



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB  
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS-CCHE  
CAMPUS VI – POETA PINTO DO MONTEIRO  
CURSO DE PÓS – GRADUAÇÃO LATU SENSU EM MATEMÁTICA**

**MARIA DA CONCEIÇÃO SIQUEIRA DE SOUZA**

**O USO DO CÁLCULO INTEGRAL PARA DETERMINAÇÃO DE  
ÁREAS PLANAS**

Monteiro – PB

2010

**MARIA DA CONCEIÇÃO SIQUEIRA DE SOUZA**

**O USO DO CÁLCULO INTEGRAL PARA DETERMINAÇÃO DE  
ÁREAS PLANAS**

Monografia apresentada ao curso de Pós-Graduação *Latu Sensu* em Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Pós-Graduado, pela Universidade Estadual da Paraíba.

Orientador: Prof. Ms. Joselma Soares dos Santos

Monteiro - PB

2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA SETORIAL – CAMPUS VI

S729u

SOUZA, Maria da Conceição Siqueira de.

O uso do cálculo integral para determinação de áreas planas/ Maria da Conceição Siqueira de Souza – 2011.

73f. il. Color.

Digitado.

Monografia (Especialização Latu Sensu em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2011.

“Orientação: Profª Ma. Joselma Soares dos Santos, Universidade Estadual da Paraíba – Campus VI”.

1. Integral Definida
2. Teorema Fundamental do Cálculo
3. Aplicações. I. Título.

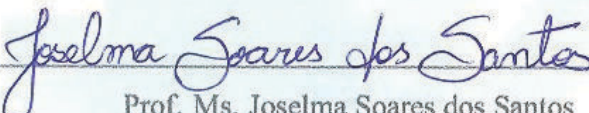
21ª ed. CDD 515.33


**MARIA DA CONCEIÇÃO SIQUEIRA DE SOUZA**

**O USO DO CÁLCULO INTEGRAL PARA DETERMINAÇÃO DE  
ÁREAS PLANAS**

Monografia apresentada ao curso de Pós-Graduação *Latu Sensu* em Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Pós-Graduado em Matemática, pela Universidade Estadual da Paraíba.

Aprovado em 22 de Dezembro de 2010.

  
Prof. Ms. Joselma Soares dos Santos  
Centro de Ciências Humanas e Exatas- CCHE/UEPB

  
Prof. Ms. Luciano dos Santos Ferreira  
Centro de Ciências Humanas e Exatas- CCHE/UEPB

Carinhosamente, dedico a vocês que estão comigo em cada passo da vida, certo ou errado, sempre me apoiando, motivando e ensinando a ser uma pessoa melhor. A vocês, que são exemplo de garra, coragem e esperança, a quem tenho a honra de chamar de mãe e tia: Terezinha, Maria Renilda e Donatíla.

## **AGRADECIMENTOS**

Sou grato primeiramente ao nosso Deus, pela oportunidade de realização deste curso;

Aos meus familiares, pela torcida, paciência, incentivo compreensão dos momentos ausentes;

Aos meus irmãos José Ildo e José Ilton, que mesmo inconscientemente me incentivaram, sendo além de irmãos amigos, me ajudaram a correr atrás dos meus objetivos, agradeço de coração.

Aos meus amigos pela participação deste trabalho, que me fortalece e inoculam-me da força, coragem e constâncias para a busca da descoberta em especial a Aparecida Feitosa, André Ferreira, Sineide Maria, Vanda Feliz e Danielle Sousa;

Em especial aos meus amigos Marinez e Giovane pela tolerância de acolherem em seu lar, como se fosse uma filha, dando incentivo nesta árdua batalhar.

Aos professores pela paciência e dedicação que não cessam de participar de debates e discussões que fortalecem o aprendizado, nas mais diversas áreas do conhecimento humano;

A todos que diretamente ou indiretamente colaboram para a realização do curso e deste trabalho.

A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida. (Jacques Bernoulli)

## RESUMO

O presente trabalho discute aspectos da integral definida de funções de uma variável real no cálculo de áreas planas e suas propriedades. Estudamos a integral definida como limite de soma Riemann e sua existência. Em seguida abordamos o Teorema Fundamental do Cálculo. Isso com o objetivo de aplicar os resultados de integrais vistos em cálculo, para encontrarmos áreas de figuras geométricas planas quaisquer. A discussão dos resultados obtidos neste estudo tem como ênfase buscar e interpretar as soluções propostas para calcular áreas de figuras planas cujos contornos não são segmentos de retas. Para maior compreensão dos conceitos temos como apoio o apêndice.

**PALAVRAS CHAVES:** Integral Definida, Teorema Fundamental do calculo, Aplicações.



## **ABSTRACT**

This work discuss the aspects of the defined integral on areas' calculus and its properties. We are going to study the defined integral as the limit of Rieman's sum and its existence. On the following we are going to approach the Fundamental Theorem's Calculus, with the objective of apply the results of integrals seen in calculus, so we be able to find areas of any flat geometric figures. The discussion of the obtained results in this study emphasizes the search and interpretation to the proposed solutions to calculate areas of flat figures which its edges are not line segments. For further comprehension of the concepts we have as support the appendices.

**Key Words: Defined Integral, Fundamental Theorem's Calculus, Applications.**

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	10
1.INTEGRAL DEFINIDA.....	12
1.1 Problemas da área.....	12
1.2 Integral.....	16
1.2.1 A integral definida como limite da soma de Riemann.....	17
1.2.2 A área da região sob o gráfico de $f$ em $ab$ .....	18
1.3. Existência da integral de uma função contínua.....	20
1.3.1 Propriedades da integral definida.....	21
2. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO.....	36
2.1 Teorema Fundamental do Cálculo – primeira parte.....	36
2.2 Teorema Fundamental do Cálculo – segunda parte.....	38
2.3 Corolário.....	40
3.APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA.....	46
3.1 Áreas de regiões entre curvas.....	46
3.1.1 Área da região delimitada pelo gráfico de uma função contínua positiva e pelas retas $x = a$ e $x = b$ .....	46
3.1.2 Área da região delimitada pelo gráfico de funções contínuas e pelas retas $x = a$ e $x = b$ .....	47
3.1.3 Passos para achar a área de uma região $R_x$ .....	51
3.1.4 Regiões $R_y$ : admitindo $y$ como variável independente e $x$ como variável dependente.....	51
3.1.4.1 Passos para achar a área de uma região $R_y$ .....	53
3.2 A integral definida de funções simétricas.....	54
3.3 Aplicação.....	55
CONCLUSÃO.....	63
REFERÊNCIAS.....	64

<b>ANEXOS.....</b>	<b>65</b>
<b>ANEXO A.....</b>	<b>66</b>
<b>ANEXO B.....</b>	<b>67</b>
<b>ANEXO C.....</b>	<b>69</b>
<b>ANEXO D.....</b>	<b>71</b>
<b>ANEXO E.....</b>	<b>72</b>

## INTRODUÇÃO

Neste trabalho, estudamos o Cálculo Integral de funções de uma variável real, mais precisamente o Teorema Fundamental do Cálculo e Áreas planas, o qual surgiu na história relacionada com os problemas de quadraturas. Esses problemas eram enfrentados pelos gregos na medição de superfícies para determinar suas áreas. Todas as áreas estudadas eram relacionadas à área do quadrado.

Esses estudos foram deixados por Newton e Leibniz desde o século XVII. Depois vieram as contribuições de Fermat (1601-1665) e Johan Bernoulli, para o nascimento do cálculo integral. O nome “Cálculo Integral” foi criado por Johann Bernoulli (1667-1748) e seu livro publicado pelo seu irmão mais velho, Jacques de Bernoulli (1654-1705) e veio a criar os fundamentos da Análise. Hoje o cálculo Integral é muito utilizado em solução de problemas de muitos campos de estudos, como Economia, Engenharia, Medicina, Química, Física e Astronomia.

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) estabelece uma conexão entre dois ramos do cálculo: O primeiro surgiu a partir do problema de se determinar a reta tangente a uma curva em um ponto, isto é a derivada enquanto o segundo surgiu a partir do problema de se encontrar a área de uma figura plana isto é a integral. O professor de Newton em Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descobriu que esses dois problemas estão de fato estreitamente relacionados. Ele percebeu que a diferenciação e a integração são processos inversos. O TFC dá a precisa relação inverso entre a derivada e a integral. Foram Newton e Leibniz que exploraram essa relação e usaram-na para desenvolver o cálculo com um método matemático sistemático. Em particular, eles viram que o Teorema Fundamental os capacitou a computar as áreas e integrais muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-los como limites de somas. Portanto nos fornece um método mais simples para o cálculo de integrais.

Sendo assim o saber matemático torna-se cada vez mais importante no mundo atual, em que se generalizam tecnologias e meios de informações baseado em dados quantitativos e espaciais em diferentes representações.

A distância entre a matemática pura e suas aplicações é cada vez menor, as integrais definidas são um exemplo. Sabe-se que a integral definida pode ser

abordada para o cálculo do comprimento de arco, da área de uma superfície, do suprimento para consumo, do fluxo de sangue, do trabalho, da energia, dentre outros setor de aplicação de integral definida é a resolução de problemas do cálculo do volume de regiões tridimensionais.

Portanto a seguir, comentaremos brevemente o conteúdo de cada capítulo:

No capítulo 1: e abordado a origem do problema da área. Demonstrando a importância da integral para resolução desse problema. É apresentando a integral definida como limite da soma de Riemann e sua representação sob o gráfico de uma função em um dado limite. Mostrando que as propriedades da integral definida simplificam a resolução de alguns problemas propostos por meio de formulas.

No capítulo 2, abordamos a apresentação do teorema fundamental do cálculo, no primeiro momento será feita uma breve introdução definida que  $G(x) = \int_a^b f(t)dt$ . Na segunda parte será explanado o TFC da  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ . tendo como base observações e exemplo resolvido para melhor compreensão do tema. Feita a demonstração do TFC taremos casos em que se pode aplicalo.

No capítulo 3, o nosso principal objetivo consistir em expor as ideias principais de áreas de regiões entre curvas. Ou seja, áreas de figuras planas quaisquer. O estudo ainda sugere tanto o calculo para achar a área de uma região  $R_x$  como também  $R_y$ . Fornecendo-nos ainda o passo a passo para a resolução de problemas desse tipo. Sintetizando a resolução de integral definida de funções simétricas. Alguns comentários são posto para melhor compreensão dos conceitos.

## CAPÍTULO 1: INTEGRAL DEFINIDA

Neste capítulo abordaremos problemas de área e de distância e vamos usá-los para formular a ideia de uma integral definida, que é o conceito básico do cálculo integral com o objetivo de definirmos e calcularmos as áreas de regiões que estão sob os gráficos de funções. De forma que, possamos definir e manipular, formal e rigorosamente, as integrais definidas.

Abordaremos as propriedades básicas da integral definida enunciando estas propriedades como teoremas e os interpretando em termos de nossas ideias intuitivas de “área”. Estudando as somas de Riemman, para a partir daí, expressar a integral definida no intervalo dado  $[a, b]$  como Limite de Soma de Riemman, o qual coincide com a área da região delimitada pelo gráfico de  $f$  e as retas  $x = a$  e  $x = b$ .

### 1.1 - O Problema da Área.

Foi da necessidade de calcular áreas de figuras planas cujos contornos não são segmentos de retas que brotou a noção de integral definida.

Tentar resolver o problema da área de uma figura plana qualquer pode ser calculada através de uma região  $R$  que e sob a curva  $Y = f(x)$  de  $a$  até  $b$ . Isso significar que  $R$ , ilustrada na figura 1.1, está limitada pelo gráfico de uma função contínua  $f$  [onde  $f(x) \geq 0$ ], por duas retas verticais  $x = a$  e  $x = b$ , e o eixo  $x$ .

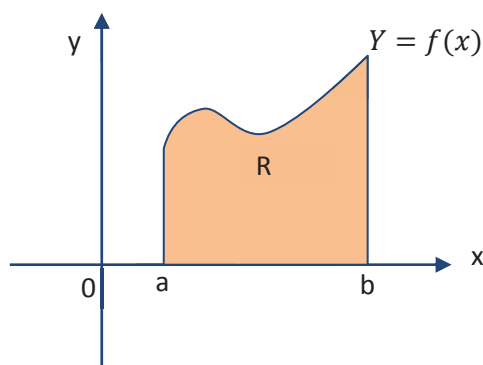


Figura 1.1

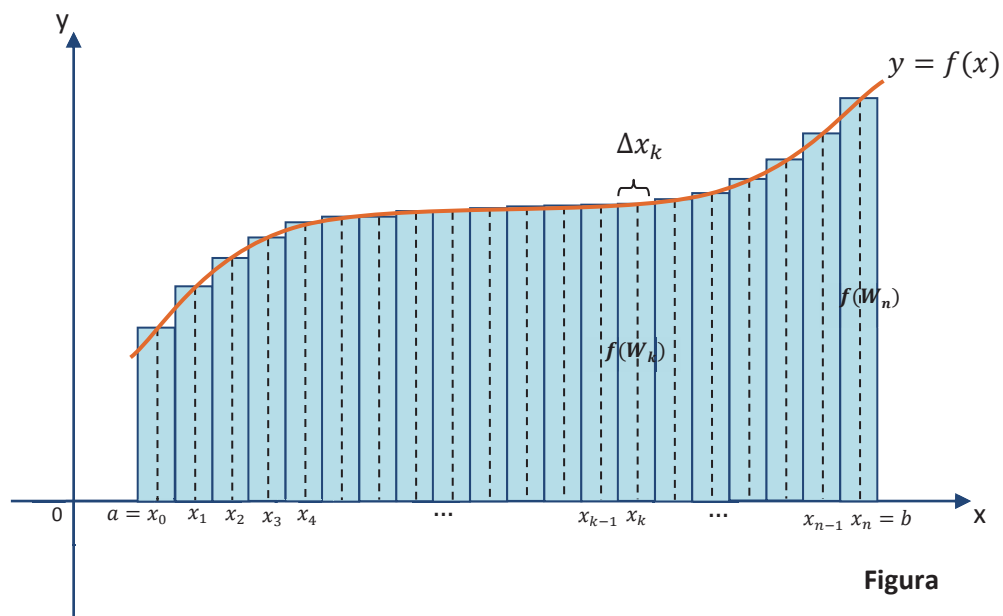
Para isso, vamos criar uma partição  $P$  do intervalo  $[a, b]$ , isto é, vamos dividir o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos, por meio dos pontos

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n$$

escolhidos arbitrariamente, de forma que

$$a = x_0 < x_1 < x_2, \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b,$$

Veja a figura 1.2 abaixo:



Figura

O comprimento do  $k$ -ésimo subintervalo,  $[x_{k-1}, x_k]$ , é dado por  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ . Ao construir retângulos de base  $x_k - x_{k-1}$  e altura  $f(w_k)$  onde  $w_k$  um ponto do intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$ .

