma circular esses 4 objetos. Podemos raciocinar da seguinte maneira: fixamos uma qualquer posição para o primeiro objeto, depois ainda é necessário escolher a posição dos outros 3 objetos, o que pode ser feito de $3! = 6$ maneiras, de acordo com o PFC. Qualquer outra configuração será considerada igual a uma das 6 apresentadas, pois será obtida por rotação de alguma dessas.

Generalizando: dados n objetos para serem dispostos de maneira circular, fixa-se a posição do primeiro e depois se escolhe a posição dos outros $(n-1)$ objetos, então o número de permutações circulares é dado por $(PC)_n = (n-1)!$

No exemplo anterior, tem-se $(PC)_4 = (4-1)! = 3! = 6$, conforme a figura.

5.10. Permutações com elementos repetidos

Outra situação em que se deve utilizar a noção de permutação ocorre quando existem objetos repetidos na coleção. Nesse caso a situação será chamada de *Permutação com elementos repetidos*. Situações que descrevem bem e são bastante comuns nos livros são casos de *anagramas*. Um anagrama é a formação de uma nova palavra, a partir de uma palavra dada, apenas modificando a posição de suas letras, sem considerar se a nova palavra possui ou não significado.

Observe o seguinte exemplo:

- Quantos anagramas podemos formar com a palavra JESUS?

  Para formar novos anagramas basta trocar as posições das letras, portanto a coleção de objetos é formada pelas 5 letras da palavra. Pode-se permuta-las de $P_5 = 5! = 120$ maneiras. Porém deve-se observar que, para cada anagrama, pode-se trocar os S (que são as letras repetidas) entre si e o anagrama formado será o mesmo. Serão utilizadas cores distintas para cada S, a fim de se obter uma melhor compreensão. Os anagramas SUSEJ e SUSEJ são iguais. Como são exatamente duas letras S, elas podem permutar de posição $2! = 2$ vezes gerando o mesmo anagrama. Portanto o número de anagramas distintos é dado por: $P_5^2 = \frac{5!}{2!} = 60$.

Pode-se generalizar esse raciocínio e obter a seguinte fórmula para o cálculo da quantidade de Permutações com elementos repetidos: $P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\dots,\theta} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\dots\theta!}$, sendo os índices superiores a quantidade de vezes em que cada tipo de objeto aparece, e vale a relação: $n = \alpha + \beta + \gamma + \cdots + \theta$.

5.11. Combinações simples

Situações de combinação estão ligadas à formação de conjuntos com elementos de uma coleção qualquer de objetos. Essas situações diferenciam-se dos arranjos, pois se tratando de conjuntos, a ordem em que os elementos aparecem não altera o agrupamento, portanto, para combinações, serão considerados distintos agrupamentos cujos elementos diferem entre si por sua natureza, apenas.

Será utilizada a notação $C_{n,p} = C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ para representar as *combinações simples de* n *objetos escolhidos* p *a* p. A partir disso percebe-se a relação entre *combinações simples* e *números binomiais*: são calculados da mesma maneira.

Será analisado agora, o problema enunciado para arranjos, modificado para o cálculo de combinações simples:

- Dada a coleção A com as seguintes palavras: $A = \{matemática, física, química\}$ queremos saber quantos são as combinações simples que podemos formar com apenas duas dessas palavras. Podemos listar todas as opções:
  - $A_1 = \{matemática, física\}$
  - $A_2 = \{matemática, química\}$
  - $A_3 = \{física, química\}$

  Calculando diretamente tem-se: $C_{3,2} = C_3^2 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3$

6. Procedimentos metodológicos

Para alcançar os objetivos da pesquisa foi analisado o capítulo sobre Análise Combinatória de cinco livros didáticos bastante utilizados no estado da Paraíba. A análise foi feita a partir de como os livros expõem o conteúdo. Além disso, a pesquisa envolveu a resolução de todos os problemas e exercícios propostos desses livros para que fosse possível fazer críticas na tentativa de relacionar o aprendizado dos estudantes com a forma de ensino encontrada nos livros.

Também foi aplicada uma lista com dez exercícios/problemas (Apêndice A) a estudantes do Ensino Médio na tentativa de compreender onde está a maior dificuldade nesse assunto. Os exercícios foram retirados do livro *A Matemática do Ensino Médio,* volume 2, de Elon Lages Lima, um dos livros escolhidos para a análise. A escolha dos exercícios desse livro deu-se, pois, como será mostrado no próximo capítulo, os exercícios desse livro foram considerados os mais complexos, menos mecânicos e que envolviam mais raciocínio. Apesar disso, também são encontrados no livro exercícios mais simples que também foram utilizados na lista.

Para responder à lista os estudantes deveriam descrever todos os passos utilizados na resolução de cada questão, justificando e argumentando cada etapa, para que seu raciocínio pudesse ser avaliado e não apenas escrever a solução encontrada. Após cada questão os estudantes deveriam classificá-las em *Fácil*, *Médio* ou *Difícil* e também marcar o tempo gasto.

A partir das respostas os dados foram analisados e foi feita uma investigação a fim de compreender se existe algum padrão por parte dos estudantes para a resolução dos exercícios/problemas, quais são as táticas mais utilizadas, quais são as maiores dificuldades, enfim, tentar identificar como os estudantes se comportam diante de situações que envolvem a análise combinatória.

A partir dessa análise serão estudadas maneiras de se abordar os problemas a partir do uso de um raciocínio mais intuitivo, sem a necessidade de recorrer, obrigatoriamente, ao uso de fórmulas, baseando-se na criatividade e no raciocínio dos estudantes.

7. Análises e Resultados

Este capítulo está dividido em duas partes: análise dos livros didáticos escolhidos e análise das respostas da lista de exercícios/problemas.

Na primeira parte foi feita uma análise do capítulo sobre Análise Combinatória de cinco livros didáticos do Ensino Médio bastante utilizados atualmente.

