UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS-CCHE
CAMPUS VI – POETA PINTO DO MONTEIRO
CURSO DE PÓS – GRADUAÇÃO LATU SENSU EM MATEMÁTICA

Maria Aparecida Freire Feitosa

# Um Estudo das Derivadas para o Cálculo de Máximos e Mínimos

Monteiro - PB
2010

Maria Aparecida Freire Feitosa

# Um Estudo das Derivadas para o Cálculo de Máximos e Mínimos

Monografia apresentada ao curso de Pós-Graduação *Latu Sensu* em Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Pós-Graduado, pela Universidade Estadual da Paraíba.

Orientadora: Profª. Ms. Joselma Soares dos Santos.

Monteiro – PB
2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA SETORIAL – CAMPUS VI

F311e FEITOSA, Maria Aparecida Freire.

Um estudo das derivadas para o cálculo de máximos e mínimos /. – 2010.

68f. il. Color.

Digitado.

Monografia (Especialização Latu sensu em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2010.

“Orientação: Profª Ma. Joselma Soares dos Santos, Universidade Estadual da Paraíba – Campus VI”.

1. Derivadas . 2.Máximos . 3. Mínimos. I. Título.

21.ed. CDD 515.33

Maria Aparecida Freire Feitosa

# Um Estudo das Derivadas para o Cálculo de Máximos e Mínimos

Monografia apresentada ao curso de Pós-Graduação *Latu Sensu* em Matemática, como requisito parcial para obtenção do titulo de Pós-Graduado em Matemática, pela Universidade Estadual da Paraíba

**Aprovado em 22 de Dezembro de 2010.**

Joselma Soares dos Santos

Prof. Ms. Joselma Soares dos Santos

Centro de Ciências Humanas e Exatas- CCHE/UEPB

Luciano dos Santos Ferreira

Prof. Ms.Luciano dos Santos Ferreira

Centro de Ciências Humanas e Exatas- CCHE/UEPB

# AGRADECIMENTOS

A Deus, que conhece o meu coração, as minhas lutas e superações;

A minha mãe, Marinez, grande mulher, esposa, profissional, guerreira e amiga, a quem devo tudo o que sou;

A meu pai, Geovane, homem batalhador, inteligente, humilde, iluminado, o qual Deus me deu a honra de ser sua filha;

Aos meus irmãos, Diógenes e Diego, jovens os quais admiro pela responsabilidade e força de vontade de vencer os obstáculos da vida.

A minha família, alicerce da minha vida, que sempre está ao meu lado, a Deus pela força, coragem e determinação que me faz seguir e enfrentar os obstáculos e barreiras, superando-os com firmeza e prosseguindo confiante, rumo aos objetivos.

# RESUMO

Neste trabalho estudamos o coeficiente angular da reta tangente. Para a partir desse estudo podermos chegar a definição de Derivada e conseqüentemente as suas regras. Em seguida estudamos os extremos das funções, o Teorema do Valor Médio, Teorema de Rolle, o Teste da primeira e da segunda derivada para extremo local, com o objetivo de detectarmos se uma função é crescente ou decrescente e se tem ponto de máximo ou mínimo. Ao longo do estudo mostraremos algumas demonstrações de forma detalhada para um melhor entendimento. Tendo feito todo esse estudo traremos algumas aplicações de máximos e mínimos para uma função a uma variável de grau n.

**PALAVRAS CHAVES: Derivada, Máximo, Mínimo.**

# ABSTRAC

We studied the slope of the tangent line. For this study we can get from the definition of Derivative and therefore their rules. Then we studied the extremes of functions, the Mean Value Theorem, Rolle's theorem, the Test of the first and second derivative to the near end, with the aim of detecting whether a function is increasing or decreasing and whether it has the point of maximum or minimum. Throughout the study show some demonstrations in detail for better understanding. Having done all this study will bring some applications of maxima and minima for a function of degree n.

**Keywords:** Derivative, maximum, minimum.

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

As contribuições dos matemáticos para o nascimento do Cálculo são inúmeras. Muitos deles tais como Cavalieri, Barrow, Fermat e Kepler utilizavam conceitos do Cálculo para resolver vários problemas. Porém naquele tempo não existia uma construção logicamente estruturada, ou seja, cada autor possuía sua proposição de como os conteúdos se estruturavam dificultando a percepção das inter-relações entre os mesmos.

As descobertas no decorrer da evolução histórica da Matemática constituíram o embrião do conceito de derivada e levou Laplace a considerar Fermat "o verdadeiro inventor do cálculo diferencial". Contudo, Fermat não dispunha de notação apropriada e o conceito de limite não estava ainda claramente definido. Só no século XIX Cauchy introduzia formalmente o conceito de limite e o conceito de derivada, a partir do século VXII, com Leibniz e Newton, o Cálculo Diferencial torna-se um instrumento cada vez mais indispensável pela sua aplicabilidade aos mais diversos campos da ciência.

O nosso trabalho foi dividido em três capítulos, no primeiro faremos um estudo do coeficiente angular da reta tangente com o intuito de chegar à definição de derivada e suas regras. No segundo capítulo abordaremos um estudo sobre os Extremos das Funções, Teoremas, Funções Crescentes e Decrescentes, o Teste da Primeira e Segunda Derivada para Extremos Locais. Mas, o objetivo deste trabalho está no terceiro capítulo em que serão resolvidos problemas de otimização de áreas, dimensões, dentre outros, onde iremos utilizar os conceitos vistos nos capítulos anteriores, em especial o Teste da Derivada Primeira e o Teste da Derivada Segunda para calcular máximos e mínimos de funções a uma variável real.

# CAPÍTULO 1 - DERIVADAS

Neste capítulo, iremos abordar a definição de derivadas e suas regras, provando alguns dos seus principais resultados. Jean Le Rond d' Alembert (1717-1783) afirmou que a "definição mais precisa e elegante possível do cálculo diferencial" é que a derivada é o limite de certas razões quando os numeradores se aproximam mais e mais de zero, e que este limite produz certas expressões algébricas que chamamos de derivada. No final do século XVIII, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) tentou reformular o cálculo e torná-lo mais rigoroso. Lagrange pretendia dar uma forma puramente algébrica para a derivada, sem recorrer à intuição geométrica, gráficos ou diagramas e sem qualquer ajuda dos limites de d'Alembert. Finalmente, no início do século XIX, a definição moderna de derivada foi dada por Augustin Louis Cauchy (1789-1857) em suas aulas para seus alunos de engenharia. Cauchy afirmou que

$$"a\ derivada\ é\ o\ limite\ de\ \frac{[f(x+i)-f(x)]}{i}\ quando\ "i"\ "se\ aproxima\ de\ "0"\ ",$$

ou seja, a derivada é $\lim_{i\to 0}\frac{[f(x+i)-f(x)]}{i}$. A forma da função que serve como limite da razão $\frac{[f(x+i)-f(x)]}{i}$ dependerá da forma da função proposta $y = f(x)$. Para indicar sua dependência, dá-se à nova função o nome de função derivada.

## 1.1 Coeficiente Angular da Reta Tangente

Nesta seção estudaremos o coeficiente angular da reta tangente, e com isto construir o conceito de derivada.

As retas tangentes a gráficos tem muitas aplicações no cálculo. Na geometria a reta tangente $l$ em um ponto $P$ de um círculo pode ser interpretada como a reta que intercepta (toca) o círculo em apenas um ponto, conforme ilustrado na Figura 1.1. Não podemos estender esta interpretação do gráfico de uma função $f$ qualquer, pois a reta pode "tocar" (tangenciar) o gráfico $f$ em um determinado ponto $P$ e interceptá-lo novamente em outro ponto. (Figura 1.2)

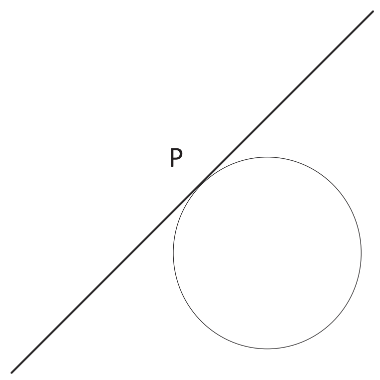



Figura 1.1

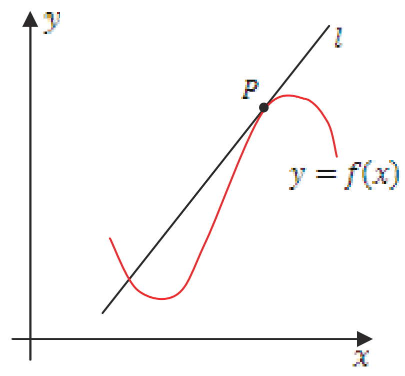
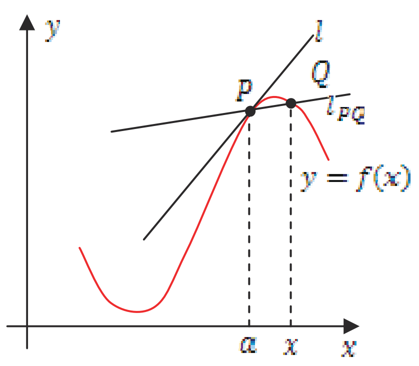



Figura 1.2

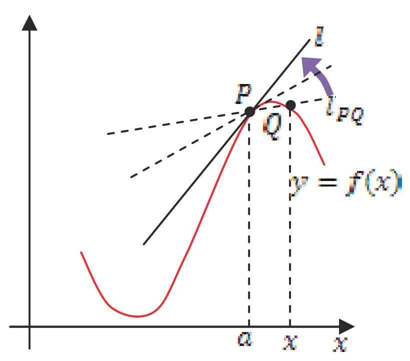
Nosso intuito é definir o coeficiente angular da reta tangente em $P$, pois, conhecido o coeficiente angular, podemos estabelecer uma equação para $l$ usando a forma ponto-coeficiente-angular. (**Ver ANEXO A – Definição A.1**).

Para definir o coeficiente angular da reta tangente $l$ no ponto $P(a, f(a))$ do gráfico de $f$, escolhemos primeiro outro ponto $Q(x, f(x))$ (Figura 1.3) e consideramos a reta por $P$ e $Q$. Esta reta é chamada secante do gráfico. Vejamos

**(i)**




**(ii)**



(iii)

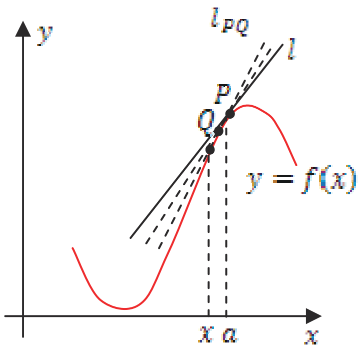



Figura 1.3

Utilizamos a seguinte notação:

$l$: A reta secante que passa por $P$ e $Q$

$M_{pq}$: O coeficiente angular de $l_{pa}$

$M_a$: O coeficiente angular da tangente $l$ em $P(a, f(a))$

Se $Q$ está próximo de $P$, parece que $M_{pq}$ é uma aproximação de $M_a$. Além disso, é de se esperar que esta aproximação melhore quando $Q$ se aproxima de $P$. Com isto em mente, fazemos $Q$ tender para $P$ – isto é (intuitivamente) fazemos $Q$ ficar cada vez mais próximo de $P$ – mas $Q \neq P$. Se $Q$ tende para $P$ pela direita, temos a Figura 1.3 (ii), onde as linhas tracejadas indicam possíveis posições de $l_{pq}$.

Na Figura 1.3(iii), $Q$ tende para $P$ pela esquerda. Poderíamos fazer $Q$ tender para $P$ de outras maneiras, por exemplo, tomando alternadamente pontos à esquerda e à direita de $P$. Se $M_{pq}$ tem um valor limite – isto é, se $M_{pq}$ se aproxima de algum número quando $Q$ se aproxima de $P$ – então esse número é o coeficiente angular $M_a$ da reta tangente $l$.

Reformulemos esta discussão em termos da função de $f$. Referindo-nos à Figura 1.3 e utilizando as coordenadas de $P(a, f(a))$ e $Q(x, f(x))$, vemos que o coeficiente angular da reta secante $l_{pq}$ é:

$$Mpq = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Se $f$ é contínua em $a$, podemos fazer $Q(x, f(x))$ tender para $P(a, f(a))$ fazendo se $x$ tender para $a$. Isto motiva a seguinte definição do coeficiente angular $M_a$ de $l$ em $P(a, f(a))$:

$$M_a = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que o limite exista.

É conveniente usar uma forma alternativa de $M_a$ obtida passando-se da variável $x$ para uma variável $h \in \mathbb{R}$, como segue. Para isto, basta fazer $h = x - a$ ou, equivalentemente, $x = a + h$. Apelando para a Figura 1.4 e considerando as coordenadas $P(a, f(a))$ e $Q(a + h, f(a + h))$, vemos que o coeficiente angular $M_{pq}$ da secante é

$$M_{pq} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

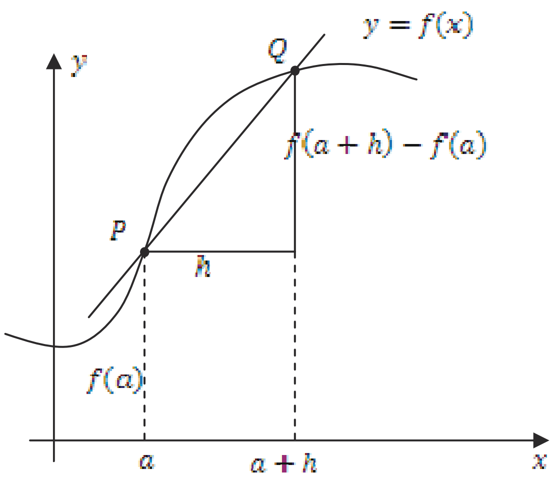



Figura 1.4

Mas, como $h = x - a$, temos que $x \to a$ equivale a $h \to 0$, assim, nossa definição de coeficiente angular $M_a$ da tangente $l$ por ser formulada como segue:

**Definição 1.1 -** O coeficiente angular $M_a$ da tangente ao gráfico de uma função em $P(a, f(a))$ é:

$$M_a = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

desde que o limite exista.