Da figura acima, temos:

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1 \text{ base do primeiro retângulo;}$$

$$\Delta x_2 = x_3 - x_2 \text{ base do segundo retângulo; ...;}$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \text{ base do } k\text{-ésimo retângulo.}$$

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1} \text{ base do } n\text{-ésimo retângulo;}$$

$$f(w_1) \text{ altura do primeiro retângulo;}$$

$$f(w_2) \text{ altura do segundo retângulo; ...;}$$

$f(w_k)$  altura do k-ésimo retângulo; ...;

$f(w_n)$  altura do n-ésimo retângulo;

Logo, a área de cada retângulo será

$\Delta x_1 \cdot f(w_1)$  área do primeiro retângulo;

$\Delta x_2 \cdot f(w_2)$  área do segundo retângulo; ...;

$\Delta x_k \cdot f(w_k)$  área do k-ésimo retângulo; ...;

$\Delta x_n \cdot f(w_n)$  área do n-ésimo retângulo;

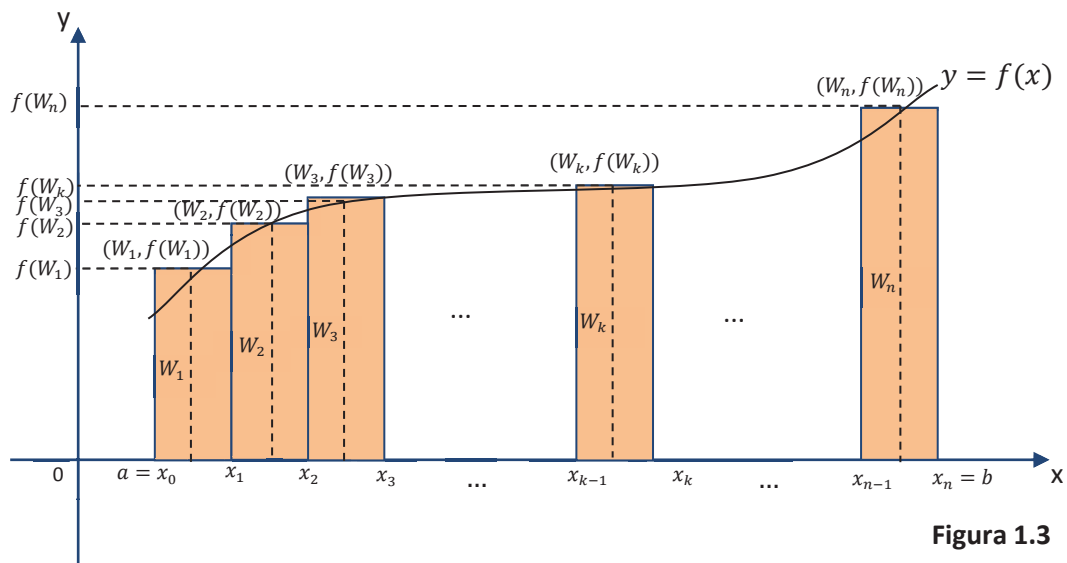
Observe que, aumentando o número de retângulos, pode-se obter uma melhor aproximação para a área  $A$  da região  $R$ .

Assim a soma das áreas dos  $n$  retângulos, denotada por  $S_n$ , será:

$$S_n \cong f(w_1) \cdot \Delta x_1 + f(w_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(w_n) \cdot \Delta x_n \cong$$

$$\cong \sum_{k=1}^n f(w_k) \cdot \Delta x_k$$

Veja a figura 1.3 abaixo:



**Figura 1.3**

Essa soma é chamada Soma de Riemann da função  $f$  relativa à partição  $P$ . Quando  $n$  cresce é “razoável”, esperar que a soma das áreas dos retângulos aproxime da área  $A$  sob a curva (figura 1.2).



Considerando, a norma (**Ver ANEXO A – Definição A.2**) da partição  $P$ , como sendo

$$\|P\| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$$

Temos, que se  $\Delta x_i \rightarrow 0$ , então  $\|P\| \rightarrow 0$ . Analogicamente, se  $n \rightarrow \infty$  então  $\|P\| \rightarrow 0$ .

Desse modo, define-se a medida da área da região  $R$ , como sendo

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(W_k) \cdot \Delta x_k$$

se esses limites (**Ver ANEXO B – Definição B.1**) existem, e este limite é o que definimos como integral de uma função  $f$ , definida no intervalo  $[a, b]$ , como veremos na próxima seção. Neste caso, dizemos que a região  $R$  é mensurável.

- **Exemplo 1.1**

Sejam  $f(x) = 2x + 3$ , e  $P$  a partição de  $[0,7]$  nos quatro subintervalos determinados por

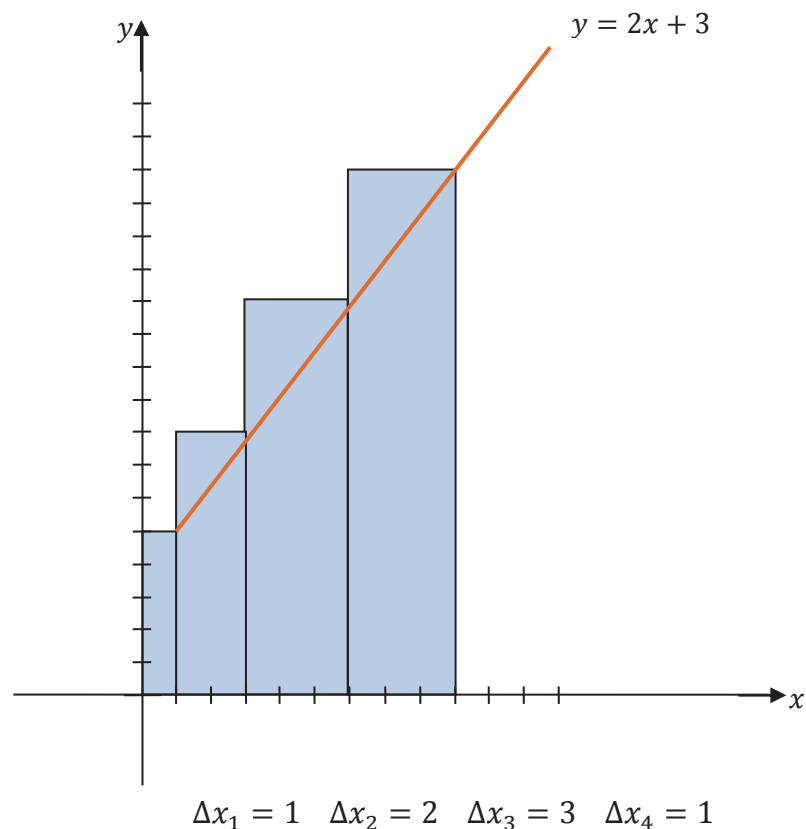
$$x_0 = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 6 \quad x_4 = 7$$

Determine a norma da partição e a soma de Riemann  $S_n$  se

$$w_1 = 1 \quad w_2 = 2,5 \quad w_3 = 4,5 \quad w_4 = 6,5$$

*Solução:*

O gráfico de  $f$  está esboçado na figura 1.4, onde exibimos também os pontos que corresponde a  $w_k$  e os retângulos de comprimentos  $|f(w_k)|$  para  $k = 1, 2, 3$  e 4. Assim,



A norma  $\|P\|$  da partição é  $\Delta x_3$ , ou 3.

Usando a soma das áreas com  $n = 4$ , temos

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(w_k) \cdot \Delta x_k$$

$$= f(w_1) \cdot \Delta x_1 + f(w_2) \cdot \Delta x_2 + f(w_3) \cdot \Delta x_3 + f(w_4) \cdot \Delta x_4$$

$$= f(1) \cdot (1) + f(2,5) \cdot (2) + f(4,5) \cdot (3) + f(6,5) \cdot (1)$$

Substituindo  $w_k$  na equação  $f(x) = 2x + 3$ , temos

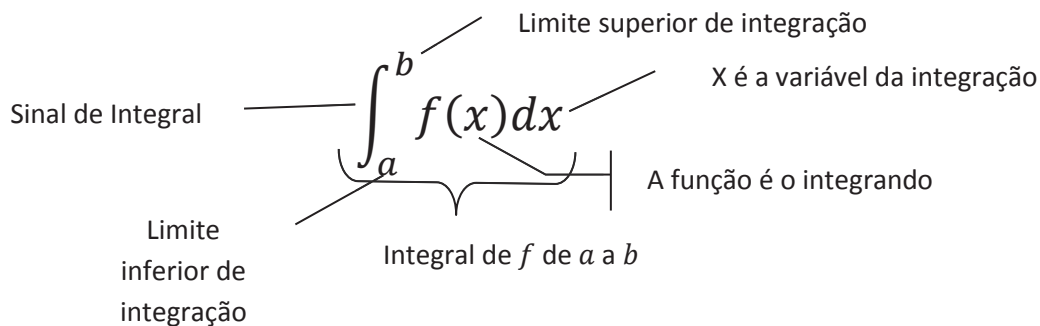
$$= (2 \cdot 1 + 3) \cdot (1) + (2 \cdot 2,5 + 3) \cdot (2) + (2 \cdot 4,5 + 3) \cdot (3) + (2 \cdot 6,5 + 3) \cdot (1)$$

$$= 5 \cdot (1) + 8 \cdot (2) + 12 \cdot (3) + 16 \cdot (1)$$

$$= 5 + 16 + 36 + 16 = 73$$

## 1.2 - A Integral.

O sinal da integral  $\int$  pode ser encontrado com uma letra S alongada (a primeira letra da palavra soma) tem por finalidade indicar a conexão que existe entre as integrais e as soma de Riemann e para representar a área da região R (figura 1.1) usaremos a notação  $\int_a^b f(x)dx$ , que é lido como “integral de  $a$  até  $b$  e  $F$  de  $x dx$ ” ou, às vezes, como “integral de  $a$  até  $b$  de  $f$  de  $x$  em relação  $px$ ”, Os outros componentes dos símbolos da integral também têm nomes:



### 1.2.1 - A integral definida como limite da soma de Riemann.

#### **Definição 1. 1:**

Sejam  $f$  definida em um intervalo fechado  $[a, b]$  e  $L$  um número real. A afirmação

$$\lim_{||P|| \rightarrow 0} \sum_k (W_k) \Delta x_k = L$$

Significa que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que se  $P$  é uma partição de  $[a, b]$  com  $||P|| < \delta$ , então

$$\left| \sum_k f(W_k) \Delta x_k - L \right| < \varepsilon$$

Para qualquer escolha dos números  $w_k$  nos subintervalos  $[x_{k-1}, x_k]$  de  $P$ . O número  $L$  é um limite de somas (de Riemann).

Para cada  $\delta > 0$  existem infinitas partições  $P$  de  $[a, b]$  com  $\|P\| < \delta$ . Além disso, para cada uma dessas partições  $P$  há infinitas maneiras de escolher o número  $w_k$  em  $[x_{k-1}, x_k]$ . Conseqüentemente, a cada partição  $P$  podemos associar um número infinito de somas Riemann. Todavia, se o limite  $L$  existe, então, para qualquer  $\epsilon > 0$  cada soma de Riemann está a menos de  $\epsilon$  unidade de  $L$ , desde que se escolha uma norma suficiente pequena.

**Definição 1.2:**

Seja definida em um intervalo fechado  $[a, b]$ . A integral definida de  $f$ , de  $a$  e  $b$ , denotada por  $\int_a^b f(x)dx$ , é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k f(W_k)\Delta x_k,$$

desde que o limite (**Ver ANEXO B – Propriedades B.1.1**) exista.

O processo de determinação do limite é chamado cálculo da integral.

**1.2.2 - Área da região sob o gráfico de  $f$  de  $a$  e  $b$ .**

**Definição 1.3:**

Se  $f$  é integrável e  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$  em  $[a, b]$ , então a área  $A$  da região sob o gráfico de  $f$  de  $a$  e  $b$  é

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

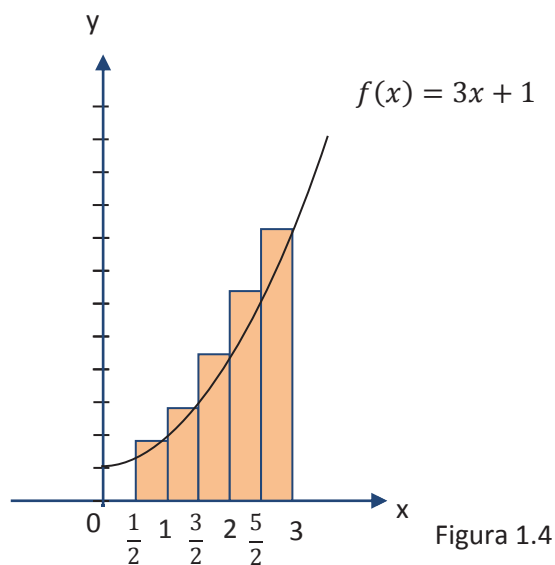
- **Exemplo 1.2**

Determine a soma de Riemann para a função  $f$  dada por  $f(x) = 3x + 1$  em  $[0, 3]$ . Considere a partição  $P^*$  do intervalo  $[0, 3]$  dado por  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ,  $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$  e

$\left[2, \frac{5}{2}\right]$  e  $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$  com  $w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = 1, w_3 = \frac{3}{2}, w_4 = 2, w_5 = \frac{5}{2}$  e  $w_6 = 3$ . Trace também o gráfico da função no intervalo dado mostrando os retângulos correspondentes à soma de Riemann. Em seguida, calcule  $\int_0^3 f(x)dx$ .

*Solução:* antes de calcularmos a soma de Riemann, vejamos a representação gráfica de  $f$ , com a partição  $P^*$ .

O gráfico abaixo representa os seis retângulos das áreas encontradas com a soma Riemann.



Seja o primeiro limite  $a = 0$  e o último limite  $b = 3$ , inserido uma partição  $P$  é dividindo este limite em  $n$  subintervalos iguais,  $n = 6$ .

