UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS
CAMPUS VI - POETA PINTO DO MONTEIRO
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ELEXANDRE BEZERRA DE LIMA

A Construção dos Números Naturais através dos Axiomas de Peano e por Conjuntos

MONTEIRO - PB
2010

Elexandre Bezerra de Lima

A Construção dos Números Naturais através dos Axiomas de Peano e por Conjuntos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Luciano dos Santos Ferreira

MONTEIRO - PB
Dezembro de 2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL – UEPB

L732c Lima, Elexandre Bezerra de.

A Construção dos Números Naturais Através dos Axiomas de Peano e por Conjuntos [manuscrito] / Elexandre Bezerra de Lima. – 2010.

52 f.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2010.

"Orientação: Profa. Ma. Luciano dos Santos Ferreira".

1. Matemática – Teoria dos Números. 2. Números Naturais. 3. Axiomas de Peano. I. Título.

21. ed. CDD 512.7

Elexandre Bezerra de Lima

A Construção dos Números Naturais através dos Axiomas de Peano e por Conjuntos

Aprovado em: 22 / 12 / 2010.

COMISSÃO EXAMINADORA

Luciano dos Santos Ferreira

Prof. Ms. Luciano dos Santos Ferreira
Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE/UEPB
ORIENTADOR

Joselma Soares dos Santos

Prof. Ms. Joselma Soares dos Santos
Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE/UEPB
EXAMINADOR

Thiciany Matsudo Iwano

Prof. Ms. Thiciany Matsudo Iwanoa
Centro de Ciências Humanas e Exatas - CCHE/UEPB
EXAMINADOR

Dedico este trabalho a minha família que sempre mim deu apoio durante todo o curso de graduação em matemática, especialmente aos meus pais, irmãos, minha namorada , pelas angustias e preocupações que passaram por minha causa, por terem dedicado suas vidas a mim, pelo amor carinho e estimulo que me ofereceram, dedico-lhes essa conquista como gratidão.

Agradecimentos

Considerando esta monografia como resultado de uma longa caminhada que começou na UEPB, agradecer pode não ser tarefa fácil, nem justa. Para não correr o risco da injustiça, agradeço de antemão a todos que de alguma forma passaram pela minha vida e contribuíram para a construção de quem sou hoje.

E agradeço, particularmente, a algumas pessoas pela contribuição direta na construção deste trabalho:

Primeiramente agradeço a Deus, pois o que seria de mim sem a fé que eu tenho nele. Aos meus pais, irmãos, minha namorada Jeane Bezerra, minha filha e a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

A todos os professores pelo carinho, dedicação e entusiasmo demonstrado ao longo do curso. Aos amigos Jairo Carlos e Eduardo Ferreira pelo incentivo, força, amizade, que partilhamos durante nossa caminhada diante deste curso.

Especialmente ao professor e orientador Luciano Santos por ter sido companheiro na orientação desta monografia, na realização dos trabalhos apresentados a partir dela e nas recorrentes "discussões"que travávamos dentro e fora das salas de aula, por seu apoio e inspiração no amadurecimento dos meus conhecimentos e conceitos que me levaram a execução e conclusão desta monografia.

“Só é digno da liberdade, como da vida, aquele que se empenha em conquistá-la."

(Autor Desconhecido)

Resumo

Neste trabalho apresentamos a construção dos números naturais através de cinco postulados conhecidos como os Axiomas de Peano e também através dos Conjuntos. Nele apresentamos uma abordagem diferente do que estamos acostumados. Para facilitar a assimilação desse conhecimento, fazemos logo uma amostra de como realmente devemos observar as operações desses números naturais, pois as operações são muito importante na facilitação e no manuseio dos números pertencente a esse conjunto. Referindo-se aos Conjuntos, a construção dos números naturais através deles é uma teoria muito interessante, pois mesmo na universidade não somos apresentados a esse tipo de conhecimento e este trabalho é uma grande oportunidade para conhecermos esse novo tipo de construção dos números naturais.

Palavras chave: Números Naturais, Axiomas de Peano, Conjuntos.

Abstract

This work presents the construction of natural numbers by five postulates known as the Peano axioms, and also through the sets. We presented a different approach than we are accustomed. To facilitate the assimilation of this knowledge, we just a sample of what we actually observe the operations of natural numbers, because the operations are very important in facilitating the handling and the numbers belonging to this set. Referring to the assemblies, the construction of natural numbers through them is a very interesting theory, because even at the university are not presented with such knowledge and that work is a great opportunity to know this new type of construction of natural numbers.

Keywords: Natural Numbers, Peano's axioms, Sets.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, temos o objetivo de mostrar os números naturais de três formas; começando com a forma básica, logo depois via Axiomas de Peano e por fim via Conjuntos. Nele primeiramente introduziremos uma pequena parte histórica referente aos números, conceituaremos as operações da Adição, Subtração e Multiplicação, seguido das propriedades Comutativa, Associativa e Distributiva e também a relação entre essas duas operações. Na abordagem dos números naturais através dos Axiomas de Peano, apresentaremos os cincos postulados e com a apresentação das propriedades construiremos o conjunto dos números naturais através deles, só que antes apresentaremos a definição do Princípio de Indução que nos ajudará nesta construção e também na construção via Conjuntos.

Capítulo 1

Números Naturais no Ensino Básico

Neste capítulo, apresentaremos os números naturais de forma básica, ou seja, os números naturais que estamos acostumados a ver nos livros de ensino básico. Nele apresentaremos as operações da Adição, Subtração, Multiplicação, e também as propriedades Comutativa, Associativa, e Distributiva que servirão para compararmos com as nossas construções nos próximos capítulos. Mas, antes vamos ver um pouco de sua história.

1.1 A História dos Números

Os números tiveram suas origens nas palavras utilizadas para a contagem de objetos. O primeiro grande avanço na representação dos números foi a utilização dos numerais para representá-los, o que permitiu o desenvolvimento de sistemas para armazenar grandes números.

Os Babilônios antigos, por exemplo, desenvolveram um sistema de numerais de atribuição, baseando-se nos numerais 1 e 10. Os egípcios antigos também possuíam um sistema de numerais com hierógrifos distintos para 1 e 10, e as potências de 10 até um milhão.

Um fator muito importante na história dos números foi a descoberta de uma gravação em pedra encontrada em Kanark, há cerca de 1500 a.c. e atualmente no Louvre, em Paris. Nesta gravação encontra-se o número 276 representado como 2 centenas, 7 dezenas e 6 unidades, e também uma representação similar para o número 4622.

O zero foi utilizado pelos hindus na montagem do sistema posicional de numeração para suprir a deficiência de algo nulo. Os Babilônios utilizavam um dígito zero como notação de posição desde cerca de 700 a.c., porém ele nunca foi utilizado como elemento final. Os Olmecas e a civilização Maia também utilizavam o número zero, mas como um número separado, isso há cerca de um século a.c.

O conceito da forma que o zero é utilizado atualmente se originou com o criador matemático indiano Brahmagupta em 628. Porém, ele foi utilizado como um número por todos os computus (calculadoras da idade média), começando com Dionysius Exiuus em 525, mas no geral nenhum numeral foi utilizado para escrevê-lo como numeral romano.

O primeiro estudo dos números como abstração é atribuído aos filósofos Pitágoras e Arquimedes. Entretanto, estudos independentes ocorreram no mesmo período na índia, China e Mesoamérica. No século XIX, foi obtida uma definição do conjunto teórico dos números naturais. Com essa definição era mais conveniente incluir o número zero (pois corresponde a algo vazio) como número natural, mas alguns matemáticos, principalmente os teorizadores preferem seguir a tradição antiga e excluir o zero dos números naturais.

Na seção a seguir, apresentaremos os números naturais e suas representações.

1.2 Os Números Naturais

Os números naturais formam um conjunto cujos elementos são descritos do seguinte modo:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots$$

ou ainda, de modo mais sugestivo:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9 \to 10 \to \ldots$$

Sabemos que essa descrição não é completa, pois só explicitamos alguns poucos de seus elementos. No entanto, todos nós sabemos perfeitamente do que estamos falando. Tudo começa com o número um, simbolizado por 1, que representa a unidade, e com uma lei, simbolizadas pelas flechas, que a cada número, começando pelo 1, fornece o seu sucessor, isto é, o número que vem depois dele.

Sabemos também que esta sequência nunca termina, ou seja, os números naturais são em quantidade infinita. Cada elemento desse conjunto tem de ser obviamente representado por um símbolo distinto. Como fazer isto de modo a poder memorizar todos esses símbolos? A resposta, muito engenhosa, é dada pela adoção de um sistema de numeração, que no nosso caso é o sistema decimal posicional. Assim, por exemplo, sabemos que nesse sistema sucedendo o 1 vem o 2 e sucedendo o 99 vem o 100 etc. Os números naturais permitem contar objetos, inclusive subconjuntos do próprio conjunto dos naturais.

Exemplo 1.1. *Temos que de 1 a n, inclusive, existem n números naturais.*

1.3 A Ordem dos Números Naturais

Quando um número a aparece na sequência, acima mencionada, antes do número b, ou seja, à esquerda de b, escrevemos $a < b$ e dizemos que a é menor do que b, ou ainda, escrevemos $b > a$ e dizemos que b é maior do que a.

$$\ldots \to a \to \ldots \to b \to \ldots$$

Exemplo 1.2. *Temos que 1 < 3, 5 < 6, 10 > 9 etc.*

Essa relação que ordena os números naturais tem claramente a seguinte propriedade:

Propriedade Transitiva

Se a aparece antes de b e b aparece antes de c, então a aparece antes de c.

$$\ldots \to a \to \ldots \to b \to \ldots \to c \to \ldots$$

Em símbolos,

$$se\ a < b\ e\ b < c,\ então\ a < c.$$

Escreveremos também $a \leq b$ para representar a situação:

$$a < b\ ou\ a = b:$$

Exemplo 1.3. *temos que 5 ≤ 6 e também que 5 ≤ 5.*

Lei da Tricotomia

A ordem nos naturais é total, o que significa que dados dois números naturais a e b temos verificada uma e apenas uma das três seguintes possibilidades:

$$a < b;\ a = b\ ;ou\ a > b.$$

Demonstração. Chamamos a de tricotômico, para todo $b \in \mathbb{N}$. Vamos verificar a tricotomia pelo princípio de indução provando que $T = \mathbb{N}$. Vamos provar que$1 \in T$ para todo $b \in \mathbb{N}$, temos a dicotomia fundamental: $b = 1$, ou $b \neq 1$.

Pegando o segundo caso implica que $b > 1$. Logo a tricitomia não vale se, e somente se, $b > 1$ implica $b \neq 1$, pois neste caso, $b = 1$ ou $b > 1$, é uma dicotomia equivalente a anterior.

Mas se $b > 1$ implica que $1 + p = b$ para algum $p \in \mathbb{N}$, logo $b = 1 + p = s(p)$ para o mesmo p. Portanto, b é sucessor de p, o que implica (pelos Axiomas de Peano que veremos nos próximos capítulos) que $b \neq 1$.

Agora vamos provar para todo $n \in T$, $s(n) \in T$. Tome $b \in \mathbb{N}$, se $b = 1$ (pelos axiomas de Peano) temos que $s(n) \neq 1$, logo $s(n) > b$ que é a única possibilidade.

Se $b \neq 1$, então $b = s(c) = c + 1$ para algum $c \in \mathbb{N}$ (também pelos axiomas de Peano), pela propriedade do cancelamento, temos que $b < n + 1,\ b = n + 1\ e\ b > n + 1$, são respectivamente equivalente a $c < n,\ c = n\ e\ c > n.$

Como $n \in T$, estas três últimas possibilidades são tricotomicas, de modo que $b < n + 1,\ b = n + 1\ e\ b > n + 1$, também o são. Portanto, concluímos que $s(n) = n + 1 \in T$. $\square$

Sejam dados dois números naturais a e b com $a < b$. Definimos os seguintes conjuntos:

$[a, b]$ o conjunto dos números naturais x tais que $a \leq x \leq b$;

(a, b) o conjunto dos números naturais x tais que $a < x < b$;

$(a, b]$ o conjunto dos números naturais x tais que $a < x \leq b$;

$[a, b)$ o conjunto dos números naturais x tais que $a \leq x < b$.