**Observação 1.1 -** Se o limite na **Definição 1.1** não existe então o coeficiente angular da tangente em $P(a, f(a))$ não é definido.

- **Exemplo 1.1:** Seja $f(x) = \sqrt{x}$, e seja $a$ um número arbitrário.

  (a) Determine o coeficiente angular da tangente ao gráfico de $f$ em $P(a^2, a)$.

  (b) Determine a equação da tangente em R(4, 2).

  Solução

  (a) Inicialmente, iremos exibir o gráfico de $y = \sqrt{x}$ e um ponto típico $P(a^2, a)$.

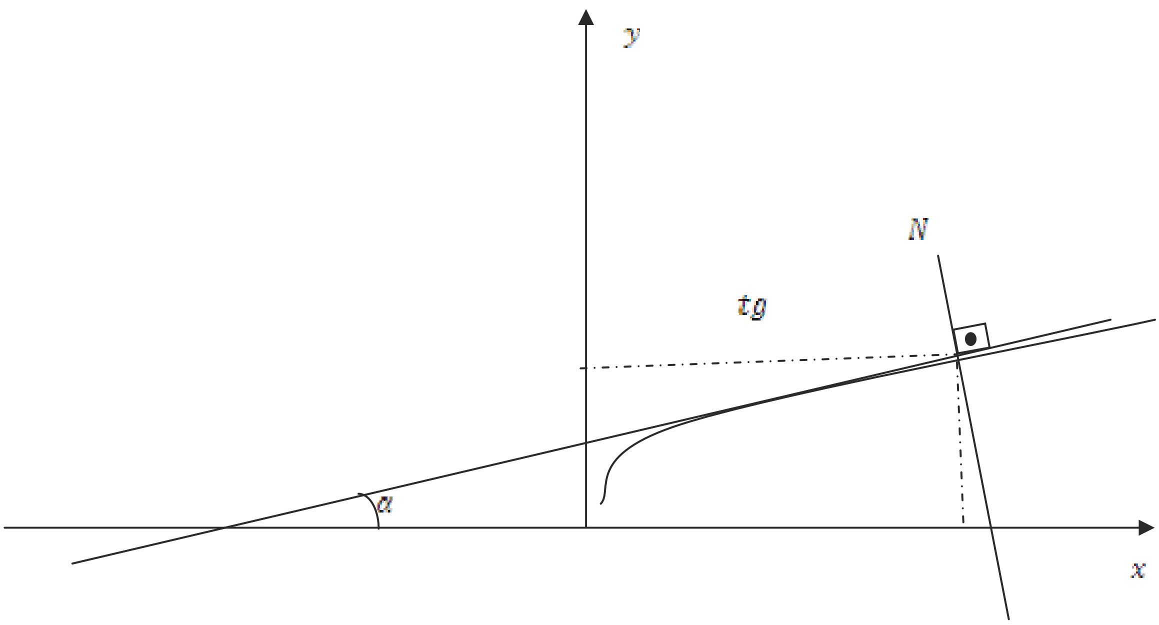



Figura 1.5

Aplicando a **Definição 1.1**, vemos que o coeficiente angular em $P$ é:

$$M_a = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h\,(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a+h-a}{h\,(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

(b) Pelo item (a), o coeficiente angular da tangente no ponto $R(4,2)$ é $M_4 = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$. Logo a equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $P$ (**Ver ANEXO A – Definição A.2**) é dada por

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4),$$

assim temos,

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4),$$

de onde segue que,

$$y = \frac{x}{4} + 1.$$

O limite dado na **Definição 1.1**, é o que chamamos de derivada da função $f$ no ponto $x$, como veremos na próxima seção.

## 1.2 A Derivada

Nesta seção iremos estudar a definição de derivada e suas propriedades, além de demonstrar alguns dos seus resultados.

### 1.2.1 - Definição de Derivada

A derivada de uma função $f$ em relação à variável $x$ é a função $f'$ cujo valor em $x$ é: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ desde que o limite exista. A qual também pode ser denotada por: $y', \frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$.

Na definição, usamos a notação $f(x)$ em vez de simplesmente $f$ para enfatizar a variável independente $x$, em relação à qual estamos derivando.

O domínio de $f'$ é o conjunto de pontos no domínio de $f$ para o qual o limite existe; ele pode ser igual ou menor que o domínio de $f$. Se $f'$ existe para determinado valor de $x$, dizemos que $f$ é derivável em $x$. Se $f'$ existe em qualquer ponto no domínio de $f$, dizemos apenas que $f$ é derivável.

Outra forma de definirmos a derivada é a seguinte

$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$.

#### 1.2.1.1 - Calculando a derivada a partir de sua definição

O processo para calcular uma derivada é chamado derivação. Iremos aplicar este processo na solução dos seguintes exemplos:

- **Exemplo 1.2:** Derive a função real $f(x) = \frac{1}{x+2}$ .

**Solução:**

Aqui, temos: $f(x) = \frac{1}{x+2}$ e $f(x+h) = \frac{1}{(x+h+2)}$, com $h \in \mathbb{R}$.

Aplicando a definição de derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h+2} - \frac{1}{x+2}}{h}$$

o que implica

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{x+2-(x+h+2)}{(x+h+2).(x+2)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{x+2-x-h-2}{(x+h+2).(x+2)}$$

ou seja,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h+2).(x+2)} = \frac{-1}{x^2+4x+4}$$

Logo,

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}.$$

### 1.2.2 - Regras de Derivação

Conhecendo a definição da derivada, apresentaremos agora, regras que permitem derivar uma grande variedade de funções. Ao provar tais regras aqui, iremos derivar funções sem ter de aplicar a definição todas às vezes.

#### 1.2.2.1 - Derivada de uma função constante

**Proposição 1.1 -** Se $c$ é um número constante e $f$ é a função constante definida por $f(x) = c$, então $f$ é diferenciável para todo número $x$, e $f'$ é a função definida por $f'(x) = 0$.

**Demonstração:** Aplicando a definição de derivada à função $f(x) = c$, a função cujos valores são sempre a constante $c$, temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Mas $f(x+h) = c$ e $f(x) = c$. Logo, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$, c.q.d.

- **Exemplo 1.3:** Determine a derivada da função real $f(x) = \sqrt{6}$.

**Solução:** Aplicado a **Proposição 1.1,** temos $f'(x) = 0$.

#### 1.2.2.2 - Multiplicação por constante

**Proposição 1.2** - Se $u$ é uma função derivável em $x$ e $k$ é uma constante, então $ku$ é derivável em $x$ e $(ku)' = ku'$

Em particular, se $n$ é um inteiro positivo, então $(cx^n)' = cnx^{n-1}$.

**Demonstração:** Aplicando a definição de derivada à função$f(x) = ku(x)$, onde $c$ uma constante, com $f(x+h) = k.u(x+h)$, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

de onde segue que,

$$(ku)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k.u(x+h) - k.u(x)}{h}$$

Assim,

$$(ku)'(x) = \lim_{h\to 0} k.\left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right).$$

Portanto, segue das propriedades de limite (**Ver ANEXO B – Propriedades B.2**), que

$$(ku)'(x) = k.\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right) = k.u'(x), \text{ c.q.d.}$$

**Observação:** Derivada da função identidade: $f(x) = x$ é 1, ou seja, $f'(x) = (x)' = 1$.

**Exemplo 1.4:** Calcule a derivada da função real $f(x) = 8x^{11}$

**Solução:**

Aplicando a regra da multiplicação por constante, temos:

$$f'(x) = 11(8x^{11-1}) = 11(8x^{10}).$$

Portanto,

$$f'(x) = 88x^{10}.$$

### 1.2.2.3 - Derivada da Soma

**Proposição 1.3 -** Se $u$ e $v$ são funções deriváveis em $x$, então a soma das duas, $u + v$, é derivável em qualquer ponto onde ambas sejam deriváveis. Isto é, $u + v$ é derivável com $(u+v)' = u' + v'$.

**Demonstração:**

Considere $f(x) = u(x) + v(x)$ daí, temos $f(x+h) = u(x+h) + v(x+h)$, então aplicando a definição de derivada, temos

$$f^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

ou seja,

$$(u(x) + v(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - [u(x) + v(x)]}{h}$$

então,

$$(u(x) + v(x))^{'} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x) + v(x+h) - v(x)}{h}.$$

Usando as propriedades de limite (Ver Apêndice - 2), temos

$$(u(x) + v(x))^{'} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}.$$

Portanto,

$$(u(x) + v(x))^{'} = u^{'}(x) + v^{'}(x) \quad c.q.d.$$

- **Exemplo 1.5:** Determine a derivada da função real $f(x) = 5x + 2$.

**Solução:** Como $f(x) = 5x + 2$. Aplicando a regra da soma temos:

$$f^{'}(x) = (5x)^{'} + (2)^{'}$$

Aplicando as **Proposições 1.1** e **1.3** segue que

$$f^{'}(x) = 5.$$

**1.2.2.4 - Derivada do Produto**

**Proposição 1.4** - Se $u$ e $v$ são deriváveis em $x$, então o produto $uv$ também é, e $(uv)' = u.v' + v.u'$.

**Demonstração:**

Temos que

$$(u.v)(x) = u(x).v(x) \text{ e}$$

$$(u.v)(x+h) = u(x+h).v(x+h).$$

Aplicando a definição de derivada,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Segue que,

$$(u.v)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h).v(x+h) - u(x).v(x)}{h}$$

Para transformar essa fração em uma equivalente que contenha razões incrementais para as derivadas de $u$ e $v$, subtraímos e adicionamos $u(x+h)v(x)$ ao numerador da igualdade acima:

$$(u.v)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h).v(x+h) - u(x+h).v(x) + u(x+h).v(x) - u(x).v(x)}{h}$$

Assim,

$$(u.v)'(x) = \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x+h)(v(x+h) - v(x))}{h} + v(x).\frac{(u(x+h) - u(x))}{h}\right]$$

Aplicando as propriedades de limites, temos:

$$(u.v)'(x) = \lim_{h\to 0} u(x+h).\lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \lim_{h\to 0} v(x).\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

Portanto,

$$(u.v)'(x) = u(x).v'(x) + v(x).u'(x), \text{ c.q.d.}$$

- **Exemplo 1.6:** Determine a derivada da função real $f(x) = 3x.(2x+1)$.

**Solução:** Como $f(x) = 3x.(2x+1)$. Aplicando a regra do produto, temos:

$f'(x) = 3x.(2x+1)' + (2x+1).(3x)' = 3x.(2+0) + (2x+1).3.$

Logo,

$f'(x) = 12x + 3.$

**1.2.2.5 - Derivada do quociente**

**Proposição 1.5:** Se $u$ e $v$ são deriváveis em $x$ e se $v(x) \neq 0$, então o quociente $\frac{u}{v}$ é derivável em $x$ e $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v.u' - u.v'}{v^2}$.

**Demonstração:**

Seja $f(x) = \left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, temos $f(x+h) = \frac{u(x+h)}{v(x+h)}$.

Aplicando a definição de derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ou seja,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(x+h).v(x) - u(x).v(x+h)}{v(x+h).v(x)}}{h}$$

o que implica,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h).v(x) - u(x).v(x+h)}{h.v(x+h).v(x)}.$$

Para transformar a última fração em uma equivalente que contenha a razão incremental para as derivadas de $u$ e $v$, subtraímos e adicionamos $v(x).u(x)$ ao numerador da igualdade acima. Temos então

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h).v(x) - v(x).u(x) + v(x).u(x) - u(x).v(x+h)}{h.v(x+h).v(x)}.$$

De onde segue que

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{v(x)(\,u(x+h) - u(x)\,)}{h.\,v(x+h).v(x)} - \frac{u(x).(\,v(x+h) - v(x))}{h.v(x+h).v(x)}.$$

Aplicando as propriedades de limites, temos:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{v(x)}{v(x+h).v(x)}\right).\left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right) - \lim_{h \to 0}\left(\frac{u(x)}{v(x+h).v(x)}\right).\left(\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right).$$

Portanto,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{v(x).u'(x) - u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$$

c.q.d.

- **Exemplo 1.7**: Determine a derivada da função real $y = \frac{2x+5}{3x-2}$.

**Solução:**

Aplicando a regra do quociente, temos

$$y' = \frac{(2x+5)'.(3x-2) - (2x+5).(3x-2)'}{(3x-2)^2} = \frac{2(3x-2) - (2x+5).3}{(3x-2)^2}.$$

Logo,

$$y' = \frac{-19}{(3x-2)^2}.$$

O estudo destas regras de derivação nos permite construir uma tabela, dada abaixo, que nos auxilia no cálculo das derivadas, assim, a partir de agora, iremos utilizá-la para encontrar as derivadas sem precisar da definição.

| Funções | Derivada |
|---|---|
| $f(x) = g(x) + h(x)$ | $f'(x) = g'(x) + h'(x)$ |
| $f(x) = c$ | $f'(x) = 0.$ |
| $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ | $f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + g'(x) \cdot h(x)$ |
| $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ | $f'(x) = \dfrac{g(x) \cdot h'(x) - g'(x) \cdot h(x)}{h(x)^2}$ |
| $f(x) = x$ | $f'(x) = 1$ |
| $f(x) = ax$ | $f'(x) = a$ |
| $f(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ | $f'(x) = x^n, n \neq -1$ |

| | |
|---|---|
| $f(x) = \ln\|x\|$ | $f'(x) = \frac{1}{x}$ |
| $f(x) = \frac{a^x}{\ln a}$ | $f'(x) = a^x$ |
| $f(x) = e^x$ | $f(x) = e^x$ |
| $f(x) = sen\, x$ | $f'(x) = \cos x$ |
| $f(x) = \cos x$ | $f'(x) = -sen\, x$ |
| $f(x) = tg\, x$ | $f'(x) = sec^2 x$ |
| $f(x) = cotg\, x$ | $f'(x) = -cossec^2 x$ |
| $f(x) = sec\, x$ | $f'(x) = sec\, x \cdot tgx$ |
| $f(x) = cossec\, x$ | $f'(x) = -cossec\, x \cdot cotg\, x$ |
| $f(x) = arctg\, x$ | $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ |
| $f(x) = arcsen\, x$ | $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $f(x) = \arccos x$ | $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $f(x) = \ln\left\|x + \sqrt{x^2+1}\right\|$ | $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\|$ | $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ |

### 1.2.2.6 - A Regra da Cadeia

Sabemos diferenciar $y = f(u) = senu$ e $u = g(x) = x^2 - 4$, mas como diferenciar uma função composta do tipo $F(x) = f(g(x)) = sen(x^2 - 4)$? As fórmulas de derivação que estudamos não nos dizem como calcular $F'(x)$. Então, como encontraremos a derivada de $F' = fog$? A resposta está na regra da cadeia, segundo a qual a derivada da composta de duas funções deriváveis é o produto de suas derivadas calculadas em pontos adequados. A regra da cadeia é uma das mais importantes e amplamente utilizadas regras de derivação.

