



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**UM ESTUDO SOBRE SISTEMA DE EQUAÇÕES**  
**DIFERENCIAIS LINEARES ORDINÁRIAS**

**NAELSON DA SILVA SOUSA**

**CAMPINA GRANDE**

**Dezembro de 2016**

NAELSON DA SILVA SOUSA

**UM ESTUDO SOBRE SISTEMA DE EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS LINEARES ORDINÁRIAS**

Trabalho de conclusão de curso, apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientadora: Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE

Dezembro de 2016

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S725e Sousa, Naelson da Silva.

Um estudo sobre sistema de equações diferenciais lineares ordinárias [manuscrito] / Naelson da Silva Sousa. - 2016. 87 p. : il.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.

"Orientação: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática".

1. Equações Diferencias Ordinárias. 2. Problema de Valor Inicial. 3. Sistema linear. I. Título.

21. ed. CDD 512.94

NAELSON DA SILVA SOUSA

## UM ESTUDO SOBRE SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES ORDINÁRIAS

Trabalho de conclusão de curso, apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Aprovado em: 09/12/2016

COMISSÃO EXAMINADORA



Prof<sup>a</sup>. Dra. Luciana Roze de Freitas

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

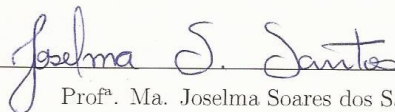
ORIENTADORA



Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

EXAMINADOR



Prof<sup>a</sup>. Ma. Joselma Soares dos Santos

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

EXAMINADORA

CAMPINA GRANDE

Dezembro de 2016

# Dedicatória

Dedico o presente trabalho à toda minha família, e professores, especialmente a minha mãe Maria do Socorro, minha querida avó Rita Cardoso, à minha noiva Karen Alves, e a minha Orientadora Luciana Roze de Freitas.

# Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a DEUS, o todo poderoso!, sobre todas as coisas, pois se não fosse pela sua bondade e compaixão não chegaria até aqui. Ele é plenamente o responsável por essa conquista, onde creio que será a primeira de muitas.

Agradeço a toda a minha família, a minha querida mãe Maria do Socorro, a minha amada avó Rita Cardoso pelos ensinamentos do caminho sempre da bondade, honestidade e humildade. A minha madrinha Estela Silva que sempre abriu as portas de sua casa com muito carinho para me acolher todas as vezes que precisei nessa jornada acadêmica.

Agradeço também a minha maravilhosa noiva Karen Alves que DEUS me concedeu, minha fiel companheira, amiga que a todo o momento esteve ao meu lado.

Agradeço a minha orientadora Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Luciana Roze de Freitas por toda atenção, paciência, compreensão, dedicação e por todos os conselhos para que eu pudesse ter concluído este trabalho de forma satisfatória.

Agradeço a todos os docentes da graduação por suas contribuições durante essa jornada.

Aos professores Davis Matias e Joselma Soares por terem aceitado fazerem parte da minha banca avaliadora.

Por fim, mas não menos importantes, agradeço aos amigos e colegas de estudos que conheci durante o curso: Hélio Henrique, Weiller Felipe, Helder Flaubert, Cícero José, estes que de forma direta ou indireta contribuíram nessa vitória.

Agradeço imensamente a minha amiga e supervisora Rosemary por todo carinho e pelas palavras de motivação que levarei sempre comigo.

# Resumo

O presente trabalho objetiva um estudo introdutório acerca das equações diferenciais ordinárias, centralizando os conceitos referentes aos estudos das equações diferenciais lineares de ordem  $n$ , assim como, abordamos a teoria dos sistemas lineares de equações diferenciais homogêneos e não-homogêneo. Inicialmente, vimos alguns métodos de obtenção de solução para equações lineares, em que foi utilizada a variação de parâmetros para se determinar a solução geral da equação. Posteriormente, focamos nos conceitos sobre soluções de sistemas lineares, que é o ponto chave deste trabalho, onde mencionamos o processo de determinação dos autovalores e autovetores de uma matriz  $A$  dos coeficientes do sistema, para determinar a solução geral do sistema, por meio da variação de parâmetros. Este trabalho é reflexo da curiosidade na pesquisa matemática na área pura ou aplicada, onde focamos no tratamento quantitativo sobre equações lineares como também, de sistemas lineares, motivando assim, a produção de um texto bibliográfico sobre o tema.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais Ordinárias. Problema de Valor Inicial. Sistema Linear.

# Abstract

The present paper aims at an introductory study on the ordinary differential equations, centralizing the concepts related to the studies of the linear differential equations of  $n$ -th order, as well as, we approached the theory of linear systems of homogeneous and nonhomogeneous differential equations. Initially, we saw some methods of obtaining solutions for linear equations, in which a variation of parameters was used to determine a general solution of the equation. Later, we focused on the concepts of solutions of linear systems, which is the key point of this work, where we mention the process of determining the eigenvalues and eigenvectors of a matrix  $A$  of the coefficients of the system, to determine the general solution to the system, through the variation of parameters. This work is a reflection of the curiosity in mathematical research in a pure or applied area, where we focused in the quantitative treatment of linear equations as well as linear systems, thus motivating a production of a bibliographic text on the subject.

**Keywords:** Equations Ordinary Differences. Initial Value Problem. Linear System.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Conceitos Básicos</b>	<b>13</b>
1.1 Equações Diferenciais . . . . .	13
1.1.1 Classificação pelo Tipo . . . . .	13
1.1.2 Classificação pela Ordem . . . . .	14
1.1.3 Classificação como Linear ou Não-linear . . . . .	15
1.1.4 Soluções para Equações Diferenciais . . . . .	15
1.1.5 Problema de Valor Inicial . . . . .	18
<b>2 Equações Homogêneas e Não-Homogêneas</b>	<b>23</b>
2.1 Equações Diferenciais Lineares . . . . .	23
2.1.1 Problema de Valor Inicial e de Valor de Contorno . . . . .	23
2.1.2 Problema de Valor de Contorno . . . . .	25
2.2 Equações Homogêneas . . . . .	27
2.2.1 Princípio da Superposição . . . . .	28
2.3 Operadores Diferenciais . . . . .	29
2.4 Equações Não-Homogêneas . . . . .	37
2.5 Fórmula de Euler . . . . .	41
2.6 Construindo uma Segunda Solução a partir de uma Solução Conhecida . . . . .	42
2.7 Equações Diferenciais Homogêneas com Coeficientes Constantes . . . . .	47
2.7.1 A Equação Característica com Raízes Reais Distintas . . . . .	48
2.7.2 A Equação Característica com Raíz Real Dupla . . . . .	50
2.7.3 A Equação Característica com Raízes Complexas Conjugadas . . . . .	50
2.8 Método de Variação dos Parâmetros . . . . .	52

<b>3</b>	<b>Sistemas de EDO's Lineares de primeira ordem</b>	<b>60</b>
3.1	Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem . . . . .	60
3.1.1	Sistema na Forma Normal Linear . . . . .	61
3.1.2	Transformação de uma Equação para um Sistema . . . . .	61
3.1.3	Forma Matricial de um Sistema Linear . . . . .	62
3.1.4	Problema de Valor Inicial . . . . .	64
3.2	Sistemas Homogêneos . . . . .	64
3.3	Sistemas Não-Homogêneos . . . . .	67
3.3.1	Matriz Fundamental . . . . .	68
3.3.2	Inversa de uma Matriz Fundamental . . . . .	69
3.4	Sistemas Homogêneos com Coeficientes Constantes . . . . .	70
3.4.1	Autovalores Reais Distintos . . . . .	71
3.4.2	Autovalores Repetidos . . . . .	73
3.4.3	Autovalores Complexos . . . . .	79
3.5	Método de Variação dos Parâmetros - Sistemas Lineares . . . . .	81
	<b>Considerações Finais</b>	<b>85</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>86</b>

# Introdução

Sabe-se que a matemática é um instrumento poderosíssimo para o trabalho intelectual. A mesma vem sendo utilizada desde os tempos mais remotos quando se havia necessidade das antigas civilizações representarem seus objetos. Sendo assim, se tratando de aplicações matemáticas, a modelagem torna-se útil para interpretarmos certas situações-problemas de diversas áreas do cotidiano. Porém, não é tão fácil expressar um determinado fenômeno em termos de um modelo matemático por meio de uma equação diferencial ou sistemas de equações diferenciais. É necessário que se tenha uma teoria matemática adequada, o que nem sempre ocorre.

O estudo das equações diferenciais começa com a criação do cálculo diferencial e integral no século XVII, motivado inicialmente por suas aplicações à mecânica, surgidas quando Newton (1642 – 1727), Leibniz (1646 – 1716) e Bernoulli (1654 – 1705) resolveram algumas equações diferenciais simples. Estas primeiras descobertas pareciam sugerir que as soluções de todas as equações diferenciais poderiam ser expressas por funções elementares.

Durante o século XVIII, alguns métodos mais sistemáticos de soluções de equações diferenciais foram desenvolvidos por outros estudiosos interessados nesta área de estudo, começando a ficar claro que poucas equações podiam ser resolvidas por métodos elementares; daí, uma das grandes preocupações passou a ser a de se encontrar condições para garantir a existência e unicidade de soluções, e deduzir propriedades da solução através da análise da própria equação diferencial.

O estudo das equações diferenciais ordinárias (EDO), é um importante e extenso campo de estudo na área de matemática pura e aplicada, que por sua vez, vem sendo uma área constantemente explorada, uma vez que, possui uma ampla dimensão de aplicações, seja no que diz respeito aos fenômenos físicos ou até mesmo à problemas do dia-a-dia.

Este trabalho teve como finalidade complementar os estudos vistos na graduação,

a cerca do estudo bibliográfico teórico sobre Equações Diferenciais, no qual alguns dos autores que deram suporte para que fosse possível tal construção dos conceitos e resultados foram: BASSANEZI [1], EDWARDS [5], FIGUEREDO [4], LEIGHTON [6], SANTOS [10], ZILL [11], E LOUREDO [7], que foram de fundamental importância para descrição do texto.

O presente trabalho foi dividido em três capítulos, onde no primeiro abordamos as definições básicas e terminologias sobre o estudo das equações, bem como sua forma geral. No segundo capítulo, estudamos alguns conceitos para a equação diferencial linear homogênea e não-homogênea de ordem  $n$ , como também, o método de variação de parâmetros para obtenção da solução particular de uma equação não-homogênea. Entretanto, o resultado mais importante neste capítulo é o Teorema de Existência e Unicidade de solução. E finalmente no terceiro e último capítulo, vimos a teoria e alguns resultados para sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem, em que utilizamos o processo de encontrar os autovalores e autovetores da matriz dos coeficientes do sistema para determinar a solução de um sistema linear.

# Capítulo 1

## Conceitos Básicos

Neste primeiro capítulo abordaremos alguns conceitos básicos essenciais para o entendimento acerca das equações diferenciais ordinárias, em particular lineares, bem como algumas terminologias das quais devemos nos familiarizar. Apresentaremos também o Teorema de existência e unicidade, que garante tanto a existência como também a unicidade de soluções em algum intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , desde que sejam satisfeitas algumas hipóteses.

### 1.1 Equações Diferenciais

**Definição 1.1.** (*Equações Diferenciais*) Uma equação que contém as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial.

As equações diferenciais podem ser classificadas quanto, ao **tipo**, a **ordem** e a **linearidade**.

#### 1.1.1 Classificação pelo Tipo

Se uma equação contém somente derivadas de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, ela é chamada de **equação diferencial ordinária** (EDO). Por outro lado, se uma equação diferencial contém as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes com relação a duas ou mais variáveis independentes, ela é chamada de **equação diferencial parcial** (EDP). Entretanto, nosso interesse neste

trabalho é focar no estudo apenas de EDO. A seguir veremos um exemplo que distingue uma EDO de uma EDP, respectivamente.

**Exemplo 1.1.**

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 1 \quad ; \quad \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x$$

**Exemplo 1.2.**

$$\begin{aligned} \frac{x \partial u}{\partial x} + \frac{y \partial u}{\partial y} &= u \\ \frac{x \partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2 \partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

Observemos, no Exemplo 1.1, que, nas equações as funções dependem apenas de uma variável. Enquanto que, no Exemplo 1.2 em cada equação, a função  $u$  depende de duas variáveis.

### 1.1.2 Classificação pela Ordem

A ordem da equação corresponde a maior ordem das derivadas que aparecem na equação.

No exemplo a seguir ilustramos uma equação de segunda ordem.

**Exemplo 1.3.** *Consideremos a equação,*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \left( \frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x.$$

Uma equação diferencial ordinária geral ou de  $n$ -ésima ordem é representada por

$$F \left( x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} \right) = 0, \quad \text{ou} \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

onde  $F$  é uma função que depende de  $x, y$  e das derivadas da função  $y$  até a ordem  $n$ .

Suponhamos que a equação se aplica para todo  $x$  no intervalo aberto  $I$ , contido no conjunto dos números reais, onde deixaremos claro que em todo nosso texto trataremos de funções definida na reta. Em muitos casos é conveniente isolar o termo de mais alta ordem da equação (1.1), escrevendo na forma

$$\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} = f \left( x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} \right) \quad \text{ou} \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

denominado forma **normal** da equação.

### 1.1.3 Classificação como Linear ou Não-linear

Uma equação diferencial é chamada de **linear** quando pode ser escrita na forma ilustrada a seguir,

$$a_n(x) \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} + a_{n-1}(x) \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \quad (1.2)$$

**Observação 1.1.** As equações diferenciais lineares caracterizam-se pela seguinte propriedade: cada coeficiente  $a_i(x)$  com  $i = 0, \dots, n$ , com  $n \in \mathbb{N}$  são funções reais que depende apenas de  $x$ , e contínuas em  $I \subset \mathbb{R}$ .

Caso contrário, dizemos que a equação é **não-linear**.

**Exemplo 1.4.** A equação diferencial abaixo linear, pois está na forma (1.2).

$$\frac{dy}{dx} + 5x^4y = x^4.$$

### 1.1.4 Soluções para Equações Diferenciais

**Definição 1.2 (Solução para uma Equação Diferencial).** Qualquer função  $y = y(x)$  definida em algum intervalo aberto  $I$ , de números reais tal que as  $n$  derivadas,  $\frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}$ , existam em  $I$  e satisfaçam a equação é dita uma solução explícita em  $I$ . Isto é,

$$F(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

**Exemplo 1.5.** Seja  $y(x)$  uma função definida por:

$$y(x) = x^2 - x^{-1}.$$

Vejamos que  $y(x)$  é uma solução explícita para a equação.

$$y'' - \frac{2}{x^2y} = 0.$$

**Solução:** Calculando as derivadas da função, isto é,  $y'(x) = 2x + x^{-2}$  e  $y''(x) = 2 - 2x^{-3}$ , notemos que são definidas para todo número real  $x \neq 0$ . Substituindo as funções na equação dada, obtemos

$$(2 - 2x^{-3}) - \frac{2}{x^2} (x^2 - x^{-1}) = (2 - 2x^{-3}) - (2 - 2x^{-3}) = 0.$$

Logo, para qualquer número real  $x \neq 0$ , a função explícita  $y(x)$  dada satisfaz a equação diferencial no intervalo  $(-\infty, 0)$  e também  $(0, +\infty)$ .

**Exemplo 1.6.** Consideremos as equações diferenciais de primeira ordem:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0 \quad e \quad (y')^2 + y^2 + 4 = 0.$$

Veremos que elas não possuem soluções.

**Solução:** De fato pois, para qualquer função real  $y = y(x)$  temos  $(y')^2 + 1 > 0$  e  $(y')^2 + y^2 + 4 > 0$ .

Assim, concluímos que nem toda equação admite necessariamente uma solução real. Por outro lado, a equação diferencial de segunda ordem,

$$(y'')^2 + 10y^4 = 0,$$

possui única solução  $y(x) = 0$  pois,

$$(y'')^2 + 10y^4 > 0 \quad \text{se} \quad y \neq 0.$$

**Definição 1.3 (Solução Implícita).** Uma relação  $G(x, y) = 0$  é dita uma **solução implícita**, para uma equação diferencial do tipo (1.1) no intervalo  $I$  se define uma ou mais soluções explícitas em  $I$ .