O primeiro e o segundo conjunto são chamados, respectivamente, de intervalo fechado e intervalo aberto. Os dois outros conjuntos são chamados indiferentemente de intervalos semiabertos, ou semifechados.

Exemplo 1.4. *O intervalo (2, 7) = {3, 6}:*

$1\ 2\ \underline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ \underline{6}\ 7\ 8\ 9\ 10$

O intervalo (2, 8] = {3, 4, 5, 6, 7, 8}:

$1\ 2\ \underline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ \underline{6}\ \underline{7}\ \underline{8}\ 9\ 10$

O intervalo [2, 6) = {2, 3, 4, 5}:

$1\ \underline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10$

O intervalo [1, 9] = { 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9}:

$\underline{1}\ \underline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ \underline{6}\ \underline{7}\ \underline{8}\ \underline{9}\ 10$

Uma propriedade característica e fundamental do conjunto dos números naturais, que não procuraremos justificar por parecer tão óbvia, é a seguinte:

Princípio da Boa Ordem

Todo subconjunto não vazio do conjunto dos números naturais possui um elemento mínimo. Esta afirmação significa que dado um subconjunto A de $\mathbb{N}$, não vazio, existe um elemento a de A tal que $a \leq b$, para todo elemento b de A.

Exemplo 1.5. *Seja o conjunto* $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \} \subset \mathbb{N}$. *Então* $a = 2 \in A$ *é o elemento mínimo.*

1.4 Operação da Adição nos Números Naturais

Seja dado um número natural a, o sucessor de a será representado por $a + 1$:

$$\ldots \to a \to a+1 \to \ldots$$

Sejam dados dois números naturais a e b, quaisquer. Podemos deslocar a de b posições para a direita, obtendo um número que será denotado por $a + b$. Essa operação entre números naturais é chamada de adição e o número $a + b$ é chamado soma de a e b.

$$\ldots \to a \to a+1 \to a+2 \to \ldots \to a+b \to \ldots$$

Exemplo 1.6. *Dados $a = 2$ e $b = 5$, ao deslocarmos a de três posições para a direita, obtemos a sequência:*

$$2,\ 2+1=3,\ 3+1=4,\ 4+1=5,\ 5+1=6,\ 6=1=7,$$

obtendo assim o número $2 + 5 = 7$.
Agora, suponha que deslocamos $b = 5$ de $a = 2$ posições para a direita, obtemos

$$3,\ 3+1=4,\ 3+2=5,\ 3+3=6,\ 3+4=7,$$

logo, também, $5 + 2 = 7$. Portanto,

$$2+5=5+2=7$$

Com isso, podemos definir a seguinte propriedade:

Propriedade Comutativa da Adição.

Dados dois números naturais a e b, temos que

$$a+b=b+a.$$

Esse fato, devido à nossa experiência com os números, nos parece óbvio, mas você teria alguma ideia de como mostrar que ao deslocar a para a direita de b posições alcança-se o mesmo número que deslocar b para a direita de a posições?.

Diremos que deslocamos um número a de zero posições para a direita quando não o movemos do seu lugar. Escreveremos, neste caso,

$$a+0=a$$

Colocando o símbolo 0, chamado zero, à esquerda de todos os números naturais, obtendo o conjunto ordenado:

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9 \to \dots$$

Portanto, consideraremos $0 < a$, para todo número natural a. Denotaremos o conjunto acima por $\mathbb{N}$, continuando a chamá-lo de conjunto (ampliado) dos números naturais.

Se deslocarmos agora 0 de 1 posição para a direita, obtemos o número 1, se o deslocarmos de 2 posições à direita, obtemos 2, se o deslocarmos de 3 posições à direita obtemos 3. Portanto, é intuitivo aceitar que se deslocarmos 0 de a posições à direita obtemos o número a.

Finalmente, é claro que $0 + 0 = 0$, pois ao não deslocarmos o zero nos mantemos no mesmo lugar, ou seja, no zero. Portanto, para todo a no conjunto $\mathbb{N}$, temos que

$$0+a=a=a+0.$$

Sendo assim, quaisquer que sejam a e b no conjunto $\mathbb{N}$ (incluindo agora o elemento 0), temos que $a + b = b + a$. Podemos estender a soma para uma quantidade de números maior do que dois. Por exemplo, para somar três números a, b e c, podemos proceder da seguinte forma: somamos inicialmente a e b, formando o número $(a + b)$, depois somamos esse novo número com c, obtendo o número $(a + b) + c$.

Exemplo 1.7. *Dados 3, 5 e 6, formaríamos $3 + 5 = 8$ e o somaríamos com 6 obtendo $(3 + 5) + 6 = 8 + 6 = 14$. Por outro lado, poderíamos somar a com $(b + c)$, obtendo o número $a + (b + c)$.*

No exemplo acima, isso nos daria $3 + (5 + 6) = 3 + 11 = 14$. Acontece que a adição tem também a seguinte propriedade:

Propriedade Associativa da Adição.

Dados os números a, b e c de $\mathbb{N}$, tem-se

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

Problema 1.1. *Prove que a propriedade acima mensionada é verdadeira.*

Solução. Sejam a e b números naturais arbitrários e seja X subconjunto de $\mathbb{N}$.

$$X=\{c \in \mathbb{N};\ a+(b+c)=(a+b)+c\}.$$

Então se $1 \in X$ e $c \in X$, tem-se que.
$a+(b+s(c)) = a+s(b+c) = s(a+(b+c)) = s((a+b)+c) = (a+b)+s(c)$.
Logo, $s(c) \in X$ e portanto $X = \mathbb{N}$, ou seja;
para quaisquer a, b e c tem-se $(a+b)+c = a+(b+c)$

Relação entre Adição e Ordem.

Há uma relação de compatibilidade entre a ordem e a adição de números naturais, que é a seguinte:

Dados três números naturais a, b e c quaisquer,

$$\textit{se} \quad a < b, \quad \textit{então} \quad a+c < b+c.$$

De fato, se a está à esquerda de b, então ao deslocarmos a e b simultaneamente de c posições à direita, não é difícil aceitar que $a + c$ se mantém à esquerda de $b + c$.

$$\ldots \to a \to a+1 \to a+2 \to \ldots \to b \to b+1 \to b+2 \to \ldots$$

A propriedade acima admite uma recíproca, ou seja:

Dados três números naturais a, b e c, quaisquer,

$$\textit{se} \quad a+c < b+c, \quad \textit{então} \quad a < b.$$

Prova-se esta propriedade utilizando a tricotomia. De fato, suponhamos que $a + c < b + c$. Pela tricotomia, temos uma das três possibilidades:

$$b < a, \quad b = a, \quad \textit{ou} \quad a < b:$$

A primeira possibilidade não pode ser verificada, pois se $b < a$, teríamos $b + c < a + c$, pela propriedade já provada, o que está em contradição com a nossa hipótese $a + c < b + c$. A segunda possibilidade também não pode ser verificada, pois se $a = b$, teríamos $a + c = b + c$, o que também está em contradição com a nossa hipótese. Só resta portanto a única possibilidade: $a < b$. Você percebeu que utilizamos a tricotomia diversas vezes na prova acima?

Problema 1.2. *Mostre que dados três números naturais a, b e c, quaisquer,*

$$\textit{se } a+b = a+c, \textit{ então } b = c.$$

Solução. Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Pela propriedade da tricotomia, temos que $c = b$ ou existe um $d \in \mathbb{N}$ tal $b = c + d$, ou ainda que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $c = b + l$. Suponhamos que $c \neq b$. Se $b = c + d$, segue que:

$$a + (c + d) = a + c \Rightarrow (a + d) + c = a + c.$$

O que é um absurdo, pois $a + d \neq a$, para quaisquer que sejam $b, c \in \mathbb{N}$. Logo $b = c$.

Vamos verificar c.

Seja $c = b + l$, temos:

$$a + b = a + (b + l) = (a + b) + l$$

que é também um absurdo. Logo $b = c$.

1.5 Operação da Subtração nos Números Naturais

Dados dois números naturais a e b tais que $a \leq b$, o número de deslocamentos para a direita partindo de a para atingir b será representado por $b - a$ e será chamado de diferença entre b e a.

Na Matemática, a operação da subtração é empregada quando devemos tirar uma quantidade de outra. No conjunto dos números naturais, a subtração só pode ser efetuada quando o primeiro número (minuendo) for maior do que o segundo número (subtraendo).

Exemplo 1.8. *Dados $a = 3$ e $b = 7$, é preciso deslocar 3 para a direita de 4 posições para alcançar 7, logo $7 - 3 = 4$. Portanto, pela definição de $b - a$, temos que*

$$a + (b - a) = b.$$

O número $b - a$ é também o quanto devemos deslocar b para a esquerda para alcançar a.

Devido à equação acima, o número $b - a$ pode ser interpretado como o quanto falta a a para atingir b.

Problema 1.3. *Mostre que se $c \leq a < b$, então $a - c < b - c$.*

Solução. Seja $a < b$, então existe $d \in \mathbb{N}$ tal que se $a - c = d \Rightarrow b = a + d$. Multiplicando ambos os menbros por c temos: $c.b = c.(a + d) = c.a - c.d$, o que nos dá $c.d = c.b - c.a$.

Substituindo d por $b - a$ na igualdade acima, temos: $c.(b - a) = c.b - c.a$.

Note que $a - a = 0$, pois devemos deslocar a de zero para atingir a, ou seja, não falta nada a a para atingir a.

Note também que $a - 0 = a$, pois devemos deslocar 0 de a para a direita para atingir a; ou seja, falta a a zero para atingir a.

Observe que, no contexto dos números naturais, só faz sentido formar a diferença $b-a$ quando $b \geq a$: caso contrário, isto é, se $b < a$,

$$\ldots \rightarrow b \rightarrow \ldots \rightarrow a \rightarrow \ldots$$

não há como deslocar b para a esquerda para alcançar a, ou o que é o mesmo, não há como deslocar a para a direita para atingir b.

Quando $a \leq b$, a diferença $b-a$, entre b e a, define uma operação sobre pares de números naturais (a,b), que chamaremos de subtração.

A subtração é a operação inversa da adição, pois ao deslocarmos a para a direita de b posições encontramos $a+b$, depois ao deslocarmos $a+b$ para a esquerda de b posições voltamos para a. Em símbolos:

$$(a+b)-b=a.$$

Reciprocamente, se deslocarmos b para a esquerda de a posições encontramos $b-a$, depois ao deslocarmos $b-a$ para a direita de a posições encontramos b. Em símbolos:

$$(b-a)+a=b.$$

Quando $b > a$, o número $b-a$ nos auxilia na contagem de quantos números inteiros maiores ou iguais a a e menores ou iguais a b existem. Para contar esses números considere a sequência:

$$a+0, a+1, a+2, a+3, \ldots, a+(b-a)=b$$

cujo número de elementos é igual ao número de naturais entre 0 e $b-a$ a, inclusive, o que nos dá exatamente $b-a+1$ números. Portanto,

$$se\, a < b, o\, intervalo\, [a,b]\, possui\, b\text{-}a+1\, elementos.$$

Problema 1.4. *Quantos números naturais existem maiores ou iguais a 37 e menores ou iguais a 72?*

Solução: 72 - 37 + 1 = 36

Problema 1.5. *Quantos números naturais existem em cada um dos intervalos (32, 75], [32, 75) e (32, 75)?*

Solução: (32, 75], 75 - 33 + 1 = 43; [32, 75), 74 - 32 + 1 = 43; (32, 75), 74 - 33 + 1 = 42.