Os livros escolhidos foram:

1. FILHO, B. B.; SILVA, C. X. da.; Matemática aula por aula: volume único, ensino médio. Editora: FTD, São Paulo, 2000
2. BIANCHINI, E., PACCOLA, H.; Matemática, volume 2: versão beta. 2 ed. rev. e ampl. Editora: Moderna, São Paulo, 1995
3. DANTE, L. R.; Matemática: contexto & aplicação, volume 2. 3 ed. Editora: Ática, São Paulo, 2004
4. HAZZAN, S.; Fundamentos de matemática elementar: Combinatória e Probabilidade, volume 5. Editora: Atual, São Paulo, 1977
5. LIMA, E. L.; A Matemática do Ensino Médio, volume 2. 6 ed. Editora: SBM, Rio de Janeiro, 2006

Os livros foram analisados na ordem apresentada, porém essa escolha não obedeceu a nenhum critério, mas ao final, pode-se perceber que a escolha adotada foi útil para o desenvolvimento da pesquisa, no sentido de que o nível de dificuldade dos exercícios de um livro em relação ao anterior foi crescente.

A análise iniciou-se pelo livro 1: *Matemática aula por aula*

Os capítulos não são numerados e o capítulo desejado está aproximadamente na metade do livro (páginas 366-394) e chama-se *Análise Combinatória / Binômio de Newton*.

O livro divide o conteúdo em nove tópicos e ao final traz uma ficha resumo com os principais pontos de cada tópico.

- Tópico 1: Princípio Fundamental da Contagem: o livro inicia com uma breve definição sobre Análise Combinatória e apresenta um exemplo sobre como dispor quatro pessoas em um sofá. Resolve o exemplo fazendo uso de diagrama em árvore. Segue com o enunciado do PFC e outro exemplo. Iniciam-se os exercícios: um exercício resolvido e após esse, uma lista com dez exercícios propostos, de níveis fácil e médio.

- Tópico 2: Fatorial: definição, alguns exemplos, apenas dois exercícios resolvidos e nove exercícios propostos.

  Existem exercícios de todos os níveis, alguns bastante trabalhosos, mas muito técnicos, apenas resolver contas.
- Tópico 3. Permutação simples: definição, fórmula, um exemplo, um exercício resolvido e oito exercícios propostos.

  Os problemas são bastante repetitivos, sendo sete de anagramas e apenas um de fila, que já havia sido apresentado no início do capítulo.
- Tópico 4: Arranjo simples: definição, um exemplo sobre composição de comissão e a dedução da fórmula, apresenta o caso particular quando $n = p \Rightarrow A_n^n = P_n$. Dois exercícios resolvidos e uma lista com dez exercícios propostos de nível médio.
- Tópico 5: Combinação simples: definição, um exemplo a partir do exemplo da comissão com arranjos e apresentação da fórmula deduzida por arranjo. Dois exercícios resolvidos e uma lista com nove exercícios propostos, agora bem mais variados e envolvendo mais raciocínio, nível médio e difícil.

Após os tópicos 4 e 5 surge uma seção com problemas envolvendo Arranjos e Combinações com dois exemplos interessantes e uma lista com mais oito exercícios propostos variados, exigindo mais raciocínio que os exemplos.

- Tópico 6: Permutação com elementos repetidos: apenas a definição e um exemplo com os anagramas da palavra *INFINITO*. Segue com seis exercícios propostos de nível médio e difícil.
- Tópico 7: Números Binomiais: definição, alguns casos notáveis, binômios complementares, algumas propriedades. Apresenta três exercícios resolvidos e depois, nove exercícios propostos de acordo com a teoria e os exemplos apresentados.
- Tópico 8: Triângulo de Pascal: apenas a definição e algumas propriedades.

- Tópico 9: Binômio de Newton: definição e depois um exemplo sobre como calcular o termo geral. Traz dois exercícios resolvidos e uma lista com dezenove exercícios propostos.

Após esses tópicos o livro termina o capítulo com a *Ficha Resumo*, trazendo um resumo dos principais pontos da teoria e as fórmulas e, finalmente, a parte de exercícios complementares, com vinte e nove exercícios sobre todo o conteúdo. Além disso, apresenta, no final do livro, o gabarito com as respostas dos exercícios.

Pode-se dizer que esse livro é o mais resumido em termo de teorias, dentre os cinco livros analisados e isso se deve, provavelmente, ao fato de ser um livro volume único. É um livro bastante rígido quanto à forma de apresentação do conteúdo, seguindo sempre a mesma sequência: definição, poucos exemplos e exercícios resolvidos e, na maioria dos tópicos, uma boa quantidade de exercícios propostos, que, muitas vezes tinham um nível de dificuldade bem diferente dos exemplos e exercícios resolvidos. Não discute de maneira mais aprofundada nenhuma das fórmulas ou as ideias que levam a elas. Apesar de haver alguns exercícios repetidos e alguns erros nos gabarito é um bom livro para quem já conhece o conteúdo e deseja apenas uma breve revisão e um grande acervo de questões.

Livro 2: *Matemática*, de Edwaldo Bianchini e Herval Paccola.

Pode-se perceber uma diferença em relação ao livro anterior e, após a análise dos outros livros verifica-se que não existe um padrão: nesse livro, o capítulo sobre Binômio de Newton é tratado à parte, não como um tópico do capítulo sobre Análise Combinatória, mas antes deste.

No livro 2 o capítulo sobre Análise Combinatória é o capítulo 7 (páginas 137-164), divido em apenas cinco tópicos:

- Tópico 1: Introdução: inicia o capítulo com uma descrição da Análise Combinatória e traz um exemplo sobre a quantidade de maneiras de fazer um percurso de uma cidade M até uma cidade P passando pela cidade N, e um exemplo sobre lançamento de uma moeda. Todos os exemplos são resolvidos a partir do diagrama de árvore. O tópico termina com dois exercícios propostos.
- Tópico 2: Princípio Fundamental da Contagem: os problemas anteriores são retomados para dar base à definição. Segue com exemplos sobre

números e dois exercícios propostos, depois, exemplos sobre anagramas e três exercícios propostos e, finalmente, exemplos com placas de automóveis e comissões e dois exercícios propostos.