**Exemplo 1.7.** Dada a relação,  $y^2 - x^3 + 8 = 0$ , verifiquemos que esta define uma solução implícita para a equação não linear,

$$y' = \frac{3x^2}{2y} \quad \text{no intervalo} \quad (2, \infty).$$

**Solução:** Isolando a variável  $y$  temos,

$$y^2 = x^3 - 8,$$

daí, extraindo a raiz quadrada em ambos os membros obtemos,

$$y = \pm\sqrt{x^3 - 8},$$

que está bem definida para todo  $x > 2$ , ou seja, no intervalo  $(2, \infty)$ . Agora, vejamos que satisfaz a equação. Temos,

$$y(x) = \sqrt{x^3 - 8}, \quad \text{ou ainda,} \quad y(x) = (x^3 - 8)^{\frac{1}{2}},$$

de onde

$$y'(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 8)^{-\frac{1}{2}}(3x^2), \quad \text{ou ainda} \quad y'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 8}}$$



que também está bem definida para o intervalo  $(2, \infty)$ . Com isso, substituindo as funções  $y(x)$  e  $y'(x)$  na equação, obtemos

$$\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-8}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-8}}.$$

A verificação para a solução  $y(x) = -\sqrt{x^3-8}$  segue analogamente.

**Definição 1.4 (Curva Integral).** O gráfico de uma solução  $y(x)$  de uma equação diferencial ordinária é chamado curva integral. Uma vez que  $y(x)$  é uma função diferenciável, em  $I = \mathbb{R}$ , ela é contínua no seu intervalo de definição  $I$ .

Considerando a equação diferencial geral (1.1), quando resolvida, esperamos uma família a  $n$ -parâmetros de soluções arbitrários reais,

$$G(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0,$$

Isso significa dizer que uma equação diferencial, quando admite soluções, têm um número infinito de soluções em  $I$ , para escolhas convenientes das constantes arbitrárias.

**Definição 1.5 (Solução Particular).** A solução de uma equação diferencial ordinária, que não dependa de parâmetros arbitrários é chamada de solução particular.

**Exemplo 1.8.** Considerando a equação diferencial abaixo

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{3}x^2 = 0,$$

temos que, a solução  $y(x) = \frac{1}{9}x^3$ , definida em  $\mathbb{R}$ , é uma solução particular.

**Solução:** Com efeito,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{9}3x^2$$

onde, simplificando, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^2.$$

o que implica

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^2 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Definição 1.6 (Solução Geral ou Completa).** Consideremos a equação diferencial ordinária de ordem  $n$  do tipo (1.1),

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Se toda solução para esta equação puder ser obtida de uma família de soluções a  $n$ -parâmetros arbitrários, em um intervalo  $I$ ,

$$G(x, y(x), c_1, \dots, c_n) = 0,$$

por meio de escolhas apropriadas dos parâmetros  $c_i, i = 1, \dots, n$ , dizemos que a família é a **solução geral** da equação diferencial em  $I$ .

### 1.1.5 Problema de Valor Inicial

Nosso esforço neste tipo de problema é encontrar uma solução  $y(x)$  para uma equação diferencial de  $n$ -ésima ordem do tipo (1.1),

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}\right) = 0,$$

de maneira que  $y(x)$  satisfaça determinadas condições de contorno impostas; isto é, condições iniciais sujeitas a  $y(x)$ , como também, as suas derivadas, em um mesmo ponto. O problema,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad (1.3)$$

onde,  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  são constantes reais arbitrárias conhecidas, é denominado de problema de valor inicial (PVI). Os valores de  $y(x)$  e suas  $n - 1$  derivadas em um ponto  $x_0$ ,

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{n-1}(x_0) = y_{n-1},$$

são chamados de **condições iniciais**.

Agora consideremos um problema de valor inicial de segunda ordem, como apresentado abaixo

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1. \quad (1.4)$$

Queremos encontrar uma solução  $y(x)$  para a equação acima, em um intervalo  $I$  contendo  $x_0$ , de modo que o gráfico não somente passa pelo ponto  $(x_0, y_0)$ , mas também que a inclinação da curva  $y = y(x)$  nesse ponto seja  $y_1$ . Veja a figura abaixo:

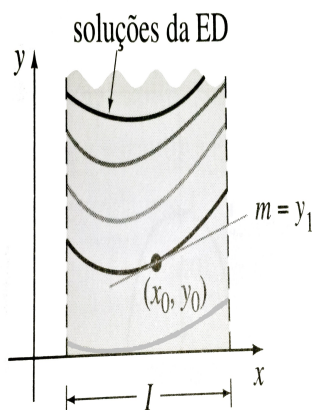


Figura 1.1: Gráfico PVI; Fonte: ZILL, 2001, Vol. 1.

A solução geral de um problema de valor inicial de ordem  $n$  dado por (1.3), de modo geral envolve uma família de soluções a  $n$ -parâmetros arbitrários da equação diferencial dada. Assim, usando as  $n$  condições iniciais conhecidas, determinamos os valores numéricos das  $n$  constantes na família. Com isso, cada solução particular resultante é diferente em  $I$ .

**Exemplo 1.9.** Vejamos que, para qualquer escolha das constantes  $c_1$  e  $c_2$ , a função

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x},$$

é uma solução da (EDO)  $y'' - y' - 2y = 0$ . Nestas condições, determine  $c_1$  e  $c_2$  tais que  $y(x)$  é uma solução para o PVI:

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}; \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = -3.$$

**Solução:** Determinando as derivadas primeira e segunda, temos:  $y'(x) = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x}$  e  $y''(x) = c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x}$ . Agora, substituindo as funções na equação, temos

$$y'' - y' - 2y = (c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x}) - (-c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x}) - 2(c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}),$$

o que implica,

$$y'' - y' - 2y = (c_1 + c_1 - 2c_1) e^{-x} + (4c_2 - 2c_2 - 2c_2) e^{2x} = 0.$$

Observamos que a igualdade vale para todo  $x$  em  $\mathbb{R}$ . Logo, a função  $y(x)$  dada acima é uma solução para a equação diferencial, para quaisquer escolhas das constantes  $c_1$  e  $c_2$ .

Assim, pelas condições iniciais dadas podemos encontrar as constantes. Como  $y(0) = 2$  e  $y'(0) = -3$ , temos

$$\begin{aligned}y(0) &= c_1 e^{-0} + c_2 e^{2 \cdot 0} = 2, \\y'(0) &= -c_1 e^{-0} + 2c_2 e^{2 \cdot 0} = -3;\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 &= 2 \\-c_1 + 2c_2 &= -3\end{aligned}$$

e, resolvendo este sistema pelo método da adição, obtemos

$$c_1 = \frac{7}{3} \quad e \quad c_2 = -\frac{1}{3}.$$

Portanto, a solução particular para a equação diferencial dada em  $\mathbb{R}$  é,

$$y(x) = \left(\frac{7}{3}\right) e^{-x} - \left(\frac{1}{3}\right) e^{2x}.$$

Ao considerarmos uma equação diferencial de primeira ordem sob determinadas condições impostas, no caso abaixo

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0,$$

somos induzidos aos seguintes questionamentos:

- (a) O problema considerado tem solução? Se existir será única?
- (b) Alguma curva integral passa pelo ponto  $(x_0, y_0)$ ?

Sendo assim, enunciaremos o teorema a seguir que garante, para a equação de primeira ordem, que quando existir solução para o PVI, tal solução será a única.

**Teorema 1.1. (Existência e Unicidade)**<sup>1</sup> Consideremos o PVI, a seguir;

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{1.5}$$

Sejam as funções  $f(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  contínuas em uma região retangular  $R$  no plano  $xy$ , definida por:

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

---

<sup>1</sup>O leitor interessado pode encontrar a demonstração do Teorema 1.1 na referência [2].

que contém o ponto  $(x_0, y_0)$  em seu interior. Então, existe algum intervalo aberto  $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , e uma **única solução**  $y(x)$  definida em  $I$  que satisfaz o problema de valor inicial.<sup>2</sup>

A seguir, vejamos a representação geométrica do Teorema 1.1. Logo após, veremos um exemplo onde utilizaremos o resultado de forma direta. Entretanto, consideremos a função  $\phi(x) = y(x)$  definida em  $I$  sendo a solução única do PVI.

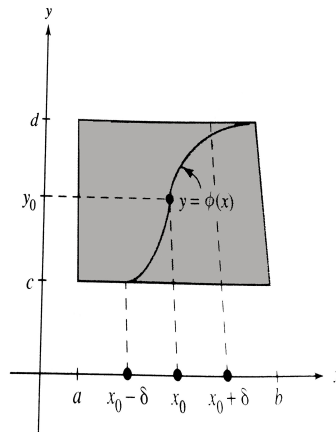


Figura 1.2: Gráfico Teorema de Existência e Unicidade; Fonte: NAGLE, EDWARD, 2012.

**Exemplo 1.10.** *Vejamos agora, o problema de valor inicial a seguir.*

$$3 \frac{dy}{dx} - x^2 + xy^3 = 0; \quad y(1) = 6.$$

*Verifiquemos que o PVI admite uma solução única.*

**Solução:** *Reescrevendo a equação dada obtemos,*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - xy^3}{3}; \quad y(1) = 6,$$

ou seja, temos um PVI da forma (1.5), onde  $f(x, y) = \frac{x^2 - xy^3}{3}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = -xy^2$ . Notamos que, tanto a função  $f(x, y)$  quanto a derivada primeira parcial  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são funções contínuas, em qualquer retângulo contendo o ponto  $(1, 6)$ , de maneira que as hipóteses do Teorema de existência e unicidade de soluções são atendidas. Logo, segue-se que o problema de valor inicial dado tem uma solução única em um intervalo centrado em  $x_0 = 1$ .

<sup>2</sup>O Teorema 1.1 é conhecido como Teorema de Picard. Charles Émile Picard matemático francês nasceu em 1856 morreu em 1941, fez significativas contribuições nas áreas de equações diferenciais e variáveis complexas.

*Portanto, com este Teorema temos como saber se existe algum intervalo centrado em  $x_0 = 1$  no qual o PVI dado tem uma única solução, sem necessariamente exibir a expressão da solução.*

# Capítulo 2

## Equações Homogêneas e Não-Homogêneas

Neste capítulo veremos os conceitos e alguns resultados envolvendo equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas e não-homogêneas de ordens maiores. Abordaremos por exemplo: problema de valor inicial, Wroskiano, independência linear de soluções, princípio da superposição, solução geral, fórmula de Euler, redução de ordem, equação diferencial homogênea com coeficientes constantes e variação dos parâmetros. tais teorias são necessárias para um bom entendimento do tema proposto.

### 2.1 Equações Diferenciais Lineares

#### 2.1.1 Problema de Valor Inicial e de Valor de Contorno

##### Problemas de Valor Inicial

Consideremos agora um problema de valor inicial para uma equação diferencial linear de ordem  $n$ , dado por

$$a_n(x) \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} + a_{n-1}(x) \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad \text{onde } a_n(x) \neq 0, \quad (2.1)$$

e

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Neste problema temos o interesse de encontrar uma função definida em algum intervalo  $I$ , contendo  $x_0$ , que satisfaça a equação diferencial e as  $n$  condições especificadas

em  $x_0$ :  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ . Porém, vimos anteriormente no capítulo 1 que, para um problema de valor inicial de segunda ordem, uma solução deve passar pelo ponto  $(x_0, y_0)$  e ter inclinação  $y_1$  nesse ponto.

Sem perda de generalidade consideremos o caso  $n = 2$ , considerando uma equação de segunda ordem, para melhor compreensão das propriedades. Esta equação é representada na forma:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$

e ainda, como  $a_2(x) \neq 0, \forall x \in I$ , dividindo a equação por  $a_2(x)$  e escrevendo  $\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = p(x), \frac{a_0(x)}{a_2(x)} = q(x)$  e  $\frac{g(x)}{a_2(x)} = f(x)$ , obtemos a equação linear de segunda ordem,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

conhecida como **forma padrão**.

A seguir enunciaremos um Teorema que dá condições suficientes para a existência de uma única solução do PVI (2.1).

**Teorema 2.1. (*Existência de Solução Única*)** *Sejam  $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$  e  $g(x)$  contínuas em um intervalo  $I$  e seja  $a_n(x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ . Se  $x_0$  for um ponto qualquer nesse intervalo, então existe uma única solução  $y(x)$  do problema de valor inicial (2.1) nesse intervalo.*

Vejamos um exemplo a seguir que relaciona o Teorema 2.1

**Exemplo 2.1.** *Dado o seguinte problema*

$$y'' - 4y = 12x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 1,$$

*considere a função  $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$  e verifiquemos que esta é uma solução do problema de valor inicial.*

**Solução:** A priori vejamos que a função dada satisfaz a equação. Logo após, analisemos o problema de valor inicial. Calculando a primeira e segunda derivadas obtemos

$$y' = 6e^{2x} - 2e^{-2x} - 3 \quad \text{e} \quad y'' = 12e^{2x} + 4e^{-2x}.$$

Observe que as condições iniciais são satisfeitas, pois  $y(0) = 3e^0 + e^0 - 0 = 4$  e  $y'(0) = 6e^0 - 2e^0 - 3 = 1$ . Além disso,

$$y'' - 4y = (12e^{2x} + 4e^{-2x}) - 4 \cdot (3e^{2x} + e^{-2x} - 3x) = 12e^{2x} + 4e^{-2x} - 12e^{2x} - 4e^{-2x} + 12x = 12x.$$



Portanto, a função dada é solução da equação, para todo  $x$  real. Por outro lado, observemos que a equação é linear, onde os coeficientes são constantes. Além disso, os coeficientes e a função  $g(x)$  são contínuas,  $a_1(x) = 1 \neq 0$ . Logo, como são satisfeitas todas as hipóteses do Teorema 2.1, concluímos, que a função dada é a única solução para o problema na reta real.

### 2.1.2 Problema de Valor de Contorno

Veremos outro tipo de problema envolvendo uma equação linear de segunda ordem ou ordem superior, em que a função incógnita  $y$  e suas derivadas são especificadas em pontos distintos contidos no intervalo. Um problema do tipo

$$a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (2.2)$$

com,

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1,$$

é denominado de **Problema de valor de contorno**. Os valores  $y(a) = y_0$  e  $y(b) = y_1$  são chamados de **condições de contorno**. Uma solução para esse problema é uma função que satisfaz a equação diferencial em algum intervalo  $I$ , contendo  $a$  e  $b$ , cujo gráfico passa pelos pontos  $(a, y_0)$  e  $(b, y_1)$ .

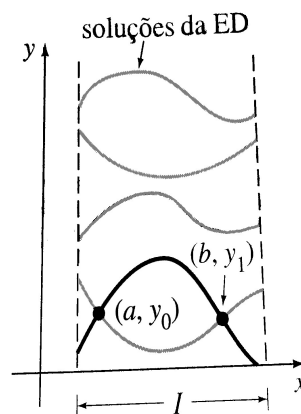


Figura 2.1: Gráfico Problema de Valor de Contorno; Fonte: ZILL, 2001, Vol.1.

**Exemplo 2.2.** Considere o seguinte problema de contorno:

$$y'' + 4y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Vejamos que a solução é dada por

$$y(x) = A \cos(2x) + B \operatorname{sen}(2x).$$

Calculando as derivadas, obtemos

$$y' = -2A \operatorname{sen}(2x) + 2B \cos(2x),$$

$$y'' = -4A \cos(2x) - 4B \operatorname{sen}(2x).$$

Assim, substituindo na equação diferencial, tem-se

$$(-4A \cos(2x) - 4B \operatorname{sen}(2x)) + 4[A \cos(2x) + B \operatorname{sen}(2x)] = 0.$$

Agora, analisemos o problema de valor de contorno. Aplicando as condições de contorno impostas, tem-se:

$$y(0) = A \cos(2 \cdot 0) + B \operatorname{sen}(2 \cdot 0)$$

$$0 = A \cdot 1 + 0$$

$$A = 0.$$

Notemos que, para qualquer valor de  $B$ , a condição  $y(\pi) = 0$  é satisfeita, pois

$$y(\pi) = A \cos(2\pi) + B \operatorname{sen} 2\pi$$

$$y(\pi) = 0 \cdot 1 + B \cdot 0 = 0.$$

Portanto, a função

$$y(x) = B \operatorname{sen}(2x)$$

satisfaz o problema de valor de contorno, para qualquer valor de  $B$ . Logo, concluímos que este problema admite infinitas soluções não-triviais.