Logo,

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{3 - 0}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

A partir da função

$$f(x) = 3x + 1$$

Calculamos as alturas  $f(w_i)$  ...

$$f(w_1) = 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2},$$

$$f(w_2) = 3 \cdot 1 + 1 = 4,$$

$$f(w_3) = 3 \cdot \frac{3}{2} + 1 = \frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2},$$

$$f(w_4) = 3 \cdot 2 + 1 = 7,$$

$$f(w_5) = 3 \cdot \frac{5}{2} + 1 = \frac{15}{2} + 1 = \frac{17}{2},$$

$$\text{e } f(w_6) = 3 \cdot 3 + 1 = 10.$$

Construindo a soma de Riemann:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 f(W_k) \Delta x_k &= f(W_1) \Delta x_1 + f(W_2) \Delta x_2 + f(W_3) \Delta x_3 + f(W_4) \Delta x_4 + f(W_5) \Delta x_5 \\ &\quad + f(W_6) \Delta x_6 = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{11}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{17}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{5}{4} + \frac{4}{2} + \frac{11}{4} + \frac{7}{2} + \frac{17}{4} + \frac{10}{2} = \frac{5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20}{4} = \frac{75}{4} \end{aligned}$$

Portanto, pela **definição 1.1 e 1.2**, temos

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^6 f(W_k) \Delta x_k = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \frac{75}{4} = \frac{75}{4}$$

$$A = \int_0^3 (3x + 1) dx = (3x + 1) \Big|_0^3 = (3 \cdot 3 + 1) - (3 \cdot 0 + 1) = (9 + 1) - 1 = 9.$$

### 1.3 - Existência da integral de uma função contínua.

Nesta seção, iremos mostrar que toda função contínua é integrável. E, algumas definições envolvendo continuidade e integração.

**Teorema 1.1:** Se  $f$  é contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$ , então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .

**Demonstração:** A demonstração do Teorema pode ser encontrada em [SIMMONS, 1987].

**Definição 1.4:**

Seja  $f$  uma função contínua em  $[c, d]$ , temos

(i) Se  $c > d$ , então  $\int_c^d f(x)dx = -\int_d^c f(x)dx$

(ii) Se  $f(a)$  existe, então  $\int_a^a f(x)dx = 0$

• **Exemplos 1.3**

a) Seja  $\int_1^5 g(x)dx = 8$ . Calcule:  $\int_5^1 g(x)dx$ .

**Solução:** Segue da **Definição 1.4(i)**,

$$\int_5^1 g(x)dx = -\int_1^5 g(x)dx$$

$$\int_5^1 g(x)dx = -1 \cdot 8 = [-8]$$

b) Dada  $\int_1^4 \sqrt{x}dx = \frac{14}{3}$ , calcule a integral  $\int_4^4 \sqrt{x}dx$ .

**Solução:** Como  $f(x) = \sqrt{x}$  está definida para  $x = 4$ , segue da **Definição 1.4(ii)** que

$$\int_4^4 \sqrt{x}dx = 0.$$

**1.3.1 - Propriedades da Integral Definida.**

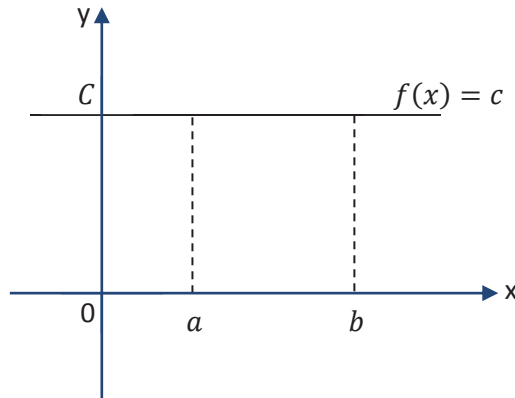
Nesta seção, iremos estudar algumas propriedades da Integral Definida com o objetivo de auxiliar no cálculo das integrais de uma forma mais simples sem

precisar aplicar a definição formal, usando limite. Para isto, iremos supor que  $f$  e  $g$  sejam funções contínuas.

### P.1 - Integral de uma função constante.

Seja  $f$  uma função constante definida pela equação  $f(x) = c$ , onde  $c$  é um número constante, temos  $\int_a^b f(x)dx = c(b - a)$

**Demonstração:**



Considere uma partição  $P$  de  $[a, b]$ , em  $n$ , subintervalos.

$$||P|| = \max\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n\}, \text{ onde } \Delta w_k = \frac{b - a}{n}$$

Daí, pela **definição 1.2**, temos,

$$\int_a^b c dx = \lim_{||P|| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c \cdot \frac{b - a}{n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left( \frac{c(b - a)}{n} \right) = c(b - a)$$

- **Exemplo 1.4**

a) Calcule a integral:  $\int_0^4 -4 dx$

*Solução:*



Aplicando a **propriedade (P. 1)** à função constante  $f(x) = -4$  em  $[0,4]$ , temos,

$$\int_0^4 -4dx = -4(4 - 0) = -16$$

b) Calcule:  $\int_0^2 4dx$

**Solução:**

Aplicando a **propriedade (P. 1)** à função constante  $f(x) = 4$  em  $[0,2]$ , temos,

$$\int_0^2 4dx = 4(2 - 0) = 8$$

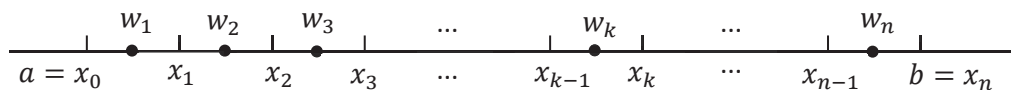
## P.2 - Propriedade da homogeneidade.

Se  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e  $c$  é um número real arbitrário, então  $cf$  é também Riemann-integrável em  $[a, b]$ , com

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx .$$

### **Demonstração:**

Seja dado  $P$  partição de  $[a, b]$  em  $n$ -subintervalos,



Quando  $\|P\| \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , logo,

$$\Delta x_k = \frac{b - a}{n}.$$

Temos que

$$\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n cf(x_k) \cdot \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k$$

Aplicando a **definição 1.1**

$$\begin{aligned}\int_a^b cf(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n cf(x_k) \cdot \Delta x_k = c \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k = \\ &= c \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k = c \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

Então

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

- **Exemplo 1.5**

a) Suponha que  $\int_1^2 f(x)dx = -4$ . Calcule:  $\int_1^2 3f(x)dx$ .

*Solução:*

Pela **propriedade (P. 2)**, temos,

$$\int_1^2 3f(x)dx = 3 \cdot \int_1^2 f(x)dx. \text{ Mas, } \int_1^2 f(x)dx = -4, \text{ logo}$$

$$\int_1^2 3f(x)dx = 3 \cdot (-4) = -12$$

b) Seja dada a expressão  $\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ , calcule a integral  $\int_1^3 5f(x)dx$ .

*Solução:* aplicando a **propriedade (P. 2)**, temos,

$$\int_1^3 5x dx = 5 \cdot \int_1^3 x dx = 5 \cdot \frac{1}{2}(3^2 - 1^2) = \frac{5}{2}(9 - 1) = \frac{5}{2}(8) = \frac{40}{2} = 20$$

### P.3 - Propriedade aditiva e da diferença

Se  $f$  e  $g$  integráveis em  $[a, b]$ , então  $f + g$  e  $f - g$  são integráveis em  $[a, b]$ , com,

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

**Demonstração:**

Considere a partição  $P$  do intervalo  $[a, b]$ , dada na demonstração da **propriedade (P.2)**. Então, aplicando a **definição 1.2**, temos:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (f(w_k) \pm g(w_k)) \Delta x_k =$$

$$= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left( \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta x_k \pm \sum_{k=1}^n g(w_k) \Delta x_k \right) =$$

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta x_k \pm \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(w_k) \Delta x_k =$$

$$= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

• **Exemplo 1.6**

a) Suponha que  $f$  e  $g$  sejam contínuas e que  $\int_1^5 f(x) dx = 6$  e  $\int_1^5 g(x) dx = 8$ .

Calcule:

$$\int_1^5 [4f(x) - g(x)] dx.$$

**Solução:** aplicando as **propriedades (P.2) e (P.3)**, temos,

$$\begin{aligned} \int_1^5 [4f(x) - g(x)] dx &= \int_1^5 4f(x) dx - \int_1^5 g(x) dx = \\ &= 4 \int_1^5 f(x) dx - \int_1^5 g(x) dx = 4 \cdot 6 - 8 = 24 - 8 = 16 \end{aligned}$$

b) Seja  $\int_1^4 x^2 dx = 21$ , calcule a integral:  $\int_1^4 (3x^2 + 5) dx$ .

*Solução:* aplicando as **propriedades (P. 2), (P. 3) e (P. 4)**, temos,

$$\int_1^4 (3x^2 + 5) dx = 3 \int_1^4 x^2 dx + 5(4 - 1) = 3 \cdot 21 + 5(3) = 63 + 15 = 78$$

#### **P.4 - Teorema da positividade e da comparação**

(i) Se  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , e  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$  em  $[a, b]$ , então:

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

(ii) Se  $f$  e  $g$  são integráveis em  $[a, b]$  e  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x$  em  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

#### **Demonstração:**

(i) Como  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ , então, para toda partição do intervalo  $[a, b]$ , temos  $f(w_k) \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$ .

Logo,

$$\sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta x_k \geq 0,$$

Portanto pela **definição 1.2**, temos,

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta x_k,$$

isto é,

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

(ii) Como  $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ , então, para toda partição do intervalo  $[a, b]$ , temos

$$f(W_k) \leq g(W_k), k = 1, 2, \dots, n$$

e como  $\Delta x_k \geq 0$ , segue que,

$$f(W_k)\Delta x_k \leq g(W_k)\Delta x_k$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^n f(W_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n g(W_k)\Delta x_k,$$

O que implica novamente pela definição 1.2, que

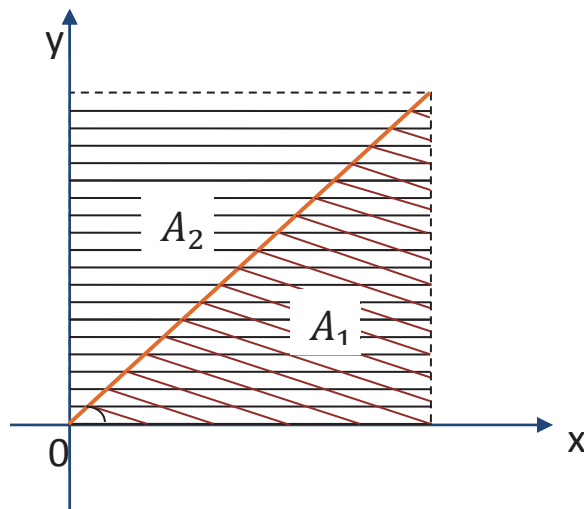
$$\int_a^b f(x)dx \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(w_k)\Delta x_k \leq \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(w_k)\Delta x_k = \int_a^b g(x)dx,$$

como queríamos demonstrar.

- **Exemplo 1.7**

a) Mostre que  $\int_0^1 x dx \leq \int_0^1 dx$

$$A_1 = \int_0^1 x dx \text{ e } A_2 = \int_0^1 dx$$



*Solução:* queremos mostrar que,

$\int_0^1 x dx \leq \int_0^1 dx$ . Como  $x \in [0, 1]$ , então  $1 - x \in [0, 1]$ , isto é,  $1 - x \geq 0$ . Pela positividade temos:

$$\int_0^1 (1-x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 dx - \int_0^1 x \geq 0$$

ou,  $\int_0^1 dx \geq \int_0^1 x dx$

Portanto, a desigualdade é válida.

b) Mostre que  $0 \leq \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

*Solução:*

Como  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \geq 0$ , pela positividade,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \geq 0.$$

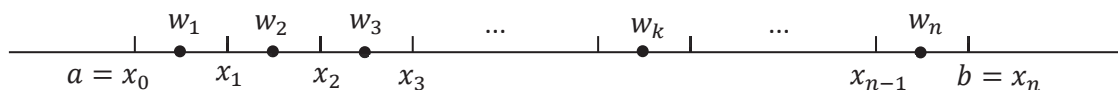
### P.5 - Propriedade do Valor Absoluto

Se  $f$  é Riemann-integrável no intervalo  $[a, b]$ , então  $|f|$  também o será e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, \text{ se } |f| \text{ também é integrável e } m_x \in [a, b].$$

**Demonstração:**

Pelas propriedades de valor absoluto (**Ver ANEXO A – Definição A.1 e Propriedades A.1.1**), para toda partição do intervalo  $[a, b]$ , dada por,



$$\left| \sum f(w_k) \Delta k_x \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(w_k) \Delta k_x| = \sum_{k=1}^n |f(w_k)| |\Delta k_x|$$

Portanto, como  $\Delta k_x \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$ , temos:

$$\left| \sum f(W_k) \Delta K_x \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(W_k) \Delta K_x|$$

Logo, como  $f$  e  $|f|$  são integráveis, pela **definição 1.2**, temos,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta_k x \leq \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left| \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta_k x \right| \leq$$

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |f(w_k)| \Delta_k x = \int_a^b |f(x)| dx$$

• **Exemplo 1.8**

a) Calcule:  $\int_{-3}^0 |x| dx$

Como  $x \in [-3, 0]$ , por definição  $|x| = -x$ .

Assim,

$$\int_{-3}^0 |x| dx = \int_{-3}^0 -x dx = - \int_{-3}^0 x dx = - \int_{-3}^0 \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-3}^0 = \left( -\frac{0}{2} \right) - \left( -\frac{9}{2} \right) = \frac{9}{2}$$

b) Calcule:  $\int_1^4 |x| dx$

Como  $x \in [1, 4]$ , por definição  $|x| = x$

Temos

$$\int_1^4 |x| dx = \int_1^4 x dx = \int_1^4 \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^4 = \frac{16}{2} - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

c) Calcule:  $\int_{-2}^1 |x| dx$ .

Como  $x \in [-2, 1]$ , por definição  $|x| = -x$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 |x| dx &= \int_{-2}^0 (-x) dx + \int_0^1 (x) dx \\ &= - \int_{-2}^0 x dx + \int_0^1 x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[ \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^0 + \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \right] = \\
&= -(0 - 2) + \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

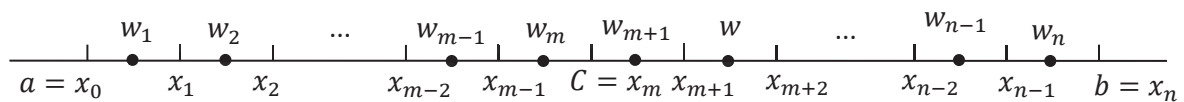
### P.6 - Propriedade com respeito ao intervalo de integração.

Se  $a < c < b$  e se  $f$  é integrável tanto em  $[a, c]$  como em  $[c, b]$ , então  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ .

#### Demonstração:

- **Caso 1:**  $a < c < b$

Para toda partição  $P$  no intervalo  $[a, b]$  com  $c \in P$ , temos:



$$\sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta_k x = \sum_{k=1}^m f(w_k) \Delta_k x + \sum_{k=m+1}^n f(w_k) \Delta_k x$$

Logo, como  $\|P\| = \max\{x_k - x_{k-1}, k = 1, 2, \dots, n\}$  e  $f$  é integrável em  $[a, b]$ ,  $[a, c]$  e  $[c, b]$ , pela propriedade de limites, temos:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta_k x = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \left( \sum_{k=1}^m f(w_k) \Delta_k x + \sum_{k=m+1}^n f(w_k) \Delta_k x \right) = \\
&= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(w_k) \Delta_k x + \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=m+1}^n f(w_k) \Delta_k x = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx
\end{aligned}$$



- **Caso 2:**  $a < b < c$

Pelo caso 1, e seja:  $a \leq b$ , é convencional escrevemos  $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ , temos:

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

- **Caso 3:**  $c < a < b$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

- **Exemplo 1.9**

a) Seja  $\int_1^3 x^2 dx = 5$  e  $\int_3^8 x^2 dx = 7$ , calcule a  $\int_1^8 (2x^2 + 3)dx$

*Solução:*

$$\begin{aligned}\int_1^8 (2x^2 + 3)dx &= \int_1^3 (2x^2 + 3)dx + \int_3^8 [(2x)^2 + 3]dx = \\ &= 2 \int_1^3 x^2 dx + \int_1^3 3dx + 2 \int_3^8 x^2 dx + \int_3^8 3dx = \\ &= 2 \cdot 5 + 3(3 - 1) + 2 \cdot 7 + 3(8 - 3) = 10 + 6 + 14 + 15 = 45\end{aligned}$$

### P.7 – Teorema do valor médio para integrais definidas.

Se  $f$  é contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$ , então existe um número  $z$  no intervalo aberto  $(a, b)$  tal que  $\int_a^b f(x)dx = f(z)(b - a)$

**Demonstração:**

Iremos considerar dois casos,

- i) Se  $f$  é constante em  $[a, b]$ , então existe um número  $c$  em  $[a, b]$  tal que  $f(x) = c, \forall x \in [a, b]$ , daí,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b cdx = c(b - a) = f(z)(b - a)$$

Para todo número  $z$  em  $(a, b)$ . (pois  $f(x) = c, \forall x \in [a, b]$ , em particular vale para  $x \in (a, b)$ )

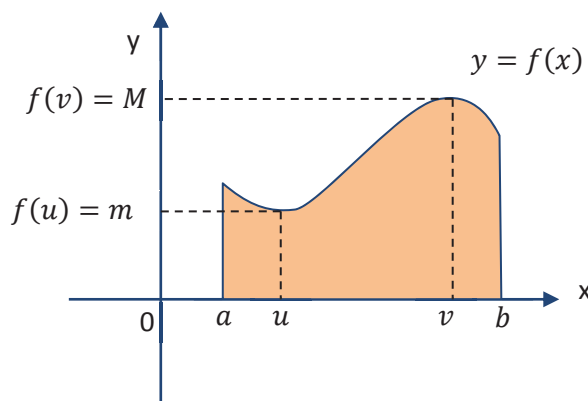
- ii) Considerando que  $f$  não seja uma função constante, logo temos que propriedade:  $f$  contínua assume máximo e mínimo.

$m \rightarrow$  valor mínimo

$M \rightarrow$  valor máximo

Seja  $f(u) = m$  e  $f(v) = M$  para  $u$  e  $v$  em  $[a, b]$ .

Tomando como caso em que  $f(x)$  é positivo em todo  $x \in [a, b]$ , conforme figura a seguir,



Como  $f$  não é uma função constante,  $m < f(x) < M$  para algum  $x$  em  $[a, b]$ .

Portanto, pela **propriedade (P. 6)(i)**, temos

$$\int_a^b m dx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b M dx$$

Agora, aplicando, a **propriedade (P.3)**, temos  $\int_a^b m dx = m(b-a)$  e  $\int_a^b M dx = M(b-a)$  daí,

$$m(b-a) < \int_a^b f(x) dx < M(b-a),$$

daí, dividindo por  $b-a > 0$ , temos

$$m \frac{(b-a)}{b-a} < \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} < M \frac{(b-a)}{b-a}$$

então, como  $f(u) = m$  e  $f(v) = M$ ,  $u, v \in [a, b]$ , temos,

$$f(u) < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx < f(v).$$

Como  $\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx$  é um número entre  $f(u)$  e entre  $f(v)$ , decorre que Teorema do Valor Intermediário (**Ver ANEXO C – Definição C.2**) ( $\int_a^b f(x) dx \geq 0$  e pelo T.V.I. existe um número  $z$ , com  $u < z < v$ , tal que  $f(z) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ , ou seja existe  $z \in (a, b)$  tal que  $\int_a^b f(x) dx = f(z)(b-a)$  como queríamos demonstrar.

### P.7.1 Consequência do T.V. M para integral.

Pelo T.V.M. para integrais, usando uma partição regular  $P$  com  $n$  subintervalos, para evidenciar a relação entre média aritmética e a palavra média no teorema então, temos

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(w_k) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{f(w_k) \Delta x}{b-a} \right]$$

Observe:

Logo: 
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \frac{\Delta x}{b-a} = \frac{1}{n}$$

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{f(w_k) \Delta x}{b-a} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{f(w_k) 1}{n} \right]$$

Ou

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(w_1) + f(w_2) + \dots + f(w_n)}{n} \right]$$

Considerando, o número  $f(z)$  no teorema do valor médio com um limite de média aritmética dos valores funcionais  $f(w_1) + f(w_2) + \dots + f(w_n)$ , quando  $n$  aumenta sem limite.

**Definição 1.5:**

Seja  $f$  contínua em  $[a, b]$ . O valor médio  $f_m$  de  $f$  em  $[a, b]$  é

$$f_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Nota que, pelo teorema do valor médio para integrais definidas, se  $f$  é contínua em  $[a, b]$ , então  $f_m = f(z)$  Para algum  $z$  em  $[a, b]$ .

• **Exemplo 1.10**

a) Calcule o valor médio  $M$  da função  $f(x) = x + 3$  em  $[-1, 5]$

*Solução:*

Como,  $\int_{-1}^5 (x + 3) dx = \int_{-1}^5 x dx + \int_{-1}^5 3 dx$ , temos,

$$f_m = \frac{1}{5-1} \left[ \int_{-1}^5 x dx + 3 \int_{-1}^5 dx \right] = \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{2} (25 - 1) + 3(5 - 1) \right] = \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{2} (24) + 3(6) \right]$$

Ou seja,

$$f_m = \frac{1}{6} [12 + 18] = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5$$

b) Calcule o valor médio  $M$  da função  $f$ , em que  $f(x) = x^2 + 1$  em  $[1, 4]$

*Solução:*

$$\begin{aligned}\int_1^4 (x^2 + 1)dx &= \int_1^4 x^2 dx + \int_1^4 1dx \Rightarrow \\ fm &= \frac{1}{4-1} \left[ \int_1^4 x^2 dx + \int_1^4 1dx \right] = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left[ \frac{1}{3}(4^3 - 1^3) + 1(4 - 1) \right] = \\ &= 1/3 \cdot [1/3(64 - 1) + 1(3)] = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left[ \frac{1}{3}(63) + 3 \right] = \frac{1}{3}(21 + 3) = \frac{24}{3} = 8\end{aligned}$$

## CAPÍTULO 2: O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Este capítulo contém um dos mais importantes teoremas, O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). Que na primeira parte nos diz que se  $G$  é definida por uma função  $f$  contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$ , para todo  $x$  em  $[a, b]$ , então  $G$  é uma antiderivada de  $f$  em  $[a, b]$ . Já a segunda parte permite calcular a integral de uma função idealizando uma primitiva da mesma, e por isso é a chave para calcular integrais. Ele afirma que, conhecendo uma função primitiva de uma função  $f(x)$  integral no intervalo fechado  $[a, b]$ , podemos calcular a sua integral, ou seja,  $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ .

### 2.1 - Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) – Primeira Parte.

Nesta seção estudaremos a primeira parte do T.F.C.

#### **Teorema 2.1: TFC-1ª Parte**

Suponhamos  $f$  contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$ .

Se a função  $G$  é definida por

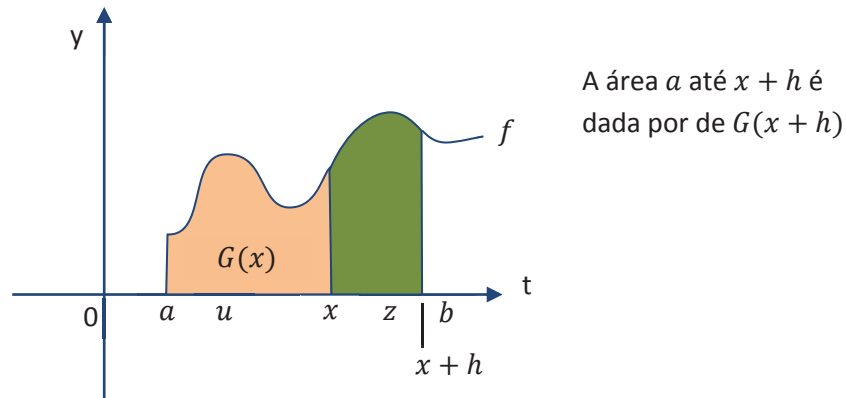
$G(x) = \int_a^x f(t)dt$ , para todo  $x$  em  $[a, b]$ , então  $G$  é uma antiderivada de  $f$  em  $[a, b]$ .

#### **Demonstração:**

Queremos mostrar que  $G$  é uma antiderivada de  $f$  em  $[a, b]$ , isto é, se  $x$  está em  $[a, b]$ , então  $G'(x) = f(x)$ ; ou seja,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x)$$

Graficamente, temos o seguinte:



Note que se  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ , então  $G(x+h)$  é área de  $f$  de  $a$  até  $x+h$ ,  $G(x)$  é a área de  $f$  de  $a$  até  $x$ . Se  $h > 0$ , então a diferença  $G(x+h) - G(x)$  é a área de  $f$  de  $x$  até  $x+h$ , e o número  $h$  é amplitude do intervalo  $[x, x+h]$ .

Temos que  $\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(z)$ , para algum número  $z$  entre  $x$  e  $x+h$ . Se  $h \rightarrow 0$ , então  $z \rightarrow x$  e  $f(z) \rightarrow f(x)$ .

- Mostramos agora  $G'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$ . De fato,

Se  $x$  e  $x+h$  estão em  $[a, b]$ , então, usando a definição de  $G$ , temos

$$G(x+h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

Aplicando a **Definição 1.4(i)**

$G(x+h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt = \int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+h} f(t)dt$ , de onde segue pela **Propriedade (P. 6)** que

$$G(x+h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt$$

Consequentemente, se  $h \neq 0$ , dividindo a igualdade acima por  $h$ , obtemos

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(t)dt \quad (1)$$

Daí,

- i) Se  $h > 0$ , então, pelo **Teorema do Valor Médio para Integrais Definidas** (Propriedade(P. 9)) existe um número  $z$  no intervalo aberto  $(x, x + h)$  tal que

$$\int_a^{x+h} f(t)dt = f(z)h \quad (2)$$

E, portanto substituindo (2) em (1),

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot f(z) \cdot h \Rightarrow \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(z) \quad (3)$$

Como  $x < z < x + h$  quando  $h \rightarrow 0$ , temos que  $z \rightarrow x$ , assim, decorre da continuidade de  $f$  (**Ver ANEXO C – Teorema C.1**) que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(z) = \lim_{z \rightarrow x} f(z) = f(x) \quad (4)$$

E daí, passando (3) ao limite com  $h \rightarrow 0^+$ , e usando (4), obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(z) = f(x).$$

- ii) Se  $h < 0$ , aplicando o limite à igualdade (3) quando  $h \rightarrow 0^-$ , pode-se provar de maneira análoga que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x)$$

Portanto segue da definição de derivada (**Ver ANEXO D – Definição D.1**)

$$G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x)$$

## 2.2 - Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) - Segunda Parte.

Nesta seção iremos enunciar e provar a segunda parte do T.F.C.



**Teorema 2.2:** Se  $F$  é qualquer antiderivada de  $f$  em  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

**Demonstração:**

Seja  $F$  uma antiderivada de  $f$ , isto é  $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$  e seja  $G$  outra antiderivada de  $f$  definida na parte II, isto é,  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ .

Pelo como  $F$  é uma antiderivada de  $f$ , e  $G$  é outra antiderivada de  $f$ , sabemos que existe uma constante  $C$ , tal que  $G(x) = F(x) + C$  para todo  $x$  em  $[a, b]$ . Logo, pela definição de  $G$ ,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C \quad (1), \text{ para todo } x \text{ em } [a, b].$$

Fazendo  $x = a$  em (1) e considerando que  $\int_a^a f(t)dt = 0$ , obtemos  $0 = F(a) + C$ , ou  $C = -F(a)$ . Logo, voltando à equação (1),

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Como isto é uma identidade para todo  $x$  em  $[a, b]$ , podemos substituir  $x$  por  $b$ , obtendo

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Substituindo a variável  $t$  por  $x$ , temos  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$  como queríamos mostrar.

**OBSERVAÇÃO:**

1) Costuma-se denotar a diferença  $F(b) - F(a)$  por  $F(x) \Big|_a^b$  ou por  $[f(x)]_a^b$ .

2) A parte I do TFC nos diz que

$$\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Pois, como  $G$  é uma antiderivada de  $f$ , dada por  $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ , derivando ambos os membros com relação à  $x$ , temos

$$G'(x) = \left( \int_a^x f(t)dt \right)' = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt \quad (1)$$

E, como  $G$  é antiderivada de  $f$ , isto é,  $G'(x) = f(x) \forall x$ , segue de (1) que

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

### Corolário 2.3.

Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e  $F$  é uma antiderivada de  $f$ , então

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

- Prova: consideremos três casos,
  - i) Se  $a \leq b$ , o resultado segue direto da parte II do T.F.C.
  - ii) Se  $a \geq b$  temos pela **propriedade P · 1(i)**,  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ , se  $a > b$ . Assim, aplicando a parte II do TFC, temos,
 
$$\int_a^b f(x)dx = [-F(a) - F(b)] = F(b) - F(a).$$

Por outro lado, se  $a = b$ , então, pela definição [1 · 3(ii)],

$$\int_a^b f(x)dx = 0 = F(a) - F(a) = F(b) - f(a), \text{ como queríamos mostrar.}$$

- **Exemplo 2.1**

a) Calcule:  $\int_2^3 (3x + 4)dx$

Cálculo da antiderivada: Como  $3x + 4 = \left(3 \frac{x^2}{2} + 4x\right)$ , então  $F(x) = \frac{3x^2}{2} + 4x$  é uma antiderivada de  $f(x) = 3x + 4$ .