- Tópico 3: Agrupamentos: esse tópico é divido em várias seções.
    - Arranjos simples: apenas a definição;
    - Número de arranjos simples: como calcular o número de arranjos a partir do PFC;
    - Exercícios propostos: quatro exercícios com bom nível de dificuldade sobre aplicação direta da fórmula. Exemplos com cálculo de expressões e mais dois exercícios e, por fim, exemplos com números e uma lista com oito exercícios propostos;
    - Permutações simples: apenas a definição;
    - Número de permutações simples: como calcular a quantidade de permutações e depois seis exercícios propostos sobre anagramas e números;
    - Permutação com repetição: definição, um exemplo e uma lista com cinco exercícios propostos sobre anagramas.;
    - Combinações: apenas a definição;
    - Número de combinações simples: dedução da fórmula a partir da fórmula de arranjo, um exemplo e dois exercícios propostos para aplicação direta da fórmula, alguns exemplos sobre cálculos de expressões e mais dois exercícios propostos e finalmente exemplos sobre formação de comissões e cinco exercícios propostos.
- Tópico 4: Fórmula de arranjo e combinações usando fatorial: nesse tópico são apresentadas as fórmulas que já foram discutidas anteriormente para arranjos e combinações. Segue com alguns exemplos e oito exercícios propostos.
- Tópico 5: Problemas que envolvem arranjos ou combinações: são apresentados dois exemplos e são dadas algumas sugestões de como diferenciar situações nas quais deve-se usar arranjos ou combinações e depois uma lista com dez exercícios propostos.

O capítulo termina com a seção *Relembrando Conceitos* na qual retoma os principais pontos do capítulo e depois as seções de exercícios complementares, com mais vinte e seis problemas sobre todo o conteúdo e a seção de testes, com vinte e um exercícios retirados de vestibulares do Brasil.

Nesse livro pode-se perceber uma melhora na parte teórica do conteúdo, as explicações são mais bem detalhadas, os exemplos são mais diversificados envolvendo situações problemas que permitem ao estudante vivenciar e compreender cada uma das fórmulas. A estrutura do livro já não é mais tão rígida, entre uma fórmula e outra ou entre uma definição e outra aparece um exemplo ou um exercício sobre o que é explicado, além disso, também traz bastantes exercícios propostos e a seção de testes com exercícios de vestibulares é muito importante para treinar os estudantes para os vestibulares de todo o país. Além disso, contém no final do livro o gabarito de todos os exercícios.

Ainda não foi considerado como o melhor livro, para uma preparação mais profunda, porém para o nível médio é um livro que consegue suprir as necessidades do estudante preparando-o bem para o vestibular.

O livro 3: *Matemática: contexto & aplicação* talvez seja um dos livros mais utilizados no Ensino Médio e retoma os temas sobre Binômio de Newton e Triângulo de Pascal no capítulo sobre Análise Combinatória (capítulo 14, páginas 348-381) que é dividido, também, em 9 tópicos:

- Tópico 1: Introdução: apenas uma breve descrição sobre o que é a Análise Combinatória.
- Tópico 2: Princípio Fundamental da Contagem: inicia com três situações problemas que ilustram o PFC e por fim apresenta seu enunciado. Segue com quatro exercícios resolvidos e depois uma lista com seis exercícios propostos de nível fácil.
- Tópico 3: Permutação simples e fatorial de um número: apresenta uma noção sobre a permutação e seu significado, mostra duas situações problema as quais darão suporte para a expressão que permite calcular o número de permutações. Define fatorial através das permutações e apresenta alguns exemplos. Continua com seis exercícios resolvidos para aprofundamento e depois onze exercícios propostos de acordo com a teoria apresentada.
- Tópico 4: Arranjos simples: inicia com uma situação problema para ilustrar uma maneira de se deduzir a expressão. Depois é apresentada uma

definição formal na forma de produtos e também em sua forma fatorial. Traz ainda doze exercícios resolvidos e em seguida uma lista com treze exercícios propostos bastante variados (sobre números, anagramas, etc).

- Tópico 5: Combinações simples: inicia com dois exemplos que relacionam combinações e arranjos para chegar à definição, depois mostra a relação entre combinações complementares e, em seguida, dez exercícios resolvidos com aplicações da teoria e mais treze exercícios propostos para aprofundamento.
- Tópico 6: Permutação com repetição: inicia com dois exemplos sobre a quantidade de anagramas das palavras *BATATA* e *PAPA*. Generaliza a expressão para esse cálculo e depois apresenta quatro exercícios resolvidos e mais um proposto.
- Tópico 7: Problemas que envolvem os vários tipos de agrupamentos: esse tópico não contém teoria, apenas cinco exercícios resolvidos e mais quarenta e seis exercícios propostos que envolvem situações de arranjo e combinação para treinar o estudante a diferenciar cada uma delas.
- Tópico 8: Binômio de Newton: esse tópico volta a ser tratado no capítulo de Análise Combinatória. Inicia mostrando alguns exemplos e depois a expansão do binômio $(x + y)^n$. Trata sobre números binomiais em uma observação, resolve um exercício e propõe outro. Apresenta a fórmula para o cálculo do termo geral do binômio, resolve mais sete exercícios e acrescenta uma lista com treze exercícios propostos.
- Tópico 9: Triângulo de Pascal: apresenta o Triângulo de Pascal relacionando-o com os coeficientes do desenvolvimento dos binômios e mostra algumas de suas propriedades (binomiais complementares, relação de Stifel e propriedade das linhas). Os exercícios propostos são apenas quatro.

O capítulo termina com uma questão *Desafio*, vinte e sete exercícios de revisão envolvendo toda a teoria e uma leitura complementar sobre o *Triângulo Aritmético*.

Novamente é possível perceber uma melhora em relação aos livros anteriores no sentido que esse livro aborda e apresenta as noções intuitivas para cada uma das situações, tentando fazer o estudante compreender o porquê de cada fórmula, mas mais importante que isso é o livro apresentar soluções alternativas para o mesmo problema. Alguns exercícios são resolvidos de até três maneiras diferentes, isso estimula o raciocínio do estudante para que ele esteja apto a pensar cada vez mais em toda situação e não apenas aplicar uma fórmula. O livro também traz o gabarito de todos os exercícios além de várias questões de vestibulares e do ENEM.