**Teorema 1.1 - Regra da Cadeia**

Se $f(u)$ é derivável no ponto $u = g(x)$ e $g(x)$ é derivável em $x$, então a função composta $(fog)(x) = f(g(x))$ é derivável em $x$ e $(fog)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$.

**Demonstração:** Ver [SWOKOWSKI, 1994 e THOMAS, 2009].

**Observação:** Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, então

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$ onde $\frac{dy}{du}$ é calculada em $u = g(x)$.

- **Exemplo 1.8:** Dados $y = f(u)$ $e$ $u = g(x)$, determine $\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$. Sabendo que $y = tg\ u \quad e \quad u = 10x - 5$

**Solução:**

Substituindo, temos, $y = tg(10x - 5)$.

Aplicando a Regra da Cadeia, temos, $y' = 10sec^2(10x - 5)$.

# CAPÍTULO 2 – EXTREMOS DAS FUNÇÕES

Neste capítulo, faremos um estudo sobre extremos das funções, observando o crescimento e o decrescimento de gráficos em determinados intervalos. Em seguida traremos a definição de função crescente, decrescente, constante, máximo absoluto e mínimo absoluto, máximo local e mínimo local. Demonstraremos o Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio. Logo após abordaremos às funções monotônicas e o teste da primeira e segunda derivada para extremos locais.

## 2.1 Extremos das Funções

Suponhamos que o gráfico da Figura 2.1 tenha sido obtido por um instrumento registrado que mede a variação de uma quantidade física. O eixo $x$ representa o tempo e o eixo $y$ representa mensurações tais como temperatura, resistência em um circuito elétrico, pressão sanguínea de um indivíduo, quantidade de um produto químico em uma solução, ou contagem de bactérias em uma cultura.

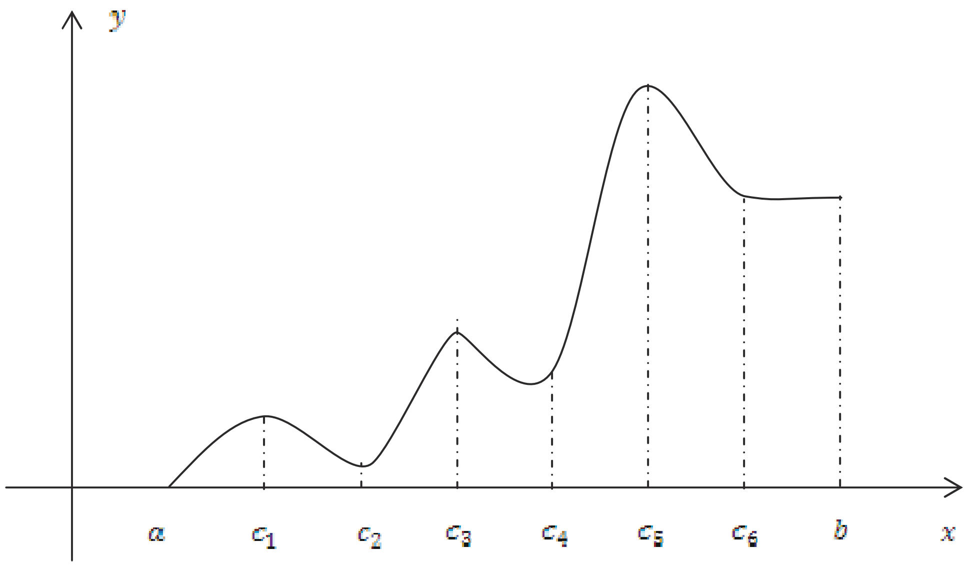



Figura 2.1

O gráfico indica que a quantidade aumentou no intervalo de tempo $[a, c_1]$, decresceu em $[c_1, c_2]$, aumentou em $[c_2, c_3]$, decresceu em $[c_3, c_4]$ e assim por diante. Restringindo-nos ao intervalo $[c_1, c_4]$, vemos que quantidade toma seu maior valor (ou máximo) em $c_3$ e seu menor valor (ou mínimo) em $c_2$. Em outros intervalos verificam-se diferentes valores máximos e mínimos. Em todo o intervalo $[a, b]$, o máximo ocorre em $c_5$ e o mínimo em a.

A terminologia para descrição de quantidades físicas é a usada também para funções.

**Definição 2.1:**

Seja uma função $f$ definida em um intervalo $I$, e sejam $x_1$ e $x_2$ números em $I$.

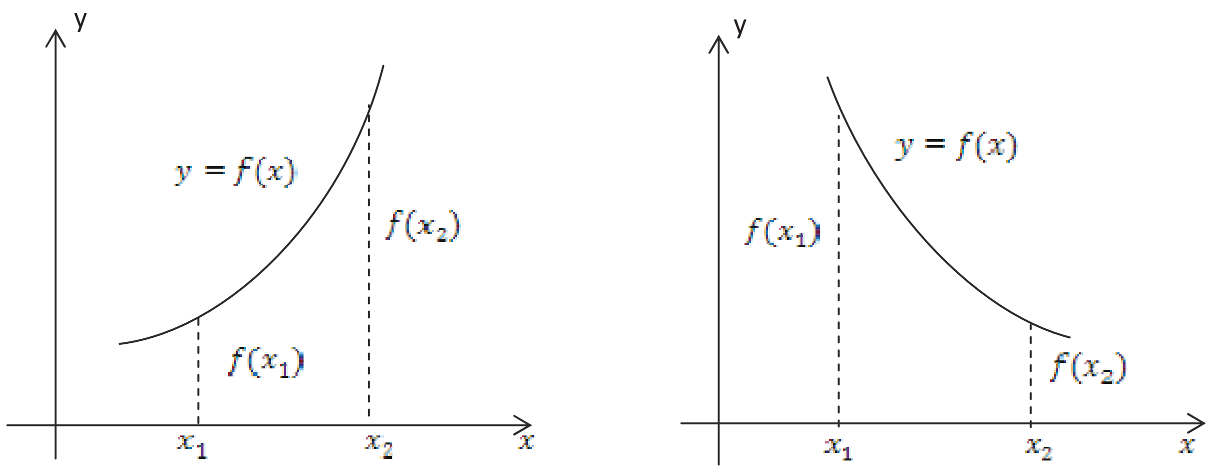
(i) $f$ é crescente em $I$ se $f(x_1) < f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$.

(ii) $f$ é decrescente em $I$ se $f(x_1) > f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$.

(iii) $f$ é constante em $I$ se $f(x_1) = f(x_2)$ quando $x_1 = x_2$.

A Figura 2.2 apresenta ilustrações da definição.

(i) Função Crescente (ii) Função Decrescente



(iii) Função Constante

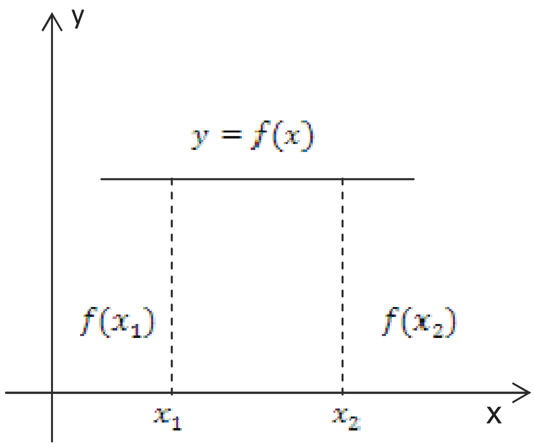



Figura 2.2

Utilizaremos indiferentemente as expressões $f$ é crescente ou $f(x)$ é crescente. O mesmo ocorre para a função decrescente. Se uma função é crescente, então seu gráfico se eleva quando $x$ cresce. Se uma função é decrescente, seu gráfico cai quando $x$ cresce. Se a Figura 2.1 é o gráfico de uma função $f$, então $f$ é crescente em $[a, c_1]$, $[c_2, c_3]$ e $[c_4, c_5]$. É decrescente em $[c_1, c_2]$, $[c_3, c_4]$ e $[c_5, c_6]$. A função é constante no intervalo $[c_6, b]$.

### 2.1.1 Máximo Absoluto, Mínimo Absoluto.

**Definição 2.2**

Seja $f$ uma função de domínio $D$. Então

i) $f$ tem um valor máximo absoluto em $D$ em um ponto $c$, se $f(x) \leq f(c)$ para qualquer $x$ em $D$;

ii) $f$ tem um valor mínimo absoluto em $D$ no ponto $c$, se $f(x) \geq f(c)$ para qualquer $x$ em $D$.

- **Exemplo 2.1:** Utilizando novamente a Figura 2.1, podemos observar que

i) $f$ assume máximo no ponto $x = c_4$, pois $f(x) \leq f(c_4), \forall\, x \in [a,b]$ e

ii) $f$ assume mínimo no ponto $x = a$, pois $f(x) \geq f(a), \forall\, x \in [a,b]$.

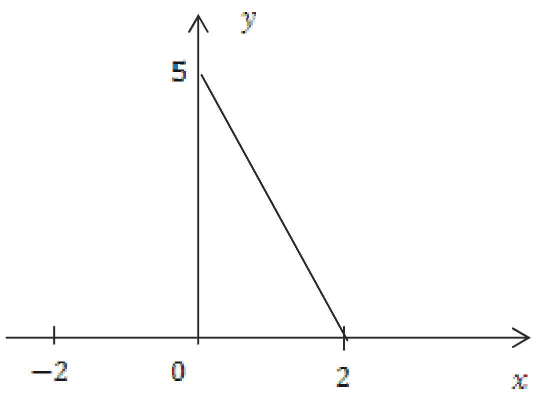
Assim se $f(c)$ é o valor máximo de $f$ em $S$, digamos que $f$ toma seu valor máximo em $c$. O ponto $(c, f(c))$ é o ponto mais elevado no gráfico de $f$. Se $f(c)$ é o valor mínimo de $f$, dizemos que $f$ toma seu valor mínimo em $c$, e $(c, f(c))$ é o ponto mais baixo do gráfico $f$.

**Observação:** Se $D$ é o domínio de $f$, então:

i) Os valores máximo e mínimo são chamados extremos absolutos, também denominados extremos globais. Uma função pode tomar um valor máximo ou mínimo mais de uma vez.

ii) Se $f$ é uma função constante, então $f(c)$ é tanto um valor máximo como um valor mínimo de $f$ para todo real $c$.

- **Exemplo 2.2:** Determine os valores extremos e onde eles ocorrem.




**Solução:**

De acordo com o gráfico acima os valores extremos da função ocorrem nos pontos $x = 0$ e $x = 2$. Atingindo seu valor máximo no ponto $(0,5)$, pois $f(x) \leq 5 = f(0)$, para todo $x \in D(f)$; e o seu valor mínimo no ponto (2,0), pois $f(x) \geq 0 = f(2)$, para todo $x \in D(f)$.

### 2.1.2 Extremos Locais

Nesta seção iremos definir máximo local e mínimo local. Para isso, considere inicialmente um gráfico com cinco pontos nos quais a função tem valores em seu domínio

$[a, b]$. O mínimo absoluto da função ocorre em $a$, embora em $d$ o valor da função seja o menor que em qualquer ponto próximo. A curva sobe para a esquerda e desce para a direita, próximo a $c$, tornando $f(c)$ um máximo local. A função atinge seu máximo absoluto em $e$. Dessa forma, usamos a expressão: $f$assume extremo local em $c$ para dizer que em um intervalo aberto suficientemente pequeno contendo $c$, $f$ admite o seu maior (menor) valor em $c$.