1.6 Múltiplos

Dado $a \in \mathbb{N}$, podemos considerar os múltiplos de a: 0 vezes a (nenhuma vez a), uma vez a, duas vezes a, três vezes a etc., obtendo assim a sequência:

$$0.a = 0, \quad 1.a = a, \quad 2.a = a + a, \quad 3.a = a + a + a, \ldots$$

Exemplo 1.9. *Os mútiplos de 2:*

$$0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

que são chamados de números pares. Um número que não é par é denominado de ímpar.

Problema 1.6. *Descubra quantos múltiplos de 7 existem entre 14 e 63, inclusive.*

Solução: O modo mais direto de proceder é listar esses números para depois contá-los:
14, 21, 28, 35 42 49, 56, 63.
Assim, concluímos que existem 8 mútiplos de 7 entre 14 e 63.

Problema 1.7. *Descubra quantos múltiplos de 7 existem entre 14 e 7 000, inclusive.*

Solução: Podemos abordar o problema fazendo-o recair num caso já considerado e de fácil resolução:

$$2.7(= 14), 3.7, 4.7, \ldots, 1000.7(= 7000).$$

Agora é só contar quantos são os números de 2 a 1 000, que sabemos serem 1 000 - 2 + 1 = 999.

Note que o único múltiplo de 0 é apenas o 0. Todos os números são múltiplos de 1 e de si próprios. Note também que, pela definição de múltiplo, um múltiplo não nulo, isto é diferente de zero, de um número $a > 0$ é sempre maior ou igual do que a.

Assim, temos a seguinte propriedade importante:

$$Se\, a.b = 0,\, ent\tilde{a}o\, a = 0\, ou\, b = 0.$$

1.7 Operação da Multiplicação nos Números Naturais

Tomando múltiplos nós definimos uma operação nos números naturais, $a\ .\ b$, que se lê a vezes b, representando o múltiplo a vezes b de b. Assim,

$$a\ .\ b = \begin{cases} 0, & se\, a = 0 \\ b, & se\, a = 1 \\ b + b \ldots + b, & se\, a > 1 \end{cases}$$

O número $a\ .\ b$ será chamado o produto de a por b e será também denotado por ab, quando não houver risco de confusão.

Exemplo 1.10. *2.3 = 3 + 3 = 6, 3.2 = 2 + 2 + 2 = 6, 5.2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10, 2.5 = 5 + 5 = 10 etc.*

Dos exemplos acima, temos que

$$2.3 = 6 = 3.2 \quad e \quad 5.2 = 10 = 2.5$$

Isso não é mera coincidência, pois ocorre sempre. Vamos admitir que a multiplicação possua a seguinte propriedade:

Propriedade Comutativa da Multiplicação

Dados os números naturais a e b, temos que

$$a.b = b.a.$$

Propriedade Associativa da Multiplicação

Dados os números naturais a, b e c, temos que

$$a.(b.c) = (a.b).c.$$

Recorde que definimos a multiplicação nos números naturais através da noção de múltiplo, que em última análise se reduz a ir somando, sucessivamente, a cópias de um mesmo número b. É portanto natural esperar que as operações de adição e de multiplicação tenham uma forte relação. Uma dessas relações se dá através da propriedade distributiva que passamos a discutir.

Propriedade Distributiva da Multiplicação com Relação à Adição

Considere dois múltiplos de um mesmo número natural, por exemplo 6.12 e 3.12, somando esses números obtemos

$$\begin{aligned} 6.12 + 3.12 &= 6.12 + (1.12 + 2.12) \\ &= (6.12 + 1.12) + 2.12 \end{aligned}$$

$= 7.12 + (1.12 + 1.12)$
$= (7.12 + 1.12) + 1.12$
$= 8.12 + 1.12$
$= 9.12$
$= (6 + 3).12$.

Um procedimento como o acima, mais um argumento de indução que não queremos explicitar agora, permitiria mostrar que, em geral, dados números naturais a, b e c, tem-se que

$$(a+b).c = a.c+b.c.$$

Problema 1.8. *Mostre que a multiplicação é distributiva em relação à adição, isto é, para todo a, b, $c \in \mathbb{N}$ tem-se que: $a.(b+c) = a.b+a.c$ e $(a+b).c = a.c+b.c$.*

Solução. Sejam $a,b \in \mathbb{N}$ e seja X=$\{c \in \mathbb{N};\ a.(b+c) = a.b+a.c\}$. Temos que $1 \in X$.
Supomos que $c \in X$. Então:
$a.((b+(c+1)) = a.((a+c)+1)$
$= a.(b+c)+a.1$
$= a.b+a.c+a$
$= a.b+(a.c+a)$
$= a.b+a.(c+1)$
Ou seja $c+1 \in X$.
Logo, $X = \mathbb{N}$. Isto é, $a.(b+c) = a.b+a.c$ para quaisquer que sejam $a,b,c \in \mathbb{N}$.
Seja, agora $Y = \{c \in \mathbb{N};\ (a+b).c = a.c+b.c\}$. Então, $1 \in Y$, pois $(a+b).1 = a.1+b.1$.
Se $c \in Y$, temos:
$(a+b).(c+1)) = (a+b).+(a+b)$
$= a.c+b.c+(a+b)$
$= a.c+a+b.c+b$
$= a.(c+1)+b.(c+1)$.
Ou seja, $c+1 \in Y$. Logo, $Y = \mathbb{N}$. Isto é $(a+b).c = a.c+b.c$ para quaisquer que sejam $a,b,c \in \mathbb{N}$.

Propriedade Distributiva da Multiplicação com Relação à Subtração

Podemos agora mostrar que se $a < b$, então:

$$c.(b-a) = c.b-c.a.$$

De fato, temos que

$$c.a + c.(b-a) = c.[a + (b-a)] = c.b.$$

Assim, pela definição da subtração, temos que

$$c.(b-a) = c.b - c.a.$$

Problema 1.9. *Mostre que* $(a-b).c = a.c - c.b$*, para todo* $a,b,c \in \mathbb{N}$.

Solução. Sejam $a,b \in \mathbb{N}$ e seja $X = \{c \in \mathbb{N};\ (a.b).c = a.c.b.c\}$. $1 \in X$, pois $(ab).1 = a.1.b.1$.
Se $c \in X$, temos:
$(a.b).c = a.(b.c)$
$= (a.b).c.(a.b)$
$= a.c.b.c.a.c$
$= (a.c.a).(b.c.b)$
$= (a.c.1)(b.c.1)$
$= a.c.b.c.$
Ou seja, $c-1 \in \mathbb{N}$. Logo, X = N. Isto é $(a-b).c = a.c - c.b$ para quaisquer que sejam $a,b,c \in \mathbb{N}$.

Relação entre Multiplicação e Ordem

A relação entre a adição e a ordem se reflete numa relação entre a multiplicação e a ordem.

$$\textit{Se } a < b \textit{ e } c > 0, \textit{ então } c.a < c.b.$$

1.8 Múltiplos Comuns

Um número $a \in \mathbb{N}$ é dito mútiplo comum de $b,c \in \mathbb{N}$ se é simultaneamente múltiplo de b e c, ou seja:

$$a = k.b \textit{ e } a = w.c \textit{ com } k,w \in \mathbb{N}$$

Exemplo 1.11. *Considere a sequência dos múltiplos de 3:*

$$0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45,\ldots$$

e a sequência dos múltiplos de 5:

$$0,5,10,15,20,25,30,35,40,45,\ldots$$

Assim, a sequência dos números que são simultaneamente múltiplos de 3 e de 5 é:

$$0, 15, 30, 45, \ldots$$

Você saberia continuar a sequência acima? Aparentemente, tratase da sequência dos múltiplos de 15, ou seja, os múltiplos do menor múltiplo comum não nulo de 3 e de 5, que é 15.

Se a e b são números naturais não nulos, sabemos por definição que o número $a \times b$ é um múltiplo não nulo de b. Por outro lado, pela propriedade comutativa da multiplicação, tem-se que ele é também um múltiplo de a. Assim, o conjunto dos múltiplos comuns de a e b, além de conter o número 0, contém também o número $a \times b \neq 0$.

Definição 1.1. *O menor múltiplo comum não nulo de dois números naturais não nulos a e b é denotado por mmc(a,b) e será chamado de mínimo múltiplo comum de a e b (ou abreviadamente mmc).*

Problema 1.10. *Ache o mmc dos seguintes pares de números:*

$$3\,e\,4;\ 6\,e\,11\,;\ 6\,e\,8;\ 3\,e\,9.$$

Solução: 12, 66, 24, 9, respectivamente.

1.9 Potenciação nos Números Naturais

Dados dois números naturais $a \neq 0$ e n qualquer, definimos a operação de potenciação como segue:

$$a^n = \begin{cases} 1, & se\, n = 0 \\ a, & se\, n = 1 \\ a \times a \times \ldots \times a, & se\, n > 1 \end{cases}$$

Define-se também $0^n = 0$, para todo $n \neq 0$.

Exemplo 1.12. $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $0^2 = 0$ *etc.*

Observação 1.1. *Fica de fora* 0^0*, que não é definido.*

Problema 1.11. *Convença-se de que a potenciação possui as seguintes propriedades:*

(a) $1^n = 1$;

(b) $a^n\ a^m = a^{n+m}$;

(c) $(a^n)^m = a^{nm}$;

(d) $a^n b^n = (ab)^n$.

Existem também fórmulas para escrever a potência de uma soma.

Exemplo 1.13.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 2b$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^2.$$

Em geral,$(a+b)^n$ se escreve como a soma dos produtos de potências a^ib^j, onde $i + j = n$, multiplicados por certos números naturais. Esta fórmula geral que não apresentaremos aqui é chamada de fórmula do binômio de Newton.

1.10 O Sistema Decimal

Os números naturais foram representados ao longo da história de vários modos distintos. O modo universalmente utilizado na atualidade é a representação decimal posicional. Nesse sistema, todo número natural é representado por uma sequência formada pelos algarismos

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Esse sistema, variante do sistema sexagesimal utilizado pelos babilônios há cerca de 1 700 anos antes de Cristo, foi desenvolvido na China e na Índia. O principal personagem da sua composição numérica é o zero. Ele forma um conjunto infinito de sequências que permite montar números tão grandes quanto se queira. Vejamos como.

Os símbolos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 quando isolados designam números, mas quanto se agrupam passam a ser algarismos. Assim, depois do número 9 temos o número 10 constituído por dois algarismos 1 e 0. Com dois algarismos temos portanto o grupo 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 e 19.

Observem que os números são sempre constituídos pelo algarismo 1 associado à sequência dos números naturais, incluindo 0. Agora podemos formar as outras sequências, substituindo o 1 pelo 2, depois 2 pelo 3, o 3 pelo 4, etc, até o 8 pelo 9. Temos assim o grupo formado pelos seguintes números iniciais 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 e 90.

Todos os números que se formam na sequência dos grupos, começam com números que formam uma outra sequência de múltiplos de 10, ou seja 10, 100, 1000, 10000, etc.. Portanto dizermos que o sistema decimal é um sistema de base 10.

O sistema é também dito posicional, pois cada algarismo, além de seu valor intrínseco, possui um peso que lhe é atribuído em função de sua posição dentro da sequência. Esse peso é uma potência de 10 e varia do seguinte modo:

O algarismo da extrema direita tem peso $10^0 = 1$; o seguinte, sempre da direita para a esquerda, tem peso $10^1 = 10$; o seguinte tem peso $10^2 = 100$; o seguinte tem peso $10^3 = 1\,000$ etc.