O livro 4: *Fundamentos de Matemática Elementar*, talvez seja um dos livros mais conhecidos e de renome sobre Matemática, é adotado tanto para o Ensino Médio quanto para as disciplinas iniciais em cursos superiores. O volume 5 é dividido em três capítulos: Análise Combinatória, Binômio de Newton e Probabilidade. Mais uma vez, Binômio de Newton é considerado separadamente da Análise Combinatória, porém agora, é visto em um capítulo posterior.

O capítulo sobre Análise Combinatória é divido em dez tópicos:

- Tópico 1: Introdução: uma breve explicação sobre a Análise Combinatória e sua finalidade e alguns exemplos de seu uso.
- Tópico 2: Princípio fundamental da contagem: antes de enunciar e demonstrar o princípio é feita a demonstração de um lema que será utilizado e ainda traz uma ideia de demonstração com o diagrama de árvore. São apresentados alguns exemplos e depois a demonstração de outro lema juntos com alguns exemplos. Depois é feita a demonstração da primeira parte do PFC, através do método da *Indução Finita* e este é o único dentre os cinco livros que mostra o PFC divido em duas partes. Finalmente tem-se a demonstração da segunda parte e mais alguns exemplos. Para finalizar esse tópico é dada uma lista com vinte e quatro exercícios.
- Tópico 3: Consequências do princípio fundamental da contagem: uma pequena explicação sobre como o PFC será útil para a dedução das expressões que calculam os diversos tipos de agrupamentos.
- Tópico 4: Arranjos com repetição: inicia com uma definição rigorosa, um exemplo e a expressão que permite calcular o número de arranjos com repetição.
- Tópico 5: Arranjos: segue a mesma ordem do tópico anterior. Inicia com uma rigorosa definição, um exemplo de aplicação e por fim a expressão utilizada para calcular a quantidade de arranjos e mais um exemplo.

- Tópico 6: Permutações: definição de Permutação a partir de arranjos, fórmula para calcular o número de permutações e um exemplo.
- Tópico 7: Fatorial: inicia com uma motivação para o uso de fatoriais, define o símbolo que será utilizado (**!**) e é apresentada a definição. Traz alguns exemplos de cálculos com fatoriais e finalmente mostra como representar as expressões que calculam a quantidade de arranjos e permutações através do uso de fatoriais. Ao final deste tópico tem-se uma lista com cinquenta e quatro exercícios envolvendo os assuntos dos tópicos 4, 5, 6 e 7.
- Tópico 8: Combinações: novamente a definição rigorosa de combinações, depois traz a demonstração de como calcular o número de combinações sem necessariamente relacionar com arranjos (como foi feito nos livros anteriores), apresenta alguns casos particulares de combinações e apresenta a fórmula. São apresentados dois exemplos e uma lista com cento e trinta e cinco exercícios.
- Tópico 9: Permutações com elementos repetidos: é apresentada uma situação problema sobre anagramas da palavra *ANA* para discutir como os elementos repetidos interferem na quantidade total de permutações. É feita uma análise bastante criteriosa, desde um tipo de elemento repetido até o caso geral e é apresentada a expressão que resolve esse tipo de problema. Em seguida, esse tópico termina com doze exercícios propostos.
- Tópico 10: Complementos: este é o único dentre os cinco livros que aborda esse tópico. Nele são discutidas partições de um conjunto (Partições ordenadas e não ordenadas) e como elas podem auxiliar na resolução de problemas combinatórios. Depois ainda é discutida a quantidade de soluções inteiras não negativas de uma equação linear. São apresentados alguns exemplos e para finalizar uma lista com mais quinze exercícios propostos.

Ao final do livro, ainda existe uma seção de testes com setenta e quatro exercícios retirados dos diversos vestibulares do Brasil.

Esse livro é o que apresenta o maior rigor matemático em todas as definições e demonstrações. Para aqueles que querem se debruçar no estudo da Matemática talvez seja o mais indicado. Porém, por outro lado, para a maioria dos estudantes que não deseja tanto aprofundamento, este livro se torna muito denso, com uma linguagem muito formal, de difícil compreensão.

Outro ponto positivo é a grande quantidade de exercícios e o fato de que muitos deles são resolvidos com explicações e não apenas as respostas. Durante a resolução são discutidos alguns pontos que não foram apresentados na teoria como *Permutações Circulares*. Mas o aspecto mais relevante é a discussão de ideias e noções sobre cada um dos tópicos sem perder o rigor matemático.

O livro 5: *A Matemática para o Ensino Médio* não é um livro adotado no Ensino Médio porém é bastante utilizado em cursos de pós-graduação (especialização e mestrado) e mais direcionado aos professores que desejam aprofundar o conhecimento. Como esse livro também contempla o assunto de Análise Combinatória foi escolhido para ser analisado.

O capítulo 4: Combinatória (páginas 85-112) é divido em cinco tópicos:

- Princípios Básicos: inicia enunciando o PFC e alguns exemplos simples são discutidos para introduzir o tema. Depois são apresentadas algumas sugestões para a resolução de problemas de combinatória. Mais exemplos são discutidos e, por fim, o tópico finaliza com uma lista com vinte e um problemas. Após os exercícios há uma seção com sugestões aos exercícios.
- Permutações e Combinações: neste tópico são discutidos os tipos de problemas mais frequentes. Inicia-se com as permutações simples com o exemplo de ordenação de pessoas em filas, depois, anagramas e então é introduzida a situação de anagramas com letras repetidas. Em outro exemplo é discutida a questão da divisão de objetos em grupos que é tratada como combinações simples. Após um exemplo no qual são discutidas as ideias e noções desse tipo de problema chega-se a expressão que permite calcular a quantidade de combinações simples. Em outro exemplo é apresentado e discutido o problema das *Permutações Circulares* e depois um problema contemplando a parte de formação de anagramas sob restrições e por fim sobre a quantidade de soluções não nulas de uma equação linear. O tópico novamente termina com os exercícios, quarenta nesta seção, e as sugestões para resolução.