**Definição 2.1 (Dependência e Independência Linear).** Um conjunto de funções

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x),$$

será chamado de **linearmente dependente (LD)**, em um intervalo  $I$ , se houver constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , não todas nulas, de forma que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0,$$

para todo  $x$  no intervalo.

Se o conjunto de funções não for linearmente dependente no intervalo, dizemos que é **linearmente independente (LI)**.

Agora consideremos um caso particular, quando  $n = 2$ , para entendermos melhor tal conceito. Sejam duas funções  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$ , linearmente dependentes. Então, existem  $c_1$  e  $c_2$  não ambas nulas, em que para todo  $x$  no intervalo  $I$  tem-se

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0.$$

Considerando  $c_1 \neq 0$ , temos

$$f_1(x) = \left( \frac{-c_2}{c_1} \right) f_2(x) = c f_2(x)$$

onde,

$$c := \frac{-c_2}{c_1},$$

o que nos fornece a afirmação que, se duas funções forem linearmente dependentes, então uma função é múltipla da outra.

A partir desta conclusão, tem-se que duas funções serão linearmente independentes quando uma não é múltiplo da outra.

Generalizando a ideia, deduzimos que, um conjunto de funções  $f_1, f_2, \dots, f_n$  é linearmente dependente em um intervalo  $I$ , se pelo menos uma função puder ser escrita como uma combinação linear das demais funções. Vejamos, o exemplo a seguir:

**Exemplo 2.3.** *Sejam as funções  $f_1(x) = \sin(2x)$  e  $f_2(x) = \sin x \cos x$ , definidas em  $\mathbb{R}$ . Verifiquemos se são linearmente dependentes, ou independentes.*

**Solução:** *Inicialmente, utilizando a fórmula do arco duplo para função  $f_1(x) = \sin(2x)$ , temos,  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x = 2 f_2(x)$ . Logo,*

$$f_1(x) = 2f_2(x).$$

*Portanto, dizemos que as funções  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  são linearmente dependentes para todo  $x$  em  $\mathbb{R}$ .*

## 2.2 Equações Homogêneas

Uma equação homogênea é escrita da forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = 0, \quad (2.3)$$

onde temos que a função  $g(x)$ , na equação (2.1), é identicamente nula, porém, quando  $g(x) \neq 0$  dizemos que a equação é **não homogênea**. Veremos no decorrer do trabalho,

que para determinar a solução de uma equação não homogênea precisamos antes encontrar a solução para equação homogênea associada (2.3).

### 2.2.1 Princípio da Superposição

No teorema a seguir veremos que a soma (ou superposição) de duas ou mais soluções da equação diferencial linear homogênea é também uma solução.

**Teorema 2.2. (Princípio da Superposição - Equações Homogêneas)** *Sejam  $y_1, y_2$  duas soluções da equação diferencial homogênea de ordem  $n$  (2.3), em um intervalo  $I$ . Então, a combinação linear*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

*é também uma solução. Onde  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ .*

**Demonstração:** *Provaremos para o caso particular  $k = 2$ .*

*Sejam  $y_1$  e  $y_2$  soluções em um intervalo  $I$  para a equação (2.3). Assim, substituindo na equação temos,*

$$\begin{aligned} & a_n(x) (c_1 y_1 + c_2 y_2)^{(n)} + \cdots + a_1(x) (c_1 y_1' + c_2 y_2') + a_0(x) (c_1 y_1 + c_2 y_2) = \\ & = a_n(x) c_1 y_1^{(n)} + a_n(x) c_2 y_2^{(n)} + \cdots + a_1(x) c_1 y_1' + a_1(x) c_2 y_2' + a_0(x) c_1 y_1 + a_0(x) c_2 y_2 = \\ & = c_1 \left[ a_n(x) y_1^{(n)} + \cdots + a_1(x) y_1' + a_0(x) y_1 \right] + c_2 \left[ a_n(x) y_2^{(n)} + \cdots + a_1(x) y_2' + a_0(x) y_2 \right] = \\ & = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

*pois, por hipótese,  $y_1$  e  $y_2$  são soluções.* ■

*O resultado pode ser generalizado para um número  $k$  de soluções, a prova segue analogamente ao caso  $k = 2$ .*

**Exemplo 2.4.** *Sejam as três funções apresentadas a seguir:*

$$y_1(x) = e^{3x}, \quad y_2(x) = \cos 2x, \quad y_3(x) = \operatorname{sen} 2x,$$

*que são soluções da equação linear homogênea de terceira ordem abaixo:*

$$y^{(3)} - 3y'' + 4y' - 12y = 0.$$

*Assim, pelo Teorema 2.2, a combinação destas soluções ainda será uma solução para equação diferencial dada.*

**Observação 2.1.** (a) Uma equação diferencial homogênea sempre tem a solução trivial  $y = 0$ .

(b) Um múltiplo constante  $cy$  de uma solução  $y$  de uma equação diferencial homogênea é também uma solução.

## 2.3 Operadores Diferenciais

Uma equação diferencial linear pode ser escrita em termos de operadores diferenciais, denotado por  $D$ .  $y = y(x)$  é uma função diferenciável em  $I$ , definimos  $Dy := \frac{dy}{dx}$ . Naturalmente as derivadas de ordem superior podem ser expressas, em termos de  $D$ , de uma forma natural como:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = D(Dy) = D^2y$$

e, em geral,

$$\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} = D^n y.$$

Por outro lado, expressões polinomiais envolvendo  $D$  são também, operadores diferenciais. Por exemplo, temos o operador diferencial de  $n$ -ésima ordem da forma,

$$L = a_n(x)D^{(n)} + a_{n-1}(x)D^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x). \quad (2.4)$$

A partir das duas propriedades básicas da diferenciação, temos que,  $D[cf(x)] = cD[f(x)]$ , onde  $c$  é uma constante, e  $D[f(x) + g(x)] = Df(x) + Dg(x)$ . Com isso, segue-se que o operador diferencial  $L$  possui a **propriedade da linearidade**, isto é,

$$L[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha L[f(x)] + \beta L[g(x)], \quad (2.5)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes. Por conta da propriedade (2.5), dizemos que o operador diferencial  $L$ , de ordem  $n$ , é um **operador linear**.

Sob essas afirmações poderemos representar uma equação diferencial linear, na forma expressa pelo operador  $D$ . Vejamos um exemplo a seguir, ilustrando essa ideia.

**Exemplo 2.5.** Consideremos a equação diferencial linear não-homogênea,  $y'' + 5y' + 6y = 5x - 3$ . Assim, podemos escreve-la como:

$$D^2y + 5Dy + 6y = 5x - 3,$$

ou ainda,

$$(D^2 + 5D + 6)y = 5x - 3.$$

Através da expressão (2.4) podemos escrever a equação diferencial linear homogênea e não homogênea de ordem  $n$  na forma compacta, como:

$$L(y) = 0 \quad \text{e} \quad L(y) = g(x).$$

A definição a seguir nos dará suporte para o critério de independência linear de funções.

**Definição 2.2. (Wronskiano)**<sup>1</sup> *Sejam as funções  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  diferenciáveis pelo menos  $n-1$  vezes em algum intervalo aberto  $I$ . Consideremos a função (determinante),*

$$W(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) := \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

A função  $W(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$  é chamada de **wronskiano das funções**  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ .

O teorema seguinte proporciona condições suficientes para identificar de uma maneira prática, a independência linear de  $n$ -funções em algum intervalo  $I$ .

**Teorema 2.3. (Critério para Independência Linear de Funções)**

*Suponhamos que as funções  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  sejam diferenciáveis pelo menos  $n-1$  vezes em algum intervalo  $I$ . Se o Wronskiano for diferente de zero em pelo menos um ponto do intervalo  $I$ , então as funções  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  são linearmente independentes em  $I$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $W(f_1, f_2, \dots, f_n)(x_0) \neq 0$  para algum ponto  $x_0$  em  $I$ , e suponha que  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sejam (LD) no intervalo  $I$ . Assim, por serem (LD), decorre que existem escalares  $c_1, \dots, c_n$ ,  $i = 1, \dots, n$ , não todos nulos, tais que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0, \quad \text{para cada } x \in I. \quad (2.6)$$

---

<sup>1</sup>**Josef Maria Hoene Wronski** nasceu na Polônia em 1778, foi educado na Alemanha, morreu em 1853, mais filósofo do que um matemático.

Mas por hipótese as  $n$ -funções são diferenciáveis em  $I$ ; assim, calculando as  $n-1$  derivadas da equação (2.6), obtemos a equação matricial

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Como existe uma solução não-trivial  $X = (c_1, \dots, c_n)$ , de (2.7), pois os escalares  $c_i$  não são todos nulos, a matriz dos coeficientes da equação (2.7) será não invertível; isto é, seu determinante é nulo. Logo,

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in I,$$

o que por sua vez, é uma contradição, pois supomos  $W(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) \neq 0$  em algum  $x \in I$ . Por conseguinte, concluímos que as funções  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  são (LD) em  $I$ . ■

A seguir veremos um exemplo deste fato.

**Exemplo 2.6.** Verifiquemos que as funções trigonométricas dadas por  $f(x) = \operatorname{sen} x$  e  $g(x) = \operatorname{cos} x$ , definidas em  $\mathbb{R}$ , são (LI) em  $\mathbb{R}$ .

**Solução:** Pela definição do Wronskiano temos

$$W(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{cos} x \\ \operatorname{cos} x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}.$$

Calculando o determinante temos

$$W(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x) = (-\operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{cos}^2 x = -(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x) = -1.$$

Daí, como o  $W(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x) = -1 \neq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , segue do Teorema 2.3 que as funções  $f$  e  $g$  são LI em  $\mathbb{R}$ .

Em contrapartida, veremos no próximo exemplo que a recíproca do Teorema 2.3 em geral não vale; isto é, podemos ter funções LI e o Wronskiano ser identicamente nulo.

**Exemplo 2.7.** *Sejam as funções,*

$$f(x) = x^3$$

e

$$g(x) = |x|^3 = \begin{cases} x^3, & \text{se } x \geq 0, \\ -x^3, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

definidas em  $\mathbb{R}$ . Note que, para  $x \geq 0$

$$W(x^3, |x|^3) = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Agora, para  $x \leq 0$ , temos

$$W(x^3, |x|^3) = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Entretanto, as funções dadas  $f$  e  $g$  são linearmente independentes em  $\mathbb{R}$ , pois se as constantes  $c_1$  e  $c_2$  satisfazem a combinação linear,

$$c_1x^3 + c_2|x|^3 = 0$$

temos em particular, para  $x = 1$  e  $x = -1$ ,

$$c_11^3 + c_2|1|^3 = 0$$

e

$$c_1(-1)^3 + c_2|-1|^3 = 0$$

assim,

$$c_1 + c_2 = 0$$

e

$$-c_1 + c_2 = 0.$$

Resolvendo este sistema, pelo método da adição, concluímos que  $c_1 = c_2 = 0$ , o que mostra a independência linear das funções  $f$  e  $g$  em  $I$ .

**Corolário 2.1.** *Se o conjunto de funções  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  possuem pelo menos  $n - 1$  derivadas e são linearmente dependentes no intervalo aberto  $I$ , então*

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) = 0,$$

para todo  $x$  em  $I$ .



**Observação 2.2.** *A prova do Corolário 2.1 segue naturalmente, pela negação Teorema 2.3, ou seja, uma contra-positiva.*

**Exemplo 2.8.** *Sejam as funções trigonométricas  $f_1(x) = \sin^2 x$  e  $f_2(x) = 1 - \cos 2x$ . Verifiquemos que essas são funções linearmente dependentes em  $\mathbb{R}$ . Então, segue do Corolário 2.1 que  $W(f_1, f_2)(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .*

**Teorema 2.4. (Critério para Independência Linear de Soluções)**

*Seja  $\{y_1, y_2\}$  um conjunto de soluções para a equação diferencial linear homogênea de  $n$ -ésima ordem (2.3), em um intervalo aberto  $I$ . Então, o conjunto de soluções é linearmente independente em  $I$  se, e somente se,  $W(y_1, y_2) \neq 0$  para todo  $x$  em  $I$ .*

**Demonstração:** Provaremos o caso  $n = 2$  para a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem. Suponhamos que  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0, \forall x \in I$ , pelo Teorema 2.3, segue que as soluções  $y_1$  e  $y_2$  são (LI) em  $I$ . Reciprocamente, se as soluções são (LI) em  $I$ , e supondo que exista um ponto  $x_0$  em  $I$  tal que,  $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$ , existem constantes  $c_1$  e  $c_2$  reais não nulas, tais que:

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0,$$

e

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0.$$

Ou equivalentemente:

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0,$$

admite solução  $(c_1, c_2)$  não nula. Logo, a matriz dos coeficientes é não invertível. Agora, considere a função dada pela combinação a seguir

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Como  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da equação diferencial homogênea (2.3), pelo Teorema 2.2,  $y(x)$  também é solução da equação. Ainda mais,

$$y(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(x_0) = 0.$$

Como a função identicamente nula  $y(x) \equiv 0$  satisfaz a equação 2.2 e as condições iniciais acima, segue pelo Teorema 2.1, de existência e unicidade, que  $y(x) = 0$  é a única solução para todo  $x \in I$ . Logo,

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0,$$

para todo  $x$  em  $I$ . Assim,  $y_1$  e  $y_2$  são linearmente dependentes, o que é um absurdo, pois, por hipótese, as soluções são linearmente independentes. Portanto, isso mostra que  $W(y_1, y_2)$  deve ser diferente de zero para todo  $x$  em  $I$ . ■

O Teorema 2.4 é válido para o caso geral com  $n$  soluções, e sua prova segue analogamente ao caso  $n = 2$ .

A seguir veremos a definição sobre conjunto fundamental de soluções para uma equação diferencial linear homogênea de  $n$ -ésima ordem (2.3).

**Definição 2.3. (Conjunto Fundamental de Soluções)**

Qualquer conjunto  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  de  $n$  soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de  $n$ -ésima ordem, (2.3), em um intervalo aberto  $I$ , é chamado de **conjunto fundamental de soluções** no intervalo.

**Teorema 2.5.** *Seja  $\{y_1, y_2\}$  o conjunto de soluções linearmente independentes para a equação (2.3), em um intervalo aberto  $I$ . Então, toda solução  $Y(x)$  para (2.3) é uma combinação linear das soluções independentes,  $y_1, y_2$  ou seja, podemos encontrar constantes  $c_1, c_2$  tais que*

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

para todo  $x$  em  $I$ .

**Demonstração:** Sejam duas soluções  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  para a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem,

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Seja  $Y(x)$  uma solução e sejam  $y_1$  e  $y_2$  duas soluções linearmente independentes em um intervalo aberto  $I$  para a equação diferencial acima. Suponhamos que  $x = t$  seja um ponto deste intervalo para o qual  $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ . Suponhamos também que os valores de  $Y(t)$  e  $Y'(t)$  sejam,

$$Y(t) = k_1 \quad \text{e} \quad Y'(t) = k_2.$$

Considere o sistema,

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = k_1$$

$$c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t) = k_2,$$

pela regra de Cramer, segue-se que podemos determinar as incógnitas  $c_1$  e  $c_2$  de forma única, desde que o determinante dos coeficientes satisfaça

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Porém, por definição, este determinante é o Wronskiano de  $y_1$  e  $y_2$  aplicado em  $x = t$  e, por hipótese,  $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ . Assim, se definirmos então a função

$$G(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad \text{com } c_1, c_2 \text{ constantes quaisquer,}$$

temos que,  $G(x)$  é também solução para a equação diferencial, pois  $y_1$  e  $y_2$  são soluções pelo Teorema 2.2 Além disso,

- $G(x)$  satisfaz as condições iniciais aplicadas em  $x = t$ , isto é,

$$G(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = k_1$$

e

$$G'(t) = c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t) = k_2$$

•  $Y(x)$  satisfaz a mesma equação linear dada e as mesmas condições iniciais. Logo, como a solução para esse problema de valor inicial é única (Teorema 2.1), concluímos que

$$Y(x) = G(x)$$

ou,

$$Y(x) = G(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

■

O Teorema 2.5 é válido sem perda de generalização para o caso de se ter  $n$  soluções linearmente independentes  $y_1, \dots, y_n$ . A prova segue análoga ao caso  $n = 2$ .