Assim, o número 1 458, no sistema decimal representa o número

$$1.10^3 + 4.10^2 + 5.10^1 + 8.$$

Os zeros à esquerda em um número são irrelevantes, vejamos o exemplo.

Exemplo 1.14. $0231 = 0.10^3 + 2.10^2 + 3.10^1 + 1 = 2.10^2 + 3.10^1 + 1 = 231.$

Cada algarismo de um número possui uma ordem, contada da direita para a esquerda. Assim, no exemplo acima, o 8 é de primeira ordem, o 5 de segunda ordem, o 4 de terceira ordem e o 1 de quarta ordem.

Cada três ordens, também contadas da direita para a esquerda, constituem uma classe. As classes são usualmente separadas por um ponto. A seguir, damos os nomes das primeiras classes e ordens:

$$\text{Classe das Unidades} \begin{cases} unidades & 1^a ordem \\ dezenas & 2^a ordem \\ centenas & 3^a ordem \end{cases}$$

$$\text{Classe do Milhar} \begin{cases} unidades & de\, milhar\ 4^a\ ordem \\ dezenas & de\, milhar\ 5^a\ ordem \\ centenas & de\, milhar\ 6^a\ ordem \end{cases}$$

$$\text{Classe do Milhão} \begin{cases} unidades & de\, milhão\ 7^{\text{a}}\ ordem \\ dezenas & de\, milhão\ 8^{\text{a}}\ ordem \\ centenas & de\, milhão\ 9^{\text{a}}\ ordem \end{cases}$$

Como iremos usar o Princípio de Indução nos próximos capítulos, exibiremos agora sua definição.

1.11 Princípio de Indução

Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ...\}$ o conjunto dos números naturais.

Seja $P(n)$ uma determinada propriedade relativa aos números naturais.

O Princípio da Indução afirma que:

Se $P(1)$ for verdadeira e o fato de $P(n)$ ser verdadeira implicar em $P(n+1)$ também ser verdadeira então, a propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Simbolicamente:

(a) $P(1)$ é verdadeiro

(b) $P(n)$ é verdadeiro $\Rightarrow P(n+1)$ é verdadeiro.

Capítulo 2

Axiomas de Peano

Apresentaremos agora a construção dos números naturais através dos Axiomas de Peano, e também definiremos as principais propriedades desses números, com isso, podemos perceber a semelhança dessas propriedades com as propriedades mostradas no capítulo anterior, que foram definidas de forma básica.

Denotemos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Em seguida enumeramos os Axiomas de Peano, os quais serão usados para construir os números naturais e suas propriedades.

Axiomas de Peano

P_1. $1 \in \mathbb{N}$, isto é, $\mathbb{N}$ é um conjunto não vazio e contém um elemento designado como 1.

P_2. Para cada elemento $n \in \mathbb{N}$ há um único elemento $n^* \in \mathbb{N}$ chamado sucessor de n.

P_3. Para cada n $\in \mathbb{N}$, $n^* \neq 1$, isto é, 1 não é sucessor de nenhum elemento em $\mathbb{N}$.

P_4. Para cada par $n, m \in \mathbb{N}$ com $m \neq n$, daí temos: $m^* \neq n^*$; isto é, elementos distintos em $\mathbb{N}$ tem sucessores distintos.

P_5. Se $A \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in A$ e $p \in A$ implica $p^* \in A$ então $A = \mathbb{N}$.

Estes cinco axiomas são chamados Postulados de Peano, e são fundamentais nas demonstrações das propriedades dos números naturais. O axioma P_5 é chamado de Princípio de Indução Matemática e é uma importante ferramenta em várias demonstrações matemáticas. Muitas vezes aparece na seguinte forma:

Se para cada número natural n, S(n) é uma proposição que depende de n então para provar que S(n) é uma proposição verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ devemos definir o conjunto A para ser o conjunto de todos estes números naturais n para os quais S(n) é verdadeira ($A \subseteq \mathbb{N}$). Se mostramos que S(1) é verdadeira ($1 \in A$) e se supormos que S(p) é verdadeira implica que S(p^*) é verdadeira ($p \in A$ implica $p^* \in A$) então pelo Princípio de Indução Matemática, S(n) é verdadeira para qualquer número natural $n \in \mathbb{N}$.

Os axiomas de Peano nos permitem enumerar os números naturais. De fato,

(a) $1 \in \mathbb{N}$ por P_1.

(b) $1^* \in \mathbb{N}$ por P_2 e $1^* \neq 1$ por P_3. Nomeia $1^* = 2$, então 1, 2 são números naturais distintos.

(c) $2^* \in \mathbb{N}$ por P_2 e $2^* \neq 1$ por P_3. $2^* \neq 2$ por P_4 (desde que $1 \neq 2$). Nomeia $2^* = 3$; então 1, 2, 3 são números naturais distintos.

(d) $3^* \in \mathbb{N}$ por P_2 e $3^* \neq 1$ por P_3. $3^* \neq 2$ por P_4 (desde que $3 \neq 1$). $3^* \neq 3$ por P_4 (desde que $3 \neq 2$). Nomeia $3^* = 4$; então 1, 2, 3, 4 são números naturais distintos.

Continuando com este processo, obtemos o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Desde que A satisfaz a hipótese de indução P_5, temos que $A = \mathbb{N}$.

A seguir desenvolveremos uma "aritmética" em $\mathbb{N}$, definindo duas operações binárias chamadas de adição ($+$) e multiplicação ($\cdot$).

2.1 Definição

Adição:

$$n+1 = n^* \ \textit{para cada} \ n \in \mathbb{N}$$

e

$$n+p^* = (n+p)^* \ \textit{para cada} \ n \in \mathbb{N} \ \textit{e} \ p \in \mathbb{N}.$$

Multiplicação:

$$n.1 = n \ \textit{para cada} \ n \in \mathbb{N}$$

e

$$n.p^* = (n.p)+n \ \textit{para cada} \ n \in \mathbb{N} \ \textit{e} \ p \in \mathbb{N}.$$

Note que as operações de adição e multiplicação são definidas por indução: a definição de adição, primeiro determina a soma $n + 1$ e em seguida as somas $n + 2 = (n+1)^*$, $n + 3 = (n+2)^*$, $n + 4 = (n+3)^*$, etc. Semelhantemente, a definição de multiplicação primeiro determina $n.1$ e então os produtos $n.2 = (n + 1) + n$, $n.3 = (n + 2) + n$, $n.4 = (n + 3) + n$, etc. Assim, não tornaria uma surpresa que as demonstrações de várias propriedades aritméticas dos números naturais fossem baseadas no axioma P_5. Como exemplo, provaremos o seguinte.

2.2 Teorema. (Lei Associativa da Adição)

$$(m+n)+p = m+(n+p) \text{ } para\ cada\ m,n,p \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Tome m, $n \in \mathbb{N}$ fixo porém arbitrário e defina

$$A = \{p \in \mathbb{N}/(m+n)+p = m+(n+p)\}$$

É claro que $A \subseteq \mathbb{N}$, desde que

$$(m+n)+1 = (m+n)^* = m+n^* = m+(n+1)$$

temos que $1 \in A$. Agora suponha que $p \in A$; então

$$(m+n)+p = m+(n+p).$$

Logo,

$(m + n) + p^* = [(m + n) + p]^* = [m + (n + p)]^* = m + (n + p)^* = m + (n + p^*)$ e assim $p^* \in A$. Segue do axioma P_5 que $A = \mathbb{N}$. Assim $(m + n) + p = m + (n + p)$ para qualquer número natural p. Desde que m e n sejam arbitrários, a Lei Associativa da Adição é estabelecida. □

Leis Comutativas da Adição e da Multiplicação

$$m+n = n+m \text{ } para\ cada\ m,n,p \in \mathbb{N}$$

$$m.n = n.m \text{ } para\ cada\ m,n,p \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. (i) Seja $X = \{m \in \mathbb{N};\ m+1 = 1+m\}$. Então, $1 \in \mathbb{X}$ e se $m \in \mathbb{X}$, tem-se.

$$1+S(m) = S(1+m) = S(m+1) = S(S(m) = S(m)+1$$

Logo $X = \mathbb{N}$, isto é, $m+1 = 1+m$, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$.

(ii) Seja $Y = \{m \in \mathbb{N};\ m+n = n+m\}$. Então pelo item (i), $1 \in Y$. Se $m \in Y$, tem-se

$$\begin{aligned} n+S(m) &= S(n+m) \\ &= S(m+n) \\ &= m+S(n) \\ &= m+(n+1) \\ &= m+(1+n) \end{aligned}$$

$= (m+1)+n$
$= S(m)+n$

Ou seja, $S(m) \in Y$. Logo $Y = \mathbb{N}$, isto é, $m+n = n+m$. Para quaisquer $m,n \in \mathbb{N}$.

Considere agora que $X = \{m \in \mathbb{N};\ m.1 = 1.m\}$. Então $1 \in X$ e se $m \in X$, temos:

$$(m+1).1 = m.1+1.1 = 1.m+1.1 = 1.(m+1)$$

Ou seja $m+1 \in X$. Logo $X = \mathbb{N}$, isto é $m.1 = 1.m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Seja, $Y = \{m \in \mathbb{N};\ m.n = n.m\}$, onde $n \in \mathbb{N}$. Então, pelo que acabamos de provar acima, $1 \in Y$. Se $m \in Y$, temos:

$(m+1).n = m.n+1.n = n.m+1.n = n.m+n = n.(m+1)$

Ou seja $m+1 \in Y$. Logo, $Y = \mathbb{N}$, ou seja $m.n = n.m$, para quaisquer que sejam $m,n,\in \mathbb{N}$. □

Leis Distributivas

$$m.(n+p) = m.n+m.p \textit{ para cada } m,n,p \in \mathbb{N}.$$

$$(m+n).p = (m.p)+(n.p) \textit{ para cada } m,n,p \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Sejam $m,n \in \mathbb{N}$ e seja $X = \{p \in \mathbb{N};\ m.(n+p) = m.n+m.p\}$. Temos que $1 \in X$.

Suponhamos que $p \in X$. Então:

$m.((n+(p+1)) = m.((m+p)+1)$
$= m.(n+p)+m.1$
$= m.n+m.p+m$
$= m.n+(m.p+m)$
$= m.n+m.(p+1).$

Ou seja $p+1 \in X$.

Logo, $X = \mathbb{N}$. Isto é $m.(n+p) = m.n+m.p$ para quaisquer que sejam $m,n,p \in \mathbb{N}$.

Seja, agora $Y = \{p \in \mathbb{N};\ (m+n).p = m.p+n.p\}$. Então, $1 \in Y$, pois$(m+n).1 = m.1+n.1$. Se $p \in Y$, temos:

$(m+n).(p+1)) = (m+n).p+(m+n)$
$= m.p+n.p+(m+n)$
$= m.p+m+n.p+n$
$= m.(p+1)+n.(p+1).$

Ou seja $p+1 \in Y$. Logo, $Y = \mathbb{N}$. Isto é $(m+n).p = m.p+n.p$ para quaisquer que sejam $m,n,p \in \mathbb{N}$. □

Lei Associativa da Multiplicação

$$(m.n).p = m.(n.p) \text{ para cada } m,n,p \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Sejam $m,n \in \mathbb{N}$ e seja $X = \{p \in \mathbb{N};\ m.(n.p) = (m.n).p\}$. Então, $1 \in X$, pois $m.(n.1) = m.n = (m.n).1$.