- Triângulo Aritmético: este tópico apenas define o Triângulo de Pascal e relaciona-o com as combinações. Apresenta a relação de Stifel, o teorema das linhas e as combinações complementares, com exemplo e todas as demonstrações.
- Binômio de Newton: define o Binômio de Newton e a noção de como se descobrir o coeficiente de um termo geral. Complementa com alguns exemplos nos quais são discutidos como calcular o termo genérico e o termo máximo do desenvolvimento de um binômio. Novamente o tópico termina com uma lista com oito exercícios e as sugestões para a solução.
- O Ensino de Combinatória: neste tópico o livro apresenta algumas sugestões dos autores para os professores ao tratarem desse assunto em sala de aula. Formas de como abordar algumas situações, como lidar com as dificuldades, como incentivar os estudantes, etc.

De fato, verificou-se que esse livro é muito bom para aqueles que já têm algum conhecimento do assunto ou alguma habilidade com a matemática. Não é considerado adequado para os estudantes do Ensino Médio que estão em uma etapa inicial de sua formação. É excelente na quantidade de exemplos e na forma como eles são trabalhados. Os exemplos não são apenas resolvidos, mas discutidos a partir de uma abordagem lógica e utilizando o raciocínio. As fórmulas são apresentadas, porém muito pouco utilizadas. Os exercícios são compatíveis com a teoria apresentada e, além das sugestões de soluções, o livro também traz a resposta para todos os exercícios. Portanto para aqueles que desejam aprofundar o conhecimento em Análise Combinatória, dentre os cinco livros analisados, esse é o recomendado.

Para fazer a análise, o capítulo em questão foi estudado e todos os problemas foram resolvidos, na tentativa de identificar um padrão na metodologia ou nas questões ou erros nos enunciados ou gabaritos. Enfim, desde a teoria até as soluções dos exemplos, exercícios resolvidos e propostos, tudo foi levado em consideração.

Chegou-se a algumas conclusões, tais como: a quantidade de exemplos e exercícios resolvidos é bastante importante para que o estudante comece a se familiarizar com o conteúdo. Depois, é necessária uma explicação sólida e rigorosa para que o conteúdo saia das questões intuitivas e informais e tome uma roupagem matemática, com rigor científico. Por fim, é extremamente necessária uma grande quantidade de exercícios, porém esses não devem ser aleatórios, devem ser pensados, exercícios que tragam situações problemas novas nas quais exijam dos estudantes o raciocínio para que compreendam as diferenças e semelhanças dos casos já estudados. A mera repetição de problemas não ajuda, pois só treina os estudantes a aplicarem fórmulas e realizarem algoritmos com as operações matemáticas.

Para finalizar esse capítulo, uma breve discussão sobre o que foi observado nas resoluções dos exercícios/problemas.

A primeira observação é quanto à dificuldade da pesquisa, quando esta envolve pessoas. Foram distribuídas cerca de cento e cinquenta listas entre estudantes de três escolas de João Pessoa. As listas foram entregues enquanto os estudantes estavam em sala de aula e foi explicado que deveriam levar para casa, tentar resolver e só depois devolver, um, dois ou três dias após terem recebidos. Os estudantes que receberam as listas cursavam o 3º Ano do Ensino Médio e já haviam estudado o assunto de PFC e Análise Combinatória.

Apesar da grande quantidade de listas distribuídas apenas 10% foram devolvidas. A análise baseou-se nessas listas.

Estatisticamente temos o seguinte resultado:

Tabela 1: Estatísticas sobre a lista de exercícios/problemas

	Fácil (%)	Médio (%)	Difícil (%)	Acertos (%)	Tempo Médio (min)
1	66,6	20	13,3	100	4,5
2	20	53,3	26,6	26,6	7
3	20	80	0	46,6	3,16
4	0	20	80	0	6,5
5	80	20	0	86,6	3
6	53,3	26,6	20	6,6	8,33
7	86,6	13,3	0	80	2,5
8	73,3	20	6,6	66,6	4,16
9	0	46,6	53,3	73,3	6,5
10	26,6	26,6	46,6	33,3	2,25

Pode-se observar que a questão com a maior quantidade de acertos foi a questão 1, e em seguida as questões 5 e 7. A questão com a menor quantidade de acertos foi a questão 4, que nenhum dos alunos acertou, seguida pelas questões 6, 2 e 10. O tempo médio total para a resolução da lista foi de, aproximadamente, 48 minutos.

É importante perceber e ressaltar que parece não haver uma relação entre as questões com maior ou menor quantidade de acertos e o nível de dificuldade.

A questão 1 obteve 100% de acertos porém apenas 66,6% dos estudantes classificou-a como fácil. A questão com maior índice de classificação como fácil foi a questão 7, considerada fácil por 86,6% dos estudantes, porém obteve apenas 80% de acerto, menos que as questões 1 e 5.

Um caso bastante curioso é o da questão 6, que foi considerada fácil por mais da metade dos estudantes, porém só obteve 6,6% de acerto, algo que parecer ser bastante contraditório.

Com exceção da questão 4, que foi classificada como difícil por 80% dos estudantes e não obteve acertos, a questão 9 obteve o maior índice de classificação como difícil (53,3 %), porém apresentou um índice de acerto elevado (73,3 %).

A partir desses exemplos pode-se fazer diversas outras análise entre nível de dificuldade, quantidade de acertos e o tempo gasto para cada questão.

Percebe-se, ainda, que as questões com mais acertos foram aquelas que não envolviam nenhum tipo de raciocínio mais elaborado e cujas soluções poderiam ser alcançadas diretamente com o uso de uma fórmula.

Pode-se resolver a questão 1 da seguinte maneira: como existem 5 opções para cada pergunta e são 10 perguntas, pode-se encontrar a solução a partir do PFC: $n = 5^{10}$, com n representando a quantidade de gabaritos.

Uma solução para a questão 5 é aplicar a fórmula para permutação com elementos repetidos. No caso, a palavra *ESTRELADA* possui 4 letras repetidas, sendo 2 de um tipo (2 *A*) e 2 de outro tipo (2 *E*). Portanto a resposta será: $P_9^{2,2} = \frac{9!}{2!2!} = 90720.$

Para resolver a questão 7 basta aplicar a fórmula para permutação circular de 4 elementos: $(PC)_4 = (4-1)! = 3! = 6.$

As demais questões exigem uma maior concentração e a elaboração de uma estratégia mais complexa para a solução, não apenas a aplicação de uma fórmula.