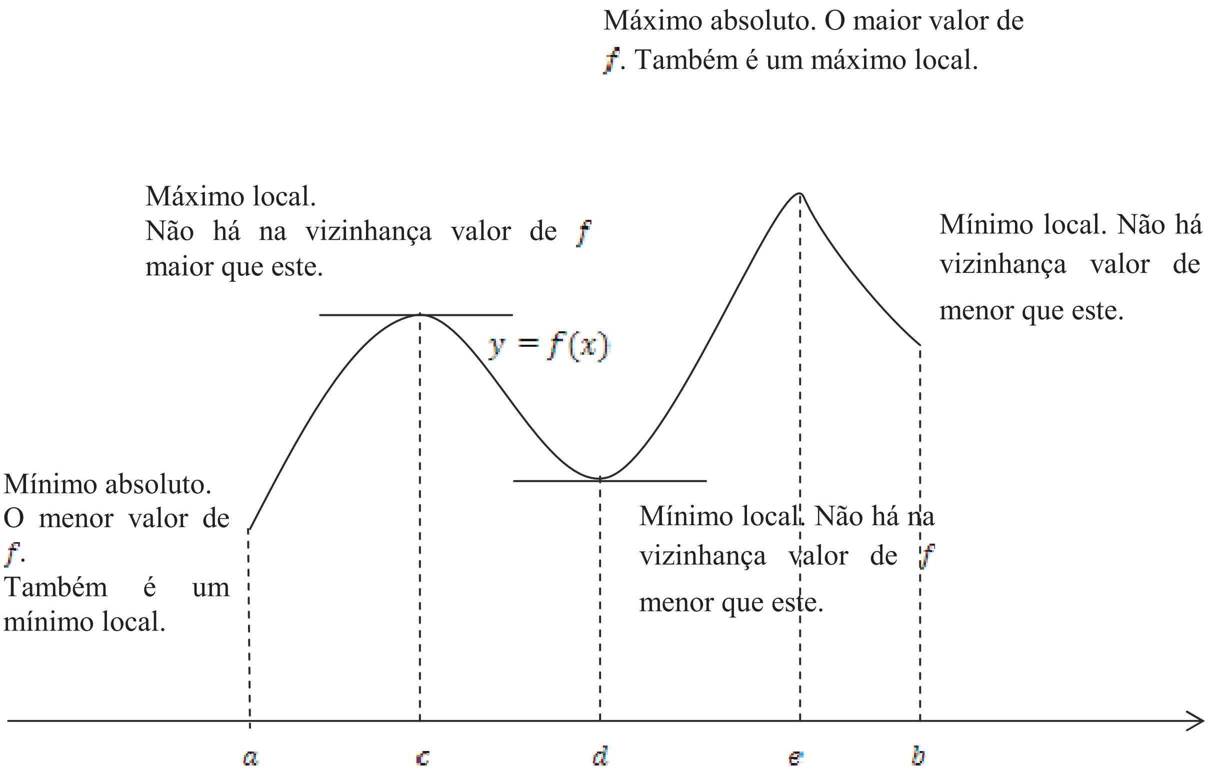



Figura 2.3 - Como classificar os máximos e mínimos

Assim, temos a seguinte definição.

**2.1.2.1 - Máximo Local, Mínimo Local.**

**Definição 2.3**

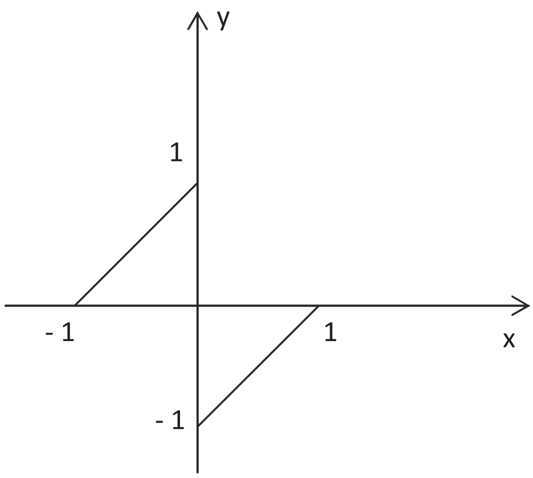
Uma função $f$ tem um valor máximo local em um ponto interior $c$ de seu domínio se $f(x) \leq f(c)$ para qualquer $x$ em um intervalo aberto que contenha $c$.

Uma função $f$ tem um valor mínimo local em um ponto interior $c$ de seu domínio se $f(x) \geq f(c)$ para qualquer $x$ em um intervalo aberto que contenha $c$.

**Observação:**

1) Extremos locais também são chamados extremos relativos;
2) Um máximo absoluto também é um máximo local. Sendo o maior valor de todos é também o maior valor em sua vizinhança imediata. Assim, uma lista contendo todos os máximos locais incluirá automaticamente o máximo absoluto, se houver. De modo análogo, uma lista contendo todos os mínimos locais incluirá automaticamente o mínimo absoluto, se houver.

**Exemplo 2.3:** Determinar os valores extremos e onde eles ocorrem.



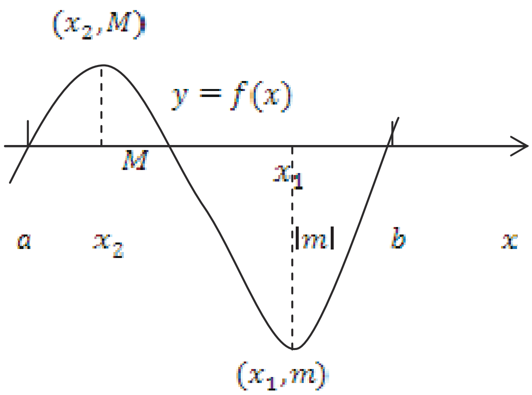

**Solução:**

Os valores extremos da função são pontos do domínio onde a função atinge seu valor máximo ou mínimo. Assim, dentro do intervalo fechado $[-1,1]$, a função atinge o seu ponto mais elevado em $(0,1)$, ou seja, o seu máximo local. E atinge o seu ponto mais baixo em $(-1,0)$, aí temos o seu mínimo local.

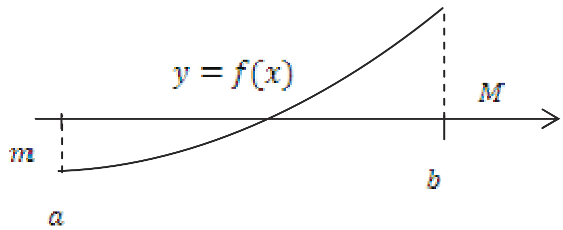
Segundo o teorema a seguir, uma função que seja contínua em qualquer ponto de um intervalo fechado $[a, b]$ apresenta um mínimo e um máximo absoluto nesse intervalo. Ao representar graficamente uma função, devemos sempre procurar esses valores.

**Teorema 2.1** - O Teorema do Valor Extremo

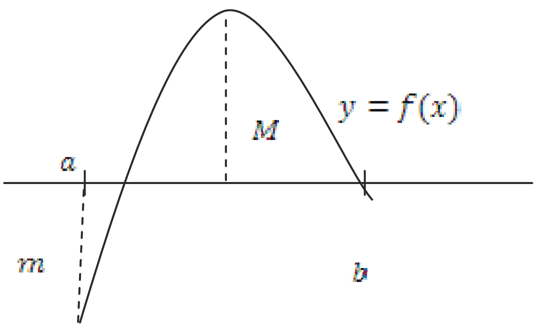
Se $f$ é contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, então $f$ assume tanto um valor máximo $M$ como um valor mínimo $m$ em $[a,b]$. Ou seja, há números $x_1$ e $x_2$ em $[a,b]$ tais que $f(x_1)=m$ e $f(x_2)=M$ e $m \leq f(x) \leq M$ para qualquer valor de $x$ em $[a,b]$. As possíveis localizações dos extremos absolutos de uma função contínua em um intervalo $[a,b]$, são dadas pelo gráfico abaixo.



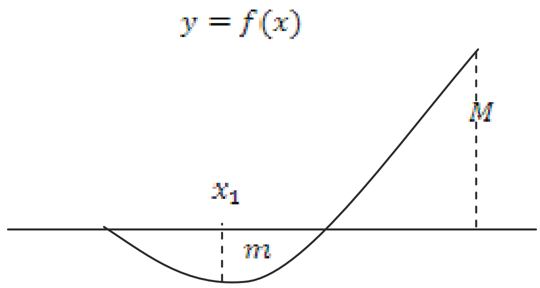

Pontos de Máximo e Mínimo interior ao intervalo.




Pontos de Máximo e Mínimo nas extremidades




Pontos de máximo interior e ponto de mínimo em um extremidade.




Ponto de máximo em uma extremidade e ponto de mínimo interior.

Figura 2.4 - Algumas possibilidades para pontos de máximo e mínimo de uma função contínua em um intervalo fechado $[a,b]$.

**Demonstração:** Como a prova deste Teorema envolve definições não abordadas neste trabalho, como por exemplo, definições de ínfimo e supremo, não iremos demonstrá-lo. A demonstração do Teorema pode ser encontrada em [SWOKOWSKI, 1994].

Observação: Os requisitos do teorema 1, de que o intervalo seja fechado e finito e a função seja contínua, são componentes básicos. Sem eles, as conclusões do teorema não são válidas.

### 2.1.3 - Determinando extremos

Nesta seção iremos estudar os testes da derivada para valores de extremos locais que nos auxiliam nos cálculos de Máximo e Mínimo de funções.

O teorema a seguir explica por que normalmente precisamos investigar apenas alguns valores para determinar o extremo de uma função.

**Teorema 2.2 -**

Se $f$ possui um valor máximo ou mínimo local em um ponto $c$ interior de seu domínio e se $f'$ é definida em $c$, então $f'(c) = 0$.

Vejamos uma interpretação geométrica no caso em que $f$ assume um máximo local em um ponto $c$ interior ao seu domínio.

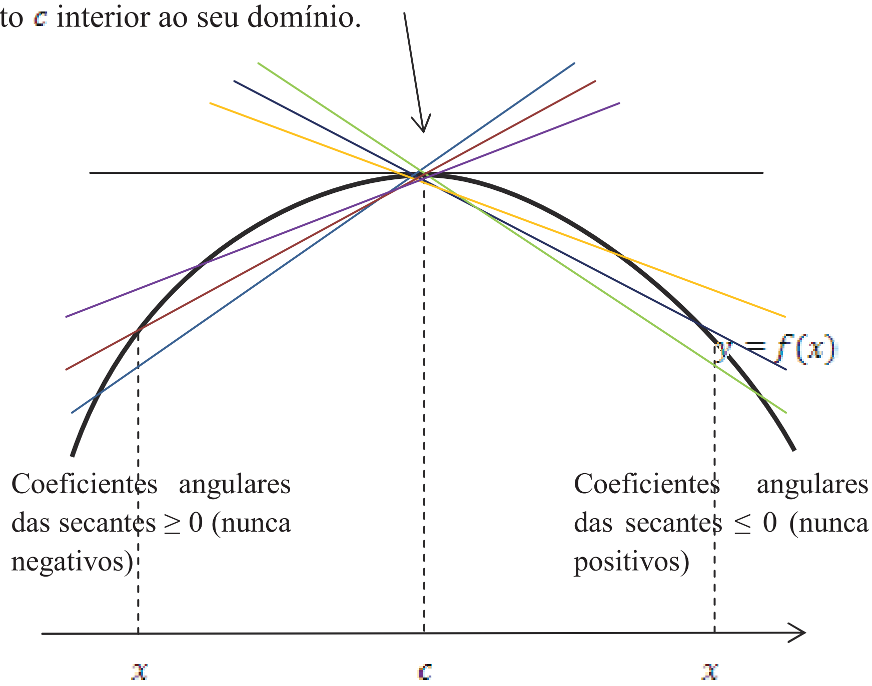



Figura 2.5

Conforme vimos no Capítulo 1, o coeficiente angular em $c$ é simultaneamente o limite de números não positivos e não negativos e, portanto, é zero.

**Demonstração:**

Para demonstrar que $f'(c)$ é zero em um extremo local, primeiro temos de provar que $f'(c)$ não pode ser positiva e depois que $f'(c)$ não pode ser negativa. Portanto se $f'(c)$ não é nem positivo nem negativo, conseqüentemente teremos, $f'(c) = 0$.

Para começarmos, suponhamos que $f$ tenha um valor máximo local quando $x = c$, isto é, $f(x) \leq f(c)\ \forall\ x$ em um intervalo aberto que contenha $c$, assim $f(x) - f(c) \leq 0$, para qualquer $x$ próximo de $c$. Como $c$ é um ponto interior do domínio de $f$, $f'(c)$ é definida pelo limite bilateral.

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Isso significa que ambos os limites à direita e à esquerda, existirão quando $x = c$ e serão iguais a $f'(c)$. Quando examinamos esses limites separadamente, temos que

$f'(c) = \lim\limits_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$, pois, por hipótese $f(x) \leq f(c)$ e como $x \to c^+$, temos $x > c$, ou seja $x - c > 0$ . (1)

De maneira semelhante,

$f'(c) = \lim\limits_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$, pois, por hipótese $f(x) \leq f(c)$ e como $x \to c^-$, temos $x < c$, ou seja $x - c > 0$. (2)

Portanto, das desigualdades (1) e (2) temos, $\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$, o que implica pela definição de derivada que $f'(c) = 0$.

Isso prova o teorema para valores máximos locais. Para prová-lo para valores mínimos locais, suponha que $f$ assume mínimo local em $x = c$, isto é, $f(x) \geq f(c) \forall\ x$ em um intervalo próximo de $c$, assim $f(x) - f(c) \geq 0$ para qualquer $x$ próximo de $S$ consequentemente as desigualdades nas equações (1) e (2) são investidas.

Como $f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, onde, $\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, pois $(x-c) < 0$ e $f(x) \geq f(c)$. (3)

De maneira semelhante,

$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c^+} \geq 0$, pois $(x-c) > 0$ e $f(x) \leq f(c)$. (4)

Pelas desigualdades (3) e (4), temos $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = 0$, e portanto $f'(c) = 0$ c.q.d.

**Conclusão:** O **Teorema 2.2** diz que a primeira derivada de uma função é sempre zero em um ponto interior onde a função tenha um valor extremo local e a derivada seja definida. Assim, os únicos locais onde uma função $f$ pode ter valores extremos (locais ou globais) são

1. Pontos interiores onde $f' = 0$
2. Pontos interiores onde $f'$ não existe,
3. Extremidades do domínio de $f$.

A partir daí, temos a seguinte definição.

**Definição 2.4 -** Ponto crítico

Um ponto interior do domínio de uma função $f$ onde $f'$ é zero ou indefinida é chamado ponto crítico de $f$.

Assim os únicos pontos do domínio em que uma função pode assumir valores extremos são os pontos críticos e as extremidades da função.

