UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA – UEPB

CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS – CCHE

CAMPUS IV – POETA PINTO DO MONTEIRO

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MAELSON DA SILVA OLIVERA

POSSIBILIDADES DE LEITURA E ESCRITA NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA: MARAVILHAS DA MATEMÁTICA

MONTEIRO – PB

ABRIL DE 2016

MAELSON DA SILVA OLIVERA

POSSIBILIDADES DE LEITURA E ESCRITA NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA: MARAVILHAS DA MATEMÁTICA

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida.

MONTEIRO – PB

ABRIL DE 2016

O48p Oliveira, Maelson da Silva
Possibilidades de leitura e escrita no ensino de trigonometria [manuscrito] : maravilhas da matemática / Maelson da Silva Oliveira. - 2016.
58 p. : il.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, Departamento de Matemática".

1. Matemática. 2. Escrita. 3. Leitura. 4. Linguagem. 5. Trigonometria. I. Título.

21. ed. CDD 510

MAELSON DA SILVA OLIVERA

POSSIBILIDADES DE LEITURA E ESCRITA NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA: MARAVILHAS DA MATEMÁTICA

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de graduado em Licenciatura em Matemática.

Orientador: Dr. José Joelson Pimentel de Almeida.

Aprovado em 29 / 04 / 2016.

Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida / UEPB

Orientador

Gilberto Beserra da Silva Filho

Prof. Me. Gilberto Beserra da Silva Filho

Examinador

Tony Regy Ferreira da Silva.

Prof. Me. Tony Regy Ferreira da Silva

Examinador

DEDICATÓRIA

Às minhas três Marias:

Maria Ana da Silva Oliveira (Mãe)

Maria Assunção Farias Flores (Prima)

Maria Celeste Farias (Madrinha)

AGRADECIMENTOS

Ao professor Joelson Pimentel, pelas leituras sugeridas ao longo dessa orientação, por todo incentivo, dedicação e amizade.

À professora Marília Lidiane, por todo aprendizado, reflexões, incentivo e amizade.

Agradeço também aos professores Tony e Gilberto, por gentilmente avaliarem este trabalho.

Aos meus familiares, amigos, alunos e colegas de trabalho, pela compreensão durante esse período de produção acadêmica.

Aos professores do Curso de Licenciatura em Matemática, que contribuíram ao longo do curso, por meio das disciplinas e debates, para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos funcionários da UEPB, pela presteza e atendimento quando nos foi necessário.

Aos colegas de classe pelos momentos de amizade e apoio.

Seus sonhos são as letras do livro que
sua vida está escrevendo.
(Paulo Coelho)

ABSTRACT

This study is the analysis of text *Quatro demonstrações de medição de sombras*, available in book *Maravilhas da Matemática* (4th edition), which was published in 1956 by Lancelot Thomas Hogben. We seek to show how the text helps in learning trigonometry, and we keep an analytical look under the theory of semiotic representation registers and on the influence of language and mathematical language in the process of understanding and solving problems. Thus, we focused on researches from Luvison (2013), Fonseca e Cardoso (2009), Duval (2011), Brazil (1998), among others. At the end of this work, we see the strong presence of semiotic representation registers in the text in question, where the author refers to the use of different registers, for example, figural, symbolic and natural language, which act in convergence with the development demonstrations. Through literature search identified that textual exploration promotes student learning studying mathematics; that the language of the statements interfere in the process of interpretation and resolution thereof; and also found that if the practice of writing is a valuable tool in the learning process, not only the semiotic point of view, but also the language of concepts that were explored in the theoretical framework.

Keywords: Reading, Writing, Language, Trigonometry.

RESUMO

O presente estudo consiste na análise do texto *Quatro demonstrações de medição de sombras*, disponível no livro *Maravilhas da Matemática* (4º edição), o qual foi publicado em 1956 por Lancelot Thomas Hogben. Procuramos evidenciar de que maneira o texto auxilia na aprendizagem de Trigonometria, e para isso mantemos um olhar analítico sob a teoria dos registros de representação semiótica e sobre as influencias da linguagem e da linguagem matemática no processo de compreensão e resolução dos problemas. Assim, focamos em pesquisas de Luvison (2013), Fonseca e Cardoso (2009), Duval (2011), Brasil (1998), entre outros. Ao término deste trabalho, constatamos a forte presença dos registros de representação semiótica no texto em questão, onde o autor recorre ao uso de diferentes registros, como, por exemplo, os figurais, simbólicos e língua natural, os quais atuam em convergência com o desenvolvimento das demonstrações. Através da pesquisa bibliográfica identificamos que a exploração textual favorece a aprendizagem do aluno que estuda Matemática; que a linguagem dos enunciados interfere no processo de interpretação e resolução dos mesmos; e constatou-se também que a prática da escrita é uma ferramenta de grande valor no processo de aprendizagem, não somente do ponto de vista da semiótica, mas também das concepções de linguagem que foram exploradas no referencial teórico.

Palavras-chave: Leitura, Escrita, Linguagem, Trigonometria.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência que está presente em todos os lugares, por isso, desde o inicio dos tempos, é considerada uma das mais importantes ferramentas da sociedade. Por esse motivo, dominar seus conceitos e métodos básicos contribui tanto para o desenvolvimento da sociedade quanto para a formação individual do cidadão, uma vez que, para exercer a cidadania é necessário que o sujeito conheça e ponha em prática seus direitos e deveres. Notadamente, a Matemática contribui para a formação do cidadão, pois oferece-lhe saberes que o ajuda a exercer seu papel social, cumprindo assim com suas respectivas obrigações. Assim, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> Também é importante salientar que a compreensão e a tomada de decisões diante de questões políticas e sociais dependem da leitura crítica e interpretação de informações complexas, muitas vezes contraditórias, que incluem dados estatísticos e índices divulgados pelos meios de comunicação. Ou seja, para exercer a cidadania é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente, etc (BRASIL, 1998, p.27).

Dessa forma, cabe à escola inserir o conhecimento matemático no currículo do cidadão, porém essa tarefa não é fácil e as dificuldades são evidentes, principalmente quando se trata de ler e escrever em contextos que exigem a linguagem matemática. De acordo com Carrasco (2000) a dificuldade que as pessoas possuem ao ler e escrever usando linguagem matemática, é o que as impedem de compreender o conteúdo daquilo que está escrito, de transmitirem o que sabem de Matemática e até mesmo de aplicarem a Matemática.

Mas como a exploração da Leitura e Escrita no Ensino de matemática ainda não é tão frequente, temos por objetivo geral identificar como a exploração textual, através da prática da Leitura e da Escrita, favorece a aprendizagem do aluno que estuda Trigonometria. Assim, buscaremos identificar como a linguagem interfere no processo de aprendizagem de Matemática; verificar se a exploração de textos matemáticos pode auxiliar no processo de interpretação dos problemas; compreender como a teoria dos registros de representação semiótica influencia os processos de ensino e aprendizagem, como a prática de Leitura e da Escrita no Ensino de Trigonometria pode ser explorada a partir de textos do livro “Maravilhas da Matemática”.

Para alcançar tais objetivos, nos valeremos da Pesquisa Bibliográfica, de cunho interpretativista e com caráter qualitativo, visto que todas as ideias que serão expostas deverão surgir a partir de pesquisas e leituras com a finalidade de localizar e identificar aplicações do nosso objeto de pesquisa nas aulas de Trigonometria. Para isso, nos alicerçaremos no texto *Quatro demonstrações de medição de sombras* do capítulo *Euclides sem lágrimas ou O que* *se pode fazer com a Geometria* do livro *Maravilhas da Matemática*, de Hogben (1956). Esse texto é desenvolvido ao longo de vinte (20) páginas e aborda demonstrações geométricas ou trigonométricas, as quais são exploradas por meio de problemas contextualizados no Egito antigo.

Nesta nossa pesquisa, o primeiro capítulo é dedicado à revisão bibliográfica e é subdividido em três sessões: *Linguagem e linguagem matemática: análises e concepções*, *A prática da leitura e da escrita nas aulas de matemática* e *Os registros de representação semiótica.* A primeira sessão reúne pesquisas de teóricos que abordam diversas concepções sobre a forma com que a linguagem e a linguagem matemática atuam na aprendizagem de quem estuda Matemática. A segunda sessão reúne pesquisas sobre os benefícios da leitura e da escrita no Ensino de Matemática, evidenciando benefícios, desafios e tendências. A terceira sessão nos estabelece como funciona o processo de aprendizagem de Matemática do ponto de vista da Semiótica. Para melhor atender nossas expectativas, mantemos um olhar analítico sobre pesquisas de Luvison (2013), Fonseca e Cardoso (2009), Duval (2011), Brasil (1998), entre outros.

O segundo capítulo reúne a nossa metodologia de pesquisa, onde descrevemos minuciosamente a investigação do texto *Quatro demonstrações de medição de sombras* de Hogben (1956), enfatizando as leituras que auxiliam para a construção dos conceitos geométricos e trigonométricos, comparando-as com as teorias vistas em nossa revisão bibliográfica. Neste capítulo procuramos evidenciar os benefícios que a leitura de tal texto poderá contribuir para a aprendizagem dos conceitos de geometria nele abordados e, consequentemente, para a compreensão das ideias básicas de Trigonometria.

Na sequência apresentamos as considerações finais, onde trazemos uma reflexão acerca dos conhecimentos construídos durante a realização desta pesquisa e suas contribuições para o ensino e aprendizagem de Trigonometria. Por último, anexamos a versão original do texto que protagonizou esse trabalho.

CAPÍTULO I

1. Linguagem e linguagem matemática: análises e concepções

Nesta sessão abordamos análises e concepções acerca da atuação da linguagem e da linguagem matemática nos processos de ensino e aprendizagem dos alunos. Para isso, focaremos em estudos feitos por Luvison (2013), Fonseca e Cardoso (2009), entre outros. Tais teóricos enfocam concepções sobre linguagem matemática e o seu paralelismo com a língua materna[1]. Assim, eles abordam tais concepções na perspectiva do contexto escolar, em especial do ensino de Matemática, evidenciando aspectos negativos relacionados à divergência entre essas duas formas de linguagens e a importância de trabalhar meios que favoreçam o aprimoramento da linguagem Matemática, ou seja, as práticas de leitura e de escrita.

É comum encontrarmos nas aulas de Matemática uma grande diversidade de palavras desconhecidas, números, símbolos e outras representações que não fazem parte da nossa linguagem usual, e esse fato nos remete a conclusão de que a Matemática possui uma linguagem própria, contudo, de acordo com Luvison (2013), a Matemática não se restringe apenas à linguagem de códigos e símbolos, pois ela está representada em torno de um conjunto de significações que lhe são próprias e faz uso do movimento de outras linguagens. Desse modo,

> A dificuldade de ler e escrever em linguagem matemática, onde aparece uma abundância de símbolos, impede muitas pessoas de compreenderem o conteúdo do que está escrito, de dizerem o que sabem de matemática e, pior ainda, de fazerem matemática (CARRASCO, 2000, p. 192).

Assim, como a Matemática possui suas próprias especificidades linguísticas e ainda faz uso de diferentes tipos de linguagens, podemos destacar possíveis divergências que ocasionam o paralelismo entre a linguagem matemática e a língua materna. De acordo com Luvison (2013), a linguagem matemática se configura, nas aulas de Matemática, de forma reduzida, voltada exclusivamente para a leitura de enunciados, uma vez que a linguagem e a comunicação oral têm-se intensificado como movimentos específicos da língua materna. Dessa forma, devido à influência da língua materna, nas aulas de Matemática, onde seria o

---

[2] A língua materna também se conhece como idioma materno, língua nativa ou primeira língua. Trata-se do primeiro idioma que aprende uma pessoa ou, por outras palavras, da língua que se fala num país, e que é relativa aos naturais / nativos do mesmo. (Fonte: Disponível em http://conceito.de/lingua-materna, acesso em 04/03/2016, às 15h52min)

ambiente ideal para desenvolver a linguagem matemática, o professor acaba explorando essas potencialidades linguísticas de forma restrita. Por isso,

> É importante ressaltar que aproximar a língua materna da linguagem matemática se transforma em um elemento imprescindível para a compreensão desta. Mesmo diante das especificidades de cada linguagem, o movimento realizado pelo leitor e seu texto possibilita transcender as formalidades da própria língua, ou seja, o texto matemático possui uma função social (LUVISON, 2013, p. 62).

Sendo assim, ao proporcionarmos a aproximação entre a língua materna e a linguagem matemática, estaremos buscando meios de compreensão desta última, pois como a linguagem matemática possui especificidades próprias, a língua materna acaba não sendo suficiente para o seu entendimento. E, como alternativa para minimizar tais problemas de compreensão, podemos destacar a exploração de textos matemáticos, visto que este recurso auxilia na compreensão e atribuição de significado ao que é lido, enfatizando assim a sua função social. Dessa forma, Luvison (2013) destaca que

> Cada sujeito atribui ao que lê uma compreensão e um significado diferente; a cada momento, os textos, as imagens, as palavras movimentam-se como uma espécie de alimento que transcende a própria escrita, pois, além dela, existe a constituição do sujeito-leitor, que se coloca na leitura e na escrita, trazendo a sua história de vida e suas marcas culturais (p. 66).

Assim, de acordo com Bakhtin (2000), o texto é definido como um objeto significante e que não existe fora da sociedade, por isso, o autor é considerado o regente do texto que escreve, é responsável por cada linha e criador da "imagem de linguagem" que lhe é própria. Dessa forma, o texto matemático acaba se tornando um objeto imprescindível para o processo de interação entre a língua materna e a linguagem matemática. Luvison (2013) destaca que:

> Escrever sobre suas hipóteses e sobre os registros do outro, mobiliza o aluno a organizar suas ideias, a repensar, a reescrever, a significar e (re) significar seus pensamentos, suas reflexões e conjecturas. Quando esses dizeres são compartilhados, a linguagem matemática se coloca como um movimento necessário e importante em sala de aula. Ler, escrever, comunicar ideias faz com que ocorra uma circulação de gêneros, e são esses que irão propor significado a essas discussões (p. 65).