A questão 2 poderia ser resolvida da seguinte maneira: como é uma roda alternada, ou seja, pessoas do mesmo sexo não podem sentar-se uma ao lado da outra, numera-se as posições de 1 a 10, imaginando um círculo, sendo a posição 10

vizinha da posição 1. Com isso, escolhe-se primeiramente o lugar das meninas. Para posicioná-las existem apenas 5 opções, ou os 5 lugares pares, ou os 5 lugares ímpares. Feita a escolha elas podem alternar entre si de $(PC)_5 = 4! = 24$. Posicionadas as meninas, escolhe-se os lugares para os rapazes, o que pode ser feito de $5! = 120$ maneiras. Tem-se, portanto um total de $24 \times 120 = 2880$ maneiras de formar a roda.

Uma possível resolução para a questão 4 é a seguinte: coloca-se os 20 objetos em fila, o que os divide automaticamente em 4 grupos de 3 objetos e 2 grupos de 4 objetos (os 3 primeiros formam um grupo, os 3 seguintes formam outro grupo e assim sucessivamente). Pode-se permutar os objetos na fila de $20!$ maneiras distintas, porém ao permutar os grupos, o que pode ser feito de $4!$ maneiras para os grupos de 3 objetos e $2!$ maneiras para os grupos de 4 objetos, não altera-se a divisão. Assim como as permutações dos objetos dentro dos próprios grupos também não alteram as divisões. Portanto a quantidade de maneiras de fazer a divisão desejada será: $n = \frac{20!}{4!2!(3!)^4(4!)^2}$

Para resolver a questão 6 pode-se utilizar o seguinte raciocínio: escolhe-se os locais das mulheres, o que pode ser feito de C_9^4 maneiras. Após escolhidos os locais, as mulheres só poderão estar em uma sequência: da menor para a maior (restrição do problema). E nos 5 locais restantes os homens também só poderão estar dispostos de 1 única maneira: do menor para o maior. Portanto a solução será $C_9^4 = \frac{9!}{4!5!} = 126$ maneiras.

Na questão 10 não foi percebido que havendo 5 exemplares da revista “Veja” pode-se formar coleções com $0, 1, 2, 3, 4$ ou 5 revistas desse tipo, no total teremos 6 opções de revista “Veja”. O mesmo acontecendo para as demais revistas. A revista “Manchete” com 6 exemplares e a revista “Isto É” com 4 exemplares, terão, respectivamente, 7 e 5 opções. Aplicando o PFC contou-se todas as $6 \times 7 \times 5 = 210$ opções e retirada a coleção vazia, tem-se o total de 209 coleções não vazias.

As demais questões foram consideradas intermediárias com nível de acerto satisfatório. Com isso, porém, percebe-se o despreparo da maioria dos estudantes em relação a esse assunto, quando os problemas são mais complexos e envolvem mais raciocínio que apenas aplicações diretas de fórmulas.

8. Considerações Finais

Após a pesquisa percebe-se que existe uma relação entre a abordagem feita pelos livros didáticos e a maneira com que os estudantes realmente apreendem o conteúdo. É possível observar que quase todos os livros didáticos trazem uma grande quantidade de exercícios, porém muitos deles repetidos.

Isso dificulta o aprendizado uma vez que treina os estudantes a resolverem apenas um determinado tipo de problema e, em sua maioria, não apresentam ou aprofundam nenhuma discussão, são exercícios meramente mecânicos com aplicações diretas das fórmulas.

Esse fato ficou evidenciado pela quantidade de acertos para as questões mais simples, aquelas nas quais se podia aplicar diretamente o PFC (como a questão 1) ou fórmulas prontas, no caso das questões 5 e 7 (Permutação com Repetição e Permutação Circular).

Quanto às questões que envolviam raciocínios mais elaborados ou ainda, uso do simultâneo do Princípio Aditivo e Multiplicativo a maioria dos estudantes não obteve êxito em suas respostas. Percebe-se falta de atenção ou mesmo falta de prática para lidar com essas situações.

Os livros didáticos, em sua maioria, apresentam poucos exemplos e/ou exercícios resolvidos. E mesmo quando o fazem apresentam apenas a solução, mas não existe uma discussão sobre a situação problema, mostrando, por exemplo, o porquê de usar arranjos e não combinações ou então o porquê de usar o PFC e não permutações.

Isso tudo dificulta o aprendizado, pois o estudante não consegue compreender onde errou. Ele apenas tem uma solução, que o livro didático apresenta como correta, mas não tem como discutir e aprender com o próprio erro. A situação piora quando se consideram os livros didáticos que apresentam apenas o gabarito das questões sem suas devidas soluções. Mais aflito ainda fica o estudante sem conseguir chegar à solução correta.

Essa dificuldade de compreensão e interpretação dos problemas e de suas soluções pode ser um dos motivos pelos quais poucos estudantes se interessam pelo estudo da Análise Combinatória.

Por outro lado, pode-se compreender a dificuldade dos autores de livros didáticos em tentar adaptar seus livros de maneira a apresentarem discussões mais profundas. Se os livros didáticos fossem produzidos com as soluções de todas as questões, apresentando soluções alternativas, quando possível, e discussões mais aprofundadas, ficariam livros extremamente volumosos. Seria preciso a produção de livros específicos de Análise Combinatória, ou seja, não bastariam apenas 1 ou 2 capítulos nos livros convencionais do Ensino Médio.

Essa alternativa, talvez, trouxesse mais receio aos estudantes, que teriam uma visão mais negativa sobre a Análise Combinatória. Existem livros específicos, mas em sua maioria são adotados apenas para cursos de graduação ou pós-graduação.

Dessa maneira, uma sugestão para minimizar o problema ou dificuldade na relação ensino-aprendizagem de Análise Combinatória decorre de uma maior participação do professor, pois seu papel será de grande importância, uma vez que os estudantes não poderão contar apenas com os livros didáticos. Caberá ao professor fazer as discussões em sala, aprofundando o tema, e não apenas repetindo o conteúdo do livro, mas apresentando situações diversas para fazer o estudante vivenciar e compreender as diferentes estratégias de resolução, até que seja possível utilizar sua própria criatividade para alcançar tais resultados.