**Como Calcular Extremos Absolutos de uma Função Contínua $f$ num intervalo fechado $a \leq x \leq b$**

Conforme vimos no Teorema 2.2 e nas definições anteriores, podemos resumir, conforme veremos abaixo, alguns passos que facilitam os nossos cálculos para determinar os extremos absolutos de uma função contínua em $[a, b]$. Vejamos, 1º Passo. Calcular as coordenadas $x$ de todos os pontos críticos de $f$ no intervalo $a \leq x \leq b$, isto é determinar os pontos $x \in [a, b]\ tal\ que\ \ f'(x) = 0$.

2º Passo. Calcular $f(x)$ nestes pontos críticos e nas extremidades $x = a$ e $x = b$.

3º Passo. Selecionar os maiores e menores valores de $f'(x)$ obtidos no 2º passo. Estes serão, respectivamente, o máximo absoluto e o mínimo absoluto da função.

**Exemplo 2.4:** Determinar o valor mínimo e máximo absolutos para a função $f(x) = x^2 - 1$ no intervalo $-1 \leq x \leq 2$. Em seguida esboce o gráfico na função, identifique os pontos no gráfico onde os valores extremos ocorrem e inclua suas coordenadas.

**Solução:** Iremos aplicar o **Teorema 2.2**. Para isso, iremos:

1) Encontrar os números críticos

   Como $f(x) = x^2 - 1$, pelas regras de derivação, temos, $f'(x) = 2x$.

   Assim, $f'(x) = 0$ implica que,

   $2x = 0$,

   ou seja, $x = 0$ é um ponto crítico de $f$.

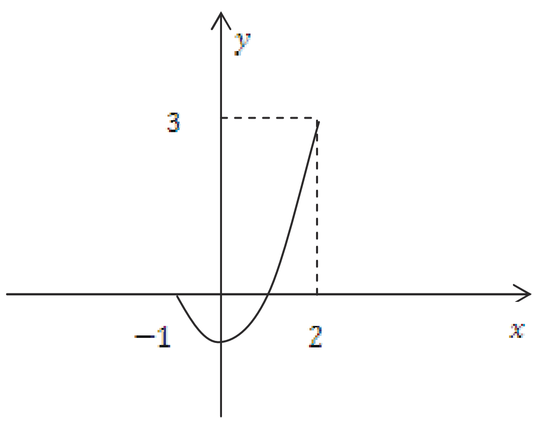
2) Calcular $f(x)$ nos pontos críticos e nas extremidades.

   Como $f(x) = x^2 - 1$, temos$f(0) = -1$;$f(-1) = 0$ e$f(2) = 3$

3) Selecionar o maior e menor valor obtido em (2), ou seja,

   Mínimo em (0, -1)

   Máximo em (2, 3)



## 2.2 - Teorema do Valor Médio

Nesta seção vamos provar alguns teoremas que determinam por estabelecer um elo entre a derivada de uma função e crescimento ou decréscimo desta, conhecidos como Teste da Derivada Primeira e Teste da Derivada Segunda. Para isso, precisaremos estudar inicialmente o Teorema de Rolle, para provarmos o Teorema da Valor Médio, o qual aplicaremos para provar os Testes da Derivada, citados acima.

**Teorema 2.3** - O Teorema de Rolle

Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em todos os pontos do intervalo fechado $[a, b]$ e derivável em todos os pontos de seu interior $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$ então há pelo menos um número $c$ em $]a, b[$ no qual $f'(c) = 0$.

Antes de demonstrá-los vejamos a interpretação geométrica do Teorema de Rolle.

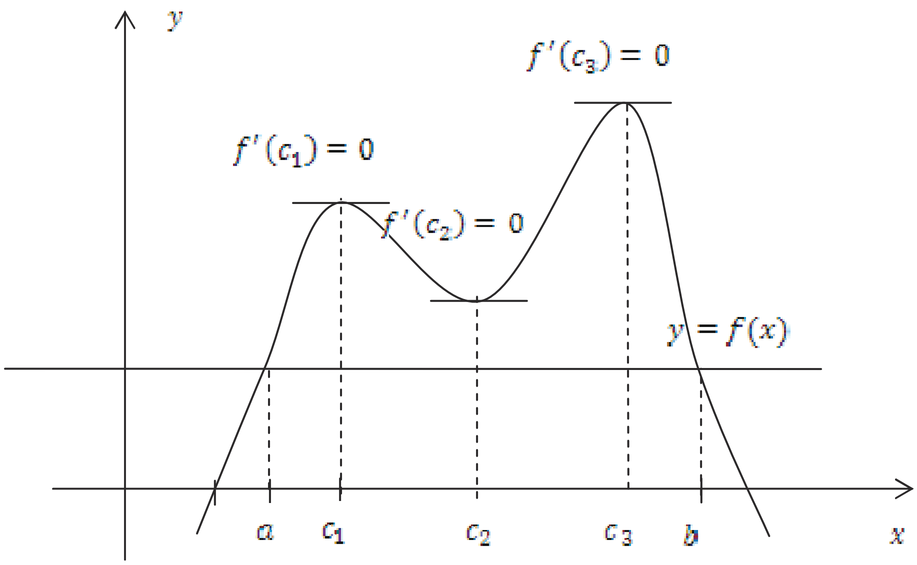



Figura 2.5

O Teorema de Rolle diz que uma curva derivável tem ao menos uma tangente horizontal entre dois pontos quaisquer onde a curva cruza o eixo $x$.

**Demonstração:**

Como $f(a) = f(b)$, temos dois casos a considerar:

**1º caso:** $f$ é constante em $[a, b]$, isto é $f(x) = f(a) = f(b), \forall\, x \in [a, b]$.

Neste caso pelas propriedades de Derivada, temos $f'(x) = 0$ em $[a, b]$, isto é, para todo $x_0 \in [a, b]$, temos $f'(x_0) = 0$.

**2º caso:** $f$ não é constante em [a, b]

Neste caso existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Como $f$ é contínua em [a, b], segue do Teorema 2.1 que $f$ tem um mínimo e um máximo em [a, b]. Assim,

i) Se existe $x \in ]a, b[$ tal que $f(x) > f(a) = f(b)$, então o valor $f(a) = f(b)$ não é o máximo de $f$ em [a, b]; portanto, $f$ assume valor máximo em algum ponto $x_0 \in ]a, b[$ e, como hipótese $f$ derivável em ]a, b[, temos pelo Teorema 2.2 que $f'(x_0) = 0$.

ii) Se existe $x \in ]a, b[$ tal que $f(x) < f(a) = f(b)$, então o valor $f(a) = f(b)$ não é o mínimo de $f$ em algum ponto $x_0 \in ]a, b[$ pois, sendo $f$ derivável em ]a, b[, novamente pelo **Teorema 2.2** temos $f'(x_0) = 0$.

**Teorema 2.4** - O Teorema do Valor Médio

Suponha que $y = f(x)$ seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto $]a, b[$. Então há pelo menos um ponto $c$ em $]a, b[$ em que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Cuja interpretação geométrica é dada por:

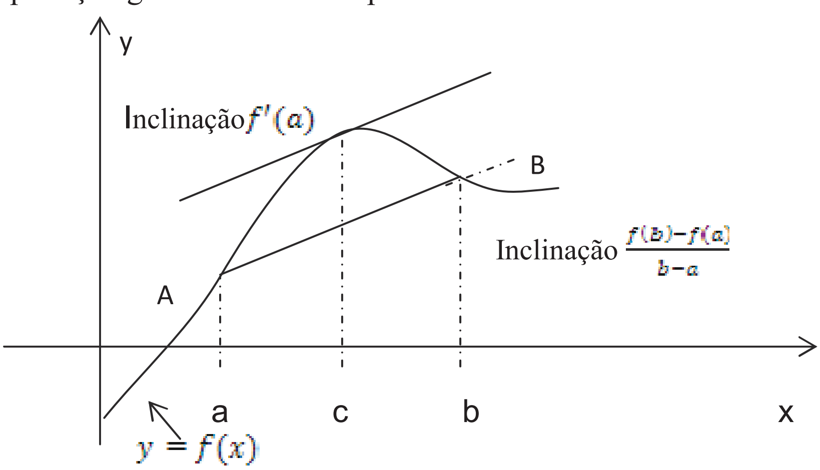



Figura 2.6

Geometricamente, o Teorema do Valor Médio diz que, em algum lugar entre $A$ e $B$, a curva apresenta pelo menos uma tangente paralela à corda $AB$.

**Demonstração:**

**1º caso:** $f(a) = f(b)$

Neste caso $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ e, pelo teorema de Rolle, existe $x_0 \in ]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0 = \frac{f(b)-f(a)}{a-b}$.

**2º caso:** $f(a) \neq f(b)$

Neste caso, considere a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Observemos que:

i) $g$ é contínua em $[a, b]$ por ser a diferença entre $f(x) - f(a)$ e $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} . (x - a)$ que são contínuas em $[a, b]$;

ii) $g$ é derivável em $]a, b[$ pelas regras de derivação vistas no Capítulo 1, e sua derivada é $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$;

iii) nos extremos do intervalo $[a, b]$, temos:

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b.a} . (a - a) = 0$$

e

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} . (b - a) = 0$$

Portanto, $g(a) = g(b) = 0$.

Sendo assim, $g$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, portanto, existe $x_0 \in ]a,b[$ tal que $g'(x_0) = 0$, consequentemente por $(ii)$ temos $g'(x_0) = f'(x_0) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$, temos $f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ ou seja, $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ c.q.d.

- **Exemplo 2.5:** Verifique se as hipóteses do Teorema de Rolle estão satisfeitas pela função $f$ no intervalo I.

$f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{3x-4}$ ; $I = [{}^1/_2, 1]$.

**Solução:**

i) Verifiquemos primeiro onde $f$ é contínua

A função $f$ é contínua, para todo $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tal que $3x - 4 \neq 0$, isto é, $x \neq \frac{4}{3}$. Logo,

$f$ é contínua em $\left\{x \in \mathbb{R} \ I\ x \neq \frac{4}{3}\right\}$, ou seja, $f$ é contínua em $[\frac{1}{2}, 1]$, pois $\frac{4}{3} \notin \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

ii) Vejamos agora se $f$ é derivável. De fato, pois toda função racional é derivável, além disso

$$f'(x) = \frac{(2x^2-3x+1)'.(3x-4) - (2x^2-3x+1)\ .(3x-4)'}{(3x+4)^2} = \frac{(4x-3).(3x-4) - (2x^2-3x+1).3}{(3x+4)^2} =$$

$$\frac{(12x^2-16x-9x+12)-(6x^2-9x+3)}{(3x+4)^2} = \frac{6x^2-16x+9}{(3x+4)^2}$$

iii) Vejamos se $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1)$

De fato,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1}{3\left(\frac{1}{2}\right) - 4} = \frac{\frac{2}{4} - \frac{3}{2} + 1}{\frac{3}{2} - 4} = \frac{\frac{2}{4} - \frac{6}{4} + \frac{4}{4}}{\frac{3}{2} - \frac{8}{2}} = \frac{0}{\frac{5}{2}} \quad isto\ é, f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

e

$$f(1) = \frac{2-1-3.1+1}{3.1-4} = \frac{2-3+1}{-1} = \frac{0}{-1}, \ isto\ é, f(1) = 0.$$

Portanto concluímos, que $f$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle.

- **Exemplo 2.6:** Verifique se as hipóteses do Teorema de Lagrange são satisfeitas pela função $f$ no intervalo $I$. Em seguida, detenha um $c \in I$ que satisfaça a tese do teorema.

$f(x) = x^2 + 2x - 1;$ I= $[0, 1]$.

**Solução:**

Vejamos se $f$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Lagrange. De fato,

i) $f$ é contínua em $[0,1]$, pois toda função polinomial é contínua.

ii) $f$ é derivável em$]0,1[$com$f'(x) = 2x + 2$.

Logo, existe $c \in ]0,1[$ tal que $f(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, encontremos o valor de $c$.

Temos que, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

O que implica $f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$.

Como $f'(x) = 2x + 2$, temos $2c + 2 = \frac{2+1}{1}$.

De onde segue que $2c + 2 = 3$.

Logo, $c = \frac{1}{2} \in [0, 1]$.

Portanto, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$.

## 2.3 - Funções Monótonas e o Teste da Primeira Derivada

Ao esboçar o gráfico de uma função derivável, convém saber onde ela cresce (sobe da esquerda para a direita) ou decresce (cai da esquerda para a direita) ao longo de um intervalo. Esta seção define precisamente o que significa uma função ser crescente ou decrescente ao longo de um intervalo, além de oferecer um teste para determinar onde ela cresce ou decresce.

Mostraremos também como testar os pontos críticos de uma função a fim de detectar valores extremos locais.

### 2.3.1 Funções Crescentes e Decrescentes

**Definição 2.5** Função crescente, função decrescente.

Seja $f$ uma função definida em um intervalo $I$ e sejam $x_1$ e $x_2$ dois pontos quaisquer em $I$.

1. Se $f(x_1) < f(x_2)$sempre que $x_1 < x_2$, dizemos que $f$ é crescente em $I$.
2. Se $f(x_2) < f(x_1)$ sempre que $x_1 < x_2$, dizemos que $f$ é decrescente em $I$.

Uma função que é crescente ou decrescente em $I$ é chamada monotônica em $I$. O intervalo $I$ pode ser finito ou infinito.

**Teorema 2.5** Teste da primeira derivada para funções monótonas.

Suponha que $f$ seja contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

$i)$ Se $f'(x) > 0$ em qualquer ponto $x \in ]a, b[$, então $f$ é crescente em $[a, b]$.

$ii)$ Se $f'(x) < 0$ em qualquer ponto $x \in ]a, b[$, então $f$ é decrescente em $[a, b]$.