**Exemplo 2.9.** Consideremos as funções dadas por

$$y_1(x) = e^{2x} \quad e \quad y_2(x) = e^{-2x}.$$

É evidente que são soluções linearmente independentes para a equação

$$y'' - 4y = 0.$$

Basta verificar através do  $W(y_1, y_2)(x)$ .

Mas as funções hiperbólicas  $y_3(x) = \cos h 2x$  e  $y_4(x) = \sinh 2x$  são também soluções da equação acima. Verifiquemos que  $y_3(x)$ , é solução, e decorre de forma análoga a prova que  $y_4(x)$ , também é, solução. Vajamos

$$y_3'(x) = (\cos h 2x)' = 2 \sinh 2x$$

$$y_3''(x) = (2 \sinh 2x)'' = 4 \cos h 2x.$$

Com isso, substituindo na equação  $y'' - 4y = 0$ , deduzimos que

$$4 \cos h 2x - 4 \cos h 2x = 0,$$

que verifica a equação dada. Daí, segue-se, do Teorema 2.5, que as funções hiperbólicas  $\cos h 2x$  e  $\sinh 2x$  podem ser expressas como combinações lineares de  $y_1 = e^{2x}$  e  $y_2 = e^{-2x}$ .

**Teorema 2.6. (Existência de um Conjunto Fundamental)**<sup>4</sup> Existe um conjunto fundamental de soluções em um intervalo aberto  $I$ , para a equação diferencial linear homogênea de ordem  $n$ , (2.3).

**Definição 2.4. (Solução Geral para Equações Homogêneas)** Seja  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  um conjunto de  $n$  soluções linearmente independentes para a equação (2.3), em um intervalo aberto  $I$ . A **solução geral** para a equação no intervalo é definida da seguinte forma:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n,$$

tal que os  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , são constantes arbitrárias.

**Exemplo 2.10.** Dada a equação diferencial linear homogênea  $y'' - 9y = 0$  e duas soluções para a mesma,

$$y_1(x) = e^{3x} \quad e \quad y_2(x) = e^{-3x}.$$

O Wronskiano,

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = e^{3x} \cdot (-3e^{-3x}) - (3e^{3x} \cdot e^{-3x}) = -6 \neq 0,$$

<sup>4</sup>A demonstração do Teorema 2.6 pode ser encontrada na referência [5].

para todo valor de  $x$  em  $\mathbb{R}$ . Assim, pelo Teorema 2.4, temos que  $y_1$  e  $y_2$  são linearmente independentes. Pela Definição 2.3 segue que as soluções formam um conjunto fundamental de soluções e, pela Definição 2.4, temos que a solução geral para a equação diferencial dada acima é,

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}.$$

Agora, veremos por outro lado, que a função definida por:

$$y = 4 \sinh 3x - 5 e^{-3x}$$

também é uma solução. Vejamos calculando as derivadas

$$y'' = (12 \cosh 3x + 15 e^{-3x})' = 36 \sinh 3x - 45 e^{-3x}.$$

Daí, substituindo na equação  $y'' - 9y = 0$ , temos:

$$(36 \sinh 3x - 45 e^{-3x}) - 9 \cdot (4 \sinh 3x - 5 e^{-3x}) = 0.$$

Logo, a função  $y = 4 \sinh 3x - 5 e^{-3x}$  é solução para a equação diferencial acima. Observando esta última solução, vemos que esta é uma combinação linear de  $y_1$  e  $y_2$ . Para valores convenientes dos parâmetros devemos ser capazes de obter essa solução com base na solução geral, vista anteriormente,  $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$ . Se escolhermos, por exemplo, os valores  $c_1 = 2$  e  $c_2 = -7$ , então,  $y = 2 e^{3x} - 7 e^{-3x}$  poderá ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} y &= 2 e^{3x} - 2 e^{-3x} - 5 e^{-3x} \\ &= 4 \cdot \left( \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2} \right) - 5 e^{-3x} \\ &= 4 \cdot \sinh 3x - 5 e^{-3x}. \end{aligned}$$

Lembre-se que por definição  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

## 2.4 Equações Não-Homogêneas

Veremos a seguir a definição de solução geral para a equação diferencial linear não-homogênea de ordem  $n$ , (2.3), onde a função  $g(x) \neq 0$ . Para tanto, devemos conhecer antes uma solução particular  $y_p$  a qual é uma solução que não depende de parâmetros. Precisaremos também determinar a solução geral para a equação homogênea correspondente. Assim, segue a seguinte definição.

**Definição 2.5. (Solução Geral para Equações Não-Homogêneas)** Seja  $y_p$  uma solução particular da equação diferencial linear não homogênea de ordem  $n$ , em um intervalo aberto  $I$ , e seja  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  um conjunto fundamental de  $n$  soluções da equação diferencial homogênea correspondente, (2.3), em  $I$ . Então, a solução geral ou completa é definida por

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n + y_p \quad (2.8)$$

onde,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são constantes arbitrárias

ou

$$y = y_c + y_p,$$

$y_c$  é a solução geral da solução homogênea associada.

**Exemplo 2.11.** A função  $y_p(x) = \frac{x}{4}$ , é uma solução particular para a equação não-homogênea abaixo,

$$y'' + 4y = x,$$

e  $y_1(x) = \cos 2x$  e  $y_2(x) = \sin 2x$  são duas soluções fundamentais para a equação homogênea correspondente.

**Solução:** A priori, observamos que a função  $y_p = \frac{x}{4}$  é solução particular, pois verifica a equação dada e independe de parâmetro. Com efeito,

$$y_1' = -2 \sin 2x, \quad y_1'' = -4 \cos 2x$$

e

$$y_2' = 2 \cos 2x, \quad y_2'' = -4 \sin 2x.$$

Sendo assim, substituindo na equação  $y'' + 4y = 0$ , vem:

$$y_1'' + 4y_1 = 0 \Rightarrow (-4 \cos 2x) + 4 \cdot (\cos 2x) = 0.$$

Analogamente, temos que  $y_2(x) = \sin 2x$  também satisfaz a equação correspondente.

Por outro lado, temos:

$$W(\cos 2x, \sin 2x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{vmatrix} = 2(\cos^2 2x + \sin^2 2x) = 2 \cdot 1 = 2 \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo,  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  são soluções linearmente independentes, como afirmado anteriormente. Por conseguinte, pelo Definição 2.4, a solução geral para a equação homogênea correspondente é

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x, \text{ onde } c_1 \text{ e } c_2 \text{ são constantes arbitrárias.}$$

Portanto, a solução geral para a equação não-homogênea é

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{x}{4}.$$

**Teorema 2.7. (Princípio de Superposição para Equações Diferenciais Não-Homogêneas)** Seja  $\{y_{p_1}, y_{p_2}, \dots, y_{p_k}\}$  um conjunto de  $k$  soluções particulares da equação diferencial linear não-homogênea de ordem  $n$  em um intervalo aberto  $I$ , correspondendo por sua vez, a  $k$  funções distintas  $g_1, g_2, \dots, g_k$ . Suponha que  $y_{p_i}$  denote uma solução particular da equação diferencial,

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_i(x),$$

onde,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Então,

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \dots + y_{p_k}(x)$$

é uma solução particular da equação

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_k(x).$$

**Demonstração:** Abordaremos a prova para o caso  $n = 2$  e a generalização se estende de forma semelhante. Suponhamos que as funções  $y_{p_1}$  e  $y_{p_2}$  sejam respectivamente duas soluções particulares conhecidas em um intervalo aberto  $I$ , para as equações lineares não-homogênea de segunda ordem em sua forma padrão:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g_1(x)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g_2(x).$$

Com isso, queremos provar que:

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$$

é solução para a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g_1(x) + g_2(x).$$

Note que,

$$\begin{aligned} y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p &= (y_{p_1} + y_{p_2})'' + p(x)(y_{p_1} + y_{p_2})' + q(x)(y_{p_1} + y_{p_2}) \\ &= y_{p_1}'' + y_{p_2}'' + p(x)y_{p_1}' + p(x)y_{p_2}' + q(x)y_{p_1} + q(x)y_{p_2} \\ &= [y_{p_1}'' + p(x)y_{p_1}' + q(x)y_{p_1}] + [y_{p_2}'' + p(x)y_{p_2}' + q(x)y_{p_2}], \end{aligned}$$

mas, por hipótese,  $y_{p_1}$  e  $y_{p_2}$  são soluções respectivamente das equações de segunda ordem consideradas; portanto, temos:

$$y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = g_1(x) + g_2(x),$$

Sendo assim, esta igualdade prova que  $y_p$  é solução para a equação abaixo

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g_1(x) + g_2(x).$$

■

Veremos a seguir um exemplo para melhor entendimento do resultado acima.

**Exemplo 2.12.** *Vimos anteriormente, no Exemplo 2.11, que  $y_{p_1} = \frac{x}{4}$  é solução particular da equação*

$$y'' + 4y = x.$$

*Por outro lado, temos que  $y_{p_2} = \frac{x}{2} \operatorname{sen} 2x$ , (deixamos como verificação para o leitor) é solução particular para a equação*

$$y'' + 4y = 2 \cos 2x.$$

*Temos, pelo Teorema 2.7, que:*

$$y_p(x) = \frac{x}{4} + \frac{x}{2} \cdot \operatorname{sen} 2x$$

*é solução para a equação*

$$y'' + 4y = x + 2 \cos 2x.$$

*Mas, também vimos no Exemplo 2.11, que a solução de equação homogênea associada a última equação é  $y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$ . Então, segue que a solução geral da equação  $y'' + 4y = x + 2 \cos 2x$  é*

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \left( \frac{x}{4} + \frac{x}{2} \cdot \operatorname{sen} 2x \right).$$



## 2.5 Fórmula de Euler

Nesta seção nós veremos uma equação muito conhecida, chamada de Fórmula de Euler, em que deduziremos sua expressão conforme mostra SANTOS [10]. Esta por sua vez, será de extrema importância para nossos estudos no decorrer do texto sobre equações diferenciais lineares com os coeficientes constantes, em particular, de segunda ordem, de modo que utilizaremos a mesma para escrevermos soluções complexas em função de números reais, obtendo assim, soluções reais.

Queremos estabelecer uma função exponencial, digamos  $e^{rx}$  para números complexos da forma  $r = a + ib$  tal que  $a, b \in \mathbb{R}$ , de modo que satisfaça as seguintes relações:

$$\begin{cases} e^{rx} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} e^{ibx} \\ \frac{d}{dx}(e^{rx}) = r e^{rx} \end{cases} \quad (2.9)$$

Observemos que a função definida por  $z(x) = e^{ibx}$  é solução da equação diferencial  $y'' + b^2 y = 0$ , pois pela última linha da relação (2.9) temos

$$z'(x) = ibe^{ibx}, \quad z''(x) = -b^2 e^{ibx} = -b^2 \cdot z(x),$$

pois,  $i = \sqrt{-1}$  e  $i^2 = -1$ , assim  $z(x)$  verifica a equação

$$z''(x) + b^2 z'(x) = 0.$$

Daí, se considerarmos o problema de valor inicial

$$y'' + b^2 y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = ib,$$

temos que  $z(x) = e^{ibx}$  é solução deste problema, pois satisfaz as condições iniciais impostas. Agora, sendo  $y_1(x) = \cos bx$  e  $y_2(x) = \operatorname{sen} bx$  soluções fundamentais (basta verificar a afirmativa) da equação  $y'' + b^2 y = 0$ , então pelo Teorema 2.5 sabemos que existem constantes  $c_1$  e  $c_2$ , tais que

$$z(x) = e^{ibx} = c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx. \quad (2.10)$$

Fazendo  $x = 0$  na equação (2.10), obtemos

$$e^{ib \cdot 0} = c_1 \cos b \cdot 0 + c_2 \operatorname{sen} b \cdot 0.$$

Daí encontramos  $c_1 = 1$ . Derivando a equação (2.10) obtemos

$$ibe^{ibx} = -c_1 b \operatorname{sen} bx + c_2 b \cos bx. \quad (2.11)$$

Se tomarmos  $x = 0$  na equação (2.11) obtemos que  $c_2 = i$ . Logo, substituindo-se  $c_1 = 1$  e  $c_2 = i$  na equação (2.10), deduzimos

$$e^{ibx} = \cos bx + i \operatorname{sen} bx.$$

Portanto, pela propriedade (2.9)

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \operatorname{sen} bx). \quad (2.12)$$

Fazendo  $x = 1$ , obtemos:

$$e^{(a+ib)} = e^a \cdot (\cos b + i \operatorname{sen} b).$$

Entretanto, se  $a = 0$ , temos,

$$e^{ib} = \cos b + i \operatorname{sen} b. \quad (2.13)$$

Esta equação (2.13) é denominada **Fórmula de Euler**.<sup>5</sup>

Veremos um exemplo que reflete o caso direto da fórmula de Euler.

**Exemplo 2.13.** *Aplicando a fórmula de Euler, podemos justificar a igualdade,*

$$e^{i\pi} = -1$$

**Solução:** Pela expressão de Euler temos de forma direta que

$$e^{(\alpha+i\beta)} = e^\alpha \cdot (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta),$$

em que  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Assim, para o primeiro caso, sendo  $\alpha = 0$  e  $\beta = \pi$ , temos:

$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi \\ &= -1 + i \cdot 0 = -1, \end{aligned}$$

o que mostra a igualdade pedida.

## 2.6 Construindo uma Segunda Solução a partir de uma Solução Conhecida

### Redução de Ordem

---

<sup>5</sup>Leonhard Euler nasceu em Basiléia, Suíça, em 15 de abril de 1707 e morreu em São Petersburgo em 18 de setembro de 1783. Euler foi considerado gênio do século. Foi físico, matemático, entre outros. Contribuiu em diversas áreas, em particular, cálculo, equações diferenciais, entre outras.

Conforme ZILL ([11], p.167), um dos aspectos mais interessante e importante no estudo de equações diferenciais lineares de segunda ordem homogêneas, é que podemos determinar uma segunda solução, desde que saibamos uma primeira solução, digamos  $y_1$ , não trivial para a equação diferencial. Além disso, a ideia básica é que a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

pode ser reduzida a uma equação de primeira ordem linear, através de uma substituição envolvendo a solução dada  $y_1$ . Daí, a segunda solução  $y_2$  da equação diferencial em questão, é evidente logo após a equação diferencial de primeira ordem ser resolvida.