Referências

BARBOSA, S. da S. *Análise combinatória em princípio*. Rio de Janeiro, 2005. Disponível em: <http://www.ccmn.ufrj.br/curso/trabalhos/pdf/matematicatrabalhos/analise_combinatoria/analisecombin1.pdf>. Acesso em: 14 set. 2011.

BIANCHINI, E, PACCOLA, H. *Matemática*, volume 2: versão beta. 2 ed. rev. e ampl. Editora: Moderna, São Paulo, 1995.

BRANDÃO, A. C. da C. *"Cubo mágico" achado o número mágico "Número de Deus": 20 movimentos*. 2010. 1 gravura. Altura: 307 pixels. Largura: 320 pixels. 86,2 KB. Formato PNG. Disponível em: <http://boaspraticasfarmaceuticas.blogspot.com/2010/08/cubo-magico-achado-o-numero-magico.html>. Acesso em: 15 dez. 2011.

CAMARGO, M. Â. de. *Análise combinatória: Como calcular probabilidades*. Pedagogia & Comunicação. UOL Educação, Brasil, 2009. P. 3 Disponível em: <http://educacao.uol.com.br/matematica/analise-combinatoria-comocalcularprobabilidades.jhtm>. Acesso em: 14 set. 2011.

CARVALHO, P. C. P. *O Princípio das Gavetas*. SBM: Revista Eureka!, [S.L.], n. 5, 1999. Disponível em: <http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/artigos/gavetas.doc>. Acesso em: 10 jan. 2012.

COSTA, C. A. da. *Análise Combinatória: Como Aborda-la a Partir do Ensino Fundamental?* In: Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), 8., 2004, Recife. Anais... Recife: SBEM, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/12/MC19522417823.pdf >. Acesso em: 10 dez. 2011.

COSTA, C. A. da; As concepções dos professores de Matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental. São Paulo, 2003, 163 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

DANTE, L. R. *Matemática: contexto & aplicação*, volume 2. 3 ed. Editora: Ática, São Paulo, 2004.

ESTEVES, I.; *Investigando os fatores que influenciam no raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos - 8a série do ensino fundamental*. São Paulo, 2000, 194 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

FILHO, B. B.; SILVA, C. X. da. *Matemática aula por aula*, volume único, ensino médio. Editora: FTD, São Paulo, 2000.

FELLER, W. *Introdução à Teoria de Probabilidades e suas Aplicações*. São Paulo: Edgard Blucher, 1973.

FONTES, M. de M.; FONTES, D. J. dos S. *Análise Combinatória: uma Abordagem Através de Contexto*. In: Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), 9., 2007, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte: SBEM, 2007. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Relato_de_Experiencia/Trabalhos/RE27780880249T.doc>. Acesso em: 06 jan. 2012.

HAZZAN, S. *Combinatória e Probabilidade*. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. São Paulo: Atual, 1977. v.5.

HIRSCH, S. *Mapa do Quadrado Mágico*. [2011?]. 1 gravura. Altura: 195 pixels. Largura: 198 pixels. 4,95 KB. Formato GIF. Disponível em: <http://correcotia.com/heroi/quadmag.htm>. Acesso em: 10 dez. 2011.

IEZZI, G. et al. Coleção Matemática: ciência e aplicações, volume 2. 2 ed. Editora: Atual, São Paulo, 2004.

LIBER Abaci. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2011. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Liber_Abaci>. Acesso em: 15 jan. 2012.

LIMA, Elon Lages; *A Matemática do Ensino Médio*, volume 2. 6 ed. Editora: SBM, Rio de Janeiro, 2006.

LUPINACCI, V. L. M.; BOTIN, M. L. M.; HOFFMANN, G. R. *O ensino de análise combinatória utilizando jogos e resolução de problemas*. [S.L], 2010. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Minicurso/Trabalhos/MC18361331034T.doc>. Acesso em: 15 set. 2011.

MAKIYAMA, E. *Triângulo de Pascal*. In: InfoEscola: Navegando e Aprendendo. InfoEscola, 2009. 1 gravura. Altura: 300 pixels. Largura: 300 pixels. 10,5 KB. Formato JPEG. Disponível em: <http://www.infoescola.com/combinatoria/triangulo-de-pascal/>. Acesso em: 19 dez. 2011.

MARQUES, R. *circular.gif*. 1 gravura. Altura: 545 pixels. Largura: 348 pixels. 5,51 KB. Formato GIF. In: MARQUES, P. Análise Combinatória. Feira de Santana, Bahia: Matemática do Científico e do Vestibular, 2008. Disponível em: <http://www.paulomarques.com.br/arq3-1.htm>. Acesso em: 22 dez. 2011.

MATEMÁTICA divertida/Triângulo de Pascal. *Pascaltriangle2.PNG*. In: WIKILIVROS: Livros abertos, mundo aberto. Wikimedia, 2011. 1 gravura. Altura: 383 pixels. Largura: 205 pixels. 7 KB. Formato PNG. Disponível em: <http://pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica_divertida/Tri%C3%A2ngulo_de_Pascal>. Acesso em: 19 dez. 2011.

MORGADO, A.C. et al. *Análise Combinatória e probabilidade* . Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006.

NOÉ, M. *Os Quadrados Mágicos*. 1 gravura. Altura: 480 pixels. Largura: 329 pixels. 30 KB. Formato JPEG. In: Canal do Educador. BrasilEscola.com, [entre 2002 e 2012]. Disponível em: <http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/os-quadrados-magicos.htm>. Acesso em: 11 dez. 2011.

NOÉ, M. *Solucionando Quadrados Mágicos*. 1 gravura. Altura: 339 pixels. Largura: 313 pixels. 16,6 KB. Formato JPEG. In: Canal do Educador. BrasilEscola.com, [entre 2002 e 2012]. Disponível em: <http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/solucionando-quadrados-magicos.htm>. Acesso em: 11 dez. 2011.

PHONE Game Review. *Platinium Sudoku*. 2007. 1 gravura. Altura: 250 pixels. Largura: 250 pixels. 7,46 KB. Formato PNG. Disponível em: <http://2067one.wordpress.com/2007/04/10/platinium-sudoku/>. Acesso em: 12 dez. 2011.