Então, pelo **Corolário 2.3**,

$$\int_2^3 (3x + 4)dx = \left[ \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_2^3 = \left[ \frac{3}{2}(3)^2 + 4(3) \right] - \left[ \frac{3}{2}(2)^2 + 4(2) \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \frac{3}{2} 9 + 12 \right] - \left[ \frac{3}{2} 4 + 8 \right] = \left[ \frac{27}{2} + 12 \right] - \left[ \frac{12}{2} + 8 \right] = \\
 &= \left[ \frac{27 + 24}{2} \right] - \left[ \frac{12 + 16}{2} \right] = \frac{51 - 28}{2} = \frac{23}{2}
 \end{aligned}$$

b) Usando a primeira parte do teorema fundamental do cálculo para determinar  $\frac{dy}{dx}$ , com  $y = \int_0^x (t^2 + 1) dt$

*Solução:* Temos,  $f(t) = t^2 + 1$  e  $a = 0$ . Assim, pela parte I do T.F.C.

$$\frac{d}{dx} \int_0^x (t^2 + 1) dt = x^2 + 1 \text{ isto é, } \frac{dy}{dx} = x^2 + 1$$

c) Usando a primeira parte do teorema fundamental do cálculo para determinar  $\frac{dy}{dx}$ , com  $y = \int_{-1}^x \frac{ds}{1+s^2}$

*Solução:* Temos,  $f(s) = \frac{1}{1+s^2}$  e  $a = -1$

$$y = \int_{-1}^x \frac{ds}{1+s^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax} \int_1^x \frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

d) A integral  $\int_1^5 (x^3 - 3x^2 + 1) dx$ , Calcule usando a segunda parte do teorema fundamental do cálculo.

*Solução:*

$$\begin{aligned}
 \int_1^5 (x^3 - 3x^2 + 1) dx &= \left[ \int (x^3 - 3x^2 + 1) dx \right] \Big|_1^5 = \\
 &= \left( \frac{x^4}{4} - 3 \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_1^5 = \\
 &= \left( \frac{1}{4} x^4 - x^3 + x \right) \Big|_1^5 =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{1}{4}(5)^4 - (5)^3 + 5 \right) - \left( \frac{1}{4}(1)^4 - 1(1)^3 + 1 \right) = \\
&= \left( \frac{625}{4} - 125 + 5 \right) - \left( \frac{1}{4} - 1 + 1 \right) = \\
&= \left( \frac{625 - 500 + 20}{4} \right) - \left( \frac{1 - 4 + 4}{4} \right) = \frac{145 - 1}{4} = 36
\end{aligned}$$

### OBSERVAÇÃO 2.1:

Considerando,  $F(x) + C$ , em lugar de  $F(x)$  no corolário anterior,  $\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ , chegamos ao mesmo resultado, pois

$$\begin{aligned}
F(x) + c \Big|_a^b &= [F(b) + c] - [F(a) + c] \\
&= F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b
\end{aligned}$$

Como, por definição a integral indefinida de  $f$  é:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Em que  $F'(x) = f(x)$ , obtemos

$$\int_a^b f(x)dx = \left[ \int f(x)dx \right]_a^b$$

Ou seja, uma integral definida pode ser calculada por meio do cálculo da integral indefinida correspondente. Tal como em casos anteriores, ao utilizarmos o **teorema (2.2)** é desnecessário acrescentar a constante de integração  $C$  da integral indefinida (**Ver ANEXO E – Definição E.1**). Assim, após estudarmos estas observações, para calcularmos as integrais definidas, podemos calcular usando a tabela das Integrais Imediatas, estudada nas Integrais Indefinidas, conforme tabeladas Integrais Imediatas (**Ver ANEXO E – Tabela E.1.2**)

• **Exemplo 2.2**

a) Calcular  $\int_0^1 (x^2 + 2)^2 dx$ .

*Solução:* como  $F(x) = \frac{x^5}{5} + 4\frac{x^3}{3} + 4x$  é uma antiderivada de  $f$ , isto é  $F'(x) = f(x), \forall x \in [0,1]$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 + 2)^2 dx &= \int_0^1 ((x^2)^2 + 4x^2 + 4) dx = \\ &= \left[ \frac{x^5}{5} + 4 \cdot \frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^1 = \left[ \frac{1^5}{5} + 4 \cdot \frac{1^3}{3} + 4 \cdot 1 \right]_0^1 - \left[ \frac{0^5}{5} + 4 \cdot \frac{0^3}{3} + 4 \cdot 0 \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 4 - 0 = \frac{3 + 20 + 60}{15} = \frac{83}{15} \end{aligned}$$

Ou pela observação, como  $\int_0^1 (x^2 + 2)^2 dx = (f(x^2 + 2)^2 dx)|_0^1$

Temos,  $\int_0^1 (x^2 + 2)^2 dx = (f(x^4 + 4x^2 + 4) dx)|_0^1$ , pela tabela das integrais (**Ver ANEXO E - Tabela E. 1.2**).

$$\int_0^1 (x^2 + 2)^2 dx = \left( \frac{x^5}{5} + \frac{4}{3}x^3 + 4x \right) \Big|_0^1 = \left( \frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 4 \right) - 0 = \frac{3 + 20 + 60}{15} = \frac{83}{15}$$

b) Calcule a integral de

$$\int_4^9 \frac{t - 3}{\sqrt{t}} dt$$

*Solução:* temos,

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{t - 3}{\sqrt{t}} dt &= \int_4^9 \frac{t}{t^{1/2}} dt - \frac{3}{t^{1/2}} dt = \\ &= \int_4^9 t^{1/2} - 3t^{-1/2} dt = \left( \frac{t^{1/2+1}}{\frac{1}{2} + 1} - 3 \cdot \frac{t^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2} + 1} \right) \Big|_4^9 = \\ &= \left( \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - 3 \cdot \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right) \Big|_4^9 = \frac{2}{3} t^{3/2} - 6t^{1/2} \Big|_4^9 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{9^3} - 6\sqrt{9}\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{4^3} - 6\sqrt{4}\right) = \\
&= \left(\frac{2}{3} \cdot 27 - 6 \cdot 3\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 8 - 6 \cdot 2\right) = \left(\frac{54}{3} - 18\right) - \left(\frac{16}{3} - 12\right) = \\
&= \left(\frac{54 - 54}{3}\right) - \left(\frac{16 - 36}{3}\right) = \frac{20}{3}
\end{aligned}$$

c) Calcule a integral  $\int_{-8}^8 \sqrt[3]{s^2} + 2ds$ .

*Solução:* temos,

$$\begin{aligned}
&\int_{-8}^8 \sqrt[3]{s^2} + 2ds = \\
&= \left(\frac{s^{2/3+1}}{\frac{2}{3}+1} + 2s\right) \Big|_{-8}^8 = \left(\frac{s^{5/3}}{\frac{5}{3}} + 2s\right) \Big|_{-8}^8 = \left(\frac{3}{5}s^{5/3} + 2s\right) \Big|_{-8}^8 = \\
&= \left[\frac{3}{5}(8)^{5/3} + 2(8)\right] - \left[\frac{3}{5}(-8)^{5/3} + 2(-8)\right] = \\
&= \left[\frac{3}{5} \cdot 32 + 16\right] - \left[\frac{3}{5} \cdot (-32) - 16\right] = \\
&= \left[\frac{96}{5} + 16\right] - \left[\frac{96}{5} - 16\right] = \\
&= \left(\frac{96 + 80}{5}\right) - \left(\frac{-96 + 80}{5}\right) = \frac{176 + 176}{5} = \frac{352}{5}
\end{aligned}$$

d) Calcule a integral  $\int_3^2 \frac{x^2-1}{x-1} dx$ .

*Solução:* como  $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$ , temos

$$\int_3^2 \frac{x^2-1}{x-1} dx = \int_3^2 (x+1) dx = - \int_2^3 (x+1) dx =$$

$$\begin{aligned} &= - \int_2^3 (x + 1) dx = \left( -\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_2^3 = \\ &= \left( \frac{-(3)^2}{2} - 3 \right) - \left( \frac{-(2)^2}{2} - 2 \right) = \left( \frac{-9}{2} - 3 \right) - \left( \frac{-4}{2} - 2 \right) = \\ &= \left( \frac{-9 - 6}{2} \right) - \left( \frac{-4 - 4}{2} \right) = -\frac{15}{2} + \frac{8}{2} = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

## CAPÍTULO 3: APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

Neste capítulo esboçaremos algumas aplicações das integrais definidas, ou seja, de regiões entre os gráficos de duas funções, onde a área dessas regiões (planas) são expressadas como um limite de somas e conseqüentemente pela definição, por uma integral.

### 3.1 - Áreas de regiões entre curvas.

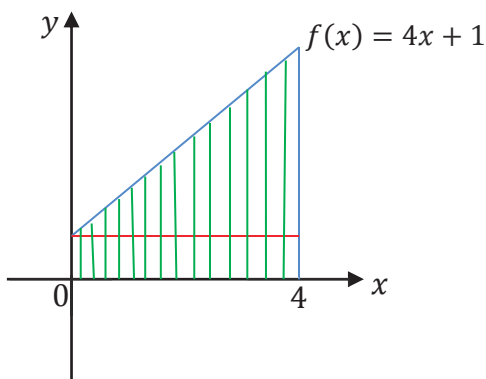
Nesta seção iremos estudar como calcular a área de uma região delimitada pelos gráficos de funções contínuas e pelos eixos coordenados.

#### 3.1.1 – Área da região delimitada pelo gráfico de uma função contínua positiva e pelas retas $x = a$ e $x = b$ .

Se uma função  $f$  é contínua e  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ , então, pelo **Teorema 1.2.2**, a área da região sob o gráfico de  $f$  de  $a$  a  $b$  é dada pela integral definida  $\int_a^b f(x)dx$ , conforme já definimos no Capítulo 1.

- **Exemplo 3.1**

- a) Ache a área da região entre o gráfico da equação  $f(x) = 4x + 1$  para  $x$  restrito ao intervalo dado  $[0, 4]$ .



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^4 (4x + 1) = \left( 4 \frac{x^2}{2} + x + c \right) \Big|_0^4 = \\
 &= (2x^2 + x + c) \Big|_0^4 = 2 \cdot 16 + 4 + c = 36
 \end{aligned}$$

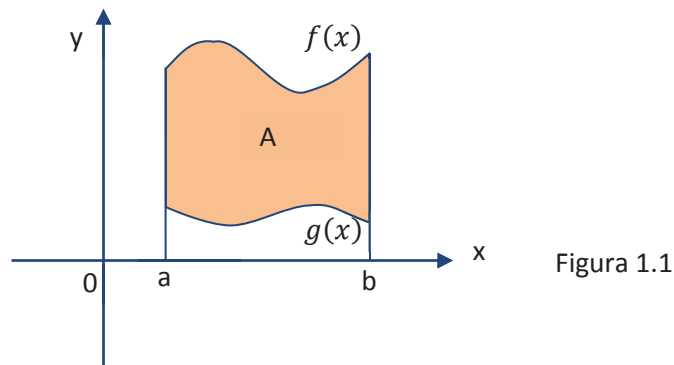


Geometricamente faríamos

$$A = A_{\text{retângulo}} + A_{\text{triângulo}} = 4 \cdot 1 + \frac{4 \cdot 16}{2} = 4 + 32 = 36$$

### 3.1.2 – Área da região delimitada pelo gráfico de funções contínuas e pelas retas $x = a$ e $x = b$ .

Suponha que  $f$  e  $g$  sejam definidas e contínuas em  $[a, b]$  e tais que  $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ .



Então a área da região  $R$  limitada pelos gráficos de  $f$  e  $g$  e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ , pode ser calculada subtraindo-se a área da região sob o gráfico de  $g$  (fronteira inferior de  $R$ ) da área da região sob o gráfico de  $f$  (fronteira superior de  $R$ ) é dado por:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Independente de  $f$  e  $g$  serem positivos ou não. De fato, temos três possibilidades:

#### 1º Caso:

$f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$  e  $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ .

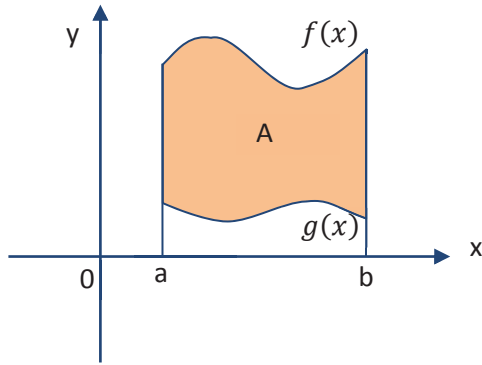


Figura 1.2

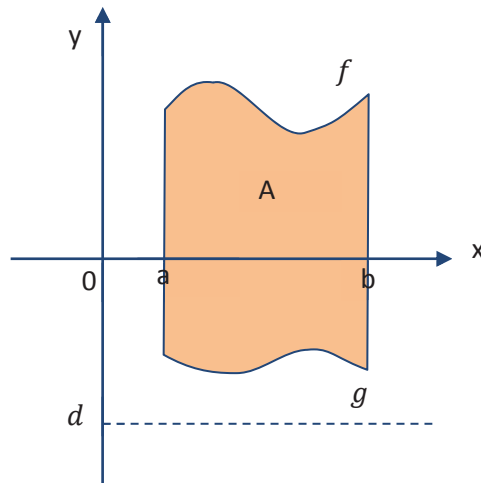
Neste caso,

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

**2º Caso:**

$$f(x) \geq 0 \text{ e } g(x) \leq 0, \forall x \in [a, b].$$

Figura 3.2



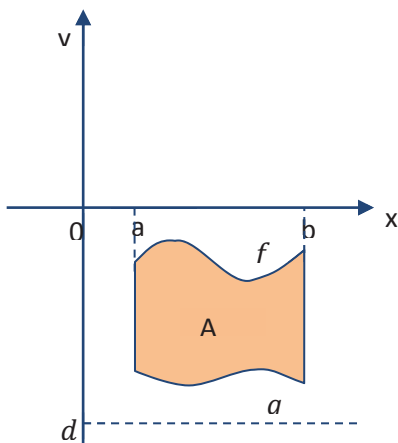
Neste caso,

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b f(x)dx + \left[ - \int_a^b g(x)dx \right] = \\ &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \end{aligned}$$

**3º Caso:**

$$f(x) \leq 0, g(x) \leq 0 \text{ e } f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$$

Figura 3.2



Neste caso,

$$\begin{aligned} A &= - \int_a^b g(x)dx - \left[ - \int_a^b f(x)dx \right] = \\ &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \end{aligned}$$

Nestes casos (2 e 3), escolhemos um número negativo  $d$  inferior ao valor mínimo de  $g$  em  $[a, b]$ , conforme ilustrado nas figuras 3.2 (i) e 3.2(ii). Em seguida, consideremos as funções  $f_1$  e  $g_1$ , definidas como segue:

$$f_1(x) = f(x) - d = f(x) + |d|$$

$$g_1(x) = g(x) - d = g(x) + |d|$$

Os gráficos de  $f_1$  e  $g_1$  podem ser obtidos deslocando-se verticalmente os gráficos de  $f$  e de  $g$  de uma distância  $|d|$ . Se  $A$  é a área da região da figura 3.2 (i, ii), então

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f_1(x) - g_1(x)] dx = \int_a^b \{[f(x) - d] - [g(x) - d]\} dx = \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \end{aligned}$$

**Teorema 3.1:** Se  $f$  e  $g$  são contínuas e  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x$  em  $[a, b]$ , então a área  $A$  da região delimitada pelos gráficos de  $f, g, x = a$  e  $x = b$  é

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

**Demonstração:**

Seja  $h(x) = f(x) - g(x)$  e se  $w$  está em  $[a, b]$  então  $h(w)$  é a distância vertical entre os gráficos de  $f$  e  $g$  para  $x = w$ , figura 3.3 (i).