### Caso Geral

Consideremos a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad a_2(x) \neq 0, \quad \forall x. \quad (2.14)$$

Escrevendo na forma padrão temos:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (2.15)$$

onde as funções coeficientes  $p(x)$  e  $q(x)$  são contínuas em algum intervalo  $I$ . Suponhamos ainda, que  $y_1(x)$  seja uma solução não trivial para (2.15). Nosso esforço é encontrar uma segunda solução  $y_2(x)$  de (2.15) da forma:

$$y(x) = v(x)y_1(x).$$

Derivando esta expressão, obtemos:

$$y' = v'y_1 + y_1'v \quad \text{e} \quad y'' = v''y_1 + y_1'v' + y_1''v + y_1'v'.$$

Com isso, substituindo as derivadas na equação (2.15), obtemos

$$(vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1) + p(x)(vy_1' + v'y_1) + q(x)(y_1v) = 0,$$

o que implica

$$vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1 + p(x)vy_1' + p(x)v'y_1 + q(x)vy_1 = 0;$$

Colocando-se em evidência  $v'$  e  $v$ , temos:

$$\begin{aligned} v''y_1 + [2y_1' + p(x)y_1]v' + [y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1]v &= 0, \\ y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 &= 0 \end{aligned}$$

Como  $y_1$  é solução de (2.15), então a equação acima torna-se

$$v''y_1 + [2y_1' + p(x)y_1]v' = 0 \quad (2.16)$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem em  $v$ . Agora, se fizermos uma mudança de variáveis  $w = v'$ , de onde  $w' = v''$ , a equação (2.16) transforma-se em

$$y_1w' + [2y_1' + p(x)y_1]w = 0.$$

Assim, separando as variáveis, chegamos a seguinte expressão

$$\frac{w'}{w} + 2 \frac{y_1'}{y_1} + p(x) = 0.$$

Integrando obtemos,

$$\ln |w| + 2 \ln |y_1| = - \int p(x)dx + c.$$

Aplicando no primeiro membro propriedades de logaritmos, escrevemos

$$\ln |w \cdot y_1^2| = - \int p(x)dx + c.$$

Aplicando a exponencial, obtemos

$$e^{\ln |w \cdot y_1^2|} = e^{- \int p(x)dx + c},$$

logo,

$$|w \cdot y_1^2| = e^{- \int p(x)dx} \cdot e^c,$$

ou ainda,

$$wy_1^2 = \pm e^c \cdot e^{- \int p(x) dx}.$$

Tomando  $c_1 = \pm e^c$  na última equação temos:

$$wy_1^2 = c_1 \cdot e^{- \int p(x) dx}$$

logo,

$$w = c_1 \cdot \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2(x)}.$$

Mas,  $w = v'$ , daí,  $v' = c_1 \cdot \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2(x)}$ . Integrando ambos os membros com relação a  $x$ , obtemos:

$$v = c_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2(x)} dx + c_2. \quad (2.17)$$

Assim, como

$$\begin{aligned} y(x) &= v(x) \cdot y_1(x), \\ y(x) &= \left[ c_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2(x)} dx + c_2 \right] \cdot y_1(x) \\ &= c_1 y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2(x)} dx + c_2 y_1(x). \end{aligned}$$

É a solução geral para a equação (2.15), pois formam um conjunto fundamental, onde veremos mais abaixo. Agora, tomando valores convenientes tais como  $c_2 = 0$  e  $c_1 = 1$ , pois precisamos apenas de uma solução  $y_2$  tal que  $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$  para algum ponto  $x_0$ , obtemos a segunda solução  $y_2(x)$ ,

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2(x)} dx. \quad (2.18)$$

Com isto, deduzimos a expressão para se determinar a segunda solução, conhecida a primeira solução.

Verifiquemos agora que a solução dada,  $y_1(x)$ , e a solução obtida acima,  $y_2(x)$ , são soluções fundamentais da equação (2.15).

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) &= \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} y_1(x) & \left( y_1(x) \cdot \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2(x)} dx \right) \\ y_1'(x) & \left( y_1'(x) \cdot \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2(x)} dx + \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1(x)} \right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Calculando este determinante e simplificando os termos resulta

$$W(y_1, y_2)(x) = e^{-\int p(x) dx} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então, se  $y_1(x)$  é uma solução conhecida da equação (2.15) e  $y_2(x)$  é dada por (2.18) segue que,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

é a solução geral da equação (2.15). Veremos a seguir um exemplo para melhor esclarecimento.

**Exemplo 2.14.** *Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , com  $a \neq 0$  e  $b^2 - 4ac = 0$ . Dada a equação*

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (2.19)$$

a função exponencial  $y_1(x) = e^{\frac{-b}{2a}x}$  é uma solução de (2.19).

**Solução:** De fato derivando a função  $y_1$  até a segunda ordem, temos:

$$y_1'(x) = \left(\frac{-b}{2a}\right) \cdot e^{\frac{-b}{2a}x}; \quad y_1''(x) = \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 \cdot e^{\frac{-b}{2a}x}; \quad y_1(x) = e^{\frac{-b}{2a}x}.$$

substituindo na equação (2.19), fazendo algumas operações básicas e simplificações, obtemos:

$$\begin{aligned} ay_1'' + by_1' + cy_1 &= a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 e^{\frac{-b}{2a}x} + b \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) e^{\frac{-b}{2a}x} + ce^{\frac{-b}{2a}x} \\ &= e^{\frac{-b}{2a}x} \cdot \left[ \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \right] \\ &= e^{\frac{-b}{2a}x} \cdot \left[ \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right] \\ &= e^{\frac{-b}{2a}x} \cdot \frac{0}{4a} \\ &= e^{\frac{-b}{2a}x} \cdot 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que mostra que  $y_1(x)$  é uma solução. Daí, pela expressão (2.18), podemos obter a segunda solução  $y_2(x)$ . Logo,

$$y_2(x) = e^{\frac{-b}{2a}x} \cdot \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a} dx}}{(e^{\frac{-b}{2a}x})^2} dx.$$

Onde simplificando, obtemos:

$$y_2(x) = e^{\frac{-b}{2a}x} x.$$

## 2.7 Equações Diferenciais Homogêneas com Coeficientes Constantes

Analisando a equação diferencial  $\frac{dy}{dx} + ay = 0$ , onde  $a$  é constante, podemos constatar que  $y = c_1 e^{-ax}$  é uma solução, ou ainda, uma família de curvas a um parâmetro para a equação dada, em  $\mathbb{R}$ . Portanto, naturalmente tem-se o interesse de determinar solução exponencial para a equação de ordem maior, já que a função exponencial possui características boas, e ao mesmo tempo elementar. Assim, o entusiasmo é saber se existem soluções em  $\mathbb{R}$  para a equação de ordem maior do tipo:

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (2.20)$$

em que os  $a_i$ , com  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , são constantes. Como afirma ZILL ([11], p.173), o fato surpreendente é que todas as soluções para (2.20) são expressas por meio de funções exponenciais.

Consideremos o caso especial da equação de segunda ordem

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad \text{para } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0. \quad (2.21)$$

Buscamos uma solução da forma  $y = e^{rx}$  para a equação diferencial (2.21); com isso, tem-se, derivando,

$$y' = r e^{rx} \quad \text{e} \quad y'' = r^2 e^{rx}.$$

Assim, substituindo em (2.21), a equação torna-se

$$a(r^2 e^{rx}) + b(r e^{rx}) + c(e^{rx}) = 0;$$

ou ainda, colocando em evidência o fator  $e^{rx}$ ,

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Como sabemos que  $e^{rx} \neq 0$  para qualquer  $x$  real, então, devemos ter

$$ar^2 + br + c = 0; \quad (2.22)$$

ou seja, a única forma desta função exponencial  $e^{rx}$  satisfazer a equação diferencial (2.22), é escolher valores de  $r$  de tal maneira que ele seja raiz da equação quadrática em  $r$ . A equação do segundo grau acima é denominada de **equação característica ou equação**

**auxiliar.** Entretanto, observemos que a equação característica pode ser obtida da equação diferencial com coeficientes constantes, bastando fazer a seguinte manipulação:

$$y'' = r^2, \quad y' = r \quad \text{e} \quad y = 1.$$

No entanto, da matemática básica, temos que uma equação quadrática pode admitir duas raízes reais distintas; ou apenas uma raiz real; ou ainda raízes complexas conjugadas. Assim, para encontrar a solução da equação diferencial linear de segunda ordem (2.21), de acordo com o valor de  $\Delta = b^2 - 4ac$  teremos três casos, conforme veremos a seguir.

### 2.7.1 A Equação Característica com Raízes Reais Distintas

Se  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ , então a equação característica (2.22) possui duas raízes reais distintas e distintas,  $r_1$  e  $r_2$ . Neste caso, temos duas soluções para a equação (2.21), a saber:

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{r_2 x}$$

que são soluções fundamentais, pois o Wronskiano de  $y_1$  e  $y_2$  é,

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) &= \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{bmatrix} \\ &= (e^{r_1 x} r_2 e^{r_2 x}) - (r_1 e^{r_1 x} e^{r_2 x}) \\ &= e^{r_1 x} e^{r_2 x} (r_2 - r_1) \\ &= e^{(r_1+r_2)x} (r_2 - r_1) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

pois  $r_2 \neq r_1$ . Então,  $y_1$  e  $y_2$  são linearmente independentes, donde segue que, a solução geral para a equação (2.21) é

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}; \quad \text{com } c_1 \text{ e } c_2 \text{ constantes arbitrárias.}$$

No próximo exemplo veremos um caso simples de um PVI, para a equação diferencial linear com coeficientes constantes.

**Exemplo 2.15.** *Resolva o seguinte problema de valor inicial*

$$y'' + 2y' - 8y = 0; \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -2.$$



**Solução:** Como esta equação é linear homogênea com coeficientes constantes, basta encontrar as raízes da equação característica correspondente, dada por

$$r^2 + 2r - 8 = 0.$$

Temos,  $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0$ . Com isso, temos duas raízes reais distintas. Aplicando a fórmula resolvente de Baskara,

$$r = \frac{-2 \pm 6}{2} \Rightarrow r_1 = -4 \quad \text{ou} \quad r_2 = 2.$$

Logo, as soluções, como vimos anteriormente, formam um conjunto fundamental de soluções, com  $y_1(x) = c_1 e^{-4x}$  e  $y_2(x) = c_2 e^{2x}$ . Com isso, a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{2x}.$$

Sob a condição inicial, temos:

$$y(0) = c_1 e^{-4 \cdot 0} + c_2 e^{2 \cdot 0} \Rightarrow 5 = c_1 + c_2.$$

Por outro lado, como

$$y'(x) = -4c_1 e^{-4x} + 2c_2 e^{2x},$$

usando a condição inicial, temos:

$$y'(0) = -4c_1 e^{-4 \cdot 0} + 2c_2 e^{2 \cdot 0} \Rightarrow -2 = -4c_1 + 2c_2.$$

assim, formamos o seguinte sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 5 \\ -4c_1 + 2c_2 = -2 \end{cases}$$

onde, resolvendo pelo método da adição, obtemos,  $c_2 = 3$  e  $c_1 = 2$ . Portanto, a solução particular desejada que satisfaz o PVI é

$$y(x) = 2e^{-4x} + 3e^{2x}.$$

No caso que será mostrado a seguir, utilizaremos a expressão para encontrar uma segunda solução, dado que conhecemos a primeira, onde já vimos a dedução na fórmula (2.18). Este argumento será essencial para saber como será a expressão de  $y_2$  quando se tem raízes iguais para a equação auxiliar (2.22).

### 2.7.2 A Equação Característica com Raíz Real Dupla

Se as raízes da equação característica (2.22) correspondente a equação (2.21) são  $r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$ , obtemos apenas uma solução da forma  $y_1 = e^{r_1 x}$ , como já vimos anteriormente. Assim, de (2.18) temos,

$$y_2(x) = e^{r_1 x} \cdot \int \frac{e^{-\left(\frac{b}{a}\right)x}}{e^{2r_1 x}} dx, \quad \text{pois } p(x) = \frac{b}{a} \text{ e } \int p(x) dx = \frac{b}{a} x. \quad (2.23)$$

Sendo,  $2r_1 = -\frac{b}{a}$ , a equação (2.23) é transformada em

$$\begin{aligned} y_2(x) &= e^{r_1 x} \cdot \int \frac{e^{2r_1 x}}{e^{2r_1 x}} dx \\ &= e^{r_1 x} \int dx \\ &= e^{r_1 x} \cdot x = x e^{r_1 x}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral para a equação (2.21) é dada por:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x}.$$

**Exemplo 2.16.** Dada a equação,  $y'' + 2y' + y = 0$ , encontre a solução geral.

**Solução:** A equação característica é dada por

$$r^2 + 2r + 1 = 0;$$

ou seja,

$$(r + 1)(r + 1) = 0.$$

Logo, temos uma raiz real dupla  $r_1 = r_2 = -1$ . Portanto, temos as soluções,

$$y_1(x) = e^{-x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = x e^{-x}.$$

Daí, as soluções  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  formam um conjunto fundamental de soluções. Donde segue que a solução geral é

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}, \quad \text{onde } c_1 \text{ e } c_2 \text{ são constantes quaisquer.}$$

### 2.7.3 A Equação Característica com Raízes Complexas Conjugadas

Se  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ , então a equação característica (2.22) possui duas raízes complexas conjugadas. Isto é,  $r_1 = \alpha + i\beta$  e  $r_2 = \alpha - i\beta$ , que por sua vez, são soluções para equação característica, com  $\alpha$  e  $\beta$  reais, e  $\beta > 0$ .

Portanto, temos duas soluções complexas que serão, por sua vez, linearmente independentes. Assim, tem-se que a solução geral para a equação (2.21) é:

$$y(x) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Porém, se quisermos trabalhar com funções exponenciais reais, ao invés de complexas, utilizamos a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta,$$

em que,  $\theta$  é um número real qualquer. Com isso, desta expressão segue,

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x \quad \text{e} \quad e^{-i\beta x} = \cos(-\beta x) + i \operatorname{sen}(-\beta x) = \cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x. \quad (2.24)$$

Onde, na última linha reescrevemos, utilizando o fato que

$$\cos \beta x = \cos(-\beta x) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(-\beta x) = -\operatorname{sen} \beta x.$$

Observemos agora que, somando ambas as funções exponenciais e depois subtraindo, obtemos respectivamente,

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = (\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x) + (\cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x) = 2 \cos \beta x$$

$$e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = (\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x) - (\cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x) = 2i \operatorname{sen} \beta x.$$

Daí, uma vez que,  $y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$  é uma solução para (2.21), quaisquer que sejam as constantes  $c_1$  e  $c_2$ , para escolhas dos valores  $c_1 = c_2 = 1$  e,  $c_1 = 1$  e  $c_2 = -1$ , temos sucessivamente, duas soluções:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$y_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Mas,

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2 e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cdot (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2i e^{\alpha x} \cdot \operatorname{sen} \beta x.$$

Logo, analisando estas duas soluções nas últimas linhas, segue pelo Teorema 2.2 princípio de superposição, que as funções  $e^{\alpha x} \cos \beta x$  e  $e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$  são soluções reais da equação (2.21). Entretanto, essas formam um conjunto fundamental de soluções em  $\mathbb{R}$ . Com efeito, temos:

$$W(e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \\ (\alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x) & (\alpha e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= [(e^{\alpha x} \cos \beta x) \cdot (\alpha e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x)] - [e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \cdot (\alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x)] \\
&= \alpha \operatorname{sen} \beta x \cos \beta x e^{2\alpha x} + \beta e^{2\alpha x} \cos^2 \beta x - \alpha e^{2\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \cos \beta x + \beta e^{2\alpha x} \operatorname{sen}^2 \beta x \\
&= \beta e^{2\alpha x} \cos^2 \beta x + \beta e^{2\alpha x} \operatorname{sen}^2 \beta x \\
&= \beta e^{2\alpha x} \cdot [\cos^2 \beta x + \operatorname{sen}^2 \beta x] \\
&= \beta e^{2\alpha x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ pois } \beta > 0.
\end{aligned}$$

Então, quando a equação característica admite duas raízes complexas conjugadas  $r_1 = \alpha + i\beta$  e  $r_2 = \alpha - i\beta$ , temos que

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x = e^{\alpha x} \cdot (c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

é a solução geral da equação (2.21).

**Exemplo 2.17.** *Encontre a solução geral para a equação diferencial*

$$y'' - 2y' + 5 = 0.$$

**Solução:** *Encontrando inicialmente as raízes da equação característica associada,*

$$r^2 - 2r + 5 = 0,$$

como  $\Delta = (-2)^2 - 20 = -16 < 0$ . temos  $r = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-16}}{2}$ ; ou seja,

$$r_1 = 1 + 2i \quad \text{ou} \quad r_2 = 1 - 2i,$$

que são raízes complexas conjugadas. Assim, temos  $\alpha = 1$  e  $\beta = 2$ . Então, as soluções são dadas por

$$y_1(x) = e^x \cos 2x \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^x \operatorname{sen} 2x,$$

e formam um conjunto fundamental de soluções. Portanto, a solução geral para a equação dada é

$$y(x) = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x).$$

## 2.8 Método de Variação dos Parâmetros

O método que veremos a seguir, consiste num processo para determinar uma solução particular  $y_p$  para uma equação diferencial linear não-homogênea, onde podemos encontrar

esta solução sempre que for possível determinar a solução geral para a equação diferencial homogênea correspondente.