PINHEIRO, C. A. de M; SÁ, P. F. de. *O Ensino de Análise Combinatória: A Prática Pedagógica Predominante Segundo os Docentes*. In: Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), 9., 2007, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte: SBEM, 2007. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC37047990259T.doc>. Acesso em: 03 dez. 2011.

PINHEIRO, C. A. M e ROZA, I. S.; *Da análise combinatória: o que ficou em alunos e professores do Ensino Médio?*. Belém, 2006, 52 p. Monografia (Especialização em Educação Matemática)- Centro de Ciências Sociais e Educação- Universidade Estadual do Pará.

PINTO, N. *O problema de Guthrie como metodologia no ensino da Análise Combinatória e Probabilidade*. Londrina, Paraná. 2009. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1468-8.pdf>. Acesso em: 15 set. 2011.

SANTOS, J.P.P. et al. *Introdução à Análise Combinatória* . Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1995. 295 p.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; CARRAHER, T. N. *Na vida dez, na escola zero*. 12 ed. Editora: Cortez, São Paulo, 2001.

SÉRGIO, P. *Coeficientes Binomiais e o Triângulo de Pascal*. In: Fatos Matemáticos. Fatos Matemáticos, 2009. 1 gravura. Altura: 400 pixels. Largura: 252 pixels. 22,4 KB. Formato JPEG. Disponível em: <http://fatosmatematicos.blogspot.com/2009/12/coeficientes-binomiais-e-o-triangulo-de.html>. Acesso em: 20 dez. 2011.

SILVA, A. P. da; ANDRADE, S. de. *Ressignificando o Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória*. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 15., 2011, Campina Grande. Anais... Campina Grande: UEPB, 2011. Disponível em: http://www.ebrapem.com.br/meeting4web/congressista/modulos/trabalho/trabalho/5c82420003918f5b59d2969df5e3cc6d.pdf>. Acesso em: 09 dez. 2011.

ROCHA, J. C.; *O ensino de análise combinatória: uma discussão sobre o uso do principio multiplicativo na resolução de problemas*. São Paulo, 2002, 96 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de educação, Universidade de São Paulo.

STURM, W.; *As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa*. Campinas, 1999, 94 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de Campinas.

TAVARES, C. S.; BRITO, F. R. M. de. *Contando a História da Contagem*. SBM: Revista do Professor de Matemática, Sete Lagoas, MG, n. 57, p. 33-37, 14 jun. 2005. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/conheca/57/contagem.pdf>. Acesso em: 22 nov. 2011.

TAVARES, R. *Aprenda a Resolver Um Cubo Mágico*. 2008. 1 gravura. Altura: 390 pixels. Largura: 400 pixels. 27,8 KB. Formato JPEG. Disponível em: <http://renatotavares.com/aprenda-a-resolver-um-cubo-magico.html>. Acesso em: 15 dez. 2011.

TIC na Educação. Sítio do Quinto, BA: TIC na Educação, 2011. Disponível em: http://ticjaluunebmat.blogspot.com/2011/03/situacoes-problemas-potencia.html>. Acesso em: 20 jan. 2012.

VARANDAS, J. M.; SARAIVA, R. A. Curiosidades: Números de Fermat. [2002?]. 1 gravura. Altura: 284 pixels. Largura: 263 pixels. 3 KB. Formato PNG. Disponível em: <http://ufscmatematica.blogspot.com/2010/04/triangulo-de-pascal-curiosidades.html>. Acesso em: 20 dez. 2011.

VAZQUEZ, C. M. R.; NOGUEIRA, J. C. *As Raízes da Combinatória*. Leomatefisica, [S.L.], dez. 2011. Disponível em: <http://leomatefisica.webnode.com.br/news/as-raizes-da-combinatoria/>. Acesso em: 12 jan. 2012.

VAZQUEZ, C. M. R.; NOGUTI, F. C. H. *Análise Combinatória: Alguns Aspectos Históricos e uma Abordagem Pedagógica*. In: Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), 8., 2004, Recife. Anais... Recife: SBEM, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2011.

WEISSTEIN, E. W. *Magic Square*. MathWorld - A Wolfram Web Resource, [S.L.], [entre 1999 e 2012]. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html>. Acesso em: 20 out. 2011.

Apêndice A

Exercícios: Análise Combinatória

Aluno: ____Idade:_____ Sexo:___

Colégio:________________ Curso desejado no vestibular:_________________

Instruções para resolução dos exercícios:

- O nome do aluno é opcional
- Escreva para cada questão a maior quantidade de informações possível, explicando detalhadamente o raciocínio utilizado e justificando-o.
- Após terminar de responder a cada questão escreva o tempo que gastou pra resolvê-la e classifique a questão em Fácil (F), Médio (M) ou Difícil (D).

1. Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla-escolha, com 5 alternativas por questão? Tempo:______ Nível:_____

2. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 5 meninos e 5 meninas de modo que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas? Tempo:______ Nível:_____

3. O conjunto A possui 4 elementos e, o conjunto B, 7 elementos. Quantas funções $f: A \to B$ existem? Quantas delas são injetoras? Tempo:______ Nível:_____

4. De quantos modos é possível dividir 20 objetos em 4 grupos de 3 e 2 grupos de 4 objetos? Tempo:______ Nível:_____

5. Quantos são os anagramas da palavra "ESTRELADA"? Tempo:______ Nível:_____

6. De quantos modos é possível colocar em fila 4 homens e 5 mulheres, todos de alturas diferentes, de modo que os homens entre si e as mulheres entre si fiquem em ordem crescente de alturas? Tempo:______ Nível:_____

7. De quantos modos podemos formar uma mesa de buraco com 4 jogadores? Tempo:______ Nível:_____

8. De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras em fila? Tempo:______ Nível:_____

9. Com 7 frutas diferentes, quantas vitaminas de duas ou mais frutas podemos fazer? Tempo:______ Nível:_____

10. Em uma banca há 5 exemplares iguais da "Veja", 6 exemplares iguais da "Manchete", e 4 exemplares iguais da "Isto é". Quantas coleções não-vazias de revistas dessa banca podem ser formadas? Tempo:______ Nível:___