Se $p \in X$, temos:

$$\begin{aligned} m.(n.(p+1)) &= m.(n.p+n) \\ &= m.(n.p)+m.n \\ &= (m.n).p+m.n \\ &= (m.n).(p+1). \end{aligned}$$

Ou seja, $p+1 \in X$. Logo, $X = \mathbb{N}$, isto é, $m.(n.p) = (m.n).p$, para quaisquer que sejam m, n, p $\in \mathbb{N}$. □

2.3 Teorema. (Lei do Cancelamento)

$$p+m = p+n \Rightarrow m = n \text{ para cada } m,n,p \in \mathbb{N}.$$

e

$$p.m = p.n \Rightarrow m = n \text{ para cada } m,n,p \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Tome $S_{(p)}$ como sendo a proposição "$p + m = p + n \Rightarrow m = n$". Se $1 + m = 1 + n$ então $m^* = n^*$, e assim (por P_4) $m = n$. Assim $S_{(1)}$ é verdadeira. Suponha que $S_{(p)}$ é verdadeira: então $p + m = p + n \Rightarrow m = n$. Agora se $p^* + m = p^* + n$ então $(1 + p) + m = (1 + p) + n$ e assim $1 + (p + m) = 1 + (p + n)$. Desde que $S_{(1)}$ é verdadeira, $p + m = p + n$. Porém $S_{(p)}$ é verdadeira; logo $m = n$, e conseqüentemente $S_{(p^*)}$ é verdadeira. Segue pelo Princípio de Indução Matemática que $S_{(p)}$ é verdadeira para qualquer número natural p; e que $p + m = p + n \Rightarrow m = n$ para cada m, n, $p \in \mathbb{N}$. □

Um outro fato em volta dos números naturais , é que certos números naturais são maiores que outros. Esta noção é chamada de ordem e introduziremos a seguir. Definimos uma relação em $\mathbb{N}$ chamada relação de ordem, simbolizada por $<$ e lê-se "menor que". Para quaisquer m, $n \in \mathbb{N}$, escrevemos $m < n$ desde que existe um número natural p tal que $m + p = n$. Esta relação em $\mathbb{N}$, claramente não é uma relação de equivalência, pois se fosse ela era reflexiva e simétrica. Entretanto, a Lei transitiva é satisfeita. De fato, suponha que $m < n$ e $n < p$, então há números naturais q_1 e q_2

tal que $m + q_1 = n$ e $n + q_2 = p$. Assim $p = n + q_2 = (m + q_1) + q_2 = m + (q_1 + q_2)$ e assim $m < p$.

Agora desde que $n + 1 = n^*$ para qualquer número natural n, $n < n^*$; e assim

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < \cdots$$

A seguinte lei é fundamental e pode ser provada diretamente da sua definição:

Lei da Tricotomia

Para qualquer par $m, n \in \mathbb{N}$ exatamente uma, e somente uma, das sentenças abaixo é verdade:
(a) $m = n$
(b) $m < n$
(c) $n < m$.

Às vezes escrevemos $m > n$ que significa $n < m$. Outra relação em $\mathbb{N}$ que é usada freqüentemente é $\leq$ lê-se "menor que ou igual a", assim é definido para $m \leq n$ que significa $m < n$ ou $m = n$. Podemos perceber que esta relação é reflexiva e transitiva, porém não é simétrica. Segue da Lei da Tricotomia que se $m \leq n$ e $n \leq m$ então $m = n$.

O próximo teorema, chamado de Princípio da Boa Ordenação para $\mathbb{N}$, é uma importante propriedade que é característica do conjunto dos números naturais. Este princípio é usado freqüentemente no desenvolvimento do sistema de números reais.

Teorema 2.1. *Qualquer subconjunto não vazio $A \subseteq \mathbb{N}$ possui o elemento mínimo, isto é, existe um $p \in A$ tal que $p \leq a$ para todo $a \in A$.*

Demonstração. Suponhamos que A é um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ e que A não tem o elemento mínimo e mostraremos que esta afirmação nos conduzirá a uma contradição.

Define $M \subseteq \mathbb{N}$ por

$$M = \{x \in \mathbb{N}/x < a \text{ para cada } a \in A\}.$$

Pela Lei da Tricotomia $M \cap A = \emptyset$. Agora $1 \in A$, pois, ao contrário, 1 certamente seria o elemento mínimo em A. Portanto, $1 < a$ para cada $a \in A$, e assim $1 \in M$. Suponha que $p \in M$; então $p < a$ para cada $a \in A$. Se $p + 1 \in A$ então $p + 1$ é o primeiro número natural maior que p, assim seria o elemento mínimo em A, isto é, uma contradição, pois supomos que A não tem o elemento mínimo. Logo, $p + 1 \in A$, e assim $p + 1 < a$ para cada $a \in A$. Logo, $p + 1 \in M$ e por indução $M = \mathbb{N}$. Porém, $M \cap A = \emptyset$, e assim $A = \emptyset$ que é uma contradição. Assim, A necessariamente possui elemento mínimo. $\square$

Capítulo 3

Números Naturais via Conjuntos

Neste último capítulo, apresenteremos a construção dos números naturais via conjuntos, o que nos leva a conhecer outro método de construção, pois vimos nos capítulos anteriores, a construção via Axiomas de Peano e também vimos os números naturais de forma básica. Com isso temos a oportunidade de compararmos os métodos exibidos anteriormente com essa construção via conjuntos, que é muito interessante e nos leva a estudos referentes à Teoria dos Conjuntos.

3.1 A Construção Básica

Existem muitas maneiras de construir o conjunto dos números naturais. Todas elas são, em sua essência, equivalentes, e variam de acordo com seus princípios e leis de formação.

A abordagem utilizada aqui tem o objetivo de construir os números naturais dentro de um conjunto U, que assumimos ser o menor conjunto possível para tal façanha. Na teoria dos conjuntos, dizemos simplesmente que U é um conjunto cujos elementos são todos os objetos que podem nos interessar. Para os nossos propósitos, é suficiente apenas afirmar que U é uma família não vazia de conjuntos fechado sob as operações:

- Formação de Conjuntos
- Subconjuntos
- Produto Cartesiano (binário)
- Potência de Conjuntos
- União (indexada)

Não faremos nenhuma suposição com relação à natureza dos conjuntos que são elementos de U, mas chamamos a atenção ao fato de que o conjunto vazio pertence a U (o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto). Esta é a única informação que temos do conjunto U. A partir da existência de como elemento de U, a partir do uso das operações acima citadas poderemos obter mais conjunto que pertencem a U.

Iniciaremos agora a construção dos números naturais.

Como estamos usando conjuntos nesta construção (dos números naturais), precisamos obter alguns conjuntos que pertençam a U e que sejam candidatos naturais para os números naturais. Por exemplo, o conjunto vazio é um candidato natural para representar o que pensamos que o 0 representa. Além disso, pertence a U. Partindo desta observação, vamos usar as leis de formação citadas anteriormente e construir conjuntos descritos no exercício 1 da teoria dos conjuntos. Isto é, usando o conjunto vazio, obtemos $\{\emptyset\}$, e $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$. Ambos os conjuntos estão em U. Um outro exemplo: o leitor pode facilmente verificar que o conjunto pode ser construído no mesmo processo e é distinto dos outros dois conjuntos criados.

Observamos o seguinte conjunto: $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$ percebemos que ele é distinto dos primeiros três conjuntos anteriores.

Notemos também que estes conjuntos contém 0, 1, 2, 3 elementos, respectivamente. Como esses conjuntos estão em U, (podemos efetuar a operação união). Podemos construir qualquer outro conjunto desta forma. Em particular, a união de quaisquer dois ou três conjuntos em U pertence a U.

Continuaremos com essa construção usando, em cada passo as mesmas leis de construção usadas nos conjuntos anteriores: uma vez construído um conjunto finito S, pertencente a U, o próximo conjunto é definido pela união $S \cup \{S\}$.

Como S é fechado sob as operações formação de conjuntos e união, este novo conjunto também pertence a U. Além do mais, pela proposição 2 da Teoria dos conjuntos, é finito. Iremos chamar esse conjunto de sucessor de S e denotaremos por $\sigma(S)$. Para resumir,

$$\sigma(S) = S \cup \{S\}$$

Podemos continuar este processo tanto quanto quisermos, mas assumimos que não podemos concluir esta construção. Necessitamos então de um princípio que nos permita "concluir" esta construção chamado de Princípio de Indução.

3.2 Axioma dos Números Naturais

Todos os conjuntos que construímos pelo processo descrito acima, e somente eles, formam um conjunto em U o qual denotaremos por $\mathbb{N}$ denominado conjunto dos números naturais. Cada elemento de $\mathbb{N}$ é chamado de número natural.

Este axioma tem consequências simples que nos permitem identificar esta abstração de uma forma familiar do conceito que temos dos números naturais. Primeiro, cada coleção de conjuntos está parcialmente ordenada pela relação de inclusão. Então, esta relação define uma ordem parcial em $\mathbb{N}$. Mas, pela forma que $\mathbb{N}$ é construído, podemos concluir mais. Cada conjunto não vazio T é, em nossa construção, um conjunto finito obtido a partir de S, pela adição de elementos. Portanto, a ordem parcial em $\mathbb{N}$ é uma ordem linear, porque dados quaisquer dois conjuntos construídos S e T, ambos são iguais ou um foi construído antes do outro. Em ambos os casos, um deles está contido no outro. Chamamos isso de forma natural linear em $\mathbb{N}$.

Entretanto, se estes conjuntos são construídos em diferentes momentos em nossa sequência, não podemos ainda concluir que eles são diferentes. Para isso, precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 1.

Sejam S e T dois conjuntos construídos, com S construídos antes de T. Então $S \in T$.

Demonstração. Se T é construído imediatamente após a S, então $T = \sigma(S)$ e $S \in T$, pela definição de $\sigma(S)$. Se T é construída mais tarde, então $\sigma(S) \subseteq T$. Além disso, $S \in \sigma(S)$, logo $S \in T$. $\square$

Lema 2.

Seja T um dos conjuntos construídos. Então T consiste precisamente de todos os conjuntos construídos anteriormente.

Demonstração. Seja B a coleção de todos os conjuntos construídos anteriormente, antes de T . Pela definição da construção, T é constituído pelo $\emptyset$, ou alguns, ou todos os elementos de B. Então, $T \subseteq B$. Por outro lado, o Lema 1 implica imediatamente que $B \subseteq T$. Portanto, $T = B$. $\square$

Lema 3.

Nenhum dos conjuntos construídos S satisfazem $S \in S$.

Demonstração. Cada conjunto construído S surge em algum passo definido em nosso processo. Se esta é a primeira etapa, então $S = \emptyset$ e o resultado é válido, desde que, S não possui elementos. Se esta é a uma etapa posterior, os membros de S são conjuntos que foram construído anteriormente. Uma vez que S não é um desses, $S \notin S$. $\square$

Observação 3.1. *Os Lemas* 1 *e 3 implicam que, para quaisquer conjuntos construídos S e T, com S construídos antes de T, temos que $S \subset T$.*

Proposição 3.1. *Seja M um subconjunto não vazio de* $\mathbb{N}$. *Então, M tem um elemento mínimo.*

Demonstração. Esta prova é baseada em nossa suposição sobre o processo de construção sequencial, ou seja, que cada número natural na sequência é construído em uma etapa definitiva, com finitos passos. Seja T um elemento do conjunto não-vazio M, ou seja, T é um número natural, por isso foi construído com um único passo no processo descrito, e é um conjunto finito, cujos membros são todos os números naturais construídos anteriormente. Se alguns destes pertencem a M, então claramente o que foi construído primeiro será o menor elemento de M. Este número natural pode ser identificado por uma inspeção direta finita. Se não houver tais elementos, então, obviamente, T é o menor elemento de M. Isto completa a prova. $\square$

Nota:
Qualquer ordenação linear tendo a propriedade descrita na Proposição 3.1 é chamado uma Boa-Ordenação. Assim, a Proposição 3.1 pode ser formulada como: A ordem do conjunto dos naturais é uma Boa-Ordenação. A Proposição 3.1 é também chamada de Princípio da Boa-Ordenação para os números naturais.