### Equações Diferenciais Lineares não Homogêneas de Primeira Ordem

Já conhecemos até aqui a forma de uma equação linear de ordem  $n$ , seja homogênea ou não homogênea. Para fins de estudos, conforme ZILL ([13], p.55 – 57) deduziremos a expressão para a solução geral da equação diferencial linear de primeira ordem. Assim,

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (2.25)$$

onde,  $a_i(x)$ ,  $i = 0, 1$ , e  $g(x)$  são contínuas em algum intervalo  $I$ , com  $a_1(x) \neq 0, \forall x \in I$ . Agora, colocando (2.25) na forma padrão, isto é, dividindo ambos os lados por  $a_1(x)$ , obtemos:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x). \quad (2.26)$$

Nosso intuito é procurar uma solução de (2.26), em um intervalo  $I$ , no qual as funções  $p(x)$  e  $f(x)$  sejam contínuas. Uma propriedade importante da equação diferencial linear (2.26) é que sua solução é dada por uma soma de duas soluções, como já foi mostrado, ou seja,  $y = y_c + y_p$ , onde  $y_c$  é uma solução da equação homogênea correspondente,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad (2.27)$$

e,  $y_p$  é uma solução particular para a equação (2.26). Por outro lado, observemos que a equação (2.27) é separável; isto é,

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0,$$

onde fazendo-se algumas operações obtemos,

$$\int \frac{dy}{y} + \int p(x)dx = 0 \Rightarrow \ln |y| + c_1 = - \int p(x)dx + c_2.$$

Assim, aplicando a exponencial em ambos os membros, e simplificando, obtemos:

$$y_c = c e^{-\int p(x)dx},$$

a é uma família a um parâmetro de soluções para equação (2.27). Agora, convenientemente, vamos escrever  $y_c = c y_1(x)$ , onde  $y_1(x) = e^{-\int p(x)dx}$ . Daí, o fato de  $\frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1 = 0$

será usado a seguir para determinar  $y_p$ . Vamos admitir que  $y_p = u y_1$ , logo,

$$\begin{aligned} \frac{dy_p}{dx} + p(x)y_p &= f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}[u y_1] + p(x)(u y_1) = f(x) \\ &\Rightarrow \frac{du}{dx} y_1 + u \frac{dy_1}{dx} + p(x) u y_1 = f(x) \\ &\Rightarrow u \left[ \frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1 \right] + \frac{du}{dx} y_1 = f(x) \end{aligned}$$

e, como  $y_1$  é solução para equação (2.27), então,  $\frac{dy_1}{dx} + p(x)y_1 = 0$ , que substituindo na última igualdade, obtém-se

$$\frac{du}{dx} y_1 = f(x).$$

Logo, separando as variáveis e integrando, obtemos:

$$\int du = \int \frac{f(x)}{y_1} dx \Rightarrow u = \int \frac{f(x)}{y_1} dx.$$

Uma vez que

$$y_1(x) = e^{-\int p(x)dx},$$

temos que

$$y_1^{-1}(x) = \frac{1}{y_1(x)} = e^{\int p(x)dx}.$$

Portanto,  $y_p = u y_1 = \left( \int \frac{f(x)}{y_1(x)} dx \right) e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} f(x) dx$ .

Então,

$$y_p = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} f(x) dx,$$

donde segue que

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) dx. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Assim, se (2.26) tiver uma solução ela deverá seguir a forma (2.28). Esta por sua vez, é uma família a um parâmetro de soluções para a equação (2.26). Por outro lado, analisemos o seguinte fato: se multiplicarmos a equação (2.28), por  $e^{\int p(x)dx}$ , obtemos,

$$e^{\int p(x)dx} y = c + \int e^{\int p(x)dx} f(x) dx. \quad (2.29)$$

Agora, diferenciando temos

$$\frac{d}{dx} \left( e^{\int p(x)dx} y \right) = e^{\int p(x)dx} \cdot f(x), \quad (2.30)$$

o que implica,

$$e^{\int p(x)dx} \frac{dy}{dx} + p(x) e^{\int p(x)dx} y = e^{\int p(x)dx} f(x). \quad (2.31)$$

Com isso, se dividirmos a equação (2.31) pelo termo  $e^{\int p(x)dx}$ , obtemos a equação considerada (2.26).

A função  $e^{\int p(x)dx}$  é denominada de **fator integrante** para equação diferencial (2.26).

Vimos anteriormente, na seção 2.8, o método de variação dos parâmetros para obtenção de uma solução particular  $y_p$ , em um intervalo  $I$ , para equação diferencial linear de primeira ordem, na forma padrão, em que foi utilizada a ideia semelhante a redução de ordem vista na seção 2.6; ou seja, definimos a solução  $y_p$ , que queremos determinar, em função do produto de uma solução conhecida,  $y_1$  por uma função  $u(x)$  e, utilizando alguns procedimentos conhecidos determinamos  $u(x)$ . Agora faremos o mesmo para encontrar a solução  $y_p$  para uma equação diferencial linear de segunda ordem. Seja a equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \quad (2.32)$$

Suponhamos que  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  formam um conjunto fundamental de soluções, em um intervalo  $I$ , para a equação homogênea correspondente a dada, assim,  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ , para todo  $x \in I$ . Sejam  $p(x)$  e  $q(x)$  contínuas em  $I$ , segue, do fato de  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  formarem um conjunto fundamental de soluções para a equação homogênea correspondente, que a solução geral é

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Com isso, procuramos solução da forma, onde no lugar das constantes  $c_1$  e  $c_2$ , temos os parâmetros variáveis  $u_1(x)$  e  $u_2(x)$ , o qual queremos determinar, isto é,

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x), \quad (2.33)$$

satisfazendo a condição  $u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0$ .

Note que,

$$y_p' = u_1' \cdot y_1 + u_1 \cdot y_1' + u_2' \cdot y_2 + u_2 \cdot y_2',$$

logo,

$$y_p' = u_1 \cdot y_1' + u_2 \cdot y_2' \quad \text{e} \quad y_p'' = u_1' \cdot y_1' + u_1 \cdot y_1'' + u_2' \cdot y_2' + u_2 \cdot y_2''.$$

Agora, substituindo  $y_p, y_p'$  e  $y_p''$  na equação

$$y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = f(x),$$

obtemos

$$u'_1 \cdot y'_1 + u_1 \cdot y''_1 + u'_2 \cdot y'_2 + u_2 \cdot y''_2 + p(x) \cdot [u_1 \cdot y'_1 + u_2 \cdot y'_2] + q(x) \cdot [u_1 y_1 + u_2 y_2] = f(x).$$

Agora, reagrupando os termos,  $u'_1, u'_2, u_1$ , e  $u_2$ , obtemos:

$$u_1 \cdot (y''_1 + p(x)y'_1 + q(x)y_1) + u_2 \cdot (y''_2 + p(x)y'_2 + q(x)y_2) + u'_1 \cdot y'_1 + u'_2 \cdot y'_2 = f(x).$$

Daí, como  $y_1$  e  $y_2$ , por hipótese, são soluções para equação diferencial homogênea correspondente, a última linha torna-se uma equação diferencial de primeira ordem em  $u_1$  e  $u_2$  tal que, além de satisfazerem a condição acima, satisfaz a equação abaixo

$$u'_1 \cdot y'_1 + u'_2 \cdot y'_2 = f(x). \quad (2.34)$$

Logo, juntando a condição e a equação (2.34), obtemos um sistema de equações diferenciais de primeira ordem  $2 \times 2$  :

$$\begin{cases} y_1 u'_1 + y_2 u'_2 = 0 \\ y'_1 u'_1 + y'_2 u'_2 = f(x). \end{cases}$$

Podemos ainda escrever este sistema na forma de equação matricial, em que se assemelha ao que veremos no próximo capítulo, ao se estudar sistema lineares de equações de primeira ordem:

$$A \cdot X = B,$$

no qual,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} u'_1(x) \\ u'_2(x) \end{bmatrix}, \quad \text{e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}.$$

Observemos que este sistema tem solução dada por:

$$\begin{bmatrix} u'_1(x) \\ u'_2(x) \end{bmatrix} = X = A^{-1} \cdot B, \quad \text{pois, } A \cdot (A^{-1} \cdot B) = AA^{-1} \cdot B = I \cdot B = B,$$

onde  $I$  é a matriz identidade. Porém, da matemática básica sobre matrizes e determinantes, lembremos que, sendo  $A$  uma matriz quadrada, cujo  $\det A \neq 0$  então,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ é sua matriz inversa,}$$



e mais, por hipótese, a matriz

$$\det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = W(y_1, y_2)(x) \neq 0.$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{bmatrix} &= X = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot B = \frac{1}{W(y_1, y_2)(x)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{W(y_1, y_2)(x)} \begin{bmatrix} -y_2(x)f(x) \\ y_1(x)f(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \\ \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Então,

$$u_1' = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \quad \text{e} \quad u_2' = \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)(x)}.$$

Deste modo, podemos determinar  $u_1$  e  $u_2$ , bastando integrar ambos os membros em cada igualdade acima, daí,

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx \quad \text{e} \quad u_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx. \quad (2.35)$$

Por conseguinte, substituindo  $u_1(x)$  e  $u_2(x)$  encontrado em (2.35) na equação (2.33), encontramos uma solução particular  $y_p(x)$ , definida em  $I$ , da forma:

$$y_p(x) = -y_1(x) \cdot \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx + y_2(x) \cdot \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx. \quad (2.36)$$

Portanto, a solução geral para uma equação diferencial linear não homogênea de segunda ordem é dada por:

$$y = y_c + y_p;$$

ou seja,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \left[ -y_1(x) \cdot \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx + y_2(x) \cdot \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx \right].$$

**Observação 2.3.** *Notemos que o sistema linear acima ou (sistema matricial) pode ser resolvido também pela regra de Cramer; ou seja, expressando em termos de determinantes; isto é,*

$$u'_1 = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2 f(x)}{W} \quad \text{e} \quad u'_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1 f(x)}{W} \quad (2.37)$$

onde,

$$W = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \det \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

A seguir veremos um exemplo para colocarmos em prática esse método.

**Exemplo 2.18.** *Encontre a solução geral para a equação diferencial,*

$$y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{2x}.$$

**Solução:** *Encontremos primeiro a solução de EDO homogênea correspondente, a  $y'' - 4y' + y = 0$ , cuja equação característica associada é,*

$$r^2 - 4r + 4 = 0,$$

ou ainda,

$$(r - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 2.$$

*Sendo assim, temos  $r_1 = r_2 = 2$ . Logo, as soluções para a equação homogênea correspondente são:*

$$y_1(x) = e^{2x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = xe^{2x},$$

e ainda,

$$\begin{aligned} W(e^{2x}, xe^{2x}) &= \det \begin{bmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & (2x + 1)e^{2x} \end{bmatrix} = (2x + 1)e^{4x} - 2xe^{4x} \\ &= [(2x + 1) - 2x]e^{4x} = e^{4x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

*Logo, a solução geral da EDO homogênea correspondente é*

$$y_c(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

*Identifiquemos também que,  $f(x) = (x + 1)e^{2x}$ . Por outro lado, sabemos que, uma solução particular da EDO não-homogênea dada é*

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

onde,

$$u_1(x) = - \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx \quad e \quad u_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx.$$

Assim, temos

$$u_1(x) = \int \frac{x e^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}} dx \quad e \quad u_2(x) = \int \frac{e^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}} dx,$$

daí,

$$u_1(x) = - \int (x^2 + x) dx = \frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c \quad e \quad u_2(x) = \int (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x + c.$$

Portanto, a solução particular é dada por:

$$y_p(x) = \left( -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) e^{2x} + \left( \frac{x^2}{2} + x \right) x e^{2x},$$

onde simplificando, obtemos:

$$y_p(x) = \frac{x^3}{6} e^{2x} + \frac{x^2}{2} e^{2x},$$

donde segue, que a solução geral para equação dada não homogênea é:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \left( \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} \right) e^{2x}. \end{aligned}$$

**Observação 2.4.** Segue naturalmente a generalização do método de variação de parâmetros para obtenção de uma solução particular  $y_p$ , para equação diferencial linear não homogênea de ordem superior, onde seguiremos os mesmos procedimentos utilizados para acharmos  $y_p$ .

# Capítulo 3

## Sistemas de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

Neste último capítulo focaremos nossa atenção à teoria e resolução de sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Aqui veremos, que um vetor solução é uma matriz cujos elementos são funções diferenciáveis em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Os resultados aqui mencionados não serão demonstrados, pois as demonstrações dos mesmos seguem de modo análogo às do capítulo 2.

### 3.1 Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem

Estudaremos sistemas de equações diferenciais de ordem  $n$ , da forma

$$\begin{cases} x'_1(t) = g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2(t) = g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n(t) = g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (3.1)$$

Uma solução para o sistema (3.1) são  $n$ -funções  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , tais que

$$x'_i(t) = g_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



Daí,

$$\begin{aligned} y' = x'_1 = x_2 &\implies x'_1 = x_2 \\ y'' = x'_2 = x_3 &\implies x'_2 = x_3 \\ y''' = x'_3 = x_4 &\implies x'_3 = x_4 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} = x'_{n-1} = x_n &\implies x'_{n-1} = x_n \\ y^{(n)} = x'_n &\implies x'_n = -\frac{a_0}{a_n}x_1 - \frac{a_1}{a_n}x_2 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n + f(t). \end{aligned}$$

Logo, observamos que a equação diferencial linear de ordem  $n$ , (3.3), pode ser escrita como um sistema de  $n$  equações diferenciais lineares de primeira ordem, (3.2).

O conjunto de todas essas equações lineares forma o sistema linear normal.

**Exemplo 3.1.** *Escreva a equação de terceira ordem*

$$2y''' - 6y'' + 4y' + y = \text{sent}$$

na forma normal.

**Solução:** *Inicialmente, escrevemos a equação dada na forma:*

$$y''' = -\frac{1}{2}y - 2y' + 3y'' + \frac{1}{2}\text{sent}.$$

Agora, fazemos

$$y = x_1, y' = x_2, y'' = x_3,$$

de onde

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = -\frac{1}{2}x_1 - 2x_2 + 3x_3 + \frac{1}{2}\text{sent}. \end{cases}$$

### 3.1.3 Forma Matricial de um Sistema Linear

Se  $X(t)$ ,  $A(t)$  e  $F(t)$  denotam respectivamente as matrizes

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

então o sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem visto em (3.2), pode ser escrito como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix};$$

ou simplesmente,

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t). \quad (3.5)$$

Porém, se o sistema for homogêneo, temos

$$X'(t) = A(t)X(t). \quad (3.6)$$

**Definição 3.1. (Vetor Solução)** Um vetor solução, em um intervalo  $I$ , é qualquer matriz coluna,

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

cujos elementos são funções diferenciáveis que satisfazem o sistema (3.5) no intervalo.

**Exemplo 3.2.** Verifique se os vetores

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \quad e \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

são soluções para o sistema, em  $\mathbb{R}$ ,

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X.$$

**Solução:** Temos que

$$X_1' = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} \quad e \quad X_2' = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3e^{-2t} \\ 5e^{-2t} - 3e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{pmatrix} = X_1'$$

e

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} + 15e^{6t} \\ 15e^{6t} + 15e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18e^{6t} \\ 30e^{6t} \end{pmatrix} = X_2'.$$

Logo, ambos os vetores dados verificam o sistema e, portanto, são soluções.

**Observação 3.1.** Em geral, a teoria dos sistemas de  $n$  equações diferenciais lineares de primeira ordem é similar à das equações diferenciais lineares de ordem  $n$ .

### 3.1.4 Problema de Valor Inicial

Denotando por  $t_0$  um ponto do intervalo  $I$  e

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X_0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

onde  $y_i; i = 1, 2, \dots, n$ , são constantes dadas. Então, o problema

$$\text{Resolver: } X' = A(t)X + F(t)$$

$$\text{Sujeito a: } X(t_0) = X_0 \tag{3.7}$$

é um **problema de valor inicial** no intervalo  $I$ .

**Teorema 3.1. (Existência e Unicidade)** Suponhamos que os elementos  $a_{ij}(t)$  da matriz dos coeficientes  $A(t)$  e os  $f_i(t)$  no sistema (3.2) sejam contínuas em um intervalo  $I$ , contendo um ponto  $t_0$ . Então, existe uma única solução do problema de valor inicial, (3.7), no intervalo.