**Demonstração:**

Sejam $x_1$ e $x_2$ dois pontos em [a, b], sendo $x_1 < x_2$ $(x_2 - x_1 > 0)$. O Teorema do Valor Médio aplicado a $f$ em $[x_1, x_2]$ diz que existe $c \in (a, b)$ tal que$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, isto é, $f(x_2) - f(x_1) = f(c)(x_2 - x_1)$. Assim,

i) Se $f'(x) > 0, \forall\, x \in (a, b)$, em particular, $f'(c) > 0$, assim como $x_2 - x_1 > 0$, consequentemente teremos $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é, $f(x_1) < f(x_2)$, portanto $f$ é crescente.

ii) Se $f'(x) < 0, \forall\, x \in (a, b)$ em particular. Para $c \in (a, b)$, temos $f'(c) < 0$, assim como $x_2 - x_1 > 0$, consequentemente teremos $f(x_2) - f(x_1) < 0$, isto é, $f(x_1) > f(x_2)$, portanto $f$ é decrescente. c.q.d.

- **Exemplo 2.7:** Aplique o Teste da Derivada Primeira para encontrar os intervalos onde $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ é crescente e decrescente.

**Solução:**

Vamos calcular a primeira derivada da função, então $f'(x) = 4x^3 - 16x$. Fazendo $f'(x) = 0$. Temos:

$$4x^3 - 16x = 0.$$

O que implica, $4x(x^2 - 4) = 0$, ou seja, $4x = 0$ ou $x^2 - 4 = 0$.

Portanto, $x = 0$ ou $x = \pm 2$, que são os pontos críticos de $f$.

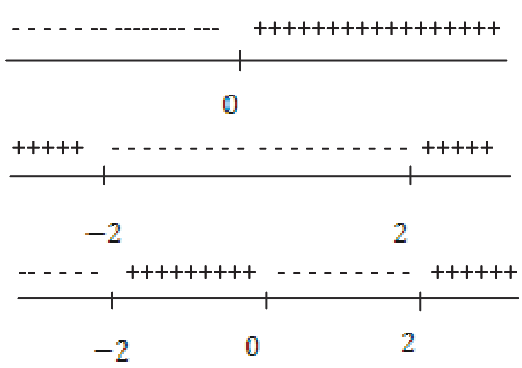
Pelo **Teste da Derivada 1ª**, devemos encontrar os valores de $x \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) > 0$ e o valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) < 0$.

Faremos o estudo do sinal das inequações:

$4x^3 - 16x > 0$ e $4x^3 - 16x < 0$

Isto é, $4x(x^2 - 4) > 0$ e $4x(x^2 - 4) < 0$

Temos




Daí, temos

$f'(x) > 0$ para $x > 2$ $e$ $-2 < x < 0$, e $f'(x) < 0$ para $x < -2$ $e$ $0 < x < 2$.

Ou seja,

$f$ é crescente em $(-2,0)$ $e$ $(2,+\infty)$ e decrescente em $(-\infty,-2)$ $e$ $(0,2)$.

Os pontos críticos dividem o eixo $x$ em intervalos onde $f'$ é ou positiva ou negativa. Podemos exibir essas informações em uma tabela.

| Intervalos | $x < -2$ | $-2 < x < 0$ | $0 < x < 2$ | $x > 2$ |
|---|---|---|---|---|
| Sinal de $f'$ | - | + | - | + |
| Comportamento de $f'$ | Decrescente | Crescente | Decrescente | Crescente |

Portanto, pelo **Teorema 2.5** concluímos que $f$ decresce em $(-\infty,-2), (0,2)$ e cresce em $(-2,0), (2,\infty)$.

### 2.3.2 O Teste da Primeira Derivada para Extremos Locais

Na Figura 2.7, $f$ ora assume valor máximo, ora assume valor mínimo. Nos pontos onde $f$ possui valor mínimo $f' < 0$ à esquerda e $f' > 0$ à direita. Assim, a curva está descendo à esquerda do valor mínimo e subindo à sua direita. Enquanto, que nos pontos onde $f$ possui valor máximo $f' > 0$ à esquerda e $f' < 0$ à direita. Logo, a curva está subindo à esquerda do valor máximo e descendo à sua direita. Em suma, em um ponto extremo local, o sinal de $f'(x)$ muda.

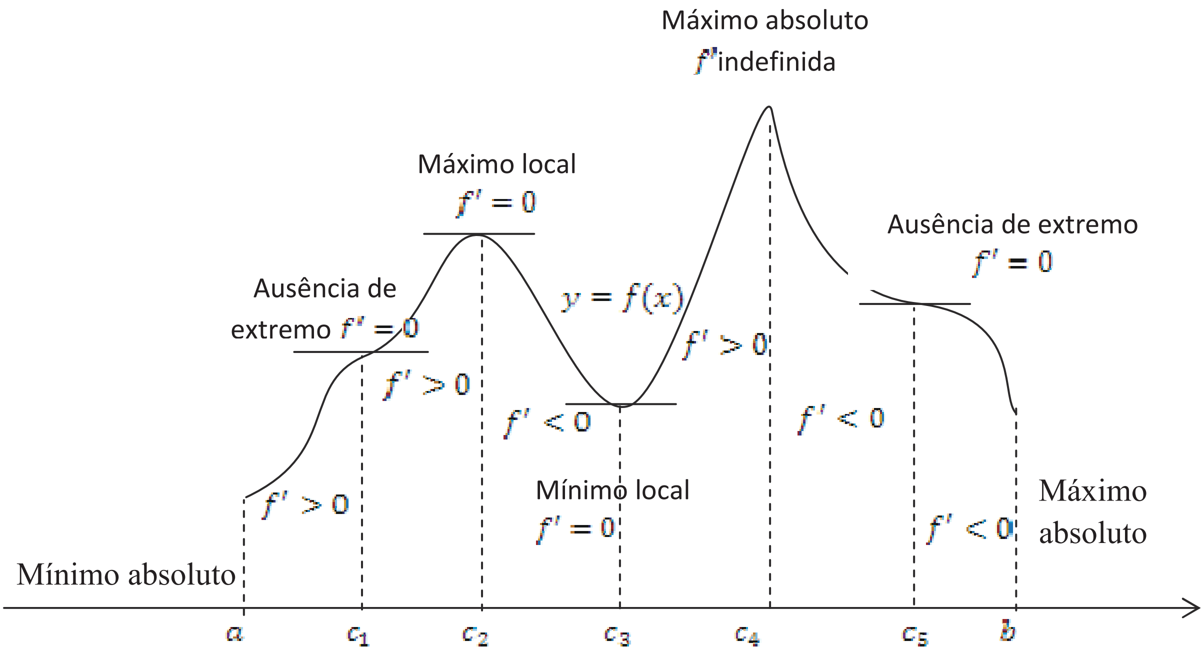



Figura 2.7 A primeira derivada de uma função nos diz como a curva sobe ou desce

Essas observações nos levam a um teste que detecta a presença e a natureza de valores extremos em funções deriváveis.

**Teorema 2.6** - O Teste da Primeira Derivada para Extremos Locais

Suponha que $c$ seja um ponto crítico de uma função contínua $f$, e que $f$ seja derivável em qualquer ponto de certo intervalo que contenha $c$, exceto possivelmente no própio ponto $c$.

1. Se $f'$ muda de negativa para positiva em $c$, então $f$ possui um mínimo local em $c$;
2. Se $f'$ muda de positiva para negativa em $c$, então $f$ possui um máximo local em $c$;
3. Se $f'$ não muda de sinal em $c$ (ou seja, $f$ é positiva ou negativa em ambos os lados de $c$), então $c$ não é um extremo local de $f$.

**Demonstração:**

Parte (1). Como o sinal de $f'$ muda de negativo para positivo em $c$, existem dois números $a$ e $b$ tais que $f'(x) > 0$ em (c, b). Se $x \in (a, c)$, então $f(c) < f(x)$, pois $f'(x) < 0$, e pelo **Teorema 2.5** $f$ é decrescente e como $x < c$ temos $f(x) > f(c)$.

Se $x \in (c, b)$, então $f(c) < f(x)$, pois $f'(x) > 0$, pelo **Teorema 2.5**, $f$ é crescente. Implica que $f$ está subindo em [c, b]. Portanto, $f(x) \geq f(c)$ para qualquer $x \in (a, b)$, ou seja, por definição, $f$ possui um mínimo local em $c$.

As partes (2) e (3) são provadas de modo análogo.

- **Exemplo 2.7** Identifique os valores extremos locais da função $g(t) = -t^2 - 3t + 3$.

**Solução:**

Vamos calcular a primeira derivada da função, então

$$g'(t) = -2t - 3.$$

Em seguida iremos encontrar os pontos críticos, igualando $g'(t) = 0$, isto é,

$$-2t - 3 = 0.$$

O que implica, $t = -1{,}5$.

Não há extremidades no domínio, portanto o ponto crítico $t = -1{,}5$ é o único lugar onde $g$ pode apresentar um valor extremo absoluto. Logo,

$g(t) = -t^2 - 3t + 3$

$g(-1{,}5) = -(-1{,}5)^2 - 3.(-1{,}5) + 3$

$g(-1{,}5) = -2{,}25 + 4{,}5 + 3$

$g(-1{,}5) = 5{,}25$

Concluímos que: A função tem ponto de máximo: 5,25 em $t = -1{,}5$.

## 2.4 - Concavidade e Esboço de Curvas

Nesta seção, veremos como a segunda derivada nos fornece informações sobre o modo como a curva de uma função derivável se inclina ou muda de direção. Essa informação adicional nos permite captar importantes aspectos do comportamento de uma função e seu gráfico; assim podemos, depois, apresentar essas características em um esboço do gráfico.

**Concavidade**

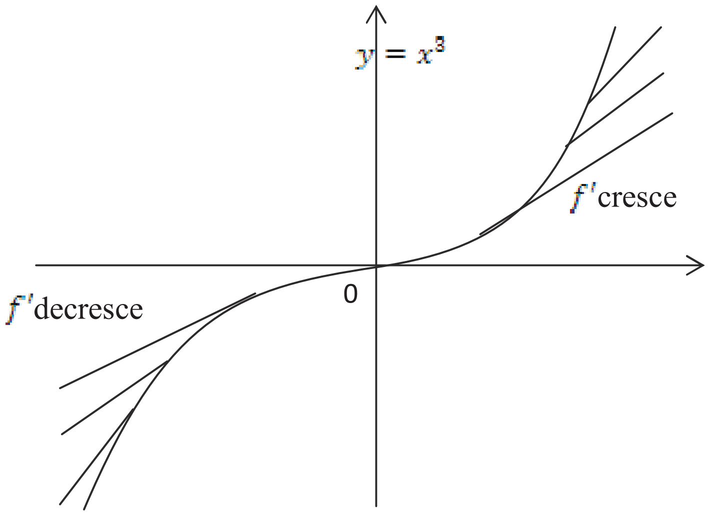



Figura 2.8

Note que, o gráfico de $f(x) = x^3$ é côncavo para baixo em (-∞, 0) e côncavo para cima em (0, ∞).

Como podemos ver na Figura 2.8, a curva $y = x^3$ é crescente conforme $x$ aumenta, mas as porções definidas nos intervalos (-∞, 0) e (0, -∞) se curvam de maneiras distintas. Conforme percorremos a curva na direção da origem, a partir da esquerda, vemos que ela se volta para a nossa direita e fica abaixo de suas tangentes. Os coeficientes angulares das tangentes são decrescentes no intervalo (-∞, 0). Se continuarmos percorrendo a curva para a direita, vemos que ela se volta para a esquerda e fica acima de suas tangentes. Os coeficientes angulares das tangentes são crescentes no intervalo (0, ∞). Esse comportamento de inclinação e mudança de direção define a concavidade da curva.

**Definição 2.6** – Concavidade do gráfico de uma função

O gráfico de uma função derivável $y = f(x)$ é

(a) Côncavo para cima em um intervalo aberto $I$, se $f'$ é crescente em $I$;

(b) Côncavo para baixo em um intervalo aberto $I$, se $f'$ é decrescente em $I$.

Se uma função $y = f(x)$ possui uma segunda derivada, então podemos aplicar o **Corolário 3** do **Teorema do Valor Médio** para concluir que $f'$ é crescente se $f'' > 0$ em $I$, e decrescente se $f'' < 0$.

**Teorema 2.7** - O teste da segunda derivada para concavidade.

Seja $y = f(x)$ uma função duplamente derivável em um intervalo $I$.

1. Se $f'' > 0$ em $I$, o gráfico de $f$ ao longo de $I$ é côncavo para cima.
2. Se $f'' < 0$ em $I$, o gráfico de $f$ ao longo de $I$ é côncavo para baixo.

**Demonstração:** Iremos apenas mostrar graficamente, para a demonstração algébrica veja [THOMAS, 2008, p. 295]

**Observação:** Se $y = f(x)$ é duplamente derivável, geralmente, usamos as notações $f''$ e $y''$ para denotar a segunda derivada.

**Exemplo 2.8:** Use o teste da segunda derivada para estudar a concavidade das função em $\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 4$.

Calculando a primeira derivada, temos:

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$

Calculando a segunda derivada, logo,

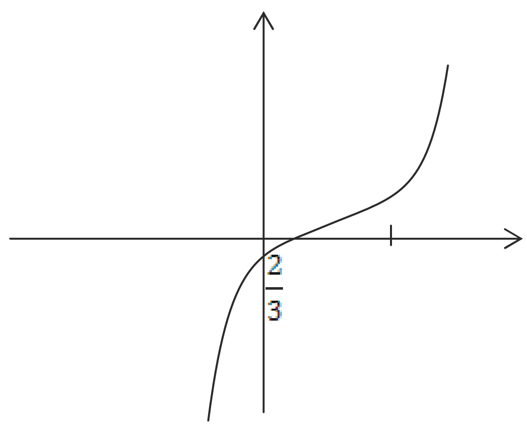
$f''(x) = 6x - 4$

Aplicando o **Teorema 2.7,** temos,

I) Se $f''(x) > 0$ ou seja $6x - 4 > 0$, assim $x > \frac{2}{3}$ a concavidade é para cima.