Proposição 3.2. *(Princípio da Indução)*

Suponha que X é um subconjunto de $\mathbb{N}$ com as duas seguintes propriedades: (a), $\emptyset \in X$; (b) Se $S \in X$, então $\sigma(S) \in X$. Então $X = \mathbb{N}$.

Demonstração. Assumimos as hipóteses (a) e (b). Seja Y o complemento de X em $\mathbb{N}$. Nós primeiramente vamos dar uma prova por contradição que Y está vazio.

Se Y não é vazio, então pela Proposição 3.1, Y tem um elemento mínimo, digamos T, que ocorre em algumas etapas bem definidas na construção de $\mathbb{N}$. Isso não pode ocorrer no primeiro passo, porque então seria igual $\emptyset$, no entanto pertencer a X. Suponha que $T = \sigma(S)$ para algum conjunto $S \in \mathbb{N}$. O S, é estritamente menor do que T, e não pode estar em Y, então $S \in X$. Mas pela hipótese (b), teremos que $\sigma(S) \in X$, isto é, $T \in X$, contradizendo $T \in Y$. Esta contradição mostra que Y está vazio. Logo, $X = \mathbb{N}\backslash Y = \mathbb{N}\backslash\emptyset = \mathbb{N}$, conforme desejado. $\square$

3.3 Prova por Indução

É agora vale a pena uma pausa em nossa construção para introduzir a notação padrão e trabalhar um pouco com o princípio da indução. É padrão denotar os dez primeiros conjuntos construídos pelo procedimento descrito acima, os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, e em seguida, para formar números adicionais via a notação posicional conhecido. Posteriormente os conjuntos construídos são colocados em ordem. Então, nós agora assumiremos este feito. Vamos referir-se a estes conjuntos de maneira usual sendo em particular os números naturais. Os elementos gerais de $\mathbb{N}$ serão muitas vezes denotados por letras minúsculas, como a, b, c,... , i, j, k, l, m, n, etc. Vamos usar a notação σ para a função sucessor, mas é mais conveniente abreviar $\sigma(n)$ por n'. Dado que os números naturais são definidos por conjuntos específicos, o leitor pode está interessado em saber o que esses conjuntos têm em comum com a notação padrão. É claro que 0 é apenas o $\emptyset$. No entanto, cada número sucessor n' pode ser bem escrito como

$$n' = 0, 1, 2, ..., n.$$

Assim, $1 = \{0\}$, $2 = \{0,\ 1\}$, $3 = \{0,\ 1,\ 2\}$, etc.

Nós raramente usaremos o fato de que os números naturais são conjuntos ou utilizar esta representação dos números naturais como conjuntos. A Boa-Ordenação em $\mathbb{N}$ será denotada por $\leq$ (a ordem estrita correspondente a $<$). Obviamente, se m e n pertencem a $\mathbb{N}$, então:

$$m < n \Rightarrow m' < n'.$$

Temos agora recuperados todas as notações que usamos normalmente em conexão com os números naturais, nos diz respeito a aritmética.

Note que ainda estamos em um modo de pré-aritmética. Isso significa que nós não podemos ainda fazer uso de qualquer coisa relativa à adição, subtração, multiplicação, divisão ou para o nosso desenvolvimento lógico. (naturalmente, nós podemos muito bem usar a aritmética em ilustrativos exemplos ou exercícios).

Agora, vamos reformular o Princípio de Indução, usando a notação já introduzida.

3.4 Princípio de Indução para Conjuntos

Seja X um subconjunto de $\mathbb{N}$ satisfazendo as seguintes propriedades: (a) $0 \in X$; (b) $n \in X \Longrightarrow n' \in X$. Então, $X = \mathbb{N}$.

Esta versão do princípio da indução é mais próximo daquilo que o aluno já tem visto, e às vezes é uma formulação útil. No entanto, isso ainda não é uma versão familiar. Para amarrar o princípio da indução para Conjuntos para a versão mais familiar, vamos recordar a noção do conjunto verdade.

Seja $P(n)$ é uma proposição qualquer envolvendo uma única variável n que varia ao longo de $\mathbb{N}$. O conjunto verdade de $P(n)$ é definido como o conjunto de todos os $n \in \mathbb{N}$, para os quais $P(n)$ é verdade. Para provar que $P(n)$ é verdadeira para todo n equivale a mostrar que o conjunto verdade de $P(n)$ é igual a $\mathbb{N}$. Pelo Princípio de Indução para Conjuntos isso equivale a demonstrar que o conjunto verdade satisfaz (a) e (b) acima. Mas cada ítem (a) e (b) pode ser reformulada diretamente em termos de $P(n)$, produzindo a versão padrão do princípio da indução.

3.5 O Princípio do Standard de indução

Seja $P(n)$ uma proposição qualquer envolvendo uma única variável n que varia ao longo de $\mathbb{N}$. Então $(\forall n)$ $P(n)$ é verdadeira, se e somente se, (a) $P(0)$ é verdadeiro e (b) $(\forall k)$ $(P(k) \Longrightarrow P(k'))$ é verdadeira.

Por outro lado, suponha que X é subconjunto dos números naturais. Seja $P(n)$ uma preposição com $n \in X$. Então, o princípio de indução padrão aplicado à $P(n)$ pode ser formulada inteiramente em termos do conjunto X e a relação de $\in$. Quando isso é feito, o resultado é precisamente o princípio de indução de Conjuntos. Assim, os dois princípios são de fato apenas formulações diferentes da mesma coisa e pode ser usado alternadamente, conforme necessário.

A prova por indução envolve uma proposição, como $P(n)$, o qual é necessário provar a veracidade para cada n. O princípio da indução mostra que este pode ser realizado em duas etapas. O primeiro, chamado de caso de base, que envolve a verificação de $P(0)$ é verdadeira. Na maioria das vezes é fácil sua verificação. A segunda etapa, denominada de fase indutiva, envolve prova de uma implicação $P(k) \Longrightarrow P(k')$ para cada k. Conforme descrito no Cálculo das proposições, isto equivale a escolher um k arbitrário, assumindo que P(k) é verdadeira, e então usa-se esta hipótese para deduzir que $P(k')$ é verdadeira. Atenção: É muito importante que nesta etapa, a implicação de $P(k) \Longrightarrow P(k')$ é provado por uma arbitrariedade, ou geral, número natural k, e não simplesmente para algum número natural particular.

Nós já apresentamos alguns exemplos e exercícios que ilustram este método de prova. Muitos mais exemplos e aplicações irão ocorrer em partes posteriores do texto. Nestes exemplos e exercícios usaremos a notação e as operações que estamos familiarizados ao trabalhar com números e álgebra. Em particular, devem utilizar + sentido usual e nós vamos usar $n+1$ em vez de n'.

Exemplo 3.1. *:Neste exemplo, como em alguns outros, fazemos uso da aritmética padrão e fatos algébricos sobre os números para fins de ilustração. Para n variando sobre $\mathbb{N}$, seja P(n) ser uma proposição*

$$0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Seguimos por indução sobre n.

Caso Base: Quando n = 0, ambos os lados da equação reduz para 0, então P(0) é verdadeira.

Passo indutivo: Seja k um número arbitrário natural, e suponha que P(k) é verdadeiro. Ou seja, 0 + 1 + 2 ... k = $\frac{k(k+1)}{2}$. Adicionar k + 1 para ambos os lados, obtemos uma igualdade válida. Especificamente, temos 0 + 1 + 2 + ... + $(k+1)$, no lado esquerdo e $(\frac{k(k+1)}{2})$ + $(k+1) =$ $(k+1)$ $(\frac{k}{2+1}) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ à direita. A igualdade destes dois é exatamente o que $P(k+1)$ afirma, então $P(k+1)$ é verdadeira. Assim, pelo princípio da indução, P(n) é verdadeiro para todos os números naturais n.

O exemplo acima é uma das primeiras aplicações da indução que é apresentado em, digamos, um curso de pré-cálculo ou de cálculo, por isso deve ser bem conhecido dos estudantes. Existem muitas aplicações de indução deste tipo. No entanto, existem também muitos outros tipos de aplicações, como você verá no exemplo a seguir e em todo o desenvolvimento das propriedades de $\mathbb{N}$. Aqui estão alguns exemplos.

Exemplo 3.2. *: Aqui, daremos um exemplo diferente dos anteriores, para ilustrar a variedade de problemas que podem ser abordados por indução. Este é da Geometria. Considere um plano em que um número finito de infinitas retas foram desenhadas. Elas dividem o plano em finitas regiões. Dizemos que duas dessas regiões são adjacentes se suas fronteiras compartilham um segmento de comprimento positivo de uma das retas. Agora é nos dada uma paleta de cores m que podemos usar para colorir as regiões, e mais uma cor por região. Suponha m cores usadas dessa maneira, de modo que não há duas regiões adjacentes com a mesma cor, então há uma reta de m-coloração. Prove que cada reta tem um arranjo de duas cores.*

Primeiro, reformule isso para que ele possa ser visto como um problema de indução. Especificamente, supomos que existem n retas no arranjo de retas. A proposição $P(n)$, então é: Qualquer arranjo de retas tem uma com 2-coloração.

3.6 Definição por Indução

Tão importante e útil como prova por indução é, não é mais do que o método de definição por indução. Muitos estudantes tem visto exemplos destes em outros cursos: Por exemplo, elevar um número a uma potência de número natural arbitrário, ou formando fatoriais. A maioria das apresentações estão bem no contexto da matemática finita, mas em face do que eles não produzem funções com domínio do conjunto de números naturais $\mathbb{N}$. Por exemplo, $n!$ é muitas vezes definido pelas duas equações $0! = 1$ e $(n+1)! = (n+1)\, n!$, Que dão uma definição chamada recursiva. Isso, certamente, define n! para n tão grande quanto desejasse. No entanto, ainda falta algum princípio ou argumento, que só produz um conjunto finito de valores da função. O que gostaríamos é que a função fatorial seja uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ou seja, f deve ser de certo modo um conjunto infinito de pares ordenados em $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$. Precisamos de um princípio para a produção de um tal f para as duas equações acima.

Observe que estamos em uma posição semelhante à que encontramos na construção a seqüência de números naturais. Lá, tivemos um primeiro elemento e um estado de formação, mas estes só não poderia produzir a totalidade dos números naturais como uma série em nosso universo U. Para obter essa totalidade, precisamos de um adicional pressuposto ou axioma.

Agora podemos seguir o mesmo caminho aqui, invocando um novo princípio, que produz um método geral de definição por indução. No entanto, queremos manter pelo menos as nossas hipóteses. Além disso, verifica-se que é possível derivar um princípio suficiente para os nossos propósitos do que já assumidas, ou seja, do Axioma do Número Natural. Vamos apresentar isso como um teorema. A prova do teorema é bastante longo e nos levaria muito tempo, por isso vamos omitir.

Teorema 3.1. *Suponha que é dado um conjunto Y e um elemento distinto $y_0 \in Y$. (a) Assuma que é dada uma função h: $Y \to Y$. Então, existe uma única função f: $\mathbb{N} \to Y$ satisfazendo: (i) $f(0) = y_0$, e (ii) $f(n') = h(f(n))$, para todos os números naturais n. (b) Em vez de (a), suponha que são dadas uma seqüência de funções h_n: $Y \to Y$, um para cada número natural n. Então, existe uma única função g: $\mathbb{N} \to Y$ satisfazendo: (i) $g(0) = y_0$, e (ii) $g(n') = h_n\ (g(n))$, para todos os números naturais n.* ■

Uma vez que este teorema é bastante complexo, ele ilustra cada uma das duas partes (a) e (b) com uma definição específica por indução.