## 3.2 Sistemas Homogêneos

Nas definições e teoremas seguintes, trataremos de sistemas homogêneos. No entanto, consideraremos sem explicitamente mencionar que os  $a_{ij}$  e  $f_i$  são funções contínuas de  $t$  no intervalo  $I$ .



Veremos um resultado a seguir que envolve somas de soluções de sistemas lineares.

**Teorema 3.2. (Princípio da Superposição)** *Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_k$  um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo, no intervalo  $I$ . Então, a combinação linear,*

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_kX_k,$$

onde  $c_i, i = 1, 2, \dots, k$ , são constantes arbitrárias, é uma solução do sistema no intervalo  $I$ .

Segue do Teorema 3.2, que um múltiplo constante de qualquer vetor solução de um sistema de equações diferenciais lineares homogêneos de primeira ordem é, também, solução.

**Exemplo 3.3.** *É fácil verificar que*

$$X_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \text{sent} \\ -\cos t - \text{sent} \end{pmatrix} \quad e \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

são dois vetores solução do sistema homogêneo

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} X.$$

Então, pelo Teorema 3.2, a combinação linear

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1X_1 + c_2X_2 \\ &= c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \text{sent} \\ -\cos t - \text{sent} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

é solução do sistema.

**Definição 3.2.** (a). *O determinante*

$$W(X_1, \dots, X_n)(t) = \det[X_1(t), \dots, X_n(t)] = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

é chamado de **Wronskiano** de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , em  $t \in I$ , onde,

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, \quad e \quad X_n = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

(b). Sejam  $n$  vetores soluções  $X_1, X_2, \dots, X_n$  do sistema  $X' = AX$ . Então  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são (LI) se, e somente se, o Wronskiano é diferente de zero, para todo  $I$ . Neste caso,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são **soluções fundamentais** do sistema homogêneo.

(c). Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  soluções fundamentais do sistema  $X' = AX$ . Então, a família de soluções

$$X(t) = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n,$$

com constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , reais, é chamada **solução geral** de  $X' = AX$ .

**Exemplo 3.4.** Já vimos no Exemplo 3.2 que os vetores

$$X_1 = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \quad e \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

são soluções do sistema homogêneo

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X.$$

Além disso,

$$W(X_1, X_2)(t) = \det \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3e^{6t} \\ -e^{-2t} & 5e^{6t} \end{bmatrix} = 5e^{4t} + 3e^{4t} = 8e^{4t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, pela Definição 3.2, as soluções formam um conjunto fundamental de soluções.

Daí segue que, a solução geral do sistema, em  $\mathbb{R}$  é dado por

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}.$$

### 3.3 Sistemas Não-Homogêneos

Para sistemas não-homogêneos precisamos conhecer o vetor solução particular  $X_p$ , em um intervalo  $I$ . Este vetor é qualquer solução que não admite parâmetros arbitrários, cujos elementos sejam funções que satisfaçam o sistema (3.5)

**Definição 3.3.** (*Solução Geral - Sistemas Não-Homogêneos*) Seja  $X_p$  um vetor solução do sistema não-homogêneo (3.5). No intervalo  $I$  e, seja

$$X_c = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n$$

a solução geral, no mesmo intervalo, do sistema homogêneo correspondente (3.6). Então, a **solução geral** do sistema não-homogêneo no intervalo, é

$$X = X_c + X_p.$$

A solução  $X_c$  do sistema homogêneo (3.6) é chamada de **função complementar** do sistema não-homogêneo.

**Exemplo 3.5.** Dado o sistema não-homogêneo,

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 12t - 11 \\ -3 \end{pmatrix},$$

o vetor

$$X_p = \begin{pmatrix} 3t - 4 \\ -5t + 6 \end{pmatrix}$$

é uma solução particular para o sistema em  $\mathbb{R}$ , a (Verificação é elementar e será omitida.

**Solução:** No Exemplo 3.2 vimos que a função complementar do sistema homogêneo correspondente é:

$$X_c = c_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}, \text{ com } c_1 \text{ e } c_2 \text{ constantes arbitrárias.}$$

Portanto, segue que a solução geral, em  $\mathbb{R}$ , para o sistema não-homogêneo tem a forma:

$$\begin{aligned} X &= X_c + X_p \\ &= c_1 \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t - 4 \\ -5t + 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 3.3.1 Matriz Fundamental

Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  é um conjunto fundamental de vetores soluções do sistema homogêneo,  $X' = AX$ , em um intervalo  $I$ , então sua solução geral no intervalo é dado por,

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + X_n,$$

ou ainda,

$$X = c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 x_{11} + c_2 x_{12} + \dots + c_n x_{1n} \\ c_1 x_{21} + c_2 x_{22} + \dots + c_n x_{2n} \\ \vdots \\ c_1 x_{n1} + c_2 x_{n2} + \dots + c_n x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Observemos que a solução acima pode ser representada na forma de produto de matrizes, ou seja,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

A partir deste resultado temos a seguinte definição.

**Definição 3.4. (*Matriz Fundamental*)** Considere que

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, X_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

formam um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo (3.6), em um intervalo  $I$ . A matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

é chamada uma **matriz fundamental** do sistema, no intervalo.

Pelo que vimos acima a solução geral de qualquer sistema homogêneo,  $X' = AX$ , pode ser representada em termos de uma matriz fundamental do sistema na forma:  $X = \Phi(t)C$ , tal que  $C$  é um vetor coluna de ordem  $n \times 1$  de constantes arbitrárias.

Contudo, dizer que  $X = \Phi(t)C$  é uma solução geral para o sistema homogêneo  $X' = A(t)X$  significa que,

$$\Phi'(t)C = A(t)\Phi(t)C$$

ou simplesmente,

$$\Phi'(t)C - A(t)\Phi(t)C = 0,$$

ou ainda,

$$[\Phi'(t) - A(t)\Phi(t)]C = 0.$$

Entretanto, como a última linha acima, deve ser satisfeita para todo valor de  $t$  no intervalo  $I$  e, para toda matriz coluna de constantes  $C$ , devemos ter

$$\Phi'(t) - A(t)\Phi(t) = 0$$

ou

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t). \quad (3.10)$$

A relação de (3.10) é muito útil e utilizaremos a mesma na seção de variações dos parâmetros no decorrer do texto.

### 3.3.2 Inversa de uma Matriz Fundamental

Notemos que o determinante da matriz fundamental  $\Phi(t)$  de um sistema homogêneo coincide com o Wronskiano dos vetores  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Logo, como o Wronskiano é diferente de zero para todo valor de  $t$  no intervalo real, então, podemos dizer que a matriz  $\Phi(t)$  é não-singular, isto é, admite inversa. Assim temos o seguinte resultado.

**Teorema 3.3.** *(Uma Matriz Fundamental Admite uma Inversa)* Seja  $\Phi(t)$  uma matriz fundamental do sistema homogêneo (3.6), em um intervalo  $I$ . Então,  $\Phi^{-1}(t)$  existe para todo valor de  $t$  no intervalo.

Veremos a seguir, um método de solução de sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem, através da determinação dos Autovalores e Autovetores; conceitos vistos em cursos de Álgebra Linear. O leitor interessado pode consultar a referência [7]. No entanto, vejamos algumas definições.

**Definição 3.5. (Polinômio Característico)** O polinômio característico de uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  é o polinômio de grau  $n$  definido por

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

onde  $I$  representa a matriz identidade de ordem  $n$ .

**Definição 3.6.** Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n \times n$ . Dizemos que um número  $\lambda$  é um **autovalor** de  $A$  se existe um vetor solução não-nulo  $K$  do sistema linear

$$AK = \lambda K. \quad (3.11)$$

Dizemos que o vetor solução  $K$  é um **autovetor** associado ao autovalor  $\lambda$ .

**Observação 3.2. (Autovalor)** Um número é um autovalor de uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  se, e somente se, a matriz  $(A - \lambda I)$  não é invertível, isto é,

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

## 3.4 Sistemas Homogêneos com Coeficientes Constantes

Já vimos anteriormente (Exemplo 3.6) que a solução geral para o sistema homogêneo

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X$$

é

$$X(t) = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}.$$

Porém, notemos que ambos os vetores soluções possui a forma,

$$X_i = \begin{pmatrix} k_{1i} \\ k_{2i} \end{pmatrix} e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2,$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são constantes. Assim, somos induzidos a questionar se é sempre possível

obter uma solução da forma

$$X(t) = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = K e^{\lambda t}, \quad (3.12)$$

para o sistema homogêneo de primeira ordem na forma compacta,

$$X' = AX, \quad (3.13)$$

onde  $A$  é uma matriz de constantes pertencente a  $M_n(\mathbb{R})$ .

Se, por hipótese, (3.12) for um vetor solução do sistema linear homogêneo (3.13), então  $K\lambda e^{\lambda t} = AK e^{\lambda t}$ . Daí, dividindo ambos os membros por  $e^{\lambda t}$  obtemos,

$$AK = \lambda K$$

ou ainda,

$$AK - \lambda K = 0.$$

Assim,

$$(A - \lambda I)K = 0. \quad (3.14)$$

Notemos que a equação matricial, (3.14), é equivalente ao sistema de equações algébricas

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n = 0 \\ a_{21}k_1 + (a_{22} - \lambda)k_2 + \cdots + a_{2n}k_n = 0 \\ \vdots \\ (a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)k_n = 0. \end{cases}$$

Sendo assim, para obter uma solução não trivial  $X$  de (3.13) precisamos inicialmente obter uma solução para este sistema; ou seja, precisamos obter um vetor solução não trivial  $K$  que verifique a equação matricial (3.14). Mas, isto é possível se

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

### 3.4.1 Autovalores Reais Distintos

Se a matriz  $A$  pertencente a  $M_n(\mathbb{R})$  tiver  $n$  autovalores reais distintos,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , um conjunto com  $n$  autovetores linearmente independentes  $K_1, K_2, \dots, K_n$  poderá sempre

ser obtido e

$$X_1 = K_1 e^{\lambda_1 t}, X_2 = k_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, X_n = K_n e^{\lambda_n t}$$

será um conjunto fundamental de soluções para o sistema (3.13), em  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 3.4. (Solução Geral - Sistemas Homogêneos)** *Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  autovalores reais distintos da matriz dos coeficientes  $A$ , do sistema homogêneo (3.13) e, sejam  $K_1, K_2, \dots, K_n$  os autovetores associados. Então, a solução geral do sistema homogêneo (3.6) em  $\mathbb{R}$ , será dado por:*

$$X(t) = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 k_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n K_n e^{\lambda_n t}, \text{ com } c_1, c_2, \dots, c_n \text{ constantes arbitrárias.}$$

Vejamos um exemplo para melhor entendermos.

**Exemplo 3.6.** *Determine a solução geral do sistema homogêneo:*

$$\begin{cases} x'(t) = 2x + 3y \\ y'(t) = 2x + y \end{cases} \quad (3.15)$$

**Solução:** *A priori, determinamos os autovalores e os autovetores da matriz dos coeficientes do sistema. Sendo,*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

*temos o polinômio característico,*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

*Calculando as raízes obtemos os autovalores  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = 4$ .*

*Para  $\lambda_1 = -1$  temos que,*

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Assim,*

$$(A - \lambda_1 I)K = 0, \quad \text{sendo } K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix},$$

*é equivalente a,*

$$\begin{cases} 3k_1 + 3k_2 = 0 \\ 2k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases}$$



Resolvendo o sistema obtemos  $k_1 = -k_2$ . Tomando  $k_2 = 1$ , um autovetor associado a  $\lambda_1 = -1$  será

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para  $\lambda_2 = 4$ , temos que,  $(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ . Assim,  $(A - \lambda_2 I)K = 0$ , equivale a

$$\begin{cases} -2k_1 + 3k_2 = 0 \\ 2k_1 - 3k_2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos,  $k_1 = \frac{3}{2}k_2$ , para  $k_2 = 2$ , um autovetor associado  $\lambda_2 = 4$  é

$$K_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Notemos, que a matriz  $A$  é de ordem  $2 \times 2$  e determinamos duas soluções linearmente independentes de (3.15), dados por

$$X_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad e \quad X_2 = c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Logo, a solução geral é

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t};$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{4t} \\ -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{4t} \end{pmatrix},$$

que é equivalente a:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{4t} \\ y(t) &= -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{4t}. \end{aligned}$$

### 3.4.2 Autovalores Repetidos

Veremos que nem todos os autovalores são necessariamente distintos, ou seja, alguns dos autovalores podem ser repetidos. Considere o sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} X.$$

Encontrando o polinômio característico da matriz dos coeficientes, temos:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -18 \\ 2 & -9 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Daí obtemos,

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0,$$

o que implica  $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ . Entretanto, substituindo o valor de  $\lambda = -3$  na equação,

$$(A - \lambda)K = 0, \text{ sendo } K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \text{ e } (A - (-3)I)K = \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

É possível verificar que  $k_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  é um autovetor; logo,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

é uma solução do sistema inicial dado. Todavia, obviamente, nos interessa obter a solução geral do sistema, assim necessitamos obter uma outra solução.

De maneira geral, se  $m$  é um inteiro positivo, e  $(\lambda - \lambda_1)^m$  é um fator do polinômio característico e  $(\lambda - \lambda_1)^{m+1}$  não é fator, falaremos que  $\lambda_1$  é um autovalor de multiplicidade  $m$ .

Para algumas matrizes  $A$  de  $n$ -ésima ordem, é possível obter  $m$  **autovetores** linearmente independentes  $K_1, K_2, \dots, K_m$  associados a um autovalor  $\lambda_1$ , de multiplicidade  $m \leq n$ . Daí, segue que a solução geral do sistema contém a combinação linear:

$$c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_m K_m e^{\lambda_1 t}.$$

**Exemplo 3.7.** *Encontre a solução geral para o sistema homogêneo:*

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} X.$$

**Solução:** *Inicialmente, calculamos o polinômio característico,*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1 - \lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Calculando o determinante e simplificando obtemos o seguinte polinômio:

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5.$$

Com isso, encontrando as raízes desse polinômio, obtemos os autovalores:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \quad e \quad \lambda_3 = 5.$$

Agora, iremos encontrar os autovetores. Substituindo  $\lambda_1 = -1$  em

$$(\lambda I - A)K = 0,$$

onde,

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \quad e \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obtemos o sistema,

$$\begin{cases} -2k_1 + 2k_2 - 2k_3 = 0 \\ 2k_1 - 2k_2 + 2k_3 = 0 \\ -2k_1 + 2k_2 - 2k_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema linear, pelo método Gaussiano, através do escalonamento da matriz ampliada, encontramos:

$$k_1 = k_2 - k_3.$$

Se tomarmos  $k_2 = 1$  e  $k_3 = 1$  obtemos um autovetor

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, para  $k_1 = 1$  e  $k_3 = 0$  obtemos um autovetor

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Porém, notemos que nenhum dos autovetores é um múltiplo constante do outro; assim, temos duas soluções linearmente independentes, associados ao mesmo autovalor  $\lambda_1 = -1$ .

Assim,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad e \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t},$$

é um conjunto fundamental de soluções para o sistema associado ao autovalor  $\lambda_1 = -1$ .