E quando se trata do ambiente escolar, podemos enfatizar diversos problemas relacionados ao ensino, como, por exemplo, a incompletude entre as formas de linguagens empregadas. Esse fato pode ocasionar a incompreensão, por parte dos alunos, dos problemas convencionais. Luvison (2013) afirma que é preciso levar para as aulas um movimento leitor e escritor, o qual possibilite uma relação maior com a linguagem. Segundo ela, é preciso mobilizar a complementaridade entre as linguagens, para que possamos assim promover um dialogismo entre tais. E no que diz respeito ao ensino de Matemática,

> É comum observar o quanto tem sido problemática, dentro da escola, a não compreensão pelo aluno dos problemas convencionais, dos enunciados de exercícios ou outros gêneros textuais que envolvam a linguagem matemática, tornando a sua compreensão cada vez mais distante do contexto da sala de aula (LUVISON, 2013, p. 63).

Dessa forma, dentre os diversos problemas ocasionados pela divergência entre as formas de linguagens empregadas no ensino de Matemática, podemos destacar também que, de acordo com Luvison (2013), além da falta de interpretação, há também a incompreensão da própria linguagem, ou seja, o aluno não observa sentido no que lê, ocasionando um distanciamento com o texto matemático, fazendo assim como que essa relação não trouxesse um "dizer", mas ao contrário, um "fazer", distante e sem significado. Luvison (2013) afirma que

> Alguns estudos de Andrade (2005) enfatizam que o sujeito que lê está imerso em uma diversidade de expressões, compreendendo e interpretando diferentes linguagens, através de uma rede de conhecimentos. Santos (2005) também considera que há uma interface entre a língua materna e linguagem matemática, pois não existe uma única forma de linguagem, significado ou representação: um mesmo "modelo matemático" pode ser trabalhado de formas diferentes (p. 59).

Com isso, Luvison (2013) destaca que a leitura e a escrita são indissociáveis, na prática, pois ao escrever, existe uma relação entre os pensamentos, as hipóteses e as conclusões do escritor, ou seja, existe uma relação dialógica, pois não há como escrever e não pensar no leitor do seu próprio texto. Assim,

> A riqueza da leitura está atrelada às relações que são atribuídas em sua prática, Dessa maneira, ler está além de assimilar conteúdos disciplinares: é um instante de "dar voz" (sujeito-texto-comunicação) ao que está escrito, mobilizando e impulsionando o leitor-escritor (LUVISON, 2013, p. 67).

Contudo, Luvison (2013) alerta que ler para mera resolução de exercícios não garante ao aluno sua apropriação da linguagem ou dos conceitos matemáticos. Assim, ler apenas por obrigações pedagógicas não trará benefícios aos alunos, pois, ainda de acordo com Luvison (2013, p. 68), "o ato de ler e o de escrever estão além da decodificação de palavras e frases, e implicam comunicar, refletir, tornar-se presente através das palavras, estabelecendo comparações e despertando a imaginação em busca da compreensão da realidade". Assim:

> Potencializando momentos de leitura e escrita, é possível refletir e inferir continuamente, e a compreensão ocorre em uma relação constante entre vivências, conhecimentos e análises já realizadas e a realizar. Além de comunicar, a leitura e a escrita estão atreladas a um processo que é cultural, carregando marcas entre tempos, espaços, funções e desenvolvimento humano (LUVISON, 2013, p. 68).

Com isso, ressaltamos que as práticas de leitura e de escrita podem estreitar a relação entre a língua materna e a linguagem matemática, possibilitando a compreensão dos termos que são específicos da Matemática e melhorando o processo de interpretação e resolução dos problemas. Assim, cabe ao professor de Matemática incluir essas práticas em suas aulas.

2. A prática da leitura e da escrita nas aulas de matemática

Atualmente o ensino de Matemática é cercado por diversas dificuldades, uma delas, e talvez a mais frequente, é o fato de o aluno não conseguir interpretar os problemas. Muitas vezes ele até domina conceitos matemáticos e consegue aplicar procedimentos de resolução, mas de forma isolada, uma vez que para fazê-lo na situação problema necessita-se do exercício da interpretação textual. Tendo em vista tal dificuldade, uma alternativa relevante é que os professores de Matemática adotem o hábito da leitura e da escrita em sala de aula, visto que os alunos devem se familiarizar com termos exclusivos dessa ciência e assim expandirem o seu vocabulário, sua capacidade de compreensão da linguagem matemática e consequentemente suas estratégias de resolução de problemas. Acerca desse indicador, Fonseca e Cardoso (2009) afirmam que

> É comum encontrarmos depoimentos de professores sobre as dificuldades que seus alunos enfrentam na leitura de enunciados e de problemas de Matemática. Em geral, nós os professores que ensinamos Matemática, dizemos que os alunos não sabem interpretar o que o problema pede e vislumbramos como alternativa para a solução da dificuldade, pedir ao professor de Língua Portuguesa que realize e/ou reforce atividades de interpretação de textos com nossos alunos (p. 64).

Esse fato nos faz refletir sobre a prática da leitura e da escrita nas aulas de Matemática, pois, como citado anteriormente, apesar do professor de língua portuguesa trabalhar interpretação de textos, os professores de Matemática ainda os procuram para reforçar tal habilidade dos alunos, porém, segundo Fonseca e Cardoso (2009, p. 64), "a sugestão dos professores de Matemática aos colegas professores de Língua Portuguesa, embora possa contribuir para a leitura de uma maneira geral, não ataca a questão fundamental da dificuldade específica com os problemas e com outros textos matemáticos". Assim, podemos explorar essa prática nas aulas de Matemática.

> Práticas de leitura não apenas de textos, mesmo que teóricos, de Matemática como também de descrições ou explicações escritas de procedimentos são, muitas vezes, preteridas em benefício das explicações orais, dos macetes, das receitas. E quando os professores promovem a leitura de tais textos, restringem as possibilidades dessa leitura a apenas um apoio à atividade Matemática propriamente dita, sem explorar o que os textos podem proporcionar de informação, instrução, aprendizagem (FONSECA e CARDOSO, 2009, p. 66).

Esse recurso traz diversos benefícios ao processo de aprendizagem, pois é algo que atrai a atenção dos alunos. De acordo com Luvison (2013), ao ler um texto matemático, o aluno pode estabelecer relações de interferência e levantamento de hipótese com o próprio texto, em que este se torne um problema em movimento, não se restringindo a uma relação única e singular de interpretação.

No que se refere à escrita, de acordo com Luvison (2013), ao escrever sobre suas reflexões, o aluno se mobiliza a refletir sobre seus pensamentos, propondo sentido a suas hipóteses, escrevendo e reescrevendo sobre o que pensa, e, nesse movimento, ele é responsável pelo que escreve, ou seja, é o autor do seu próprio texto. Dessa forma, podemos destacar um valor imensurável na exploração desses recursos, porém o simples fato do professor os conhecer não é suficiente para que eles sejam colocados em prática, pois, nas aulas de Matemática, geralmente há falta de oportunidades para que o professor possa explorá-los. Como nos afirma Fonseca e Cardoso (2009):

> Nas aulas de Matemática, as oportunidades de leitura não são tão freqüentes quanto poderiam, pois os professores tendem a promover muito mais atividades de "produção matemática" entendida como resolução de exercícios. Práticas de leitura não apenas de textos, mesmo que teóricos, de matemática, como também de descrição ou explicação escrita de procedimentos são, muitas vezes, preteridas em benefício das explicações orais, dos macetes, das receitas (p.66).

Contudo, existem diversos obstáculos que atrapalham a prática da leitura e da escrita nas aulas de Matemática, e o fato de tentar identificá-los acaba se tornando um desafio para o professor. Segundo Fonseca e Cardoso (2009, p. 64) "talvez, para muitos de nós, não seja fácil perceber tais obstáculos e identificar seus reflexos para que possamos definir atitudes didáticas apropriadas para o trabalho com a leitura desses tipos específicos de textos".

Assim, faz-se necessário conhecer diferentes formas com que os textos podem ser explorados, pois, de acordo com os autores acima essas diferentes formas também constituem especificidades dos gêneros textuais próprios da matemática, cujo reconhecimento é fundamental para a atividade de leitura.

Ainda segundo Fonseca e Cardoso (2009, p. 65), "essas diferentes formas também constituem especificidades dos gêneros textuais próprios da Matemática, cujo reconhecimento é fundamental para a atividade de leitura, sob pena de os objetivos definidos para o exercício não serem alcançados". Mesmo assim, existem diversas formas com que o recurso da leitura e da escrita pode ser explorado nas aulas de Matemática.

> A leitura e a produção de enunciados de problemas, instrução para exercícios, descrições de procedimentos, definições, enunciados de propriedades, teoremas, demonstrações, sentenças matemáticas, diagramas, gráficos, equações, etc. demandam e merecem investigação e ações pedagógicas específicas que contemplem o desenvolvimento de estratégias de leitura, a análise de estilos, a discussão de conceitos e de acesso aos termos envolvidos, trabalho esse que o educador matemático precisa reconhecer e assumir como de sua responsabilidade (FONSECA e CARDOSO, 2009, p. 65).

Dessa forma, concluímos que a prática da leitura e da escrita nas aulas de Matemática pode, além de atrair a atenção dos alunos, proporcionar aos mesmos um contato mais significativo com a disciplina e sua contextualização.

> A leitura de textos que tenham como objeto conceitos e procedimentos matemáticos, história da Matemática ou reflexões sobre a Matemática, seus problemas, seus métodos, seus desafios podem, porém, muito mais do que orientar a execução de determinada técnica, agregar elementos que não só favorecem a constituição de significados dos conteúdos matemáticos, mas também colaborem para a produção de sentidos da própria Matemática e de sua aprendizagem pelo aluno (FONSECA e CARDOSO, 2009, p. 66)

Assim, é importante ressaltar que a prática da leitura e da escrita pode ser explorada de diversas formas, onde uma delas pode ser através da história da matemática, porém, antes de tudo, deve ser levado em consideração, segundo Fonseca e Cardoso (2009) a preocupação de contextualizar o ensino de Matemática na realidade do aluno, colocando em evidência o papel social da escola e do conhecimento matemático. Acerca da prática da escrita, Luvison (2013) cita que:

> [...] a escritura pode emergir de um contexto reflexivo de caráter mais livre, expressivo e individualizado, e [...] a cognição matemática deve ser inserida num contexto de produção que vá além da expressividade, ou seja, que envolva reflexão crítica e preconize processos colaborativos de diferentes dimensões e de tomada de consciência sobre as experiências individuais e coletivas (POWELL E BAIRRAL, 2006, p. 53, apud LUVISON in NACARATO E LOPES, 2013, p. 62).

Entretanto, lembramos que a prática de leitura e escrita não é um trabalho a ser desempenhado exclusivamente na disciplina de língua portuguesa, pois, quando os professores que ensinam Matemática notam que o aluno não sabe interpretar o que o problema pede, de acordo com Fonseca e Cardoso (2009), geralmente vislumbram como alternativa para a solução dessa dificuldade, pedir ao professor de língua portuguesa que realize ou reforce atividades de interpretação de textos.

3. Os Registros de Representação Semiótica

Nesta seção, buscaremos analisar como os registros de representação semiótica influenciam na aprendizagem de Matemática dos alunos, pois evidenciamos nas seções anteriores diversos problemas decorrentes da divergência entre a linguagem dos problemas e enunciados matemáticos e a língua natural nos processos de leitura e interpretação dos mesmos, o que consequentemente influencia a resolução destes. Segundo Duval (2011), para descrevermos o funcionamento cognitivo do pensamento matemático em atos, devemos primeiro introduzir a noção de registro de representação semiótica, pois:

> De um ponto de vista epistemológico, todas as produções matemáticas são necessariamente de ordem semiótica. Além disso, a descrição das atividades matemáticas mostra que seus processos de exploração e de prova, e mesmo de aplicação à realidade, consistem na transformação de representações semióticas. O funcionamento cognitivo do pensamento matemático, mesmo no que denominamos "conceitualização", é eminentemente semiótico (DUVAL, 2011, p. 103).

Contudo, para Duval (2011) a língua é tida como um registro de representação semiótica, e isso nos leva à necessidade de analisá-la a partir dos conceitos de registros de representação e de semiótica, para que assim possamos identificar como eles atuam no processo de compreensão dos objetos e, até mesmo, do pensamento matemático empregado no processo de interpretação e resolução de problemas.

Santaella (1990) diz que a palavra Semiótica deriva da raiz grega semeion, a qual significa signo. Assim, ela define Semiótica como sendo a ciência dos signos, mas é importante ressaltar que, neste contexto, o termo signo designa linguagem, sendo assim diferente daquele que é utilizado na Astronomia. Portanto, Semiótica, de acordo com Santaella (1990), é a ciência geral de todas as linguagens.

Duval (2011, p. 104) cita que "os "registros" são as ferramentas que permitem analisar todas as produções matemáticas, e em primeiro lugar aquelas construídas com objetivo de ensino ou de aprendizagem". Isto é:

> Os registros são sistemas cognitivamente produtores, ou mesmo "criadores", de representações sempre novas. E a produção de novas representações permite descobrir novos objetos. [...] o conteúdo das representações produzidas por um registro apresenta sempre duas propriedades. De um lado, ele se refere ou parece se referir a um objeto. E é em razão dessa relação que as representações semióticas cumprem uma função cognitiva. Por outro lado, ele se inscreve em um continuum de sentido que torna possível a discriminação de diferentes unidades de sentido [...] e isso permite passar de um tipo de representação a outro (DUVAL, 2011, p. 72)

Mas para compreendermos a função dos registros precisamos também estabelecer a definição de códigos uma vez que esses termos podem ser confundidos. Dessa forma, códigos, de acordo com Duval (2011, p. 72), "são sistemas que permitem transmitir uma informação discretizada ou que comutam a codificação de uma informação em função do modo físico de transmissão (áudio/visual, analógico/numérico, etc.)". Contudo:

> Do ponto de vista cognitivo, a diferença entre registro e código não está na maior ou menor complexidade dos sistemas semióticos e seu tipo de produção. Ela está no fato de que os registros abrem possibilidades de transformação do conteúdo das representações produzidas, o que os códigos não permitem (DUVAL, 2011, p. 73).

Ou seja, os registros, para Duval (2011) possuem como tipo de produção semiótica um conteúdo que articula várias unidades de sentido, o que possibilita a transformação dessas produções através da substituição de tais registros por equivalência referencial, isto é, as operações semióticas próprias de cada registro. Como exemplo de registros pode destacar as línguas, os gráficos, as figuras, etc. Já os códigos, possuem como tipo de produção semiótica uma sequência de caracteres, onde cada caractere resulta de uma escolha de codificação dos dados. Assim, a única possibilidade de mudança de sistema semiótico dos códigos é a de codificação e decodificação, como, por exemplo, os códigos binários, alfabetos, etc. No caso dos sistemas de escrita.