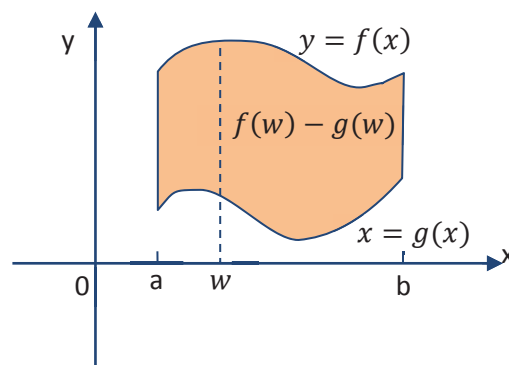
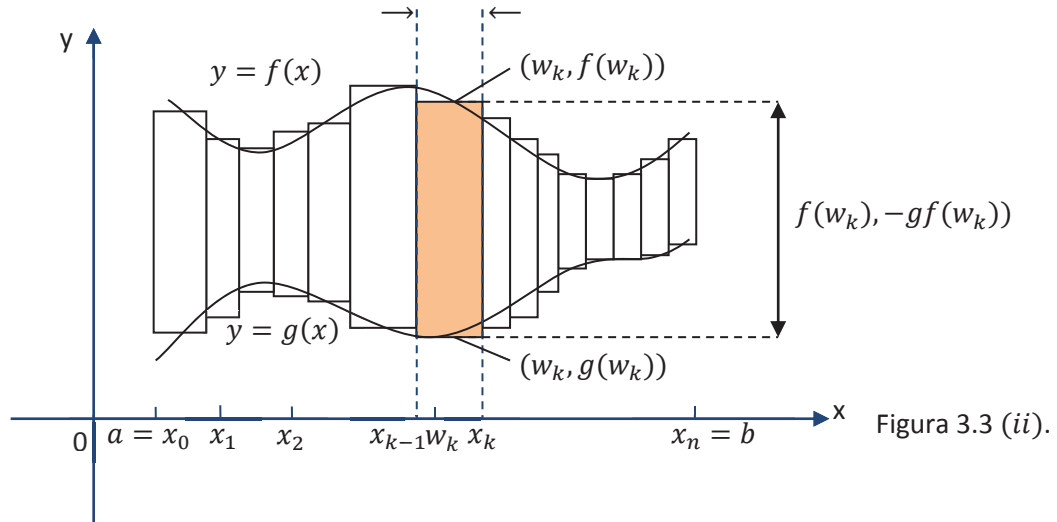


Figura 3.3 (i).

Considerando  $P$  uma partição de  $[a, b]$  determinada por  $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ . Para cada  $k$ , seja  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ , e seja  $w_k$  um número arbitrário no  $K^{mo}$ . Subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  de  $P$ . Pela definição de  $h$ ,  $h(w_k) = [f(w_k) - g(w_k)]\Delta x_k$  que é a área  $A$  do retângulo de comprimento  $f(w_k) - g(w_k)$  e largura  $\Delta x_k$  exibido na figura 3.3 (ii).



Logo, temos que a soma de Riemann

$$\sum_k h(w_k) \Delta x_k = \sum [f(w_k) - g(w_k)] \Delta x_k \quad (1)$$

É a soma das áreas dos retângulos na figura 3.3(ii), e é, assim, uma aproximação da área da região entre os gráficos de  $f$  e  $g$  de  $a$  a  $b$ . Passando (1) ao limite com  $\|P\| \rightarrow 0$ , temos,

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_k h(w_k) \Delta x_k = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum (f(w_k) - g(w_k))$$

isto é

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum h(w_k) \Delta x_k = \lim \sum f(w_k) \Delta x_k - \lim \sum g(w_k) \Delta x_k$$

Portanto, pela definição de Integral, temos  $\int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$ .

**OBSERVAÇÃO:**

Segue direto do **Teorema 3.1**, que  $A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ .

Desta forma, podemos interpretar a fórmula da área no teorema 3.1, da seguinte forma:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

limite de soma      comprimento de um retângulo      largura de um retângulo

### **OBSERVAÇÃO:**

Para obtemos esta definição, conforme a figura 3.3(ii), usamos a somas de áreas de retângulos verticais, percorrendo a região da esquerda para a direita.

### **3.1.3 - Passos para achar a área de uma região $R_x$ .**

**Passo 1.** Você faz o gráfico da região para determinar qual curva limita acima e qual limita abaixo.

**Passo 2.** Você determina os limites de integração. Os limites  $a$  e  $b$  serão as abscissas  $x$  dos dois pontos de interseção das curvas  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$ . Para tanto se iguala  $f(x)$  e  $g(x)$ , ou seja, faz  $f(x) = g(x)$  e resolve-se a equação resultante em relação a  $x$ .

**Passo 3.** Calcule a integral definida para encontrar a área entre as duas curvas.

**3.1.4 Regiões  $R_y$ : admitindo  $y$  como variável independente e  $x$  como variável dependente.**

Até o momento, estamos sempre considerando equação da forma  $Y = f(x)$ . Nesta seção iremos estudar com encontrar a área quando consideramos equação da forma  $x = f(y)$ , contínua para  $c \leq y \leq d$ , temos um gráfico típico de  $x = f(y)$ . Sabe-se que, se atribui um valor  $w$  a  $y$ , então  $f(w)$  é uma coordenada –  $x$  do ponto correspondente do gráfico. Conforme a figura 3.7 (i)

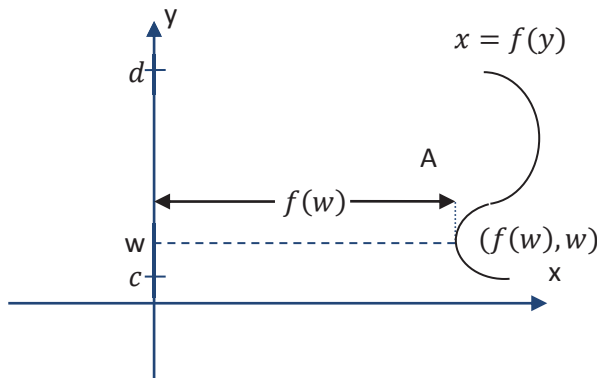


Figura 3.7

**Definição 3.1:**

Uma região  $R_y$  é uma região que está compreendida entre os gráficos de uma equação da forma  $x = f(y)$  e  $x = g(y)$ , com  $f$  e  $g$  contínuas e  $f(y) \geq g(y)$  para todo  $y$  em  $[c, d]$ , onde  $c$  e  $d$  são respectivamente, a menor e a maior coordenada- $y$  dos pontos da região.

Graficamente, temos o seguinte

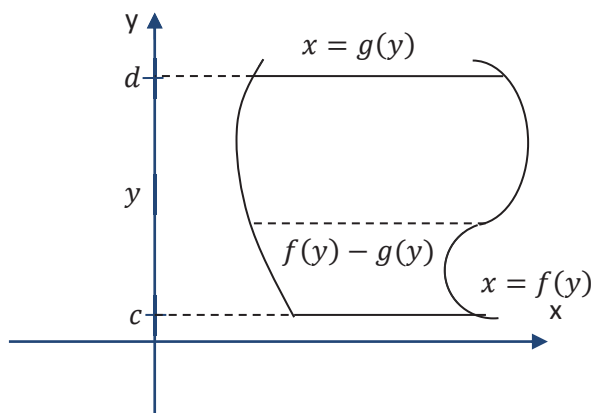


Figura 3.7(ii)

Utilizando limites de soma para achar a área  $A$  de uma região  $R_y$ . Isto conduza:

(i) O eixo de  $y$  com coordenadas  $-y$   $c = y_0, y_1, \dots, y_n = d$ ;

(ii) Partição do intervalo  $[c, d]$ ;

(iii) Subintervalos,  $\Delta x_k = y_k - y_{k-1}$ ;

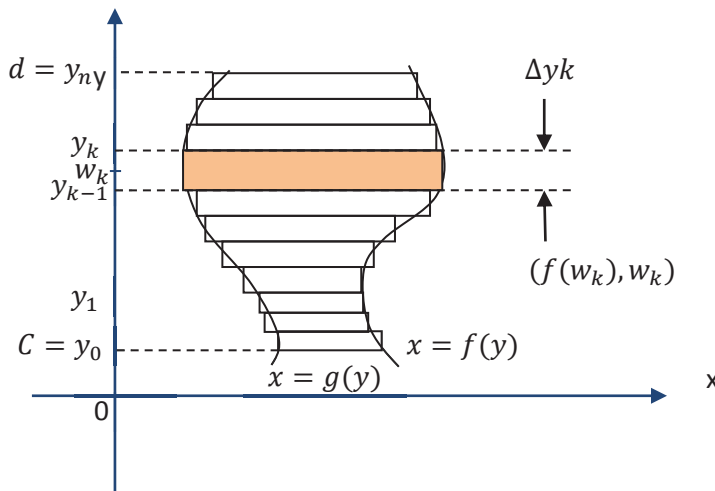
(iv) Para cada  $k$  em um número  $w_k$  em  $[y_{k-1}, y_k]$

(v) Retângulos horizontais de áreas  $[f(w_k) - g(w_k)]\Delta x_k$

Ou seja:

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum [f(w_k) - g(w_k)]\Delta y_k = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

A última igualdade decorre da definição de integral definida.



### 3.1.4.1 - Passos para achar a área de uma região $R_y$ .

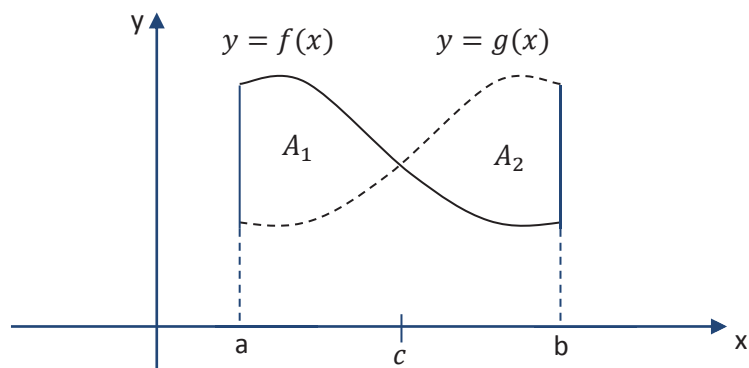
**Passo 1.** Você faz o gráfico da região para determinar qual curva limita acima e qual limita a baixo.

**Passo2.** Você determina os limites de integração. Os limites  $a$  e  $b$  serão as ordenadas  $y$  dos dois pontos de interseção das curvas  $x = f(y)$  e  $x = g(y)$ . Para tanto se iguala  $f(y)$  e  $g(y)$ , ou seja, faz  $f(y) = g(y)$  e resolve-se a equação resultante em relação à  $y$ .

**Passo3.** Calcule a integral definida para encontrar a área entre as duas curvas.

**OBSERVAÇÃO:**

Se os gráficos se cruzam mais de uma vez, podem ser necessárias várias integrações. Por exemplo:



$$A = A_1 + A_2 = \int_a^c [f(x) - g(x)] + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx$$

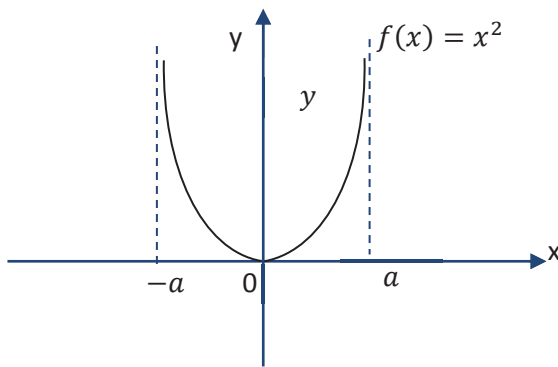
Se  $f(x)$  e  $g(x)$  são cortados pelo ponto  $P(c, d)$ , como  $a < c < b$ , conseqüentemente se desejamos achar a área delimitada  $x = a$  a  $x = b$ , então é necessário duas integrações nos intervalos  $[a, c]$  e a outra  $[c, b]$ .

**3.2 A Integral definida de funções simétricas.**

Quando uma função é par ou ímpar (**Ver ANEXO A - Definições A.3 e A.4**) o cálculo de sua área é feito dobrando a área calculada no primeiro quadrante, isto é, quando se possui uma curva gerada por funções pares e ímpares, existe uma simetria da função que permite que a área  $A = \left| \int_{-a}^a f(x) dx \right|$  seja dada por  $A = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

Se tivermos uma curva gerada por funções pares ou ímpares, existirão simetrias do tipo





$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

### 3.3 Aplicação.

1) Esboce a região delimitada pelos gráficos das equações e calcule sua área.