II) Se $f''(x) < 0$ ou seja $6x - 4 < 0$, assim $x < \frac{2}{3}$ a concavidade é para baixo.

Representando o resultado graficamente, temos:



## 2.5 - Pontos de Inflexão

Nesta seção iremos estudar o que é um ponto de inflexão, por exemplo:

A curva $y = 3 + sen\ x$ muda de concavidade no ponto (π, 3). Denominamos (π, 3) um ponto de inflexão da curva.

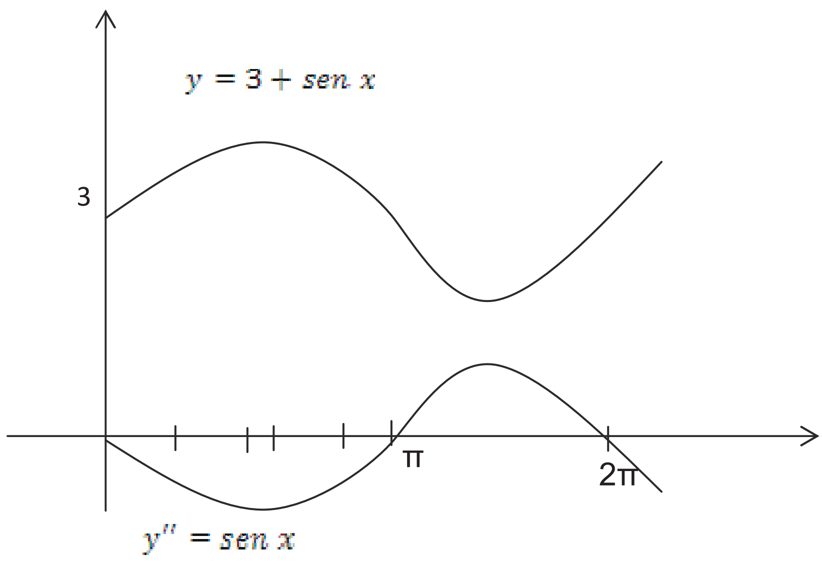



Figura 2.9

Usando o gráfico de $y''$ para determinar a concavidade de $y$.

**Definição2.7** - Ponto de inflexão

Um ponto onde o gráfico de uma função possui uma reta tangente e onde há mudança de concavidade é um ponto de inflexão.

Um ponto de uma curva no qual $y''$ é positiva de um lado e negativa do outro é um ponto de inflexão. Neste ponto, $y''$ é zero (pois as derivadas possuem a propriedade do valor intermediário) ou é indefinida. Se $y$ é uma função duplamente derivável, $y'' = 0$ em um ponto de inflexão e $y''$ possui um máximo ou um mínimo local.

### 2.5.1 - O Teste da Segunda Derivada para Extremos Locais

Em vez de procurarmos a mudança de sinal nos pontos críticos de $f'$, às vezes podemos usar o teste a seguir para determinar a presença de extremos locais, o qual é mais eficiente e rápido, para isto, iremos utilizar o teorema a seguir.

**Teorema 2.8** - O teste da segunda derivada para extremos locais

Suponha que $f''$ seja contínua em um intervalo aberto que contenha $x = c$.

1. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então $f$ possui um máximo local em $x = c$.
2. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então $f$ possui um mínimo local em $x = c$.
3. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, então o teste falha. A função $f$ pode ter um máximo local, um mínimo local, ou nenhum dos dois.

**Demonstração:**

Parte (1). Se $f''(c) < 0$, então $f''(x) < 0$ em algum intervalo aberto $I$ que contenha o ponto $c$, uma vez que $f''$ é contínua. Portanto, pelo Teorema 2.5, $f'$ é decrescente em $I$. Como $f'(c) = 0$, o sinal de $f'$muda de positivo para negativo em $c$, de modo que $f$ apresenta um máximo local em $c$, acordo com o teste da primeira derivada.

Parte (2). Se $f''(c) > 0$, então $f''(x) > 0$em algum intervalo aberto $I$ que continha o ponto $c$, uma vez que $f''$ é contínua. Portanto, $f'$ é crescente em $I$. Como $f'(c) = 0$, o sinal de $f'$ muda de negativo para positivo em $c$, de modo que $f$ apresenta um mínimo local em $c$, de acordo com o teste da primeira derivada.

Para a parte (3), daremos um contra-exemplo, para isto, considere as três funções $y = x^4$, $y = -x^4$ e $y = x^3$. Para cada função, a primeira e a segunda derivadas são nulas em $x = 0$. Apesar disso, nesse ponto, a função $y = x^4$ apresenta um mínimo local, $y = -x^4$ apresenta um máximo local e $y = x^3$ é crescente em qualquer intervalo aberto que contenha $x = 0$ (não apresentando nem um máximo nem um mínimo nesse ponto). Em outras palavras o teste falha. c.q.d.

**Conclusão**: Esse teste exige que conheçamos $f''$ apenas em $c$, e não em um intervalo em torno de $c$. Isso o torna fácil de aplicar. Essa é a boa notícia. A má notícia é que o teste é inconclusivo quando $f'' = 0$ ou $f''$ não existe para $x = c$. Quando isso ocorre, deve-se voltar ao teste da primeira derivada para extremos locais.

Juntas, $f'$ e $f''$ nos dizem o formato do gráfico da função, isto é, onde os pontos críticos se localizam e o que acontece em um ponto crítico, onde a função é crescente e onde é decrescente, e como a curva muda de direção ou se inclina, conforme definida por sua concavidade. Usamos essas informações para esboçar um gráfico da função que capta todos esses seus aspectos-chave.

# CAPÍTULO 3: PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

O termo otimização, refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto viável. Então, temos como premissa a idéia de que, ao utilizarmos o verbo "otimizar" estamos nos referindo a algo que queremos melhorar até o ponto máximo permitido que alcance um determinado estado de "suposta perfeição" dentro dos próprios limites do objeto, situação e natureza.

Quando se trata de problemas de otimização, o primeiro passo para solucionar tais problemas consiste em decidir exatamente o que deverá ser otimizado, ou seja, interpretar a questão. Identificada esta grandeza, escolhemos uma letra para representá-la (alguns acham conveniente usar letras que lembrem a grandeza em questão como, por exemplo, $G$ para ganho e $A$ para área).

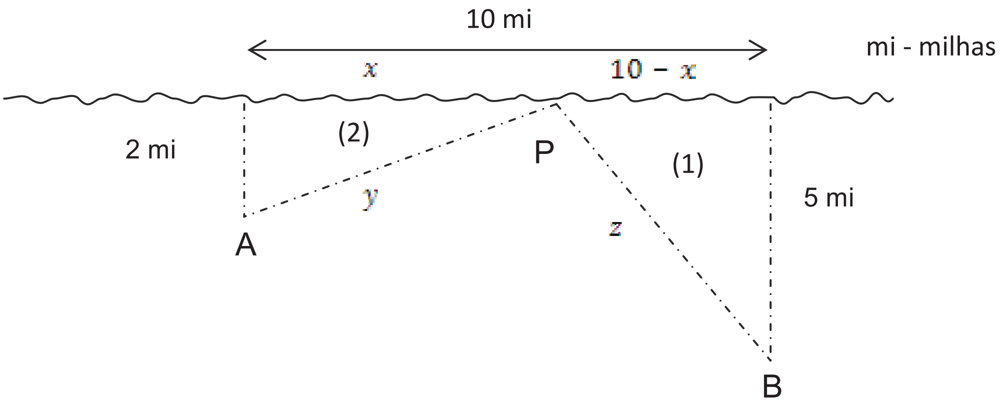
Nosso objetivo é representar a grandeza a ser otimizada em função de outra variável, de modo a podermos usar o cálculo, em particular os Teoremas 2.5, 2.6 e 2.7. Mas é importante que antes de tentar exprimir matematicamente a função desejada, convém formalizá-la em palavras.

A etapa seguinte à da representação da função por palavras é a escolha adequada da variável. Quase sempre tal escolha é óbvia, embora, algumas vezes, tenhamos que escolher uma entre diversas variáveis. Neste caso, optamos por aquela que conduz à representação funcional mais simples. Em alguns problemas, fica mais fácil exprimir a grandeza que queremos otimizar se utilizarmos duas variáveis – caso em que uma delas deverá ser expressa em termos da outra.

No próximo passo, exprimimos a grandeza a ser otimizada em função da variável escolhida. Na maioria dos problemas, a função tem interpretação prática apenas quando a variável pertence a um determinado intervalo. A parte difícil da tarefa termina depois que escrevemos a função e identificamos o intervalo adequado; a partir daí, o trabalho é rotineiro.

Testamos os pontos críticos e as extremidades no domínio da quantidade desconhecida. Utilizamos o que sabemos sobre a forma do gráfico de uma função. Usamos os testes da primeira e da segunda derivada para identificar e classificar pontos críticos da função.

**Aplicação 1** - Duas cidades estão localizadas no lado sul de um rio. Uma estação bombeadora de água será instalada para servir às duas cidades. A tubulação seguirá as retas que ligam cada cidade à estação. Defina o ponto onde a estação bombeadora deve ser instalada para minimizar o custo da tubulação.




Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos (1) e (2) na figura acima, temos,

(1) $z^2 = 5^2 + (10 - x)^2$

$z^2 = 25 + (10 - x)^2$

$z = \sqrt{25 + (10 - x)^2}$

e

(2) $y^2 = x^2 + 4$

$y = \sqrt{x^2 + 4}$

Seja $L(x) = y + z$, temos

$L(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{25 + (10 - x)^2}$, isto é,

$$L(x) = (x^2 + 4)^{\frac{1}{2}} + (25 + (10 - x)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Usando as regras da derivação, estudadas no Capítulo (I), temos:

$$L'(x) = \frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}.2x + \frac{1}{2}(25+(10-x)^2)^{-\frac{1}{2}}.2(10-x).(-1)$$

de onde segue que,

$$L'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{(10-x)}{\sqrt{25+(10-x)^2}}.$$

Encontremos agora os números críticos de $L$, isto é, os valores de $x$ e que $L'(x) = 0$, isto é,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{(10-x)}{\sqrt{25+(10-x)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{(10-x)}{\sqrt{25+(10-x)^2}} \Rightarrow (10-x)\sqrt{x^2+4} = x \cdot \sqrt{25+(10-x)^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$\left((10-x).\sqrt{x^2+4}\right)^2 = \left(x.\sqrt{25+(10-x)^2}\right)^2,$$ isto é,

$$\Rightarrow (10-x)^2.(x^2+4) = x^2.(25+(10-x)^2)$$

$$\Rightarrow (100-20x+x^2).(x^2+4) = x^2.(25+100-20x+x^2)$$

$$\Rightarrow 100x^2+400-20x^3-80x+x^4+4x^2 = 25x^2+100x^2-20x^3+x^4$$

$$\Rightarrow 104x^2-125x^2-80x+400 = 0$$

$$\Rightarrow -21x^2-80x+400 = 0 \quad x(-1)$$

$$\Rightarrow 21x^2+80x-400 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau, temos,

$$x = \frac{-80 \pm \sqrt{6400-4\cdot 21\cdot(-400)}}{42}$$

$$x = \frac{-80 \pm \sqrt{6400+33600}}{42}$$

$$x = \frac{-80 \pm \sqrt{40000}}{42}$$

$$x = \frac{-80 \pm 200}{42}$$

$$x' = \frac{120}{42} = \frac{20}{7}$$

$$x'' = \frac{-280}{42} = \frac{-40}{6}.$$

Logo os pontos críticos de $L$ são $x = \frac{20}{7}$ $e$ $x = \frac{-40}{6}$

Como $0 \leq x \leq 10$

Substituindo, obtemos:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{25 + (10 - x)^2}$$

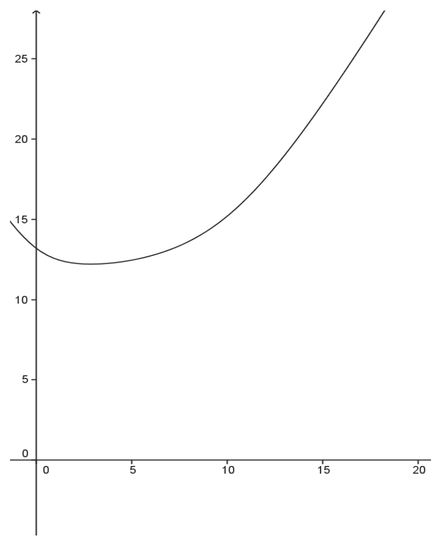
$$L(0) = \sqrt{4} + \sqrt{20 + 100} = 2 + 11{,}18 = 13{,}18$$

$$L(10) = \sqrt{104} + \sqrt{25} = 10{,}19 + 5 = 15{,}19$$

$$L\left(\frac{20}{7}\right) = L(2{,}85) = \sqrt{(2{,}85)^2 + 4} + \sqrt{25 + (10 - 2{,}85)^2} = \sqrt{8{,}12 + 4} + \sqrt{25 + 51{,}12}$$
$$= \sqrt{12{,}12} + \sqrt{76{,}12} = 3{,}48 + 8{,}72 = 12{,}20$$

Então a função $L(x)$ atinge o seu valor Mínimo no ponto $(2{,}85;\ 12{,}20)$

Cuja representação gráfica é dada por:




**Aplicação 2 -** O departamento de estradas de determinada cidade planeja construir uma área para motoristas junto a uma de suas principais estradas. A área deverá ser retangular, com 5000 m², e cercada nos três lados não adjacentes a estradas. Qual será a menor quantidade de cerca necessária para cercar a área conforme o projeto?

Solução:

Representamos por $x$ e $y$ os lados da área de recreação e, por $Q$, a quantidade de cerca necessária. Então,


$$Q = x + 2y$$

Como a área é de 5000 m², temos:

$xy = 5000$ ou $y = \frac{5000}{x}$.

Teremos que exprimir uma destas variáveis em termos da outra, a fim de obter uma função em uma única variável.