Exemplo 3.3. *: Sejam a um número real fixo e uma função h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = ax$ para todo x real. Se $1 \in \mathbb{R}$, então pelo teorema parte (a), existe uma única função f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que $f(0) = 1$ e $f(n') = a \cdot f(n)$, para cada número natural n. Claramente, $f(n) = a^n$, para todo n. Então, neste caso, o teorema mostra que nós podemos definir toda função potência por indução.*

Exemplo 3.4. *: Para cada número natural n, defina uma função h_n: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada pela seguinte regra $h_n(m) = n' \cdot m$, para cada número natural m. Seja $Y = \mathbb{N}$, e novamente escolha* 1 *para ser o elemento distinto. Em seguida, usando a parte (b) do teorema produz uma função g: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaz $g(0) = 1$, e $g(n') = h_n(g(n)) = n' \cdot g(n)$. Claramente, $g(n) = n!$, para cada número natural n. Neste caso, o teorema mostra que nós podemos define toda função fatorial por indução.*

Estaremos usando a definição por indução de uma maneira importante na próxima seção.

3.7 Adição

Nós começamos com os recursos mais básicos da teoria dos conjuntos e lógica e, usando apenas um axioma adicional, Axioma do número natural, construído um conjunto $\mathbb{N}$, que se assemelha ao número natural natural. Existe uma função sucessor chamado σ definido em $\mathbb{N}$, que corresponde à nossa noção de contagem, e vimos que o simples conceito de inclusão leva a uma Boa-Ordenação de $\mathbb{N}$ pelo Princípio de Indução. Tudo isso é bom, mas há uma diferença gritante. Nós não temos descrito como fazer aritmética com os números naturais. E enquanto a contagem característica que acabamos de descrever é, provavelmente, o mais fundamental, os números naturais sem aritmética teriam um valor relativamente pequeno. Temos agora que resolver esta questão através de uma definição para a operação de adição, multiplicação, no qual virá mais tarde.

Escolha qualquer $m \in \mathbb{N}$. Vamos usar a indução para definir uma função a_m: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, e vamos denotar o valor da função $a_m(n)$ de $m + n$. Para definirmos a_m usaremos o Teorema 3.1 (a), e isso obriga-nos a ter uma função h: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Neste caso, o especificação de h é fácil: h é simplesmente a função sucessor σ . Precisamos ter um elemento distinto de $\mathbb{N}$, que seja denotado por m. Pelo, o Teorema 3.1 (a) existe uma única função $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, que denotaremos por a_m, de tal forma que

(a) $a_m(0) = m$.

(b) $a_m(n') = (a_m(n))'$.

Definição 3.1. *Para quaisquer m e n em $\mathbb{N}$, denotaremos a função $a_m(n)$ como sendo $m+n$ e chamaremos de soma de m e n.*

Utilizando o símbolo "$+$", os ítens acima (a) e (b) de a_m pode ser reescrito da seguinte forma:

(a) $m + 0 = m$.

(b) $m + n' = (m+n)'$.

É fácil ver que a partir desta definição:

$$0+0=0, 1+1=1+0'=(1+0)'=1'=2, 2+1=2'=3, 2+2=2+1'=(2+1)'=3'=4,$$

e assim por diante, reproduzindo as somas elementares que aprendemos da aritmética básica. No entanto, para justificar esta definição, devemos mostrar que esta operação satisfaz as propriedades em geral. Algumas delas são, na verdade, as consequências imediatas da definição. Outras podem ser provadas por indução. Esboçaremos algumas provas por indução para ilustração.

Lema 4.

Sejam l, m, e n naturais. Então:

(i) $m + 0 = m = 0 + m$;

(ii) $m + 1 = m' = 1 + m$;

(iii) $l + (m + n) = (l + m) + n$.

Demonstração. (i) Utilizaremos a definição para provar a iguadade $m + 0 = a_m(0) = m$. A segunda igualdade, $m = a_0(m)$ é provada por indução sobre m. Por definição $a_0(0) = 0$, portanto, a afirmação é verdadeira para $m = 0$. Agora vamos supor que é verdadeiro para $k = m$: isto é, $k = a_0(k)$. Calculando $a_0(k') = (a_0(k))' = k'$, a primeira igualdade segue da propriedade (b) de a_0, e a segunda a partir da hipótese de indução. Isso completa a prova de (i).

(ii) Calcule $m + 1 = a_m(1) = a_m(0') = (a_m(0))' = m'$. (O leitor deve preencher as razões de cada igualdade.) A segunda igualdade, ou seja, $m' = a_1(m)$, é provado por indução. Quando $m = 0$, ambos os lados se reduz para 1, então a afirmação é verdadeira para $m = 0$. Suponha para $m = k$, ou seja, $k' = a_1\ (k)$, e depois calcule $a_1(k') = (a_1(k))' = (k')'$. Mudando a ordem da igualdade, obtemos $(k')' = a_1(k')$. Mas é a igualdade da segunda afirmação, Lema (ii) , com $m = k'$, conforme desejado. Por isso, a prova de indução (ii), é completo.

(iii) Escolha arbitrariamente l e m, e seja $P(n)$ seja proposição.

$$l + (m+n) = (l+m) + n.$$

Provaremos $(\ \forall n\ )\ P(n)$ por indução sobre n. $P(0)$ é $l\ +\ (\ m\ +\ 0) = (l\ +\ m)\ +\ 0$. Ambos os lados são iguais a $l\ +\ m$, pelo que já foi provado, então $P(0)$ é verdadeira. Agora assumir P(k) para algum k. Calcule o lado esquerdo de $P(k')$:

$$\begin{aligned} l + (m + k'\ ) &= l + (m+n)' \\ &= (l+(m+k))' \\ &= ((l+m)+k)' \\ &= (\ l + m\ ) + k'. \end{aligned}$$

Mais uma vez, deixamos para o leitor preencher as razões para cada etapa. O resultado é igualdade a $P(k')$, para a etapa indutiva é verdadeira. Portanto, a igualdade $l\ +\ (\ m+n\ ) = (l+m)\ +$ n vale para todo número natural n. Desde l e m foram escolhido arbitrariamente em $\mathbb{N}$, a igualdade vale para todos l, m e n em $\mathbb{N}$. □

O leitor deve ter notado que a afirmação (i) do lema é a identidade para adição e que a terceira do lema é familiar a lei associativa da adição. O lema mostra, no entanto, que estes podem ser provados por conceitos rudimentares. A lei associativa é necessária porque adição é definida como sendo uma operação binária sobre números naturais. Quando mais de dois números naturais estão sendo adicionados, é preciso agrupá-los para que possamos fazer a adição de dois números de cada vez. No caso dos três números, existem duas maneiras de agrupar os números (sem mudança de ordem) ou, como podemos dizer, há duas formas de associar os números (em pares). A lei de associação nos diz que estas duas formas dar quantias iguais.

Problema 3.1. . *Use a definição da adição para provar as seguintes afirmações:*

(a) $(\forall m)(\forall n)(m+n = n+m)$. *lei comutativa para a adição*

(b) $(\forall k)(\forall m)(\forall n)((m+k = n+k) \Rightarrow (m = n))$. *lei de cancelamento para a adição*

Como a solução dessas leis já foram exibidas nos capítulo anterior, vamos diretamente ao seguinte teorema.

Teorema 3.2. *Sejam x, y, z números naturais. Então:*

(a) $x + (\ y+z\ ) = (\ x+y\ ) + z.$ *associatividade da adição*

(b) $(x+z = y+z)) \Rightarrow x = y.$ *cancelamento da adição*

(c) $x+0=0+x=x$. *identidade da adição*

(d) $x+y=y+x$. *comutatividade da adição*

3.8 Adição e da ordem natural

Existem relações importantes entre a relação de ordem de $\mathbb{N}$ e a operação de adição que acabamos de definir . Já vimos um exemplo disso, como expressa em termos da função sucessor: ou seja, m $<$ n implica $m' < n'$. Usando a notação $+$, este torna-se em $m < n$ implica $m+1 < n+1$.

Problema 3.2. . *Sejam m e n* $\in \mathbb{N}$ *com* $m < n$*. Então:*

$$m+p < n+p, \text{ com } p \in \mathbb{N}.$$

Solução: Sejam $m,n,p \in \mathbb{N}$. Se $m < n$, então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que$n = m+q$.

Logo,

$n+p = (m+q)+p = m+(q+p) = m+(p+q) = (m+p)+q,$

ou seja $m+p < n+p$.

Proposição 3.3. *Sejam m e n números naturais. Então:* $m \leq n$ *se, e somente se, existe um número natural k tal que* $n = m+k$.

Demonstração. Suponha que $m \leq n$. Vamos mostrar que $n = k+m$ para algum k. Considere o conjunto X constituído por todos os números naturais que são menores do que m, ou da forma $k+m$, para algum número natural k. Desde que $0 \leq m$, temos $0 \in X$, pois $0 \leq m$ ou $0 = m = m+0$. Suponha um número natural arbitrário $l \in X$. Se $l < m$, temos $l' \leq m$. Queremos mostrar que $l' \in X$. Se l tem a forma $m+k$, para algum k, então $l' = (m+k)' = m+k'$, que também tem essa forma. Assim, em qualquer caso, $l' \in X$. Segue-se pelo princípio de indução que $X = \mathbb{N}$. Assim, $n \in X$. Uma vez que, n não é menor do que m, logo $n = m+k$ para algum k natural.

Agora vamos provar o contrário. Suponha que $n = m+k$, para algum k. Se $n < m$, pelo que acabamos de mostrar, $m = n+j$, para alguns j. Na verdade, podemos ainda concluir que este j não é igual a 0, pois caso contrário $m = n$ contrariando ao que supomos. Agora combine as duas equações: $n = m+k = (n+j)+k$, que pode ser escrita como $n+0 = n+(j+k) = n+(k+j)$. Pela Lei de Cancelamento, segue-se que $0 = k+j$. Mas, como já vimos, j não é 0, o que significa que j é o sucessor natural de alguns número, digamos $j = i'$. Portanto, $0 = k+i' = (k+i)'$. Isso mostra que 0 é um sucessor, que é claramente impossível. Por isso, $n < m$ não é verdade. Desde que $\leq$ é uma ordenação linear, segue que $n \geq m$. □

Para uso posterior, é conveniente reformular esta proposição da seguinte maneira: Sejam m e n números naturais. A equação

$m+x = n$ tem uma solução em $\mathbb{N}$ se, e somente se, $m \leq n$.

3.9 Indução de Variantes

Usando a ordenação linear de $\mathbb{N}$, agora é fácil formular duas variantes para o método usual de indução.

Variante 1

Vamos chamar a Variante 1 de Indução Transfinita. Este tipo de indução ocorre quando a proposição não se verificar para valores pequenos de n. Neste caso, $P(n)$ é definida, só para $n\geq n_0$, onde n_0 é um natural fixo. Podemos ainda fazer a indução, neste caso, exceto que o nosso valor inicial não é 0, mas n_0. A situação que estamos enfrentando, é que $P(n_0)$ é verdadeira e $(\forall k)$ ($P(k)\Rightarrow P(k+1)$) é conhecido por ser verdade, desde $k \geq n_0$. Gortaríamos de ser capaz de concluir que $P(n)$ é verdadeiro para todos $n \geq n_0$. Essencialmente, toda a nossa estrutura de referência é deslocar ao longo de n_0.

Esta variante de indução decorre do princípio de indução padrão através dos seguintes passos. Defina uma proposição Q pela fórmula $Q(n) = P(n_0 + n)$. Pela Proposição 3.3, $k \geq n_0$ se, e somente se, existe um número natural m tal que $k = n_0 + m$, k varia sobre todos os números naturais quando m precisamente percorre todos os números naturais. Portanto, a situação que enfrentamos agora pode ser reformulada da seguinte forma: $Q(0)$ é verdadeira, e $(\forall m)$ ($Q(m) \Rightarrow Q(m+1)$) é verdade. Assim, pela indução normal implica que $Q(n)$ é verdadeira para todos números naturais n. Portanto, $P(n)$ é verdadeira para todos os n naturais com $n \geq n_0$.