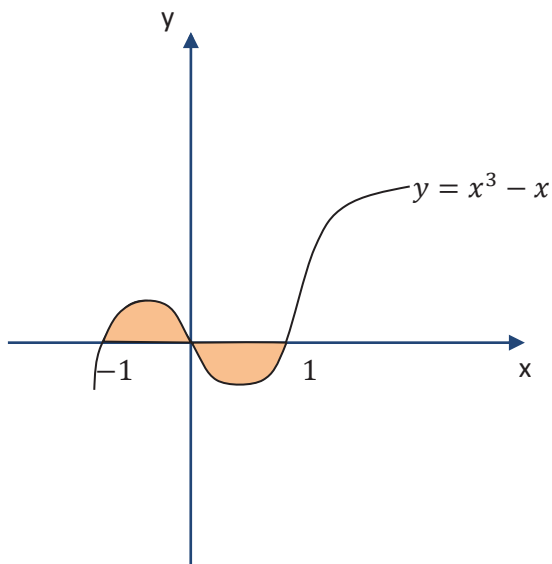
a)  $y = x^3 - x$ ;  $y = 0$

- Vamos procurar os pontos da interseção

Fazendo,  $y = 0$  como  $y = x^3 - x$  temos,  $x(x^2 - 1) = 0$ , de onde segue que

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \text{ ou seja, } x = \pm 1 \text{ ou } x = 0,$$

Logo, os pontos de interseção são  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(0,-1)$ . Graficamente temos:



$y$	$y = x^3 - x$	$x$
-1	$y = (-1)^3 - (-1)$	0
$-1/2$	$y = \left(-\frac{1^3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)$	0,4
0	$y = 0^3 - 0$	0
$1/2$	$y = \left(\frac{1^3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)$	-0,4
1	$y = 1^3 - 1$	0

Então, pelas propriedades e definições estudadas no capítulo II, temos

$$A = \int_{-1}^1 [0 - (x^3 - x)] dx \Rightarrow$$

$$A = \int_{-1}^1 [-x^3 + x] dx = 2 \int_0^1 [-x^3 + x] dx =$$

$$= 2 \left( \frac{-x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 2 \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = 2 \left( \frac{-1+2}{4} \right) = \frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

b) Região limitada por  $y = x^2 - 1$  e  $x = -|y - 1|$ .

Vamos procurar os pontos de interseção

Observe que, pela definição de módulo,

$$|y - 1| = \begin{cases} -(y - 1) \text{ se } y - 1 < 0 \\ y - 1 \text{ se } y - 1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -(y - 1) \text{ se } y < 1 \\ y - 1 \text{ se } y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -|y - 1| = \begin{cases} x = y - 1 \text{ se } y < 1 \\ x = -(y - 1) \text{ se } y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 1 \text{ se } y < 1 \\ y = -x + 1 \text{ se } y \geq 1 \end{cases}$$

Assim, temos dois sistemas

$$\text{i) } \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x + 1, y < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = x + 1, y < 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0, y < 1 \Rightarrow \\ \begin{cases} x = 2 \xrightarrow{y=x+1} y = 2 + 1 \rightarrow y = 3 \\ x = -1 \xrightarrow{y=x+1} y = -1 + 1 \rightarrow y = 0 \end{cases}, y < 1 \Rightarrow \end{cases}$$

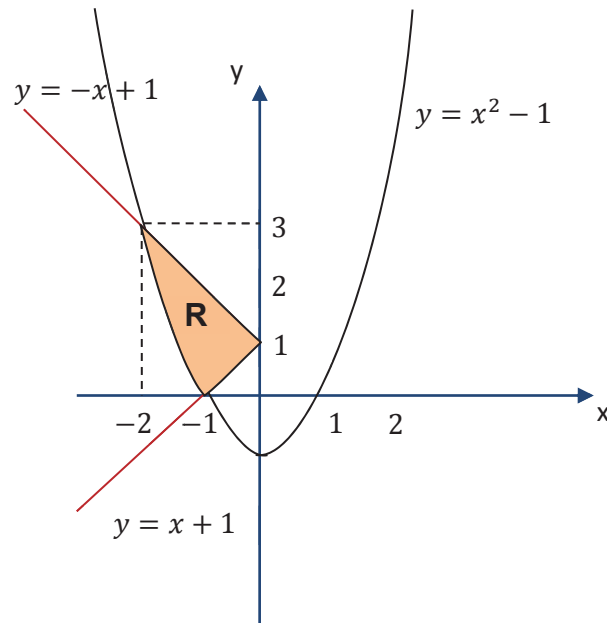
Daí, o ponto de interseção é: (-1,0)

$$\text{ii) } \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = -x + 1, y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = -x + 1, y \geq 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0, y \geq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \xrightarrow{y=-x+1} y = -(-2) + 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = 1 \xrightarrow{y=-x+1} y = -1 + 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}, y \geq 1 \Rightarrow \end{cases}$$

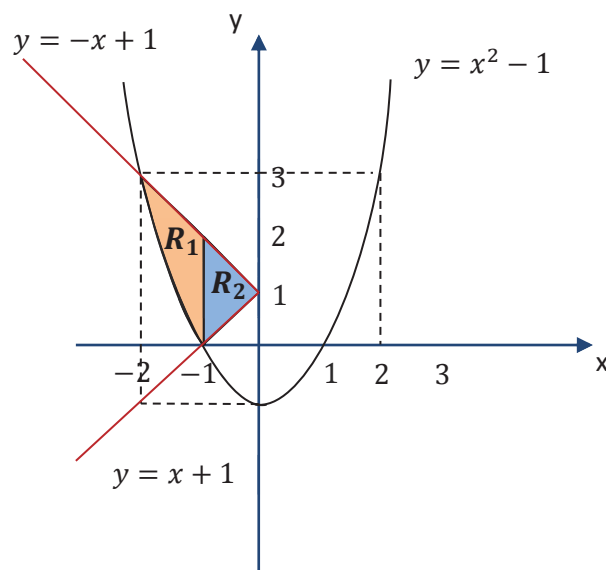
(Daí, o ponto de interseção é: (-2,3))

Graficamente, temos

x	$y = -x + 1$	$y = x + 1$	$y = x^2 - 1$	y		
-2	$y = 2 + 1$	$y = -2 + 1$	$y = 4 - 1$	3	-1	3
-1	$y = 1 + 1$	$y = 1 + 1$	$y = 1 - 1$	2	0	0
0	$y = 0 + 1$	$y = 0 + 1$	$y = 0 - 1$	1	1	-1
1	$y = -1 + 1$	$y = 1 + 1$	$y = 1 - 1$	0	2	0
2	$y = -2 + 1$	$y = 2 + 1$	$y = 4 - 1$	-1	3	3

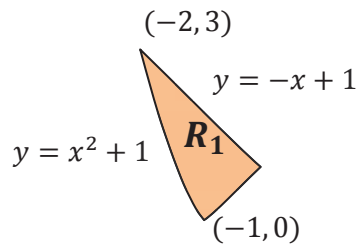


Para calcularmos a área, iremos separar a região  $R$ , em duas, conforme gráfico abaixo:



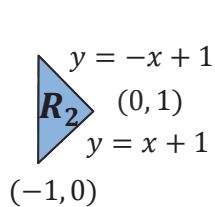
Assim, pelas definições e propriedades estudadas no capítulo 2, temos:

\* Área da região  $R_1$ :



$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_{-2}^{-1} [(-x + 1) - (x^2 - 1)] dx = \int_{-2}^{-1} (-x^2 - x + 2) dx = \\
 &= \left( -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^{-1} = \\
 &= \left( -\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) \right) - \left( -\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2(-2) \right) = \\
 &= \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2 \right) - \left( \frac{8}{3} - 2 - 4 \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2 - \frac{8}{3} + 6 = \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{7}{3} + 4 = \frac{-3 - 14 + 24}{6} = \frac{7}{6}
 \end{aligned}$$

\* Área da região  $R_2$ :



$$\begin{aligned}
 A_2 &= \int_{-1}^0 [(-x + 1) - (x + 1)] dx = \int_{-1}^0 -2x dx = \\
 &= (-x^2) \Big|_{-1}^0 = (-0^2) - (-1^2) = 1
 \end{aligned}$$

Logo, a

Área da região  $R$  é:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{7}{6} + 1 = \frac{7 + 6}{6} = \frac{13}{6}$$

c) Região limitada por  $y^2 - x - 1 = 0$  e  $2y - x + 2 = 0$

- Vamos procurar os pontos de interseção.

Temos que

$$y^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = y^2 - 1 \text{ e } 2y - x + 2 = 0 \rightarrow x = 2y + 2$$

De onde segue o seguinte sistema,

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} x = y^2 - 1 \\ x = 2y + 2 \end{array} \right\} &\rightarrow y^2 - 1 = 2y + 2 \rightarrow y^2 - 1 - 2y - 2 = 0 \rightarrow \\
 &y^2 - 2y - 3 = 0 \rightarrow y = -1 \text{ ou } y = 3
 \end{aligned}$$

$$x = y^2 - 1 \rightarrow x = 2 \cdot (-1) + 2 = 0$$

$$x = 2y + 2 \rightarrow x = 2 \cdot (-1) + 2 = 0$$

$$x = y^2 - 1 \rightarrow x = 9 - 1 = 8$$

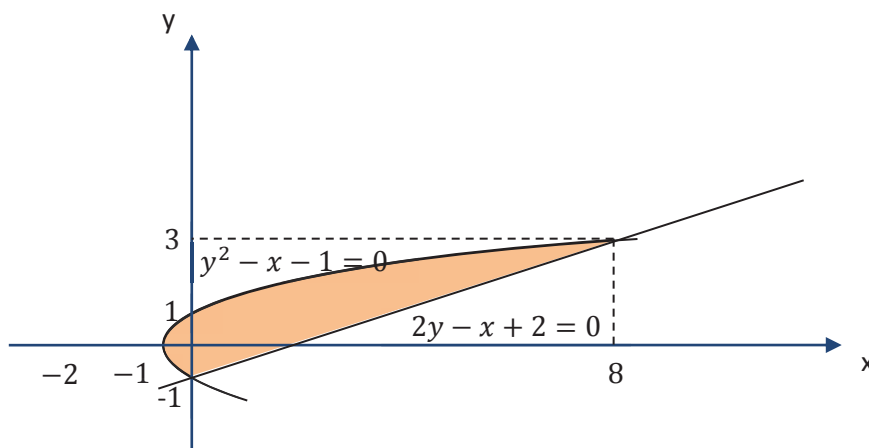
$$x = 2y + 2 \rightarrow x = 2 \cdot (3) + 2 = 8$$

Logo, os pontos de interseção são:  $(0, -1)$  e  $(8, 3)$   $(0, -1)$

Agora, esboçando o gráfico, temos

- Gráfico da Região

$y$	$x = y^2 - 1$	$x = 2y + 2$	$x$	
-1	$x = 1 - 1$	$x = 2 \cdot (-1) + 2$	0	0
0	$x = 0 - 1$	$x = 2 \cdot 0 + 2$	-1	2
1	$x = 1 - 1$	$x = 2 \cdot 1 + 2$	0	4
2	$x = 4 - 1$	$x = 2 \cdot 2 + 2$	3	6
3	$x = 9 - 1$	$x = 2 \cdot 3 + 2$	8	8



- Cálculo da Área

Novamente pelas definições e propriedade estudadas no capítulo 2, temos:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^3 [(2y + 2) - (y^2 - 1)] dy = \int_{-1}^3 (-y^2 + 2y + 3) dy = \\
 &= \left( -\frac{y^3}{3} - \frac{2y^2}{2} + 3y \right) \Big|_{-1}^3 = \left( -\frac{y^3}{3} - y^2 + 3y \right) \Big|_{-1}^3 = \\
 &= \left( -\frac{27}{3} + 9 + 9 \right) - \left( +\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) = \left( -\frac{27}{3} + 18 \right) - \left( \frac{1}{3} - 2 \right) = \\
 &= \left( \frac{-27 + 54}{3} \right) - \left( \frac{1 - 6}{3} \right) = \frac{27 + 5}{3} = \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

- Outra maneira de calcular esta área:

$$y^2 - x - 1 = 0 \rightarrow y^2 = x + 1 \rightarrow y = \sqrt{x + 1} \text{ ou } y = -\sqrt{x + 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = y^2 - 1 \\ x = 2y + 2 \end{array} \right\} \rightarrow y^2 - 1 = 2y + 2 \rightarrow y^2 - 1 - 2y - 2 = 0 \rightarrow$$

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \rightarrow$$

$$y = -1 \text{ ou } y = 3$$

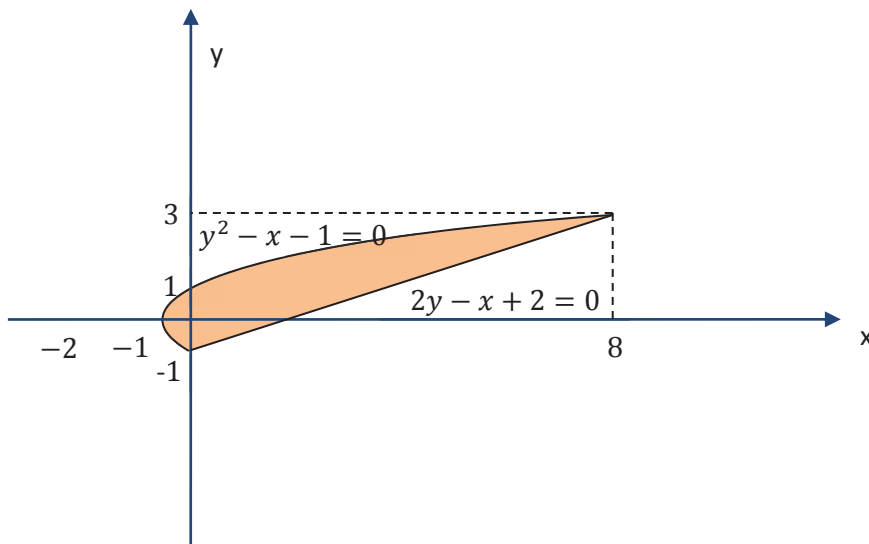
$$x = y^2 - 1 \rightarrow x = (-1)^2 - 1 = 0 \text{ ou } x = 9 - 1 = 8$$

$$x = 2y + 2 \rightarrow x = 2 \cdot (-1) + 2 = 0 \text{ ou } x = 6 + 2 = 8$$

Ponto de interseção:  $(0, -1)$  e  $(8, 3)$

- Para calcular a área, vamos partir a região:

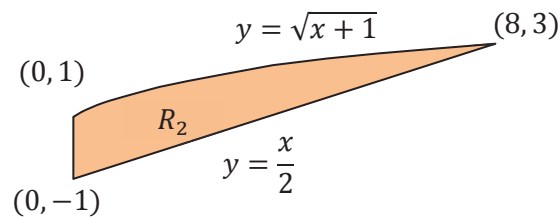
$x$	$y = \sqrt{x+1}$	$y = -\sqrt{x+1}$	$y = \frac{x-2}{2}$	$y$		
-1	$y = \sqrt{0}$	$y = \sqrt{0}$	$y = -\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$
0	$y = \sqrt{1}$	$y = -\sqrt{1}$	$y = \frac{0-2}{2}$	1	-1	$\frac{3}{2}$
3	$y = \sqrt{4}$	$y = -\sqrt{4}$	$y = \frac{3-2}{2}$	2	-2	$\frac{1}{2}$
8	$y = \sqrt{9}$	$y = -\sqrt{9}$	$y = \frac{8-2}{2}$	3	-3	2