Para exprimir $Q$ apenas em função da variável $x$, substituímos em $Q$o valor de $y$ encontrado:

$$Q(x) = x + 2\left(\frac{5000}{x}\right) \Rightarrow Q(x) = x + \frac{10000}{x}.$$

Como $Q(x)$ tem interpretação prática para qualquer valor positivo de $x$, nosso objetivo é calcular o mínimo absoluto de $Q(x)$ no intervalo $x > 0$.

Para calcular os pontos críticos, igualamos a derivada

$$Q'(x) = 1 - \frac{10000}{x^2}$$

a zero e resolvemos a equação em $x$, obtendo

$$1 - \frac{10000}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 10000 = 0 \Rightarrow x^2 = 10000 \Rightarrow x = \pm\sqrt{10000} \Rightarrow x = \pm 100$$

Apenas o valor positivo $x = 100$ pertence ao intervalo $x > 0$. Como este é o único ponto crítico, podemos aplicar o teste da derivada segunda para extremos absolutos. Como a derivada segunda é dada por:

$Q'(x) = 1 - \frac{10.000}{x^2}$

$Q''(x) = \frac{2x \cdot 10000}{x^4}$

$$Q''(x) = \frac{20000}{x^3}$$

é positiva quando $x > 0$.

Aplicando o **Teorema 2.8** verificamos que $x = 100$ é o mínimo absoluto de $Q$ no intervalo, ou seja, como

$Q(x) = x + \frac{10000}{x}$.

substituindo $x$ por $100$, temos:

$Q(100) = 100 + \frac{10000}{100}$.

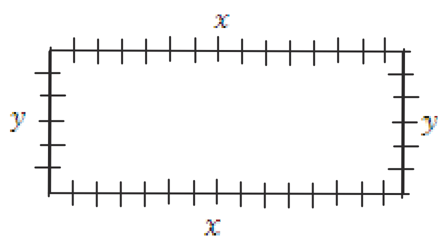
$Q(100) = 200\ m$

Temos que a quantidade mínima de cerca necessária é de $100\ m$.

**Aplicação 3 -** O departamento de lazer de uma cidade pretende construir uma área retangular de recreação, cercada e com 3600 m² de superfície. Como deverá ser feita a fim de se usar a menor quantidade de material possível?

Solução

Representamos por $x$ e $y$ os lados da área de recreação e, por $Q$, a quantidade de cerca necessária. Então,




$Q = 2x + 2y$

Como a área é de 3600 m², temos

$xy = 3600$ ou $y = \frac{3600}{x}$.

Substituamos em $Q$ o valor de $y$ encontrado, para exprimir $Q$ apenas em função da variável $x$.

$$Q(x) = 2x + 2\left(\frac{3600}{x}\right)$$

$$Q(x) = 2x + \frac{7200}{x}$$

Calculamos a derivada $Q(x)$, temos

$$Q'(x) = 2 - \frac{7200}{x^2}.$$

Para calcularmos os pontos críticos, igualamos a derivada a zero e resolvemos a equação em $x$, obtendo

$$2 - \frac{7200}{x^2} = 0$$

$$2x^2 - 7200 = 0$$

$$2x^2 = 7200$$

$$x^2 = \frac{7200}{2}$$

$$x^2 = 3600$$

$$x = \pm\sqrt{3600}$$

$$x = \pm 60$$

Apenas o valor positivo $x = 60$ pertence ao intervalo $x > 0$. Como este é o único ponto crítico, podemos aplicar o teste da derivada segunda para extremos absolutos. Como

$$Q'(x) = 2 - \frac{7200}{x^2}.$$

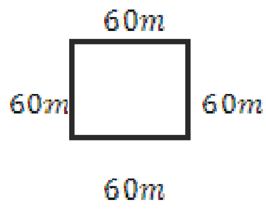
A derivada segunda é dada por:

$Q''(x) = \frac{7200 \, .2x}{x^4} \Rightarrow Q''(x) = \frac{14400}{x^3}$, é positiva quando $x > 0$.

Daí, o ponto crítico verificado em $x = 60$ é o mínimo absoluto de $Q$ no intervalo, como:

$Q(x) = 2x + \frac{7200}{x}.$

Substituindo $x$ por $60$, temos:




$Q(60) = 2 \cdot 60 + \frac{7200}{60}$

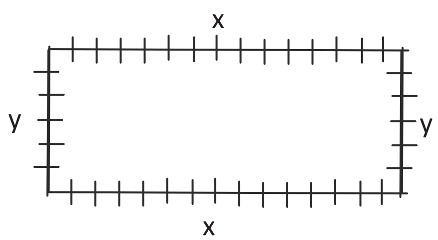
$Q(60) = 240\ m$

Logo, a quantidade de cerca necessária é de $240\ m$.

**Aplicação 4 -** Dispõe-se de $320\ m$ de arame para cercar uma área retangular. Como se deve usar este material de modo que a região cercada seja a maior possível?

Solução

Representamos por $x$ e $y$ os lados da área de recreação e, por $Q$, a quantidade de cerca necessária. Então,




$Q = 2x + 2y$

Como já dispomos da quantidade de arame, temos

$320 = 2x + 2y \quad \div 2$

$160 = x + y$ ou $y = 160 - x.$

Queremos encontrar a área, logo

$A = xy.$

Precisamos exprimir A em função da variável $x$.

$A(x) = x\,.\,(160 - x)$

$A(x) = 160x - x^2.$

Calculamos a derivada de $A(x)$, logo

$A'(x) = 160 - 2x$

Para calcularmos os pontos críticos, igualamos a derivada a zero e resolvemos a equação em $x$, obtendo

$$160 - 2x = 0$$

$$-2x = -160$$

$$x = \frac{160}{2}$$

$$x = 80.$$

Como este é o único ponto crítico, podemos aplicar o teste da derivada segunda para extremos absolutos. Como $A'(x) = 160 - 2x$, temos

$$A''(x) = -2.$$

Como $f'(x) = 0$ e $f''(x) < 0$, temos ponto de máximo no ponto $x = 80$.

Substituindo $x = 80$ na expressão $A(x) = x(160 - x)$, obtemos a maior área que é igual $A = 6400$, quando $x = 80$ e $y = 80$.

**Aplicação 5 -** Uma área retangular em uma fazenda será cercada por um rio e nos outros três lados por uma cerca elétrica feita de um fio. Com 800 m de fio à disposição, qual é a maior área que você pode cercar e quais são suas dimensões?


$$Q = x + 2y$$

$$800 = x + 2y$$

$$-2y = x - 800$$

$$2y = -x + 800$$

$$y = \frac{800 - x}{2}$$

Como, a área do retângulo é dada por,

$$A = xy.$$

Temos a aplicação

$A(x, y) = xy.$

Substituindo $y$ na igualdade acima, temos:

$$A(x) = x \cdot \left(\frac{800 - x}{2}\right).$$

Ou seja,

$$A(x) = \frac{800x}{2} - \frac{x^2}{2}.$$

Calculando a derivada primeira, temos

$$A'(x) = -400 + x.$$

Encontremos agora os pontos críticos, para isto, calculemos os valores de $x$ tal que

$$A'(x) = 0.$$

Isto é,

$$-400 + x = 0$$

$$x = 400.$$

Apliquemos agora o teste da Derivada Segunda. Como $A'(x) = -400 + x$, temos

$$A''(x) = 1.$$

Portanto, a maior área encontrada para $x = 400$, é

$$A(400) = 400\left(\frac{800 - 400}{2}\right) =$$

$$= 400 \cdot 200 = 80.000.$$

Ou seja, a maior área é $80.000\, m^2$, de um retângulo com dimensões $x = 400\, m$ e $y = 200\, m$.

# CONCLUSÃO

Com este estudo podemos observar que a derivação é uma ferramenta muito importante para o cálculo. Pois vimos, principalmente pelos Testes da Primeira e Segunda Derivada, que podemos estudar além da concavidade, os pontos de Máximos e Mínimos de qualquer função a uma variável, sem precisarmos de fórmulas, o que facilita o nosso estudo quando estamos trabalhando com problemas de otimização, em particular de áreas e dimensões, os quais foram estudados neste trabalho. Podemos observar também, que o estudo da Concavidade e do Máximo e Mínimo de uma função, não se restringe apenas a função do 2º grau, que na maioria das vezes é a única trabalhada no Ensino Médio, que podemos fazer este estudo para qualquer função a uma variável.

# REFERÊNCIAS


BOYER, Carl Benjamin. **Cálculo**. Tradução. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; v. 6).

HOFFMANN, Laurence D. **Cálculo: um curso moderno e suas aplicações.** Vol.1, 2ª edição- Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 1990.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de Matemática Elementar, 8.** 6ª edição – São Paulo: Atual, 2005.

THOMAS, Georgr B.. **Cálculo: Matemática.** Vol. 1, 11ª edição – São Paulo: Addison Wesley, 2009.

TORRES, Terezinha Ione Martins; GIRAFFA, Lucia Maria Martins. **O Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica: Da régua de calcular ao MOODLE .** MOAR, Eli. E: a história de um número. Tradução de Calife. Rio de Janeiro: Record, 2003. Disponível em http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/13057/12151. Acesso em 25/11/2010.

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria analítica v.1**/ George F. Simmons; tradução Seiji Hariki; revisão técnica Rodney Carlos Bassanezi, Sílvio de Alencastro pregnolatto. São Paulo: Pearson books, 1987.

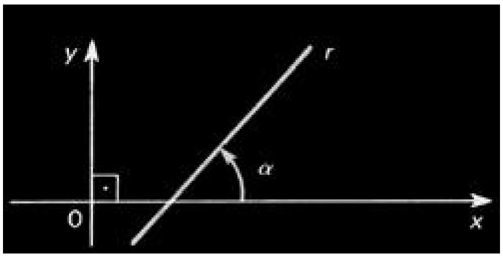
SWOKOWSKI, Earl William, 1926 – **Cálculo com Geometria Analítica**/ Earl W. Swokowski: tradução Alfredo Alves de Faria, com a colaboração dos professores Vera Regina L. F. Flores e Marcio Quintão Moreno; revisão técnica Antônio Pertence júnior – 2ª edição – são Paulo: Makron Books, 1994.

# ANEXOS

# ANEXO A- COEFICIENTE ANGULAR

***Definição A.1***: Coeficiente angular $(m)$ de uma reta $r$ não perpendicular ao eixo das abscissas é o número real $m$ que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação $\alpha$, ou seja:

$\boldsymbol{m = tg\ \alpha}$




***Definição A.2***: O coeficiente angular de uma reta que passa por dois pontos, $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ , é dado por

$$m = tg\ \hat{\alpha} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

com $x_1 \neq x_2$.

E a equação da reta que passa por um ponto $P(x_1, y_1)$, e cujo coeficiente angular é $m$, é dada por:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1).$$

# ANEXO B- LIMITE

***Definição B.1***: Seja $I$ um intervalo aberto ao qual pertence o número real $a$. Seja $f$ uma função definida para $x \in I - \{a\}$. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando $x$ tende a $a$, é $L$ e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$,

se para todos $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Em símbolo, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 | 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)$$

## *B.2* - Propriedades do Limite de uma Função

*1ª propriedade*

"se $c \in \mathbb{R}$ e $f$ é a função definida por $f(x) = c$, para todo $x$ real, então $\lim_{x \to a} c = c$."

*2ª propriedade*

Se $c \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então $\lim_{x \to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x) = c \cdot L$.

*3ª propriedade*

*Se* $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = M$, *então* $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = L + M$.

*4ª propriedade*

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to a} (f - g)(x) = L - M$.

*5ª propriedade*

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = M$, *então* $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = LM$.

*6ª propriedade*

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, *então* $\lim_{x \to a} (f)^n(x) = L^n, n \in \mathbb{N}^*$.

*7ª propriedade*

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ $e$ $\lim_{x \to a} g(x) = M \neq 0, então$ $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$.

*8ª propriedade*

Se

$\lim_{x \to a} f(x) = L,$ $então$ $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ $com\, L \geq 0$ $e$ $n \in \mathbb{N}^*$ $ou$ $L < 0$ $e$ $n$ $é$ $impar.$

# ANEXO C- FUNÇÃO CONTÍNUA

***Definição C.1*:** Seja $f$ uma função definida em um intervalo aberto *e a um elemento de I.* Dizemos que $f$ é contínua em $a$, se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Notamos que para falarmos em continuidade de uma função em um ponto é necessário que este ponto pertença ao domínio da função.

Da definição decorre que, se $f$ é contínua em $a$, então as três condições deverão estar satisfeitas:

1º) existe $f(a)$

2º) existe $\lim_{x\to a} f(x)$

3º) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

*Observação:* Seja $f$ uma função definida em um intervalo aberto I e $a$ um elemento de I. Dizemos que $f$ é descontínua em $a$ se $f$ não for contínua em $a$. Então as duas condições abaixo deverão estar satisfeitas:

1º) existe $f(a)$

2º) não existe $\lim_{x\to a} f(x)$ ou 3º) $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

***C.2* - Propriedades das Funções Contínuas**

**P.1 Teorema:**

Se $f$ e $g$ são funções contínuas em $a$, então são contínuas em $a$ as funções $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$, neste último caso, desde que $g(a) \neq 0$.

**P.2 Teorema do limite da função composta**

Se $\lim_{x\to a} g(x) = b$ e se $f$ é uma função contínua em $b$, então $\lim_{x\to a} (f o g)(x) = f(b)$, isto é, $\lim_{x\to a} (f o g)(x) = f(\lim_{x\to a} g(x))$.

**P.3 Teorema**

Se a função $g$ é contínua em $a$ e a função $f$ é contínua em $g(a)$, então a função composta $f o g$ é contínua em $a$.

**Observação:** A demonstração destes teoremas está além dos objetos deste trabalho para maior compreensão consulte o livro: fundamentos de matemática elementar, volume 8.