> São assim códigos, mas sua particularidade é a de se fundir seja com a produção fonética de uma língua (alfabetos), seja com as ideias que a língua permite produzir vocalmente (ideograma). Fusão só funciona realmente quando ela se torna automática ou espontânea. E aqui, encontramos não só o motivo da aprendizagem da leitura, mas também sua complexidade (DUVAL, 2011, p. 72).

Esse fato nos ajuda a compreender a importância de explorar e utilizar o recurso da leitura e da escrita no ensino, visto que estes estão diretamente ligadas à língua como registro de representação semiótica. Dessa maneira, precisamos compreender o funcionamento de uma representação semiótica, e, acerca disso, o autor anterior destaca que:

> É preciso considerar uma segunda representação que é associada à primeira por uma variação que podemos produzir de maneira sistemática. Em outras palavras, não podemos jamais interpretar uma representação semiótica qualquer que seja, se considerarmos apenas ela, independentemente de todas aquelas nas quais ela pode ser transformada (DUVAL, 2011, p. 103-104).

Porém, vale lembrar que a leitura e a escrita, neste caso, não devem ser tidas apenas como códigos a serem decodificados, e sim como instrumentos articuladores das ideias que a língua permite reproduzir através das suas diversas representações. Assim, no que diz respeito à ideia de representações semióticas, é importante ressaltar que

> São as frases em linguagem natural, as equações, e não as palavras, os algarismos e as letras. São as figuras, os esquemas, os gráficos e não os pontos, raramente visíveis, ou os traços. Muitas vezes associamos os signos a essas unidades elementares de sentido, que são apenas caracteres para decodificar: letras, siglas, algarismos, às vezes palavras-chave, ou os gestos da mão. (DUVAL, 2011, p. 38)

Esse fato nos remete à questão norteadora desta pesquisa, *como a leitura e a escrita podem favorecer a aprendizagem nas aulas de Trigonometria?* pois, de acordo com Fonseca & Cardoso (2009), para a realização da atividade de leitura nas de aulas de Matemática, é necessário conhecer as diversas formas em que o conteúdo do texto pode ser escrito. Assim, os autores citam que essas diferentes formas também constituem especificidades dos gêneros textuais próprios da Matemática, cujo reconhecimento é fundamental para a atividade de leitura. E isso também nos remete à necessidade de analisar o a importância da prática da leitura para a compreensão dos enunciados.

3.1. A compreensão de enunciados

Como já vimos, a resolução de problemas matemáticos está diretamente ligada à compreensão textual dos mesmos, e esta, por sua vez, depende do processo de decodificação da escrita empregada. Neste caso podemos destacar a influência da língua natural, pois, de acordo com Duval (2011), ela intervém em todos os enunciados de problemas de aplicação de conhecimento que são dados aos alunos. Dessa forma, ainda de acordo com o autor, a língua natural é um dos registros utilizados em Matemática para formular definições, teoremas, para efetuar raciocínios matemáticos e para justificar soluções. Sendo assim,

> A compreensão dos enunciados de problemas [...] seria um caso de decodificação das informações que teriam sido codificadas no enunciado do problema. E, assim, definimos as "competências" de codificação e decodificação dos enunciados nas investigações de avaliação na matemática (DUVAL, 2011, p. 74).

Assim, como a língua natural é um registro que está diretamente ligado à Matemática e seu ensino, Duval (2011) destaca o fato de que os alunos sofrem ao descobrir que a utilização da língua em Matemática não tem lá muita coisa a ver com aquela que é comumente praticada fora do contexto matemático, e isso origina o problema da escolha do registro que possa auxiliar na análise no funcionamento da língua natural. Assim,

> Existe entre a língua natural e os outros registros uma distância cognitiva considerável, mesmo os outros registros discursivos próprios da matemática ou da lógica. É o que torna difícil a conversão dos enunciados da língua natural para representações em outro registro (DUVAL, 2011, p.125).

Sendo assim, identificamos também nos registros de representação semiótica uma grande contribuição para o processo de compreensão dos enunciados matemáticos, visto que, segundo o autor, para que isso ocorra, faz-se necessária a utilização de representações auxiliares. Notadamente, todas as representações auxiliares devem cumprir a mesma condição semiótica: ser representações bidimensionais.

3.2. A transformação de representações semióticas

Para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, este deve permitir a conversão de um registro de representação em outro, conservando assim parte ou totalidade do objeto matemático. Dessa forma, para Duval (2003) a originalidade da atividade

Matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. Assim, essa atividade de transformação requer que o sujeito diferencie o sentido e a referência dos símbolos ou signos.

Para compreendermos como funciona a transformação dos registros de representação devemos primeiro classificar e diferenciar os registros. O autor ainda ressalta que os registros podem ser discursivos ou não discursivos, monofuncionais ou multifuncionais, onde nos registros discursivos ninguém considerará apenas as línguas naturais e formais ou as escritas simbólicas originárias do mesmo tipo de representação. Analogamente,

> Para os registros não-discursivos ninguém considera somente as imagens, as figuras geométricas (sem nenhuma codificação), os gráficos cartesianos ou os esquemas originários do mesmo tipo de representação visual. Cada um desses registros favorece um tipo de transformação das representações que os outros registros não permitem e que são as operações próprias desse registro (DUVAL, 2011, p.117).

Assim, os registros monofuncionais são próprios da Matemática, porém os registros multifuncionais são utilizados fora dela, para as funções de comunicação, de objetivação, e não primeiramente, ou mesmo raramente, para uma função de tratamento. Duval (2003) classifica os registros de acordo com a tabela abaixo:

Figura 1. Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático.

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: DUVAL (2003, p. 14).

De acordo com Duval (2003), há dois tipos de transformações de representações semióticas: *os tratamentos e as conversões*. Sendo assim:

- Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, para efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou

> um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e simetria.
>
> - As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica (DUVAL, 2003, p. 16).

Dessa forma, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos ou para obter um segundo registro que serve de suporte aos tratamentos que se efetuam em outro registro. Assim, essas conversões e tratamentos detêm grande influencia nos registros de representação semiótica e consequentemente nas aplicações matemáticas.

CAPÍTULO II

Vimos no capítulo anterior, diversos aspectos relevantes ao estudo da leitura e da escrita no ensino de Matemática, onde buscamos justificar sua exploração como recurso didático a partir dos problemas decorrentes da divergência entre a língua materna e a linguagem Matemática nas aulas de Matemática. Nesse sentido, exploramos pesquisas que evidenciaram tais problemas e, a partir de então, investigamos como a leitura e a escrita favorecem o processo de aprendizagem. Investigamos também o papel da leitura e da escrita sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica, onde identificamos apenas aspectos positivos que induzem à exploração de tais recursos. Assim, buscaremos nesse segundo capítulo aplicar as teorias sobre leitura e escrita, que foram estudadas anteriormente, no nosso objeto de estudo, o texto *Quatro demonstrações de medição de sombras* de Hogben (1956).

1. Leitura e escrita no ensino de Trigonometria

Dentre as diversas dificuldades que cercam o ensino de Matemática atual, podemos destacar o fato de o aluno não conseguir interpretar os problemas, e consequentemente, não saber que formula ou teoria utilizar para resolvê-lo. Muitas vezes o discente até domina conceitos matemáticos e consegue aplicar procedimentos de resolução, mas de forma isolada, uma vez que para fazê-lo na situação problema precisa do exercício da interpretação textual. Tendo em vista tal dificuldade, uma alternativa relevante é que os professores de Matemática adotem o hábito da leitura e da escrita em sala de aula, visto que os alunos devem se familiarizar com termos exclusivos dessa ciência e assim expandirem o seu vocabulário, sua capacidade de compreensão da linguagem matemática e consequentemente suas estratégias de resolução de problemas.

> A dificuldade que os alunos encontram em ler e compreender textos de problemas está, entre outros fatores, ligada à ausência de um trabalho específico com o texto do problema. O estilo no qual os problemas de matemática geralmente são escritos, a falta de compreensão de um conceito envolvido no problema, o uso de termos específicos da matemática que, portanto, não fazem parte do cotidiano do aluno e até mesmo palavras que têm significados diferentes na matemática e fora dela – total, diferença, ímpar, média, volume, produto – podem constituir-se em obstáculos para que ocorra a compreensão (SMOLE E DINNIZ, 2001, p. 72, citado por FONSECA & CARDOSO, 2009, p.64).

Dessa forma, de acordo com Carrasco (2000), há duas possibilidades de soluções a serem apresentadas: a primeira consiste em explicar e escrever, em linguagem usual, os resultados matemáticos; a segunda solução seria ajudar as pessoas a dominarem as ferramentas da leitura, ou seja, a compreenderem o significado dos símbolos, sinais e notações. Assim, acreditando na segunda solução apontada por Carrasco (2000), resolvemos pesquisar sobre possibilidades de leitura e escrita nas aulas de Trigonometria a partir do livro *Maravilhas da Matemática*[2], mais especificadamente os textos do capítulo VI. A partir daí procuraremos responder a seguinte questão: *como a leitura e a escrita podem favorecer a aprendizagem nas aulas de Trigonometria?* Assim, através da leitura e da escrita, pressupomos que poderemos fortalecer as conexões entre os alunos, a linguagem matemática e o saber trigonométrico.

1.1. Maravilhas da Matemática

Escrito por Lancelot Thomas Hogben, o livro *Mathematics for the Million* (Maravilhas da Matemática, na versão brasileira) teve sua quarta edição, a qual utilizamos, lançada pela editora *Globo* no ano de 1956. O livro possui 764 laudas e foi subdividido em 13 capítulos, onde o autor explora os mais diversos conceitos matemáticos, desde os princípios de contagem das civilizações antigas, às mais diversas demonstrações geométricas, trigonométricas, entre outras. Cada capítulo explora uma temática diferente, contextualizando suas abordagens em possíveis acontecimentos, sejam eles históricos, míticos, ou até mesmo imaginários. E esse fato facilita a leitura do livro, pois ele possui uma linguagem que, mesmo desatualizada devido às várias reformas ortográficas ocorridas após a sua publicação, é de fácil compreensão, visto que as frequentes ilustrações sugerem ideias e significados para algumas nomenclaturas que, na nossa língua natural, são desconhecidas.

O texto *Quatro demonstrações de medição de sombras*, o qual utilizamos nesta nossa pesquisa, é situado no IV capítulo: *Euclides sem lágrimas ou o que se pode fazer com a Geometria.* Esse texto é subdividido em quatro demonstrações, onde entendemos que são fundamentais para a aprendizagem de Trigonometria, pois envolvem ideias de geometria que são essenciais para a introdução das funções trigonométricas elementares que são exploradas por meio do triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente. Além disso, o autor desenvolve o texto explorando a linguagem natural e a linguagem matemática, e tal fato nos remete aos

[2] HOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da Matemática – Influencia e função da matemática nos conhecimentos humanos**. 4 Ed. Trad. Paulo Moreira da Silva, São Paulo – Rio de Janeiro – Porto Alegre; Editora Globo, 1956.

benefícios da leitura e da escrita que auxiliam na compreensão dos conceitos e enunciados matemáticos.

1.2. Análise de conteúdo do texto

Selecionamos para protagonizar nossa pesquisa o texto *Quatro demonstrações de medição de sombras,* de Hogben (1956). Tais demonstrações são fundamentais para a aprendizagem de Trigonometria, uma vez que, envolve ideias que são essenciais para a introdução das funções trigonométricas elementares: seno, cosseno e tangente. Além disso, o autor desenvolve o texto explorando a linguagem natural e a linguagem matemática, e tal fato nos remete aos benefícios da leitura e da escrita que investigamos no primeiro capítulo.

O autor inicia o texto enfatizando algumas ideias geométricas encontradas na luz e na sombra e, em seguida, relata o feito de Thales que, ao visitar o Egito, deixou a civilização do Nilo maravilhada quando este calculou a altura da pirâmide de Quéops medindo-lhe apenas a sombra. Ele ressalta ainda que Thales utilizou o mesmo princípio de medição arquitetônica adotado pelos construtores das pirâmides. Com isso, de acordo com Hogben (1956), a arte de medir sombras era umas das grandes artes da antiguidade e, ainda de acordo com ele, a geometria do triângulo resultou da prática da medição da sombra para fins arquitetônicos, com isso a geometria do retângulo resultou da prática de medir as superfícies dos terrenos. Assim, ao evidenciar essas diversas contextualizações da Matemática, o autor está mostrando ao leitor, onde e como aquilo poderá ser aplicado. Dessa forma,

> Por meio de situações-problema, extraídas dos contextos práticos em que essas grandezas se encontram – como na arquitetura, nas artes, nos esportes, na culinária, nas atividades comerciais e na leitura de mapas, plantas e croquis – evidenciam-se para os alunos as aplicações práticas da Matemática e a necessidade de contar com unidades padronizadas e com sistemas comuns de medida e também a necessidade de encontrar estimativas plausíveis (BRASIL, 1998, p. 69).

Nesse aspecto, ao introduzir com um texto que contextualiza as aplicações dos conceitos matemáticos que serão estudados nas quatro demonstrações seguintes, o autor busca nos elementos textuais uma saída que, para ele, auxilie na compreensão daquilo que ele pretende explorar, visto que, para Fonseca e Cardoso (2009)

> A leitura de textos que tenham como objeto conceitos e procedimentos matemáticos, história da Matemática ou reflexões sobre a Matemática, seus problemas, seus métodos, seus desafios podem, porém, muito mais do que orientar a execução de determinada técnica, agregar elementos que não só favorecem a constituição de significados dos conteúdos matemáticos, mas também colaborem para a produção de sentidos da própria Matemática e de sua aprendizagem pelo aluno (p. 66).