Obs.:  $u = x + 1$

$$\begin{cases} du = dx \\ x = 0 \leftrightarrow u = 0 + 1 = 1 \\ x = -1 \leftrightarrow u = -1 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-1}^0 (\sqrt{x+1} - (-\sqrt{x+1})) dx = \\
&= \int_{-1}^0 2\sqrt{x+1} dx = 2 \int_{-1}^0 \sqrt{x+1} dx = \\
&= 2 \int_0^1 \sqrt{u} du = 2 \int_0^1 u^{1/2} du = \\
&= \left( 2 \frac{u^{3/2}}{3/2} \right) \Big|_0^1 = \left( \frac{4}{3} u^{3/2} \right) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{4}{3} \cdot 1^{3/2} - \frac{4}{3} \cdot 0^{3/2} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$



Observação:

$$\begin{aligned}
u = x + 1 &\rightarrow \begin{cases} du = dx \\ x = 8 \leftrightarrow u = 8 + 1 = 9 \\ x = 0 \leftrightarrow u = 0 + 1 = 1 \end{cases} \\
A_2 &= \int_0^8 \left( \sqrt{x+1} - \frac{x-2}{2} \right) dx = \\
&= \int_0^8 \sqrt{x+1} dx - \int_0^8 \frac{x-2}{2} dx = \\
&= \int_0^8 \sqrt{x+1} dx - \frac{1}{2} \int_0^8 (x-2) dx = \\
&= \int_1^9 \sqrt{u} du - \frac{1}{2} \int_0^8 (x-2) dx = \\
&= \int_1^9 u^{1/2} du - \frac{1}{2} \int_0^8 (x-2) dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^9 - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^8 = \\
&= \left( \frac{2}{3} u^{3/2} \right) \Big|_1^9 - \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^8 = \\
&= \left( \frac{2}{3} \cdot 9^{3/2} \right) - \left( \frac{2}{3} \cdot 1^{3/2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{8^2}{2} - 2 \cdot 8 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{0}{2} - 2 \cdot 0 \right) = \\
&= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{9^3} - \frac{2}{3} \sqrt{1} - \frac{1}{2} \left( \frac{64}{2} - 16 \right) = \\
&= \frac{54}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \left( \frac{32}{2} \right) = \frac{52}{3} - \frac{32}{4} = \frac{208 - 96}{12} = \frac{112}{12} = \frac{28}{3}
\end{aligned}$$

Logo, área da região:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{28}{3} = \frac{32}{3}$$



## CONCLUSÃO

Não temos dúvida que estudo da geometria através do cálculo de áreas de figuras planas proporciona ao aluno no ensino Médio uma compreensão de dimensões, medidas, unidades de áreas, o discente passa a ter oportunidade de construir, utilizar e avaliar módulos e simulações que corresponde á aplicações da vida. Como saber calcular a áreas de uma varanda, apartamento, quadras etc.

Para resolver situações como essas, os matemáticos desenvolveram técnicas, com a qual podemos calcular áreas de figuras planas regulares. Mas as áreas de regiões cujos contornos não são segmentos de retas não era calculado, pois o estudo dessas regiões partia de fórmulas predefinidas.

Com este estudo, foi possível compreender que a utilização de integral definida permite calcular áreas de regiões bidimensionais, cujas fronteiras consistem de uma ou mais curvas. Ou seja, áreas de figuras planas quaisquer, sem precisarmos de uma fórmula para cada tipo de região, o que fazemos no ensino básico de geometria.

## REFERÊNCIAS

HOFFANN, Laurence. **Cálculo: um curso moderno e suas aplicações**, volume 1. Tradução: Denise Paravato. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.,1990.

IEZZI, Gelson; MRAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamento de Matemática Elementar**, V.8, 6. ed. p.205-232. São Paulo: Atual, 2005.

MUNEM Mustafa; FOULIS, David J. **Cálculo**. Tradução: André Lima Cordeiro... [et al]. [Reimp]. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria analítica v.1/** George F. Simmons; tradução SeijiHariki; revisão técnica Rodney Carlos Bassanezi, Sílvio de Alencastro pregnolato. São Paulo: Pearson books, 1987.

SWOKOWSKI, Earl William, 1926 – **Cálculo com Geometria Analítica/** Earl W. Swokowski: tradução Alfredo Alves de Faria, com a colaboração dos professores Vera Regina L. F. Flores e Marcio Quintão Moreno; revisão técnica Antônio Pertence júnior – 2ª edição – são Paulo: Makron Books, 1994.

THOMAS, Geogr B.. **Cálculo: Matemática**. Vol. 1, 11ª edição – São Paulo: Addison Wesley, 2009.

Historia da integral. Disponível em:  
[http://www.tudook.com/guiadoensino/calculos\\_diferencial.html](http://www.tudook.com/guiadoensino/calculos_diferencial.html) Acesso em 18/08/2010

Integrais Definidas: Disponível em:  
<http://www.somatematica.com.br/superior/integrais/integrais2.php>. Acesso em 18/08/2010

Ap.XXII. Teorema Fundamental do Cálculo. Cálculo de Área.Disponível em:[http://www.uff.br/webmat/Calc1\\_LivroOnLine/Cap22\\_Calc1.html](http://www.uff.br/webmat/Calc1_LivroOnLine/Cap22_Calc1.html).Acesso em 27/09/2010

# **ANEXOS**

## ANEXO A- FUNÇÕES

**Definição A.1:** Sendo  $x \in \mathbb{R}$ , define-se módulo ou valor absoluto de  $x$ , que se indica por  $|x|$ , por meio da relação.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Isso significa que:

1º) o modulo de um número real não negativo é igual ao próprio numero;

2º) o modulo de um numero real negativo é igual ao oposto desse número.

Assim, por exemplo, temos:  $|+2| = +2$ ,  $|-7| = +7$ ,  $|0| = 0$

### **Propriedades Modular A.1.1:**

Decorrem da definição as seguintes propriedades:

- I.  $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- II.  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- III.  $|x| \cdot |y| = |xy|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- IV.  $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$
- V.  $x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
- VI.  $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- VII.  $|x - y| \geq |x| - |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- VIII.  $|x| \leq a \text{ e } a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
- IX.  $|x| \geq a \text{ e } a > 0 \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$

**Definição A.2:** Chamamos norma da partição  $P$  o numero  $\mu$ , Maximo do conjunto  $\{\Delta_1x, \Delta_2x, \dots, \Delta_ix, \dots, \Delta_nx\}$  em que  $\Delta_ix = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$ .

**Definição A.3:** Qualquer que seja  $x \in D$  ocorre  $f(x) = f(-x)$ ; neste caso, dizemos que a função  $f$  é par.

**Definição A.4:** Para todo  $x \in D$  ocorre que  $f(x) = -f(-x)$ ; neste caso, dizemos que a função  $f$  é impar.

## ANEXO B- DEFINIÇÃO DE LIMITE E PROPRIEDADES

**Definição B.1:** Seja  $I$  um intervalo aberto ao qual pertence o número real  $a$ . Seja  $f$  uma função definida para  $x \in I - \{a\}$ . Dizemos que o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a  $a$ , é  $L$  e escrevemos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ,

se para todos  $\epsilon > 0$ , existir  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |x - a| < \delta$  então  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

Em símbolo, temos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 | 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)$$

### Propriedades do limite de uma função B.1.1:

#### 1ª propriedade

“se  $c \in \mathbb{R}$  e  $f$  é a função definida por  $f(x) = c$ , para todo  $x$  real, então  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ .”

#### 2ª propriedade

Se  $c \in \mathbb{R}$  e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \cdot L.$$

#### 3ª propriedade

Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M, \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = L + M.$$

#### 4ª propriedade

Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x) = L - M.$$

#### 5ª propriedade

Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M, \quad \text{então } \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = LM.$$

6ª propriedade

Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} (f)^n(x) = L^n, n \in \mathbb{N}^*.$$

7ª propriedade

Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \neq 0, \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}.$$

8ª propriedade

Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad \text{então } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} \text{ com } L \geq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}^* \text{ ou } L < 0 \text{ e } n \text{ é ímpar.}$$

## ANEXO C- FUNÇÃO CONTÍNUA

**Definição C.1:** Seja  $f$  uma função definida em um intervalo aberto e  $a$  um elemento de  $I$ . Dizemos que  $f$  é contínua em  $a$ , se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Notamos que para falarmos em continuidade de uma função em um ponto é necessário que este ponto pertença ao domínio da função.

Da definição decorre que, se  $f$  é contínua em  $a$ , então as três condições deverão estar satisfeitas:

1º) existe  $f(a)$

2º) existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

3º)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**Observação:** Seja  $f$  uma função definida em um intervalo aberto  $I$  e  $a$  um elemento de  $I$ . Dizemos que  $f$  é descontínua em  $a$  se  $f$  não for contínua em  $a$ . Então as duas condições abaixo deverão estar satisfeitas:

1º) existe  $f(a)$

2º) não existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ou 3º)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

**Teorema C.1:** Seja  $f$  uma  $f_c$  definida em um intervalo fechado  $[a, b]$ . A  $f_c$   $f$  é contínua em  $[a, b]$  se é contínua em  $(a, b)$ , além disso,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

### Propriedades das funções contínuas C.1.1:

#### P.1 Teorema:

Se  $f$  e  $g$  são funções contínuas em  $a$ , então são contínuas em  $a$  as funções  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$  e  $f/g$ , neste último caso, desde que  $g(a) \neq 0$ .

#### P.2 Teorema do limite da função composta

Se  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$  e se  $f$  é uma função contínua em  $b$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = f(b)$ , isto é,  $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$ .

### *P.3 Teorema*

Se a função  $g$  é contínua em  $a$  e a função  $f$  é contínua em  $g(a)$ , então a função composta  $f \circ g$  é contínua em  $a$ .

*Observação:* A demonstração destes teoremas está além dos objetos deste trabalho para maior compreensão consulte o livro: fundamentos de matemática elementar, volume 8.

***Teorema do Valor Intermediário C.2:*** Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e se  $w$  é um número entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , então existe ao menos um número  $c$  em  $[a, b]$  temos que  $f(c) = w$ .



## ANEXO D- DERIVADAS

**Definição D.1:** A derivada de uma função  $f(x)$  em relação à variável  $x$  é a função  $f'$  cujo valor em  $x$  é:  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  desde que o limite exista. A qual também pode ser denotada por:  $y', \frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, \frac{d^n y}{dx^n}$ .

Na definição, usamos a notação  $f(x)$  em vez de simplesmente  $f$  para enfatizar a variável independente  $x$ , em relação à qual estamos derivando.

O domínio de  $f'$  é o conjunto de pontos no domínio de  $f$  para o qual o limite existe; ele pode ser igual ou menor que o domínio de  $f$ . Se  $f'$  existe para determinado valor de  $x$ , dizemos que  $f$  é derivável em  $x$ . Se  $f'$  existe em qualquer ponto no domínio de  $f$ , dizemos apenas que  $f$  é derivável.

Outra forma de definirmos a derivada é a seguinte

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

**Definição D.2:** Uma função  $F$  é uma antiderivada de uma função  $f$  se, para todo  $x$  no domínio de  $f$ , temos  $F'(x) = f(x)$ .

Se  $F(x)$  é uma antiderivada de  $f(x)$ , então também o é  $F(x) + C$ , onde  $C$  é uma constante arbitrária. Assim, o processo de antidiferenciação não define uma única função, e sim uma família de funções, que diferem entre si por uma constante.

**Teorema D.1:** Seja  $F$  uma antiderivada de  $f$  em um intervalo  $I$ . Se  $G$  é outra antiderivada de  $f$  em  $I$ , então  $G(x) = F(x) + c$  para alguma constante  $c$  e para todo  $x$  em  $I$ .

## ANEXO E- INTEGRAL INDEFINIDA

**Definição E. 1:** Se a função  $F(x)$  é primitiva da função  $f(x)$ , a expressão  $F(x) + C$  é chamada **integral indefinida** da função  $f(x)$  e é denotada por

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$\int$  - é chamada sinal de integração;

$f(x)$  - é a função integrando;

$dx$  - a diferencial que serve para identificar a variável de integração;

$C$  - é a constante de integração

**Observação:** Da definição de integral indefinida, temos

- (i)  $\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ .
- (ii)  $\int f(x)dx$  Representa uma família de funções, isto é, a família ou o conjunto de todas as primitivas da função integrando.
- (iii)  $\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{d}{dx}F(x) = F'(x) = f(x)$ .

**Propriedades da integral indefinida E.1.1:** Seja  $f(x)$  e  $g(x)$  funções reais definidas no mesmo domínio e  $k$  uma constante real. Então:

- a)  $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ .
- b)  $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ .

**Tabela das integrais indefinidas E.1.2:**

- (i)  $\int dx = x + C$ .
- (ii)  $\int a dx = ax + C, C \in \mathbb{R}$
- (iii)  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$ .
- (iv)  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ .
- (v)  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$ .
- (vi)  $\int e^x dx = e^x + C$ .
- (vii)  $\int \text{sen } x dx = -\cos x + C$ .

- (viii)  $\int \cos x \, dx = \text{sen } x + C.$
- (ix)  $\int \text{tg } x \, dx = \ln|\sec x| + C.$
- (x)  $\int \text{cotg } x \, dx = \ln|\text{sen } x| + C.$
- (xi)  $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \text{tg } x| + C.$
- (xii)  $\int \text{cosec } x \, dx = \ln|\text{cosec } x - \text{cotg } x| + C.$
- (xiii)  $\int \sec x \text{tg } x \, dx = \sec x + C.$
- (xiv)  $\int \text{cosec } x \text{cotg } x \, dx = -\text{cosec } x + C.$
- (xv)  $\int \sec^2 x \, dx = \text{tg } x + C.$
- (xvi)  $\int \text{cosec}^2 x \, dx = -\text{cotg } x + C.$
- (xvii)  $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \text{arc tg } \frac{x}{a} + C.$
- (xviii)  $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad x^2 > a^2.$
- (xix)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C.$
- (xx)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C.$
- (xxi)  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc sen } \frac{x}{a} + C, \quad x^2 < a^2.$
- (xxii)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \text{arc sen } \left| \frac{x}{a} \right| + C.$