Por último, para o valor  $\lambda_3 = 5$ , temos o sistema

$$\begin{cases} 4k_1 + 2k_2 - 2k_3 = 0 \\ 2k_1 + 4k_2 + 2k_3 = 0 \\ -2k_1 + 2k_2 + 4k_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos

$$k_2 = -k_3 \quad e \quad k_1 = k_3.$$

Tomando por exemplo,  $k_3 = 1$ , obtemos  $k_1 = 1$  e  $k_2 = -1$ . Logo, temos um terceiro autovetor,

$$K_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a solução geral é dada por:

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Suponhamos que  $\lambda_1$  seja um autovalor de multiplicidade dois e que exista um único autovetor associado a esse autovalor. Uma segunda solução pode ser obtida da forma:

$$X_2 = Kte^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t}, \tag{3.16}$$

onde

$$k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \quad e \quad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Para verificarmos isso, basta substituir a expressão (3.16) no sistema homogêneo

$$X' = AX.$$

$$X'_2 = Ke^{\lambda_1 t} + Kt\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 Pe^{\lambda_1 t}$$

e

$$AX_2 = AKte^{\lambda_1 t} + APe^{\lambda_1 t},$$

temos, substituindo na equação  $X'_2 = AX_2$ , que

$$Ke^{\lambda_1 t} + Kt\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 Pe^{\lambda_1 t} = AKte^{\lambda_1 t} + APe^{\lambda_1 t};$$

ou seja,

$$e^{\lambda_1 t}t(\lambda_1 K - AK) + e^{\lambda_1 t}(K + \lambda_1 P - AP) = 0.$$

Porém, como a última equação deve satisfazer a igualdade para todo valor da variável  $t$ , no intervalo real, conclui-se através de algumas manipulações algébricas que

$$(A - \lambda_1 I)K = 0 \tag{3.17}$$

e

$$(A - \lambda_1 I)P = K. \tag{3.18}$$

Da equação (3.17) segue-se que o vetor  $K$  deve ser um autovetor de  $A$  associado a  $\lambda_1$ . Resolvendo (3.17), determinamos uma solução  $X_1 = Ke^{\lambda_1 t}$ . Para obtermos uma segunda solução  $X_2$ , precisamos apenas resolver o outro sistema (3.18) para obter o vetor  $P$ . Vejamos um exemplo a seguir.

**Exemplo 3.8.** *Considerando o sistema*

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} X$$

*já vimos, anteriormente que o autovalor da matriz  $A$  é de multiplicidade dois, isto é,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ , e uma solução para o sistema é*

$$X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

Assim,  $K = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Seja a matriz  $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ . Daí, a expressão (3.18)

$$(A - \lambda_1 I)P = K;$$

logo,

$$\begin{pmatrix} -6 & 18 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo, obtemos

$$p_1 = 3p_2 - \frac{1}{2}.$$

Tomando  $p_2 = \frac{1}{6}$  segue que  $p_1 = 0$ . Logo, obtemos o vetor

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Portanto, de (3.16), obtemos

$$X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

donde segue que a solução geral é dada por:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} e^{-3t} \right].$$

Se a matriz  $A$  de coeficientes tiver apenas um autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1$  com multiplicidade três, seremos capazes de obter uma segunda solução, como vista em (3.16), e ainda, uma terceira solução da forma:

$$X_3 = K \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_1 t} + P t e^{\lambda_1 t} + Q e^{\lambda_1 t}. \quad (3.19)$$

De maneira geral, se existir apenas um autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1$ , de multiplicidade  $m$ , então podem ser obtidas  $m$  soluções linearmente independentes da forma:

$$\begin{aligned} X_1 &= K_{11} e^{\lambda_1 t}; \\ X_2 &= K_{21} t e^{\lambda_1 t} + K_{22} e^{\lambda_1 t}; \\ X_3 &= K_{31} \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_1 t} + K_{32} t e^{\lambda_1 t} + K_{33} e^{\lambda_1 t} \\ &\vdots \\ X_m &= K_{m1} \frac{t^{(m-1)}}{(m-1)!} e^{\lambda_1 t} + K_{m2} \frac{t^{(m-2)}}{(m-2)!} e^{\lambda_1 t} + \dots + K_{mm} e^{\lambda_1 t}, \end{aligned}$$

onde os  $K_{ij}$  são vetores coluna.

### 3.4.3 Autovalores Complexos

Se  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  e  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , com  $\beta > 0$ , são autovalores complexos da matriz de coeficientes  $A$ , do sistema homogêneo (3.6); os autovetores associados podem também ter coordenadas complexas. Vejamos o sistema

$$\begin{cases} x'(t) = 6x - y \\ y'(t) = 5x + 4y. \end{cases}$$

Neste caso, temos

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -1 \\ 5 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

logo  $\lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$ , onde as raízes são  $\lambda_1 = 5 + 2i$  e  $\lambda_2 = 5 - 2i$ .

Agora, considerando  $\lambda_1 = 5 + 2i$ , temos o sistema

$$\begin{cases} (1 - 2i)k_1 - k_2 = 0 \\ 5k_1 - (1 + 2i)k_2 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos  $k_2 = (1 - 2i)k_1$ . Daí, escolhendo  $k_1 = 1$  obtém-se o seguinte autovetor solução associado:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix}.$$

Analogamente, para  $\lambda_2 = 5 - 2i$ , obtemos

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 2i \end{pmatrix}.$$

Verifica-se, por meio do Wronskiano, que os vetores solução

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t} \quad \text{e} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}$$

são linearmente independentes. Portanto, a solução geral é:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}. \quad (3.20)$$

Notemos, que as coordenadas do vetor  $K_2$ , associado a  $\lambda_2$ , são as conjugadas das coordenadas do vetor  $K_1$ , associado ao autovalor  $\lambda_1$ . Assim, podemos escrever a relação

$$\lambda_2 = \overline{\lambda_1} \quad \text{e} \quad K_2 = \overline{K_1}, \quad \text{onde } \overline{\lambda_1} \text{ é o conjugado de } \lambda_1 \text{ e } \overline{k_1} \text{ é o conjugado de } k_1.$$

Dessa maneira, essa afirmação leva ao seguinte resultado geral.

**Teorema 3.5. (Soluções Correspondentes a Autovalores Complexos)** *Seja a matriz  $A$  de coeficientes do sistema homogêneo  $X' = AX$  e seja  $K_1$  um autovetor correspondente ao autovalor complexo  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ . Então,*

$$K_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{e} \quad \overline{K_1} e^{\overline{\lambda_1} t}$$

são soluções para o sistema  $X' = AX$ .

É conveniente, muitas vezes, reescrever a solução vista dependendo de funções reais. Veremos agora como encontrar uma solução em termos de funções reais, a partir de autovalores complexos. Para tanto, iremos utilizar a fórmula de Euler.

Seja  $K_1$  um autovetor da matriz de coeficientes  $A$  associado ao autovalor  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ . Então, os dois vetores solução do Teorema 3.5 podem ser escritos como:

$$K_1 e^{\lambda_1 t} = K_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} = K_1 e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)$$

e

$$\overline{K_1} e^{\overline{\lambda_1} t} = \overline{K_1} e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = \overline{K_1} e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t).$$

Pelo Princípio da Superposição e após algumas manipulações algébricas, segue-se que os seguintes vetores também são soluções

$$X_1 = \frac{1}{2}(K_1 e^{\lambda_1 t} + \overline{K_1} e^{\overline{\lambda_1} t}) = \frac{1}{2}(K_1 + \overline{K_1}) e^{\alpha t} \cos \beta t - \frac{i}{2}(-K_1 + \overline{K_1}) e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t$$

e

$$X_2 = \frac{i}{2}(-K_1 e^{\lambda_1 t} + \overline{K_1} e^{\overline{\lambda_1} t}) = \frac{i}{2}(-K_1 + \overline{K_1}) e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{1}{2}(K_1 + \overline{K_1}) e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t.$$

Aqui, utilizaremos a seguinte propriedade nos complexos: dado um número complexo  $z = a + ib$ , então  $\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = a = \operatorname{Re}(z)$  e  $\frac{i}{2}(-z + \overline{z}) = b = \operatorname{Im}(z)$ . Portanto, as coordenadas dos vetores coluna,  $\frac{1}{2}(K_1 + \overline{K_1})$  e  $\frac{i}{2}(-K_1 + \overline{K_1})$ , são números reais. Com isso, se definirmos

$$B_1 = \frac{1}{2}(K_1 + \overline{K_1}) = \operatorname{Re}(K_1) \quad \text{e} \quad B_2 = \frac{i}{2}(-K_1 + \overline{K_1}) = \operatorname{Im}(K_1), \quad (3.21)$$

temos o seguinte teorema.



**Teorema 3.6.** (*Soluções Reais Associadas a um Autovalor Complexo*) Seja  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  um autovalor complexo da matriz de coeficientes  $A$  no sistema homogêneo  $X' = AX$  e sejam  $B_1$  e  $B_2$  os vetores definidos em (3.21). Então, as igualdades a seguir,

$$\begin{aligned} X_1 &= [B_1 \cos \beta t - B_2 \text{sen} \beta t] e^{\alpha t} \\ X_2 &= [B_2 \cos \beta t + B_1 \text{sen} \beta t] e^{\alpha t} \end{aligned} \quad (3.22)$$

são soluções linearmente independentes do sistema homogêneo, em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 3.9.** Determine a solução geral real do sistema homogêneo,

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} X.$$

**Solução:** Inicialmente, obtemos os autovalores a partir de

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -\frac{1}{2} & (1 - \lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Assim, os autovalores são  $\lambda_1 = 1 + i$  e  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 1 - i$ . Daí, efetuando os passos já conhecidos, um autovetor associado a  $\lambda_1$  é

$$K_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da relação (3.21)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Segue do Teorema 3.6 que a solução geral é:

$$\begin{aligned} X_1 &= c_1 \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{sen} t \right] e^t + c_2 \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{sen} t \right] e^t \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ -\text{sen} t \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 2 \text{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} e^t. \end{aligned}$$

## 3.5 Método de Variação dos Parâmetros - Sistemas Lineares

Veremos aqui o modo para obtenção de soluções para sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem não homogêneas. Vimos na subseção 3.3.1 que a solução

geral para um sistema linear homogêneo  $X' = AX$ , pode ser escrito como:

$$X = \Phi(t)C,$$

onde  $C$  é um vetor coluna de constantes arbitrárias, de ordem  $n \times 1$ , e  $\phi(t)$  é a matriz fundamental, de ordem  $n \times n$ , cujas colunas consistem dos vetores solução do sistema homogêneo. Além disso, recorde as seguintes propriedades da matriz fundamental:

- A matriz fundamental  $\Phi(t)$  é não-singular; isto é, o determinante é diferente de zero para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
- Se  $\Phi(t)$  for uma matriz fundamental do sistema  $X' = AX$ , então  $\Phi'(t) = \Phi(t)A$ .

Da mesma forma que procedemos na seção 2.8 nos perguntamos se é possível substituir a matriz de constantes  $C$ , na relação  $X(t) = \Phi(t)C$ , por uma matriz coluna de funções,

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}, \quad \text{de tal forma que } X_p = \Phi(t)U(t) \quad (3.23)$$

seja uma solução particular para o sistema não-homogêneo,

$$X'(t) = AX(t) + F(t). \quad (3.24)$$

Observe que, pela regra do produto, a derivada da expressão em (3.23) é:

$$X'_p(t) = \Phi(t)U'(t) + \Phi'(t)U(t). \quad (3.25)$$

Daí, substituindo as equações (3.23) e (3.25) em (3.24), obtemos

$$\Phi(t)U'(t) + \Phi'(t)U(t) = A\Phi(t)U(t) + F(t);$$

ou ainda, usando  $\Phi'(t) = \Phi(t)A$ , escrevemos

$$\Phi(t)U'(t) + A\Phi(t)U(t) = A\Phi(t)U(t) + F(t)$$

ou

$$\Phi(t)U'(t) = F(t).$$

Mas  $\Phi(t)$  é invertível, assim, multiplicando ambos os lados da última linha, por  $\phi^{-1}(t)$  obtemos,

$$U'(t) = \Phi^{-1}(t)F(t) \quad \text{e, portanto,} \quad U(t) = \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt.$$

Como  $X_p = \Phi(t)U(t)$ , segue que uma solução particular de (3.24) é,

$$X_p = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt, \quad (3.26)$$

onde, por definição, sabe-se que para calcular a integral de uma matriz, calcula-se a integral de cada entrada. Consequentemente, segue que a solução geral para o sistema (3.24) é,  $X = X_c + X_p$  ou,

$$X = \Phi(t)C + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt, \quad (3.27)$$

denominada Fórmula de **Varição dos Parâmetros**. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 3.10.** *Ache a solução geral do sistema não-homogêneo,*

$$X' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

**Solução:** *A priori, determinamos a solução geral para o sistema homogêneo associado,*

$$X' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X.$$

*Encontremos os autovalores da matriz dos coeficientes; ou seja,*

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 1 \\ -2 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda + 5) = 0.$$

*Logo, os autovalores são  $\lambda_1 = -2$  e  $\lambda_2 = -5$ . Pelo processo usual já conhecido, obtemos os autovetores associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente:*

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

*Daí, os vetores solução do sistema homogêneo correspondente são:*

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} \quad \text{e} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t}.$$

Portanto, temos que a matriz fundamental para o sistema homogêneo é:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}, \quad \text{com} \quad \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Assim, da relação (3.26), obtemos

$$\begin{aligned} X_p &= \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)F(t)dt = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^t \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}e^t \\ \frac{1}{5}te^{5t} - \frac{1}{25}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{4t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lembrando que por definição, a integral de uma matriz cujos elementos são funções diferenciáveis para todo  $t \in \mathbb{R}$ , é a integral de cada função dessa matriz.

Deste modo, segue de (3.27) que a solução geral do sistema não homogêneo inicial, em  $\mathbb{R}$  é:

$$X = X_c + X_p$$

ou seja,

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5}t - \frac{27}{50} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t - \frac{21}{50} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5}t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{27}{50} \\ \frac{21}{50} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t}. \end{aligned}$$

# Considerações Finais

A realização desta revisão bibliográfica contribuiu com o enriquecimento e amadurecimento com relação a pesquisa matemática, em especial ao estudo das equações diferenciais lineares ordinárias e sistemas lineares, como também, diversos conteúdos da graduação, a exemplo, Álgebra Linear e Análise. Promovendo assim, uma melhor jornada em uma possível pós-graduação, com relação a Matemática Pura ou Aplicada e áreas afins. Durante a elaboração deste trabalho fui aprofundando os conceitos estudados juntos com minha orientadora Luciana, a qual sempre me motivou e ao mesmo tempo me mostrou a direção correta para seguir nesta caminhada. O interesse em abordar esta pesquisa foi devido ao estudo dirigido, quando fui aluno bolsista do projeto de iniciação científica, onde fizemos um estudo a cerca dos conceitos referente ao tema do presente trabalho.

Contudo, finalizo com a sensação de dever cumprido, com a consciência de que busquei ao máximo aprender e abranger o conhecimento matemático perante ao rigor da linguagem rebuscada da matemática pura, bem como sua riqueza enquanto ciência exata.

# Referências Bibliográficas

- [1] BASSANEZI, Rodney Carlos. **Equações Diferenciais Ordinárias: Um Curso Introdotório**. Vol. 1.. Coleção BC&T- UFABC. Textos Didáticos. Disponível em: <<http://www.http://200.17.137.109:8081/xiscanoe/courses-1/elementos-de-epidemiologia-computacional/equacoes-diferenciais-ordinrias-rodney.pdf>>. Acesso em: 21 de Agosto de 2016.
- [2] BOYCE, Willian E. e DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- [3] DOERING, Claus Ivo; LOPES Artur Oscar. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [4] FIGUEIREDO, Djairo Guedes; NEVES, Aloisio F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3. Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [5] JUNIOR, C. H. E; PENNEY, D. E. **Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno**. Ed 3. Rio de Janeiro: Prentice-Hall Do Brasil LTDA, 1995.
- [6] LEIGHTON, W. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Tradução Luiz Aduino da Justa Medeiros. Rio de Janeiro: LTDA, 1970.
- [7] LOUREDO, A. T; OLIVEIRA, A. M. **Um Primeiro Curso de Álgebra Linear**. Campina Grande: Eduepb, 2015.
- [8] LIMA, E. L. **Um Curso de Análise**. Vol. 1. 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2014.
- [9] MACIEL, A. B; LIMA, O. A. **Introdução à Análise Real**. Campina Grande: EDUEPB, 2005.

- [10] SANTOS, R. J. **Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias**. Departamento de Matemática. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011. Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/regi>>. Acesso em: 09 de Julho 2016.
- [11] ZILL, D. G. **Equações Diferenciais**. Volume 1. Tradução Antonio Zumpano. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.
- [12] ZILL, D. G. **Equações Diferenciais**. Volume 2. Tradução Alfredo Alves de Farias. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.
- [13] ZILL, D. G. **Equações Diferenciais: Com Aplicações em Modelagem**. Tradução da 9ª edição Norte-Americana, Heitor Honda Federico. São Paulo: Cengage Learning, 2011.