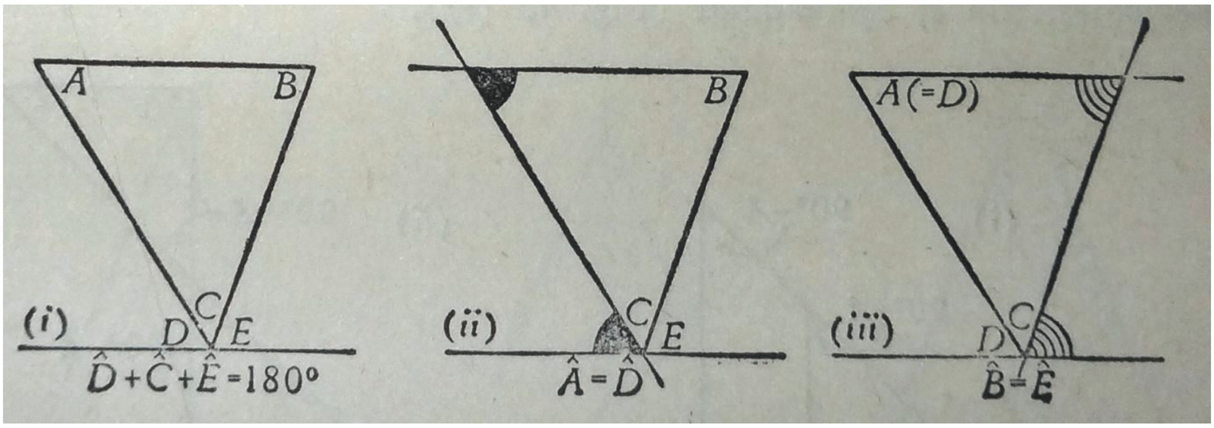
Dessa forma, ao explorar textos que contribuem para a compreensão de conceitos matemáticos, estamos desenvolvendo nos alunos habilidades que auxiliarão na interpretação e, consequentemente, resolução dos problemas. Assim, as quatro demonstrações estabelecidas por Hogben (1956) também auxiliarão na compreensão desses conceitos.

1.2.1. Primeira demonstração

Na primeira demonstração o autor faz uso da linguagem natural para descrever passo-a-passo que *A soma dos três ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos.* Assim, ele diz que basta apoiarmos um dos vértices do triângulo em uma barra reta e, em seguida, alinhar o triângulo de forma que o lado oposto do vértice apoiado fique paralelo à barra.

Com isso, ele recorre a uma imagem, que vimos como registro de representação semiótica, onde esta representa exatamente aquilo que ele descreveu anteriormente. Além da representação geométrica utilizada, nessa imagem percebemos que o autor utiliza também uma representação algébrica para mostrar que os ângulos dos vértices D, C e E, juntos, formam 180°.

Figura 2. Registro figural da primeira demonstração



Fonte: HOGBEN (1956, p. 151).

Por causa da trivialidade dessa demonstração, o autor apóia-se nela para demonstrar os seguintes casos de equivalência entre dois triângulos:

i. Dois triângulos são equivalentes quando têm um lado e dois ângulos equivalentes;
ii. Conhecido um dos ângulos não retos de um triângulo retângulo conhece-se o outro ângulo não reto;
iii. Triângulos retângulos com o mesmo ângulo agudo são semelhantes;
iv. Triângulos retângulos que, colocados vértice sobre vértice, ficarem com as hipotenusas e um dos lados em linha, são semelhantes;

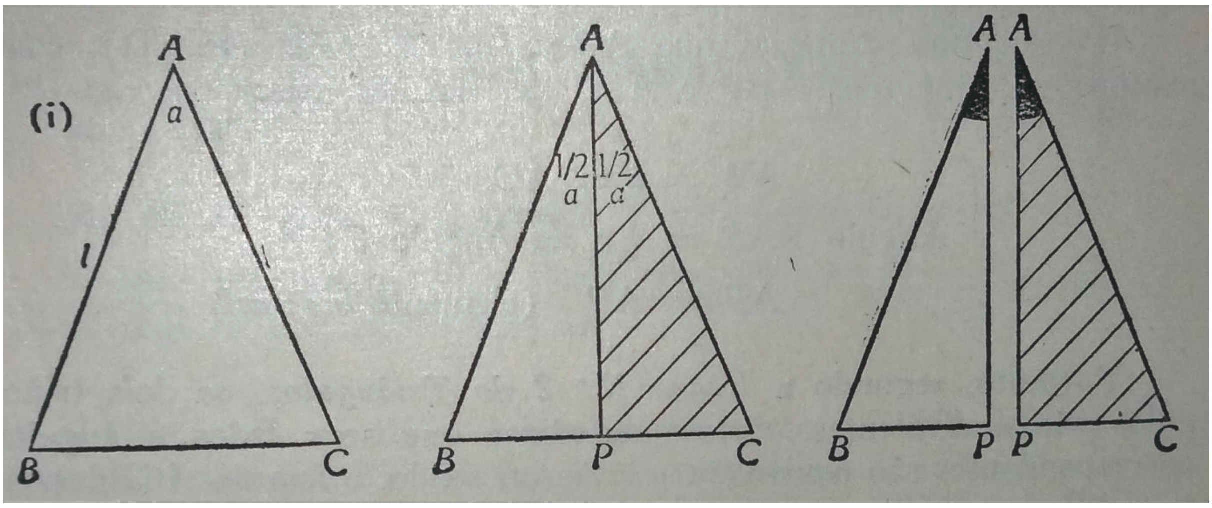
v. A perpendicular, baixada do ângulo reto sobre a hipotenusa, divide o triângulo retângulo em dois outros triângulos retângulos, semelhantes entre si e ao triângulo primitivo.

Assim, a primeira demonstração explora a utilização da conversão de registros, onde o autor parte da enunciação, em língua natural, e representa a demonstração por meio de registros figurais e simbólicos, auxiliando assim na compreensão daquilo que foi descrito.

1.2.2. Segunda demonstração

Na segunda demonstração é enunciado que *Se dois lados de um triângulo são equivalentes, os ângulos que lhes são opostos também são equivalentes; e, se dois ângulos são equivalentes, os lados opostos também serão.* Para fazer tal demonstração, Hogben (1956) diz que dividindo-se ao meio o ângulo formado entre os dois lados equivalentes do triângulo, ou seja, traçando a bissetriz deste ângulo, dissecamos o triângulo em dois triângulos retângulos. Dessa forma, pelo primeiro critério de equivalência de triângulos, o autor conclui a dupla verdade desta demonstração.

Figura 3. Registro figural da segunda demonstração



Fonte: HOGBEN (1956, p. 153).

Nesta demonstração evidenciamos a influência dos termos exclusivos da Matemática, como é o caso do termo *bissetriz,* na compreensão daquilo que foi enunciado. A compreensão de tais termos é fundamental para o encaminhamento da resolução do problema e até mesmo para a decodificação daquilo que está sendo descrito, porém é importante ressaltar que, neste texto, encontramos a oportunidade de explorar e decifrar linguagens e procedimentos matemáticos, enriquecendo assim o vocabulário e consequentemente possíveis contextualizações do aluno, pois, de acordo com Fonseca e Cardoso (2009), a leitura de textos que tenham como objeto conceitos e procedimentos matemáticos, colaboram para a produção de sentidos da própria Matemática e de sua aprendizagem pelo aluno.

Ainda aproveitando-se dessa segunda demonstração, o autor nos mostra como traçar ângulos de 30°, 45° e 60°, para assim podermos medir sombras e calcular alturas. Para explicar melhor tal informação, Hogben (1956) relata o fato de que quando o sol está a 45° sobre o horizonte, a altura de uma pirâmide será igual ao comprimento da sua sombra mais a metade da base. Este fato nos auxiliará na compreensão da terceira demonstração que segue.

1.2.3. Terceira demonstração

A terceira demonstração diz que *A relação dos lados correspondentes dos triângulos semelhantes é a mesma*. Para fazê-la, o autor recorre à comparação de dois triângulos semelhantes e, partindo dos postulados de que *os triângulos cujas bases estão sobre uma reta e cujos vértices opostos coincidam, terão a mesma altura* e *as áreas dos triângulos de mesma altura estão na mesma razão que a sua base*, ele consegue comprovar a veracidade de sua demonstração.

Figura 4. Registro simbólico e língua natural da terceira demonstração.

"Se dois lados de um triângulo são equivalentes, os ângulos que lhes são opostos, também são equivalentes; e, se dois ângulos são equivalentes, os lados opostos também o serão".

A demonstração enuncia, pois, uma dupla verdade, mas a dissecação é a mesma para ambas. Disseca-se o triângulo em dois, dividindo-se o ângulo formado pelos lados equivalentes (isto é, o ângulo não-equivalente do triângulo) pela sua bissetriz, segundo a primeira regra de dissecação.

(i) Se nos afiançam que AB $= l =$ AC (Fig. 44 (i)), comparando os triângulos ABP e APC verificamos que:

$$\text{AB} = l = \text{AC}$$
$$\text{Ângulo BAP} = \tfrac{1}{2}a = \text{Ângulo CAP}$$
$$\text{AP} = \text{AP} \quad \text{(elemento comum)}$$

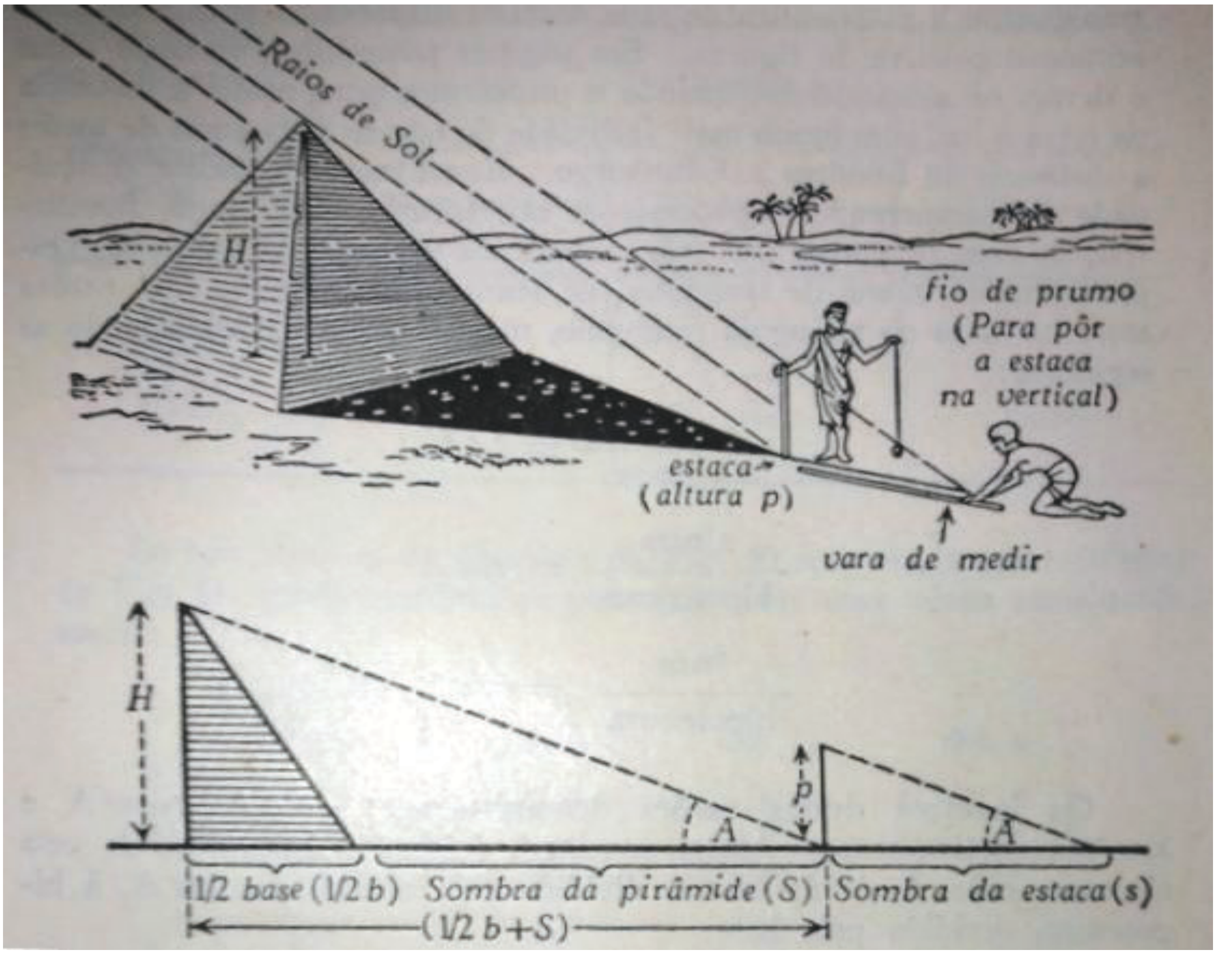
Fonte: HOGBEN (1956, p. 154).

Como podemos observar, o autor recorre aos mesmos meios de demonstração anteriores, evidenciando assim a importância do registro figural para a compreensão dos procedimentos descritos em língua natural, visto que ele recorre à *Fig. 44 (i)*, que, como podemos observar nos anexos, trata-se da representação figural da segunda demonstração.

Assim, o autor desenvolve suas demonstrações de forma gradativa, conforme os conceitos vão sendo explorados.

A partir dessa terceira demonstração o autor nos remete ao mito de como Thales calculou a altura da grande pirâmide de Quéops num dia qualquer, pois para utilizar o método citado no inicio do texto era necessário que o sol estivesse a 45° sobre o horizonte, porém na região em que as pirâmides foram edificadas isso só ocorria em apenas dois dias do ano. O feito de Thales deixou a população maravilhada, pois consistia apenas em relacionar as razões entre a altura e a base de dois triângulos retângulos equivalentes, onde o primeiro tinha como altura a própria altura da pirâmide e, como base, a metade da base da pirâmide mais o comprimento de sua sombra; e o segundo triângulo tinha como altura um bastão fixado ao chão e, como base, o comprimento de sua sombra.

Figura 5. Como Thales mediu a altura da grande pirâmide de Quéops



Fonte: HOGBEN (1956, p. 156).

Esse fato nos remete à importância de contextualizar os problemas matemáticos, porém, de acordo com Brasil (1998) há uma distorção perceptível referente à interpretação equivocada da ideia de contexto, pois este transcende o fato de trabalhar com aquilo que se supõe fazer parte do dia-a-dia do aluno.