Assim como para a indução normal, existe uma versão de Indução transfinita para conjuntos. Assim, suponha que S é um conjunto de números naturais que contém os números naturais m e k que satisfaz $k \in S \Rightarrow k + 1 \in S$, para todos os números naturais k. Logo, pelo princípio de Indução Transfinita para conjuntos, conclui que $\{n$: $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \geq m)\}\subseteq S$: (Note que as hipóteses não garante a igualdade de m. Por exemplo, se $\mathbb{N}$ satisfaz as hipóteses não importa qual m é considerado).

Variante 2

Este método é às vezes chamado de indução forte ou indução completa mesmo que seja equivalente à indução normal. Nesta forma de indução, ela ainda têm a mesma etapa inicial. Mas a fase de indução passa a ser o seguinte

$$(\forall k)\left((\forall i)\left((i \leq k) \Rightarrow P(i)\right) \Rightarrow P(k+1)\right)$$

Isto é, para todos os k, se $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, ... , $P(k)$ são todas verdadeiras, então $P(k+1)$ é verdadeira. Portanto, $(\forall n)$ $P(n)$ é verdadeira.

Naturalmente, uma Variante podem ser combinadas com indução forte, ou seja, você não precisa iniciar com 0 na indução forte.

Aqui está um exemplo que mostra que Indução Forte, embora logicamente equivalente a indução normal, é uma ferramenta útil em provas. Usaremos a indução Forte para mostrar as propriedades da multiplicação dos números naturais, que ainda não foram estabelecidas em nosso desenvolvimento lógico.

Proposição 3.4. *Todo número natural $n > 1$ pode ser escrito como um produto de números primos.*

Demonstração. Como não existem números naturais n satisfazendo $1 < n < 2$, podemos começar a indução forte em $n = 2$. Quando $n = 2$, a proposição é imediata, uma vez que dois é um produto de um rebanho de primos. Suponha que a proposição é verdadeira para todos os números naturais $i \leq k$, provaremos para o número natural $k + 1$.

Se $k+1$ é primo, então não resta mais nada a fazer.

Se não, por definição pode ser escrito como um produto de dois números naturais $k + 1 = ab$, com $a, b \neq k+1$. Assim, tanto a e b são menores do que $k + 1$. Uma vez que não existem nenhum número natural estritamente entre k e $k + 1$, tanto a e b são $\leq k$, daí a hipótese de indução forte podem ser aplicadas a eles. Eles são, portanto, ambos produtos de números primos. Logo o seu produto é um produto de números primos. $\square$

O ponto aqui é que desde que estamos lidando com uma propriedade multiplicativa, simplesmente conhecer a proposição para k pode não ser suficiente para provar que para $k + 1$, uma vez que estes dois números não estão relacionados de maneira agradável. No entanto, conhecendo a proposição para todos os números naturais $\leq k$ nos dá a garantir que precisamos para as provas. A indução forte também admite uma versão adaptada para os conjuntos. Suponha que X é um conjunto de números naturais contendo 0 tal que, para cada k,

$$(0, 1, \ldots k \in X) \Longrightarrow k+1 \in X:$$

Então $X = \mathbb{N}$.

3.10 Multiplicação

Usaremos um processo semelhante ao caso da adição, isto é, usando o método de indução para definir a multiplicação.

Seja m um número natural. Defina a função $b_m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que deve representar a multiplicação por m. Assim, o número m é mantido fixo durante todo este processo de definição. Para continuar, vamos usar novamente o Teorema 3.1 (a), que garante a existência de uma função h: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Nesse caso, h é dada pela fórmula $h(x) = x + m$.

Note que usamos a adição nesta definição, no entanto já a definimos anteriormente. O Teorema 3.1 nos obriga a escolher um elemento distinto em $\mathbb{N}$: a nossa escolha natural é o número 0.

Então, o Teorema 3.1(a) nos diz que existe uma única função b_m: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo

$$b_m(0) = 0, \ e$$

$$b_m(n+1) = b_m(n) + m:$$

Os primeiros valores de b_m são:

$$b_m(0) = 0$$

$$b_m(1) = m$$

$$b_m(2) = m + m$$

$$b_m(3) = (m+m) + m$$

e assim por diante. Claramente, b_m representa adição de m com m, o que coincide com o nosso entendimento intuitivo da multiplicação.

Nós escrevemos $b_m(n)$, por $m.n$ e chamaremos o produto de m por n ou m vezes n. (Às vezes, nós colocaremos um ponto, como em $a.b$, para tornar o produto mais legível). Em termos de notação de produto que acabamos de introduzir, as propriedades essenciais que definem b_m pode ser escrita como

$$m \cdot 0 = 0, \quad e \quad m \cdot (n+1) = mn + m.$$

Teorema 3.3. *Sejam l, m, e n números naturais quaisquer. Então:*

(a) $l(n + m) = lm + ln$ e $(l + m)n = ln + lm$. Leis de distribuição

(b) $(lm)n = l(mn)$. Associatividade da Multiplicação

(c) $l \cdot 1 = l = 1 \cdot l$. Identidade Multiplicativa

(d) $lm = lm$. Comutatividade da Multiplicação

(e) Suponha que $l \neq 0$. Então $(lm \leq ln) \Longleftrightarrow m \leq n$

(f) Suponha que $l \neq 0$. Então $(lm = ln) \Longleftrightarrow m = n$ Lei de Cancelamento da Multiplicação

As propriedades listadas estão provadas na ordem listada, com cada prova fazendo uso de resultados estabelecidos anteriormente. Vamos deixar algumas das provas para o leitor como exercícios com a ressalva de que somente os resultados anteriormente podem ser utilizados.

Demonstração. (a) Observe que já sabemos um caso muito especial da primeira Lei Distributiva. Ou seja, sabemos que $l(m+1) = lm + l$ para cada m. Para isso use apenas a parte indutiva da definição de multiplicação. Usaremos esse fato para um número de vezes na prova de indução que se segue. Primeiro, nós escolhemos l em arbitrários, como na prova de associatividade para adição. Provaremos a Lei Distributiva para esses l e m e por indução sobre n. Utilizaremos a primeira Lei Distributiva, que afirma $l(m+0) = lm + l \cdot 0$. O leitor deve verificar que ambos os lados se reduz a $l \cdot m$, e assim eles são iguais. Para a etapa indutiva, suponhamos que $l(m + k) = l \cdot m + l \cdot k$ e calcule: $l(m + (k + 1)) = l((m+k) + 1) = l(m + k) + l = (lm + lk) + l = lm + (lk + l) = lm + l(k + 1)$, o que completa o passo indutivo para a Lei Distributiva, e conclui a prova por indução para todos os l , m e n quaisquer . Mas, uma vez l e m foram escolhidos arbitrariamente, o resultado é válido para todos os l, m e n. A segunda lei é provado da mesma forma. Primeiro: $(l+m)\, 0 = 0 = 0 + 0 = l \cdot 0 + m \cdot 0$. Em seguida, a etapa indutivo: $(l+m) \cdot (k + 1) = (l+m)k + (l+m) = lk + mk + l + m = l(k + 1) + m(k + 1)$, como queríamos provar.

Seria um bom teste para a sua compreensão, se você provar os seguintes ítens:

Problema 3.3. . *Prove item (b) do teorema, a lei associativa da multiplicação por indução sobre n.*

Solução: Sejam $l,m \in \mathbb{N}$ e seja $X = n \in \mathbb{N}$; $l.(m.n) = (l.m).n$. Então, $1 \in X$, pois $l.(m.1) = l.m = (l.m).1$.

Se $n \in X$, temos:

$$\begin{aligned} l.(m.(n+1)) &= l.(l.m+m) \\ &= l.(m.n)+l.m \\ &= (l.m).n+l.m \\ &= (l.m).(n+1). \end{aligned}$$

Ou seja, $n+1 \in X$. Logo, $X = \mathbb{N}$, isto é, $l.(m.n) = (l.m).n$, para quaisquer que sejam $l,m,n \in \mathbb{N}$.

Problema 3.4. . *Prove item (c) do teorema, a lei da identidade multiplicativa.*

Solução: É suficiente mostrar que 1 é elemento neutro à direita, ou seja vamos verificar para $l = 1$, isto é, $1.1 = 1$. Logo é verdadeiro.

Suponhamos para l, ou seja $1.l = l$. Mostraremos que é valida para $l^\star$. Pela definição da multiplicação, temos:

$1.l^\star = 1.l+1 = l+1 = l^\star$.

Portanto, o número 1 é o elemento neutro para a multiplicação, ou seja , vale a Lei de Identidade.

Continuando a prova do teorema.

(d) Isto é provado por indução sobre m. Para $m = 0$, temos $l.0 = 0 = 0.l$. Para a etapa indutiva, suponha que $l.k = k.l$, e calculando $l.(k+1) = l.k + l = kl + l = kl + 1.l = (k+1)l$, completando a indução.

(e) Suponha que $m \leq n$. Pela Proposição 3.3, $n = m + k$, para algum número natural k. Portanto, usando item (a) acima, a lei distributiva, temos $ln = lm + lk$. Aplicando a Proposição 3.3 a essa igualdade, nós concluímos que $lm \leq ln$.

provaremos que $lm \leq ln \Longrightarrow m \leq n$. Usando a contrapositiva, isto é, $n < m \Longrightarrow ln < lm$. Suponha que $n < m$. Usando a Proposição 3.3 novamente, temos $m = n + j$, para algum número natural j, que não pode ser zero, pois isso implicaria que $m = n$. Aplicar (a) a esta equação, obtemos $lm = ln + lj$. Decorre da Proposição 3.3 que $ln \leq lm$. Mas a igualdade não vale para este caso. Pois, se $ln = lm$, então a partir da equação anterior e o cancelamento, teríamos que $0 = lj$, contradizendo o resultado de $a.b \neq 0$ para todo a, $b \in \mathbb{N}$ e diferentes de 0, tendo em conta o fato de l e j serem ambos diferentes de zero. Assim, obtemos a desigualdade estrita $ln < lm$, completando a prova. $\square$

Conclusão

Os números naturais podem ser construídos de várias maneiras, mas particularmente vimos neste trabalho esses números construídos através dos Axiomas de Peano e também através dos Conjuntos, mostrando a partir de sua história até a construção em si, passando pelas principais operações, como é representado, e a utilização do Princípio de Indução para construí-lo através dos conjuntos, e a partir destas definições obtermos todos os números pertencentes ao conjunto dos números naturais.

O foco do nosso trabalho, foi a construção dos números naturais, mas também abordamos as propriedades desses números de modo básico, e com isso podemos ver a semelhança delas com as construídas através dos Axioma de Peano, e também via Conjuntos. Após ter visto estas três apresentações das propriedades dos números naturais podemos perceber que elas são proporcionais, ou seja, podemos fazer o uso de qualquer uma delas.

Referências

[1] HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética.** [S.l.: s.n., s.d.] (Série Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática.), 2008.

[2] HEFEZ, Abramo. **Iniciação à Aritmética.** (Série Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática.), 2009.

[3] KAHN, Peter J. **The Natural Numbers.** (revised: Mon, Jan 26, 2009).

[4] LIMA, E. L., **Curso de Análise.** vol. 1 Rio de Janeiro, IMPA-Coleção Projeto Euclides, 1976.

[5] MACIEL, A. B., Lima, O. A. **Introdução à Análise Real.** Campina Grande: EDUEPB, 2005.

[6] MACIEL, Aldo Bezerra;LIMA, Osmundo Alves. **Introdução à análise real.** EDUEP, 2005.

[7] Os números Naturais. Disponível em: < http://www.coladaweb.com.br >. Acesso em Agosto, 2010.