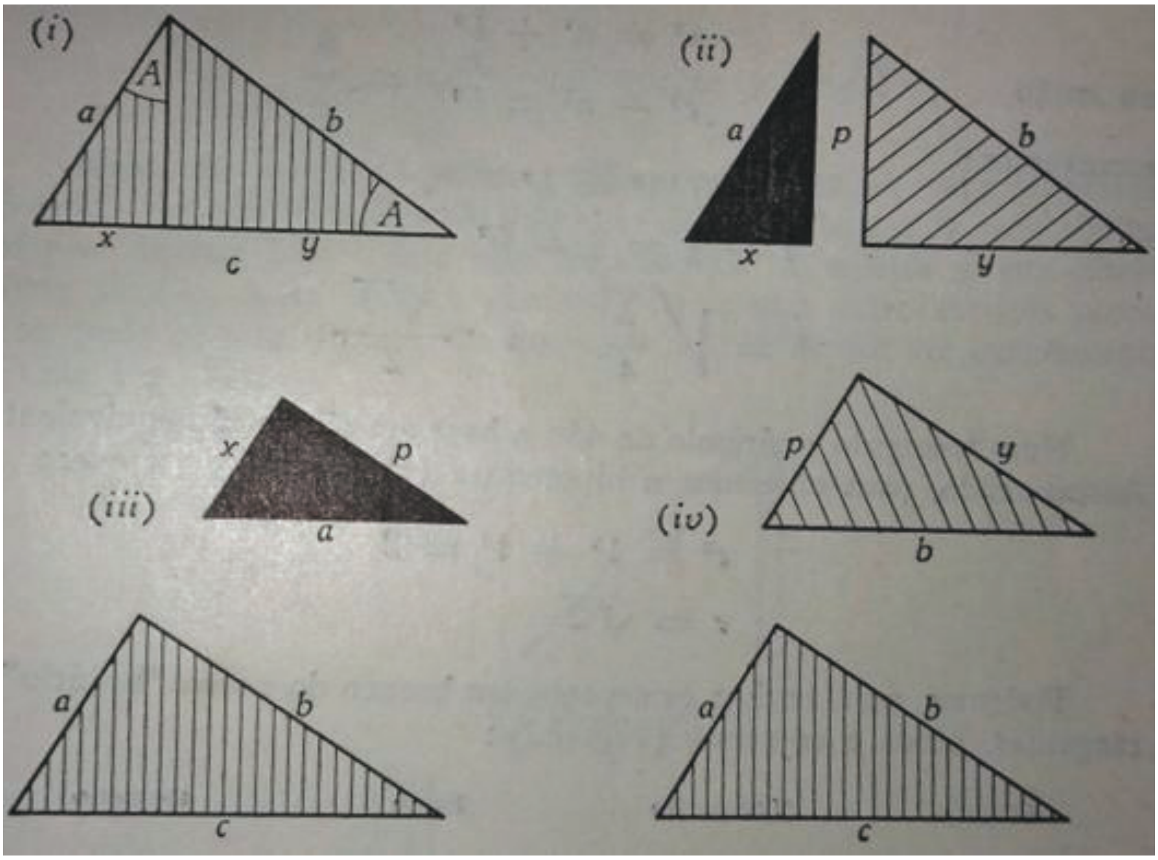
> Embora as situações do cotidiano sejam fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos a serem estudados, é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata (BRASIL, 1998, p. 23).

Dessa forma, a passagem estabelecida pelo autor coloca um imenso valor para o processo de aprendizagem de Matemática, visto que ele demonstra a veracidade de sua afirmação e em seguida expõe uma situação problema que contextualiza a aplicação daquilo que acabou de demonstrar.

1.2.4. Quarta demonstração

A quarta e última demonstração relatada por Hogben (1956, p. 163) diz que “o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados da base e da altura”. Para fazer tal demonstração, o autor recorre ao quinto caso de equivalência de triângulos que este mostrou ainda na primeira demonstração: A perpendicular, baixada do ângulo reto sobre a hipotenusa, divide o triângulo retângulo em dois outros triângulos retângulos, semelhantes entre si e ao triângulo primitivo (p. 153).

Figura 6. Registro figural da quarta demonstração



Fonte: HOGBEN (1956, p. 165).

Assim, como podemos observar basta apenas dispor esses triângulos de forma que possamos perceber quais os lados e ângulos são correspondentes. Para dar continuidade à demonstração, o autor sugere que apliquemos a demonstração anterior: *A relação dos lados correspondentes dos triângulos semelhantes é a mesma.* Dessa forma, de acordo com Hogben (1956), temos as seguintes conclusões:

$\boxed{\frac{a}{c} = \frac{x}{a} \Rightarrow a^2 = cx}$ Analogamente $\boxed{\frac{b}{c} = \frac{y}{b} \Rightarrow b^2 = cy}$

Assim, o autor sugere a combinação desses resultados.

Figura 7. Registro simbólico (algébrico) da quarta demonstração.

Combinando os dois resultados, e como $c = x + y$, vemos que:

$$a^2 + b^2 = cx + cy$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c(x + y)$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

Fonte: HOGBEN (1956, p. 165).

No decorrer do texto o autor enfatiza a importância dessa quarta demonstração na determinação das razões dos ângulos que, em Trigonometria, são as razões elementares: seno cosseno e tangente. Mas é importante ressaltar que sem o conhecimento prévio dos casos de equivalência de triângulos, não seria possível compreendê-la, pois:

> Embora se saiba que alguns conhecimentos precedem outros e que as formas de organização sempre indicam um certo percurso, não existem, por outro lado, amarras tão fortes como algumas que podem ser observadas comumente, tais como [...] desenvolver o conceito de semelhança, para depois explorar o teorema de Pitágoras. (BRASIL, 1998, p. 22)

Assim, como não seria possível compreender tal demonstração sem antes conhecermos os casos de equivalência de triângulos, o autor estabelece uma ordem nas demonstrações, de forma que o conhecimento gerado em torno de cada uma fosse aumentando gradativamente para que assim pudéssemos utilizar as demonstrações anteriores nas posteriores. Esse fato é uma característica marcante do texto, visto que conforme os conceitos vão sendo aprofundados, nos aproximamos cada vez mais das aplicações em trigonometria.

1.3. Considerações acerca da Trigonometria explorada no texto

Evidenciamos no texto, que são abordados diversos conceitos que são importantes para a compreensão daquilo que é aplicado em trigonometria. O relato do feito de Thales, por exemplo, nos traz a ideia das primeiras aplicações com razões trigonométricas, evidenciando ainda a possibilidade de aquilo ser aplicado em outros contextos que envolvam os conceitos de triângulos semelhantes.

Notamos também a forte presença dos registros de representação semiótica nas demonstrações e sua importância nos conceitos trigonométricos que foram explorados, pois conforme as demonstrações foram desenvolvidas o autor vai representando os enunciados através de diversos registros além da língua natural, como, por exemplo, os figurais, simbólicos ou algébricos.

Após explorar os casos de equivalência de triângulos, o autor introduz aplicações que necessitam da utilização de razões trigonométricas, além do conceito de ângulo. Assim, ele apresenta as razões trigonométricas elementares: seno, cosseno e tangente; e nos estabelece uma tabela seguinte:

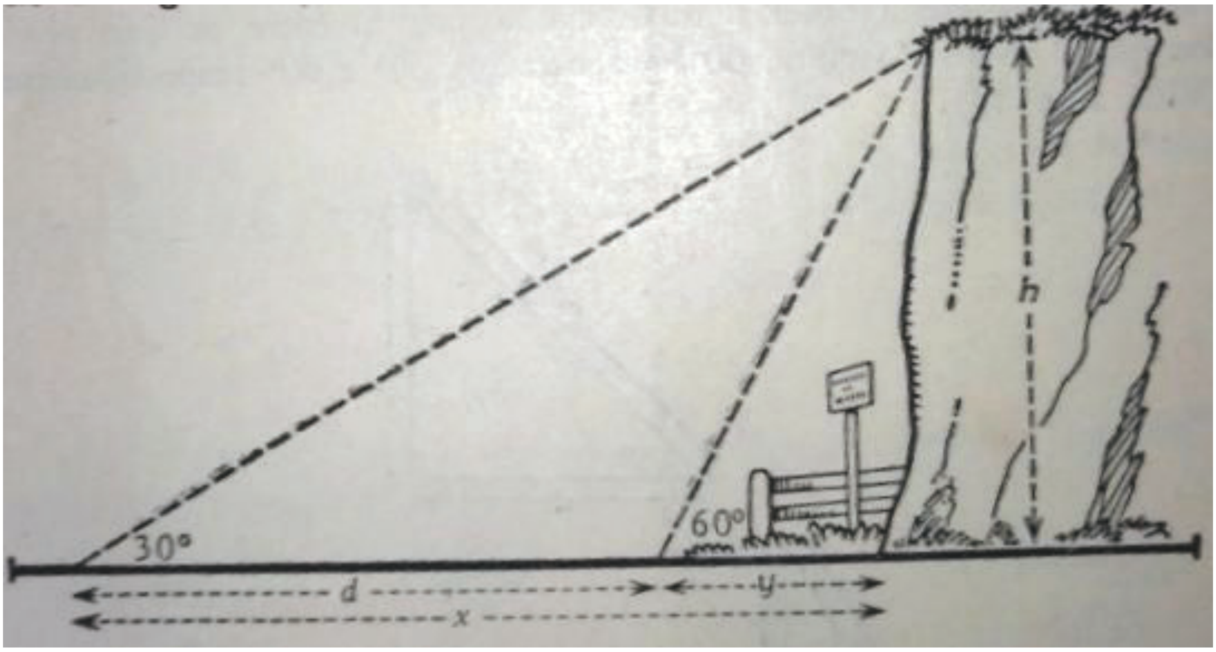
Figura 8. Registro da Tabela trigonométrica dos ângulos de 30°, 45° e 60°

Ângulo	Tangente	Seno	Co-seno
30°	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
60°	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Fonte: HOGBEN (1956, p. 166).

Essa tabela é comumente encontrada em livros didáticos, pois possui grande importância na resolução de problemas que envolvem esses respectivos ângulos e que necessitam da utilização dessas razões trigonométricas elementares. Evidenciamos também a constante preocupação do autor em contextualizar as aplicações dos conceitos que aborda, como é o caso da representação abaixo:

Figura 9. Como se mede a altura de um barranco quando não se tem acesso à sua base



Fonte: HOGBEN (1956, p. 168).

Assim, indicadores como esse mostram aos alunos a importância de estudar Matemática, porque possibilitam identificar quando e como aplicar aquilo que é estudado.

Dessa maneira, os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática estão pautados em princípios decorrentes de estudos, pesquisas, práticas e debates, cujo objetivo principal é o de adequar o trabalho escolar a uma nova realidade, marcada pela presença dessa área do conhecimento em diversos campos da atividade humana. Dessa forma,

> no ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras, escritas numéricas); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados (BRASIL, 1998, p. 56 – 57).

Sendo assim, evidenciamos a importância dos Registros Semióticos e a complexidade que giram em torno da transição de um registro para outro, e não podemos deixar de mencionar que D'Amore (2012, p. 98) fala que "em Matemática, e especialmente em geometria, as coisas são difíceis de dizer e entender, porque existe uma contínua e sutil mistura de linguagens". Ainda sobre os Sistemas de Representações Semiótica, D'Amore (2012) cita que

> Uma vez aprendida a manipulação das imagens, para compreender, elas valem, muitas vezes, mais do que mil palavras corretas; a questão não diz respeito apenas ao aprendiz, o estudante, mas também ao pesquisador, o criador de matemática (D'AMORE, 2012, p. 98).

Assim, como a Trigonometria é um conteúdo programático ainda para o Ensino Fundamental, concluímos que a exploração do texto de Hogben (1956) proporcionará um grande aprendizado no processo de introdução e aprofundamento de Trigonometria, evitando que os alunos tenham uma imagem negativa da Matemática e consequentemente promoverem a construção de uma sólida concepção com relação à importância do estudo da Trigonometria.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante das considerações expostas no decorrer do trabalho, é possível afirmar que a resolução dos problemas matemáticos está diretamente ligada à compreensão textual dos mesmos, e esta, por sua vez, depende do processo de decodificação da escrita empregada. Assim, identificamos a forte influência da língua natural nesse processo de resolução de problemas, onde ela assume diversas funções, dentre as quais podemos destacar a formulação de definições, teoremas, efetuar raciocínios matemáticos e para justificar soluções. Dessa forma, ela se faz presente em todos os enunciados que são dados aos alunos,

Assim, percebemos que a Matemática possui suas próprias especificidades linguísticas e ainda faz uso de diferentes tipos de linguagens, e isso pode ocasionar o paralelismo entre a linguagem matemática e a língua materna ou natural, causando assim possíveis dificuldades no processo de compreensão e, consequentemente, resolução dos problemas. Dessa forma, ao explorar textos que contribuem para a compreensão de conceitos matemáticos, estamos desenvolvendo nos alunos habilidades que auxiliarão a sanar essas possíveis dificuldades.

No que diz respeito ao ensino de Trigonometria, concluímos que a exploração do texto de Hogben (1956), auxiliará de diversas formas, pois os conceitos que foram abordados no decorrer das quatro demonstrações envolvem ideias de geometria que são essenciais para a introdução das funções trigonométricas elementares que são exploradas por meio do triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente. Além disso, o autor desenvolve o texto explorando a linguagem natural e a linguagem matemática, e tal fato nos remete aos benefícios da leitura e da escrita que auxiliam na compreensão dos conceitos e enunciados matemáticos.

No texto de Hogben (1956) percebemos também que o autor explora o uso de diversos termos exclusivos da Matemática, o que ocasiona o aprimoramento do vocabulário matemático do aluno, colaborando assim para a produção de sentidos da própria Matemática e de sua aprendizagem. De tal modo, a compreensão de tais termos é fundamental para o encaminhamento da resolução de problemas. Assim, encontramos em nosso objeto de estudo a oportunidade de explorar e decifrar linguagens, procedimentos matemáticos e, consequentemente, possíveis contextualizações para o aluno.

Neste caso, a contextualização se dá não apenas no sentido de identificar as aplicações dos conceitos nas práticas cotidianas dos alunos, mas também no sentido de atribuir significado ao saber matemático, usando diferentes representações e realizando diversos tratamentos e variadas conversões do objeto matemático, constituindo assim uma metodologia que favorece a aprendizagem significativa ao aluno.

Ainda no texto, notamos também a forte presença dos registros de representação semiótica em todas as demonstrações, e sua importância nos conceitos trigonométricos que foram explorados, pois, conforme as demonstrações foram desenvolvidas, o autor vai representando os enunciados através de diversos registros além da língua natural, como, por exemplo, os figurais, simbólicos ou algébricos.

Em nosso trabalho a leitura e a escrita foram explorados sob duas óticas: da lingüística e da semiótica. Como a linguística é a ciência da linguagem verbal, concluímos que a exploração da leitura e da escrita, sob essa ótica, é extremamente enriquecedora para as aulas de Matemática, pois, precisamos conhecer diferentes formas com que os textos podem ser explorados, onde essas diferentes formas constituem especificidades dos gêneros textuais próprios da Matemática, cujo reconhecimento é fundamental para o alcance de objetivos definidos para o ensino de Matemática, como é o caso da resolução de problemas. Assim, do ponto de vista da linguística, a exploração da leitura e da escrita além de atrair a atenção dos alunos, proporciona aos mesmos um contato mais significativo com a Matemática e sua contextualização.

Do ponto de vista da semiótica, ciência de toda e qualquer linguagem, a leitura e a escrita atuam de forma mais abrangente do que aquela descrita pela linguística, pois abrange não somente a linguagem verbal, mas também a linguagem figural e representativa, possibilitando assim a articulação entre os registros, os quais podem representar o objeto de diferentes formas (conversão de registros), e este fato, mesmo sendo complexo, nos chamou a atenção, pois o texto, o qual analisamos, propõe situações que favorecem as conversões, facilitando assim a percepção do aluno frente às possíveis situação do cotidiano e as representações matemáticas, possibilitando assim reflexões acerca de atividades que os encaminhem a fazer relações com as representações matemáticas e as situações problemas que, possivelmente, possam ser vivenciadas por eles.

Portanto, explorar a leitura e a escrita sob esses dois pontos de vistas nos auxiliou a identificar as maneiras que esses recursos podem ser articulados nas aulas de Trigonometria, mas o benefício maior foi identificar o ponto de convergência entre essas duas óticas, que são justamente os benefícios que tais recursos podem trazer aos processos de ensino e aprendizagem dos alunos, uma vez que possibilitarão uma maior aproximação do aluno com as contextualizações dos conceitos matemáticos.

REFERÊNCIAS

BAKHTIN, Mikhail. **Estética da criação verbal** / Mikhail Bakhtin. 3 ed. São Paulo: Martin Fontes, 2000. p. 281 – 300.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. . Brasília : MEC / SEF, 1998. p. 23 – 80.

CARRASCO, Lucia Helena Marques: **Leitura e escrita na matemática**. In: Iara C.B et al. (orgs). Ler e escrever: um compromisso de todas as áreas, 4 ed. Porto Alegre: editora da Universidade /UFRGS, 2000. p.190 – 192.

D'AMORE, Bruno. **Matemática, estupefação e poesia**. São Paulo: Livraria da Física. 2012. p. 98 – 100.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas** / organização Tânia M. M. Campos; [tradução Marlene Alves Dias] Raymond Duval. – 1. Ed. – São Paulo: PROEM, 2011. p. 22 – 125.

FONSECA, Maria da Conceição Fonseca e CARDOSO, Cleusa de Abreu. **Educação Matemática e letramento: textos para ensinar Matemática, Matemática para ler o texto**. In: NACARATO, Adair Mendes e LOPES, Celi Espasandin. Escritas e Leituras na Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2005, p. 63 - 76.

HOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da Matemática – Influencia e função da matemática nos conhecimentos humanos**. 4 Ed. Trad. Paulo Moreira da Silva, São Paulo – Rio de Janeiro – Porto Alegre; Editora Globo, 1956. p. 149 – 169.

LUVISON, Cidinéia da Costa. **Leitura e Escrita de diferentes gêneros textuais: inter-relação possível nas aulas de matemática**. In: NACARATO, Adair Mendes e LOPES, Celi Espasandin. Indagações, Reflexões e práticas em educação matemática – Adair Mendes Nacarato, Celi Espasandin Lopes (Organizadoras). 1 – Ed. – Campinas, SP: Mercado de letras, 2013. p. 57 – 82

MACHADO, Silvia Dias. **Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica** / Silvia Dias Alcântara Machado (org.). – Campinas, Sp: Papirus, 2003 (Coleção Papirus Educação) p. 10 – 30.

SANTAELLA, Lucia. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2007. (Coleções primeiros passos;) p. 01 – 05.

ANEXOS

QUATRO DEMONSTRAÇÕES DE MEDIÇÃO DE SOMBRAS

Para nós, produtos urbanos da civilização nórdica, habituados a morar em casas de grandes janelas, dotadas de todo o confôrto moderno, com gás, luz elétrica, relógios e até mesmo (ao menos para os mais felizes) geladeiras e aspiradores de pó, bem custa imaginar a importância que tinham luz e sombra, nas velhas civilizações criadoras das primeiras cidades de pedra. Hoje em dia, precisamos inventar experiências que mostrem aos meninos que a luz, atravessando uma fresta, caminha segundo uma trajetória reta, e que os raios do sol são paralelos. Os primeiros habitantes de cidades, que tinham apenas por janelas estreitos orifícios pelos quais a luz do sol e o luar se coavam, fazendo cintilar a poeira em suspensão, viviam na abundância da luz solar que projetava sombras longas e nítidas, bem definidas na areia. Não precisavam de quem lhes dissesse que a luz "caminha segundo trajetórias retas" ou que raios de luz provindos de objetos muito distantes formam entre si ângulos tão pequenos que bem se pode considerá-los *paralelos*. Podiam percebê-lo à própria custa, a qualquer hora do dia ou da noite (Fig. 41).

Quando Tales visitou o Egito e calculou a altura da Grande Pirâmide medindo-lhe a sombra, a velha civilização do Nilo já havia sucumbido, sucessivamente, aos assírios e aos hititas. Conquanto nos afirmem as crônicas de seu tempo ter êle maravilhado os egípcios com êste proceder, não resta a menor dúvida que êle empregara o

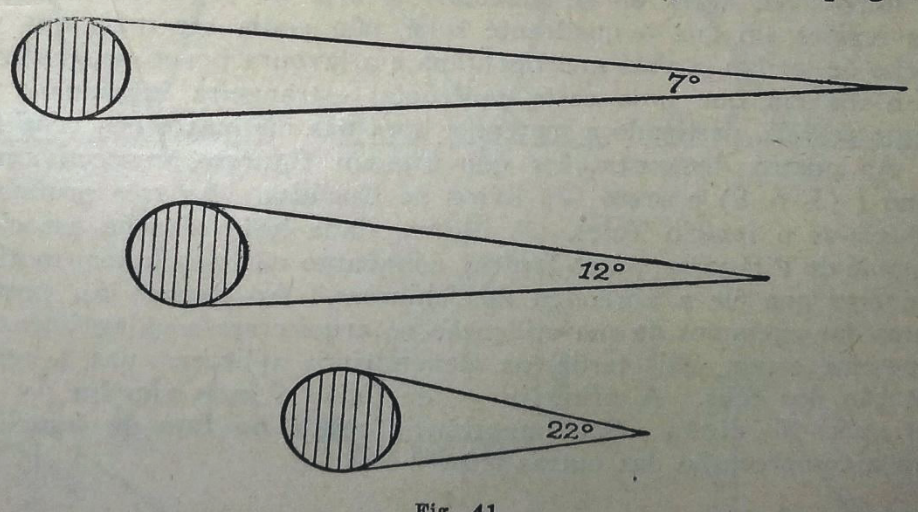


Fig. 41

Quanto mais distante um corpo celeste, menor o ângulo formado pelos raios de luz provenientes de suas extremidades. Quando a distância é muito grande, os raios parecem paralelos. O ângulo existente entre os dois pontos mais afastados do disco solar, ou lunar (tal como é observado da terra) é de apenas meio grau, aproximadamente. O paralelismo dos raios do sol ou da lua era um conhecimento comuníssimo para os homens que viviam antes da invenção do vidro, em casas de janelas altas e estreitas.

mesmo princípio de medição arquitetônica adotado pelos construtores das pirâmides. A arte de medir sombras era uma das grandes artes da antiguidade. A geometria do triângulo resultou da prática da medição da sombra para fins arquitetônicos, do mesmo modo que a geometria do retângulo resultou da prática de medir a superfície dos terrenos, com o fito de taxar o pequeno lavrador. A geometria estava em pleno florescer, no Egito e na Mesopotâmia, quando os povos nórdicos erigiram aquêles círculos e avenidas de pedra que ainda hoje se podem ver em Devon e Cornwall, províncias a que aportavam os navios fenícios em busca de estanho. Aliás, em tôdas as regiões em que êste metal era abundante, encontram-se ruínas de inúmeras aldeias totalmente constituídas de choupanas de pedra. Os nórdicos, como os bantus, jamais construíram templos ou cidades por iniciativa própria. O atraso dos habitantes da Europa setentrional não era devido à sua estupidez — como cria Aristóteles, o apóstolo da escravatura, — ou como ensinava o culto Said de Toledo na época em que os mouros construíam magníficos balneários destinados a serem destruídos pelos mesmos conquistadores nórdicos que, expulsando os judeus, introduziram na arte espanhola o odor de santidade que ela até hoje conserva. Aristóteles e Said tinham tanta razão em desprezar o nórdico, quanto os civilizados modernos que espezinham os bantus. Todos êsses críticos severos esquecem-se de tomar em consideração as condições materiais que possibilitaram o advento das civilizações. Todo progresso era impossível, antes de se descobrir a arte de registrar o tempo. Nas regiões em que o quadrante solar não podia ser mais que um enfeite de jardim, a vida metropolitana e a lavoura pouco progrediram até o dia em que uma casta sacerdotal estrangeira introduziu um relógio-de-vela, destinado a marcar a hora das matinas e das vésperas.

As quatro demonstrações que seguem figuram, respectivamente, no I (5, 6, 8) e sexto (7) livros de Euclides. As três primeiras, conhecia-as o fenício Tales. A última ainda hoje se acha associada ao nome de Pitágoras, outro fenício, conquanto não nos faltem motivos para crer que êle a aprendeu dos chineses. Ao explicá-las, pretendemos dar exemplos de sua utilização na arquitetura e na agrimensura e mostrar como, mais tarde, os alexandrinos aplicaram-nas à representação dos céus. A primeira — de tôdas a mais simples — não tem aplicação direta. Sua importância reside no fato de contribuir para a compreensão das outras três.

Demonstração 5

"A soma dos três ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos".

Para demonstrar esta verdade, tudo o que temos a fazer é apoiar o vértice de um triângulo numa barra reta e girá-lo até que o lado oposto fique paralelo à barra. Na Fig. 42 (i), (ii) e (iii), as legendas esclarecem o processo, que se pode resumir como segue:

$$A + B + C = D + C + E$$ *(Regra N.º 2 de Paralelismo)*

$$D + C + E = 180^\circ$$ *(Regra N.º 1 dos Ângulos — Fig. 33 (i)).*

A demonstração é tão simples que aproveitaremos o ensejo para explicar como é usada para ilustrar os princípios da medição de sombras, expostos nas três demonstrações que seguem.

(*a*) *Dois triângulos são equivalentes quando têm um lado e dois ângulos equivalentes.*

A regra confere com a que aprendemos páginas atrás, a chamada *Regra N.º 3 dos Triângulos,* que afirma que se pode traçar um triângulo, conhecidos o lado *a* e os ângulos B e C. E, se ao invés de B e C se conhecesse A (ângulo oposto ao lado *a*, conhecido) e B, fàcilmente se calcularia o ângulo C da maneira seguinte:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$\therefore \quad C = 180^\circ - (A + B)$$

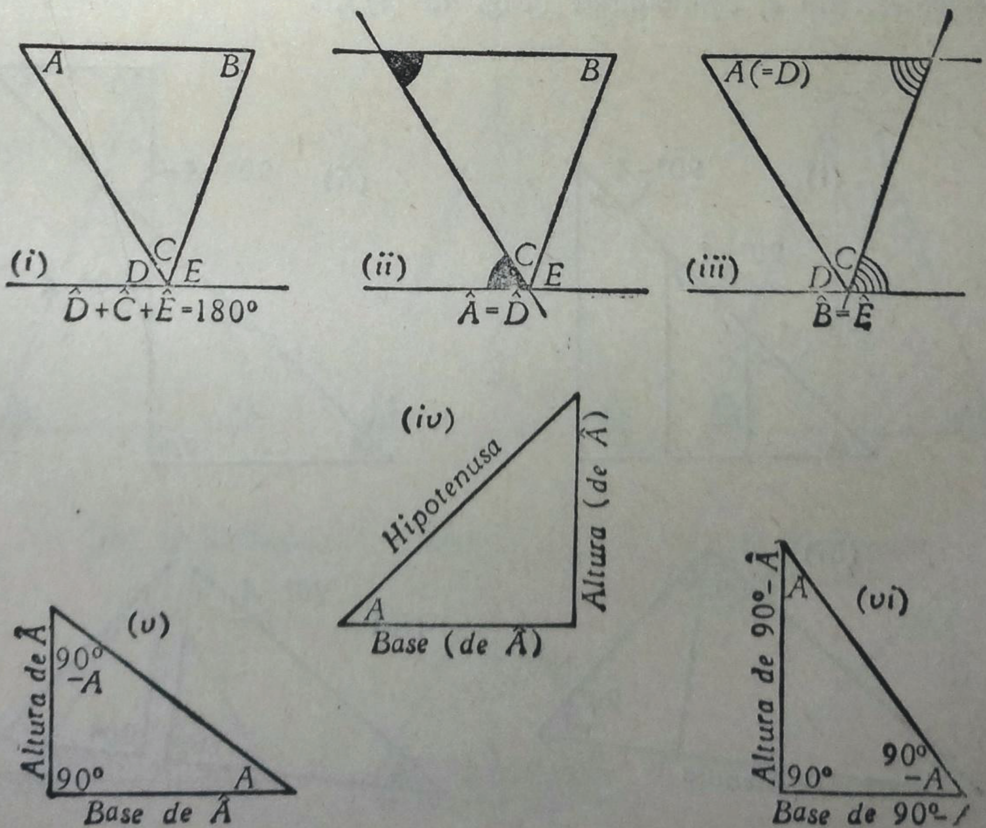


Fig. 42. — DEMONSTRAÇÃO 5.

isto é, se A fôr 60° e B = 60°, C será 180° — (60° + 60°) ou C = 60°. Se A fôr 45° e B = 90°, C será igual a 180° — (45° + 90°), isto é, 45°. Se A fôr 30° e B = 90°, C será igual a 60°. Reciprocamente, conhecidos A e C, podemos calcular B. Por exemplo, se A fôr 60° e C = 90°, B = 180° — (A + C), isto é, 30°.

(*b*) *Conhecido um dos ângulos não-retos de um triângulo retângulo, (A), conhece-se, ipso-facto, o outro ângulo não-reto (90°—A).*

Isto, aliás, não é novidade. Se os três ângulos de um triângulo valem respectivamente A, 90° e (90° — A), sua soma vale 180°, isto é

$$A + 90^\circ + 90^\circ - A = 180^\circ$$

Os três lados do triângulo retângulo têm denominações especiais. O lado maior, oposto ao ângulo reto, chama-se *hipotenusa*. Sendo A um dos ângulos não-retos, o lado que lhe é oposto se chama *altura*. O terceiro lado se chama *base*. E' evidente que as denominações *base* e *altura* dependem da posição do triângulo e que a altura, com referência ao ângulo 90° — A, é a base com referência a A, e vice-versa. (Fig. 42 (iv), (v) e (vi)).

(*c*) *Triângulos retângulos com o mesmo ângulo agudo são semelhantes, isto é, equiângulos* (Fig. 43 (i)).

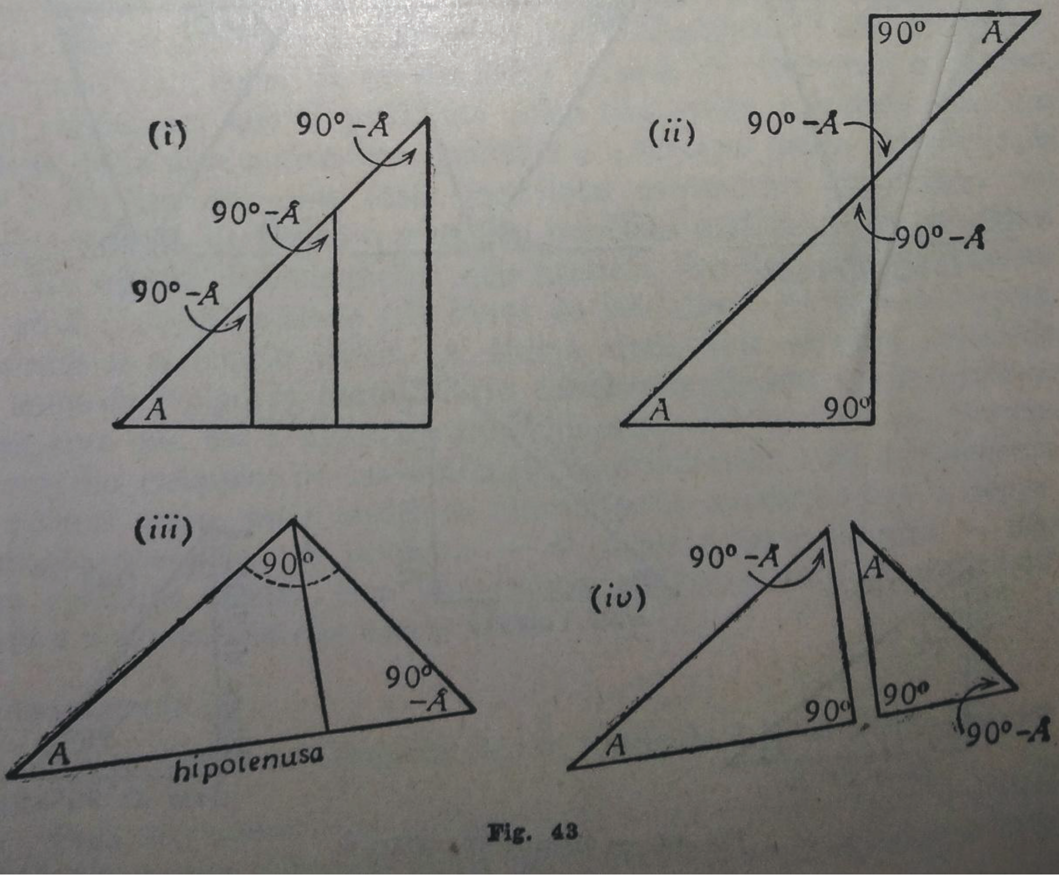


Fig. 43

(*d*) *Triângulos retângulos que, colocados vértice sôbre vértice* (como na Fig. 43 (ii)), *ficarem com as hipotenusas e um dos lados em linha, são semelhantes, isto é, eqüiângulos* (Fig. 43 (i)).

(*e*) *A perpendicular, baixada do ângulo reto sôbre a hipotenusa, divide o triângulo retângulo em dois outros triângulos retângulos, semelhantes entre si e ao triângulo primitivo.*

Eis o que apresenta a Fig. 43 (iii) e (iv). E' êste um dos mais importantes truques para a dissecação de triângulos.

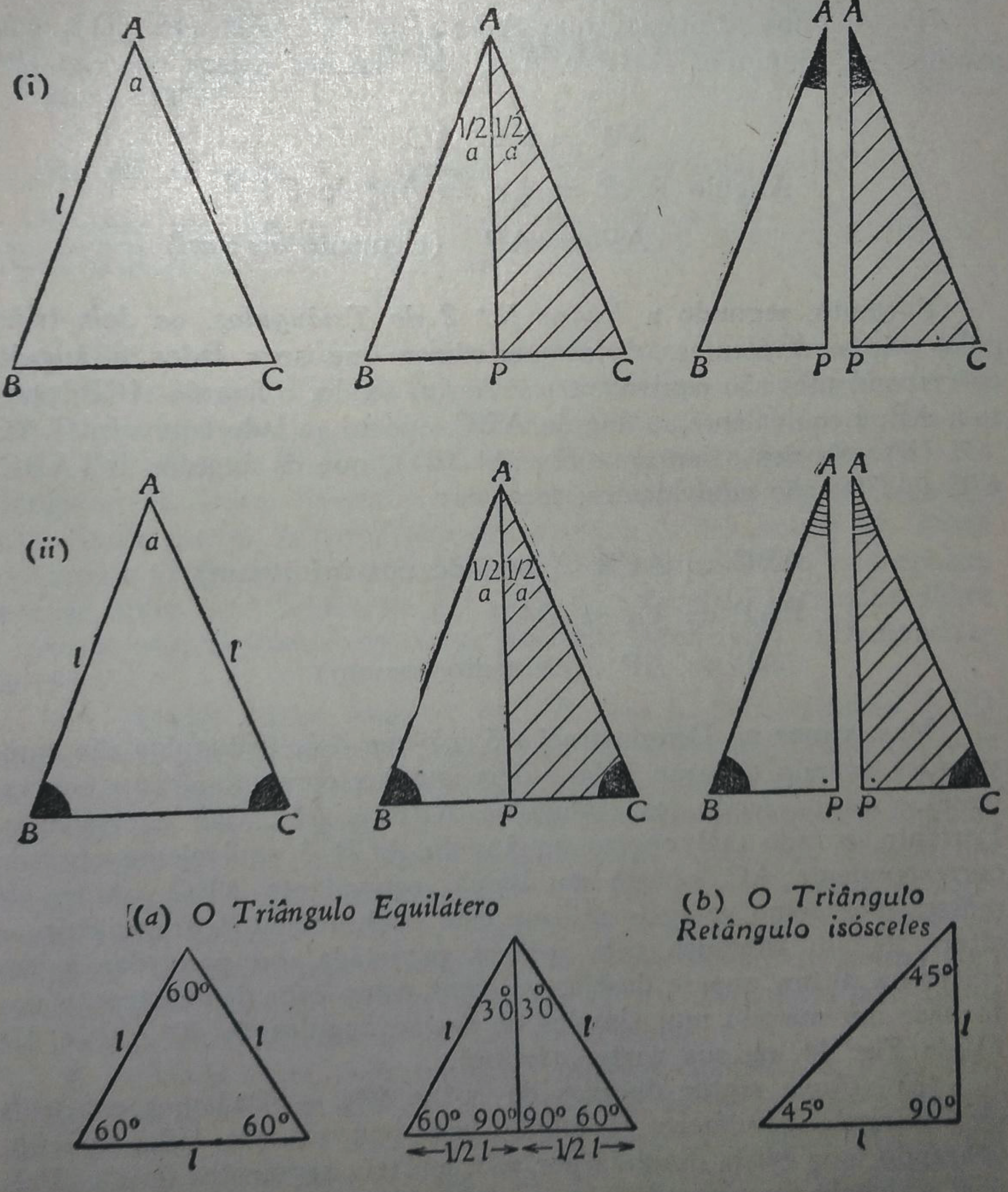


Fig. 44. — DEMONSTRAÇÃO 6.

Demonstração 6

"Se dois lados de um triângulo são equivalentes, os ângulos que lhes são opostos, também são equivalentes; e, se dois ângulos são equivalentes, os lados opostos também o serão".

A demonstração enuncia, pois, uma dupla verdade, mas a dissecação é a mesma para ambas. Disseca-se o triângulo em dois, dividindo-se o ângulo formado pelos lados equivalentes (isto é, o ângulo não-equivalente do triângulo) pela sua bissetriz, segundo a primeira regra de dissecação.

(i) Se nos afiançam que $AB = l = AC$ (Fig. 44 (i)), comparando os triângulos ABP e APC verificamos que:

$$AB = l = AC$$

$$\text{Ângulo } BAP = \tfrac{1}{2}a = \text{Ângulo } CAP$$

$$AP = AP \quad \text{(elemento comum)}$$

Portanto, segundo a *Regra N.º 2 de Triângulos*, os dois triângulos são equivalentes. Isto quer dizer que seus lados e ângulos correspondentes são equivalentes. Assim sendo, o ângulo ACB, oposto a AB, é equivalente ao ângulo ABC, oposto ao lado equivalente AC.

(ii) Se nos afiançam (Fig. 44 (ii)), que os ângulos B (ABC) e C (ACB) são equivalentes, teremos:

$$ABC = ACB \quad \text{(segundo nos informam)}$$

$$BAP = \tfrac{1}{2}a = CAP$$

$$AP = AP \quad \text{(elemento comum)}$$

Mas, vimos na Demonstração 5 (*a*) que dois triângulos são equivalentes quando têm um lado e dois ângulos correspondentes equivalentes. Assim sendo, os triângulos APB e APC são equivalentes. Portanto, o lado AB oposto ao ângulo ACB é equivalente ao lado correspondente AC, oposto ao ângulo equivalente ABC. Antes de mostrarmos como se pode utilizar êste conhecimento para calcular a altura de um barranco pela sombra projetada, ou para dar a um edifício a altura que se deseja, vejamos como esta demonstração nos fornece um método mui simples de traçar ângulos de 30°, 60° e 45° (Vide Fig. 44, na sua parte inferior).

(*a*) *Como traçar ângulos de 30° e 60°.* — Podemos construir um triângulo equilátero (triângulo que tem os três lados iguais), dobrando uma corda dividida por *nós*, em três segmentos iguais. Pelo que acabamos de aprender, se os três lados são equivalentes (comprimento *l*), os três ângulos também o serão. E como os três per-

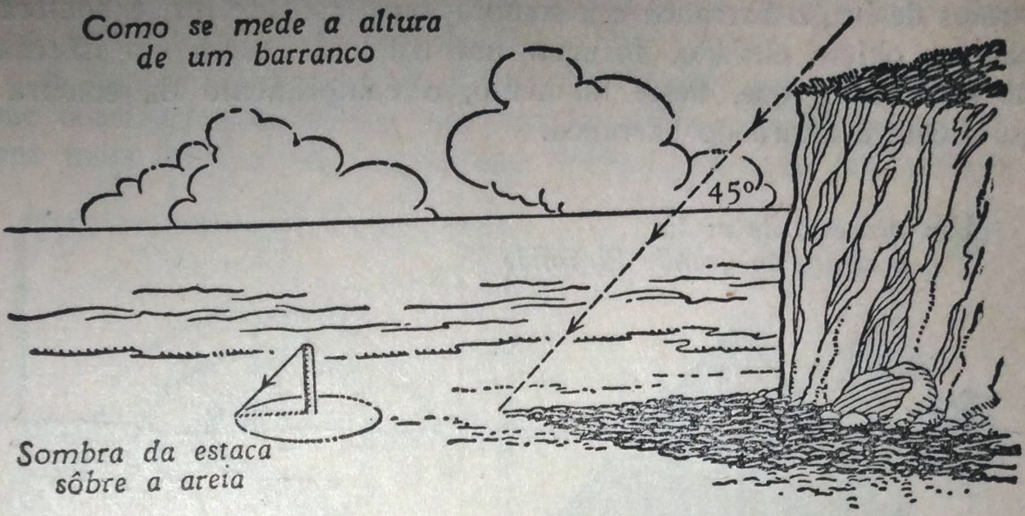


Fig. 45. — MEDINDO A SOMBRA PARA CALCULAR A ALTURA.

O círculo que rodeia o pequeno obelisco solar, tem como raio o comprimento do próprio obelisco, de maneira que, quando o sol atinge a altura de 45° sôbre o horizonte, a sombra tangencia a circunferência traçada.

fazem 180°, cada um dêles é igual a um têrço de 180°, isto é, 60°. Se atentardes para a Fig. 44 (i), vereis que, como os triângulos ABP e ACP são equivalentes, o lado BP é equivalente ao lado correspondente, PC, isto é, P divide BC em duas partes equivalentes. No triângulo equilátero dissecado similarmente na parte inferior da figura, vemos que os lados opostos aos ângulos de 30°, valem $\frac{1}{2}l$. Basta pois unir o vértice de um triângulo equilátero ao meio do lado oposto, para se obter um ângulo de 30°. Os dois ângulos formados sôbre o lado oposto, de cada lado desta bissetriz, valem 90°. (Demonstração 5).

(*b*) *Como traçar ângulos de 45°.* — A demonstração 5 (*b*) mostrou-nos que, se um dos ângulos de um triângulo retângulo, vale 45°, o outro também vale 45°. Assim sendo, todo o triângulo retângulo com um ângulo agudo de 45°, tem necessàriamente dois ângulos equivalentes e, pois, dois lados equivalentes. Uma vez traçado um ângulo reto, para obter um ângulo de 45°, basta medir distâncias equivalentes (*l*), aplicá-las sôbre a altura e sôbre a base e unir as extremidades. Os geômetras e arquitetos egípcios faziam o mesmo com bastonetes e cordas sôbre a areia. Nós outros, fazêmo-lo com tachinhas e barbante, sôbre a prancheta de desenho.

A utilidade desta demonstração (outrora chamada, a *Pons Asinorum*, isto é, a ponte dos burros — porque os burros que a ensinavam davam-se a todos os cuidados para destruir a ponte que a liga ao mundo real) — vêmo-la na Fig. 45. Quando o sol alcança a altura de 45° sôbre o horizonte (a 45° do zenite, por conseguinte), os raios de luz, o barranco e a sombra, ou o raio de luz, a sombra e qualquer objeto elevado, formam um triângulo retângulo isósceles. Isto quer dizer que, neste momento, o comprimento da sombra é equivalente à altura do barranco.

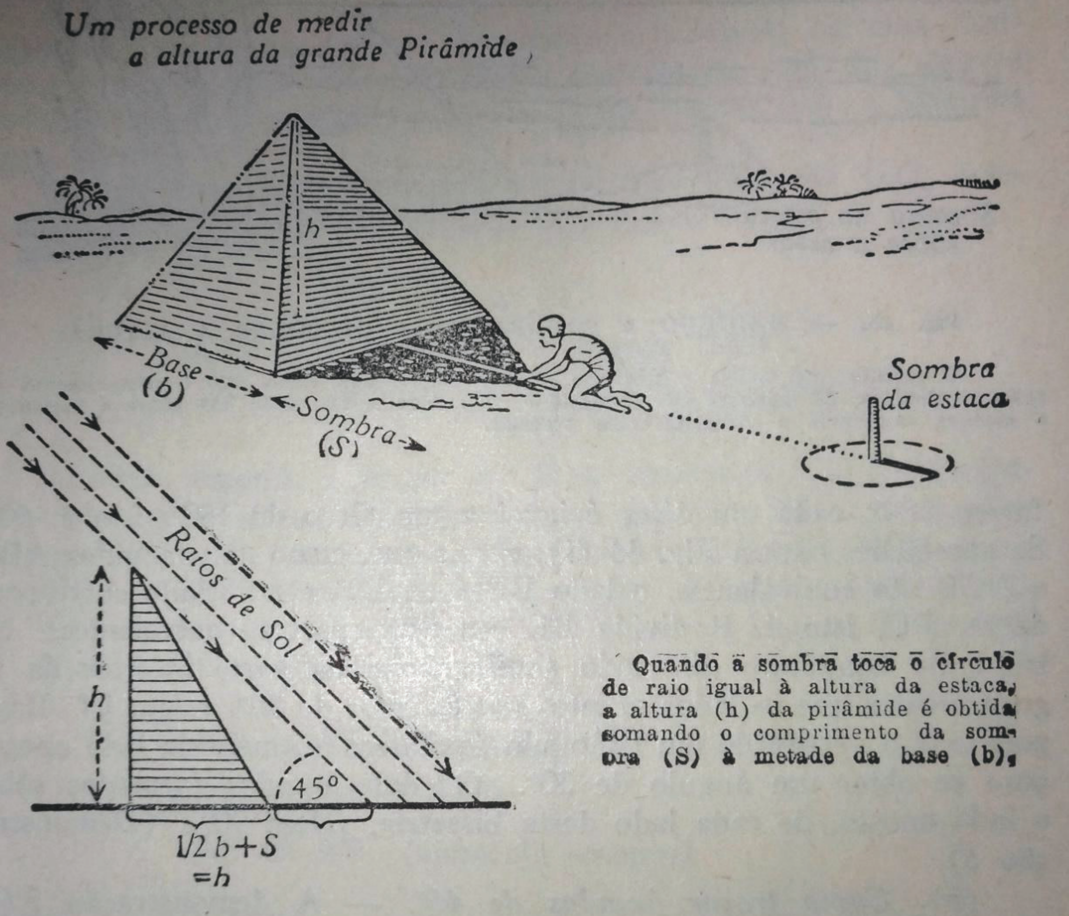


Fig. 45 A

Quando o sol está a 45° sôbre o horizonte, a altura da pirâmide é igual ao comprimento da sombra mais a metade da base.

Para calcular, pois, uma altura por êste método indireto, finca-se um bastonete na areia e espera-se até que o comprimento da sombra seja igual à altura do bastonete. Neste momento, mede-se a sombra do barranco, e ipso-facto, obtém-se a sua altura. Acontece, porém, que na região em que se edificaram as pirâmides, o sol só alcança 45° de altura ao meio-dia, em dois dias do ano. Naturalmente era impossível esperar estas duas raras ocasiões, para tomar a altura das pirâmides. E' muito mais incômodo e demorado ficar esperando a data propícia, que aprender a seguinte demonstração, que ensina a usar o processo para qualquer ângulo do sol. Se porventura a achardes demasiado longa, consolai-vos pensando no tempo que, graças a ela, economizareis mais tarde.

A Fig. 46 é o projeto de um quadrante solar que qualquer pessoa pode construir num terraço ou num quintal e que lhe permitirá — como mais tarde vereis — calcular a altura da casa, sua latitude e

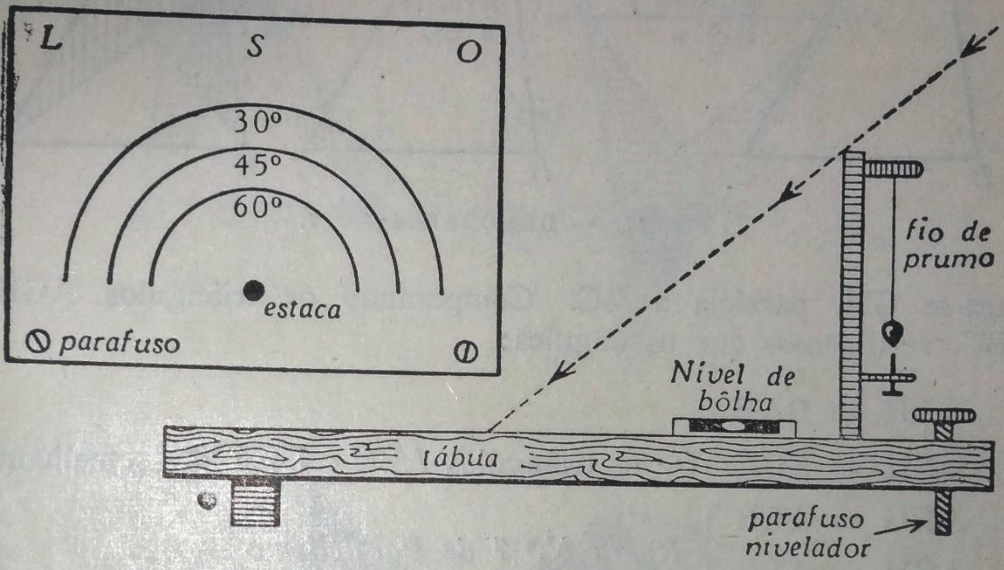


Fig. 46. — PROJETO DE UM QUADRANTE IMPROVISADO.

longitude, a hora e o quanto a terra parece oscilar em seu eixo durante o ano (isto é, a inclinação da órbita em relação aos polos, chamada, pelos astrônomos, — obliqüidade da eclíptica).

Demonstração 7

"A relação dos lados correspondentes dos triângulos semelhantes é a mesma".

A dissecação que vamos fazer é manhosa e em três estágios. À esquerda da Fig. 47, traçaram-se dois triângulos semelhantes, ABC e DEF, de modo que se pudesse observar a equivalência dos ângulos. Quando queremos demonstrar algo de novo, a primeira coisa que devemos fazer é perguntar-nos o que já sabemos sôbre o objeto de nossa demonstração. No caso em aprêço, êste objeto são as relações, ou *razões*. Até então, a única coisa que sôbre elas sabemos é que as áreas de triângulos da mesma altura estão na mesma razão que suas respectivas bases (Demonstração 3). Assim sendo, temos de achar triângulos cujas bases sejam lados correspondentes nos dois triângulos que estamos a comparar. Para isto, comecemos colocando os dois triângulos na mesma figura.

(i) Figura da direita: Aplica-se o comprimento DF sôbre AC, a partir de A, e obtém-se assim AH, equivalente a DF. Em seguida

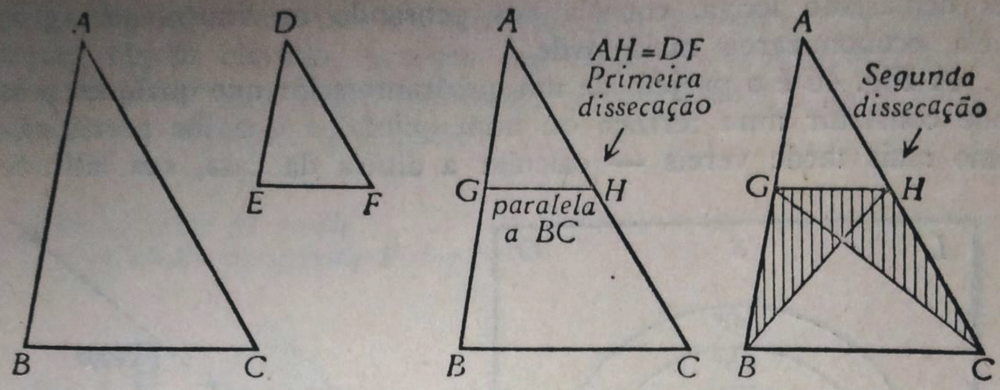


Fig. 47. — DEMONSTRAÇÃO 7.

traça-se GH, paralela a BC. Comparando os triângulos AGH e ABC, verificamos que os ângulos:

$$\text{GAH} = \text{BAC}$$

$\therefore$ GAH = EDF ($\because$ os triângulos ABC e DEF são semelhantes)

$$\left.\begin{aligned}\text{AHG} &= \text{ACB}\\ \text{AGH} &= \text{ABC}\end{aligned}\right\} \textit{Regra N.º 1 de Paralelismo}$$

$\therefore$ AHG = DFE; e AGH = DEF ($\because$ os triângulos ABC e DEF são semelhantes).

Assim, comparando os triângulos DEF e AGH temos:

ângulo EDF = ângulo GAH
DF = AH (por construção)
ângulo DFE = ângulo AHG

Em virtude da *Regra N.º 3 dos Triângulos,* DEF e AGH são equivalentes,

$\therefore$ GH = EF e AG = DE **(a)**

(ii) Na Demonstração 3 aprendemos que triângulos que têm base sôbre a mesma reta e o vértice oposto sôbre uma paralela à base, terão necessàriamente a mesma altura. Dêste fato nos valeremos, para darmos o próximo passo. Traçando as linhas que unem os pontos GC e HB (Fig. 47, à direita) e pondo a figura de cabeça para baixo (como na Fig. 48 (ii), percebe-se imediatamente que (Demonstração 3 (*c*) Fig. 39 (iii)):

Área do Triângulo BGH = Área do Triângulo GCH ***(b)***

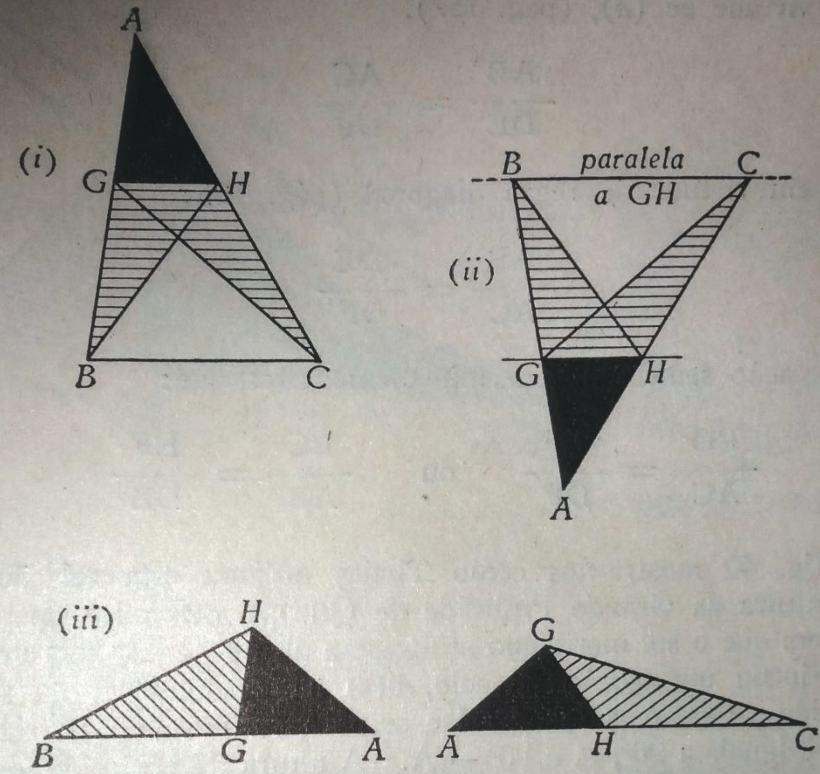


Fig. 48. — DEMONSTRAÇÃO 7 (Continuação).

(iii) Na Demonstração 3 aprendemos, também, que os triângulos cujos bases estão sôbre uma reta e cujos vértices opostos, coincidam, terão, necessàriamente, a mesma altura. Podemos obter dois pares de triângulos nestas condições, incorporando o triângulo AGH, primeiro ao triângulo GHB e depois ao triângulo GCH. E' claro que:

Área dos triângulos AGH+BGH = Área dos triângulos AGH+GCH

ou Área do triângulo AHB = Área do triângulo AGC (*c*)

Os triângulos AHB e AGH, assim como AGH e AGC, têm a mesma altura (Demonstração 3 (*b*)). Assim sendo, e em virtude da Demonstração 3 (*a*) — que afirma que as áreas dos triângulos de mesma altura estão na mesma razão que as suas bases — podemos escrever:

$$\frac{\text{Área AHB}}{\text{Área AGH}} = \frac{AB}{AG} \quad \text{e} \quad \frac{\text{Área AGC}}{\text{Área AGH}} = \frac{AC}{AH}$$

Como as áreas de AHB e AGC são equivalentes,

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AH}$$

Em virtude de (*a*), (pág. 157),

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

Ou, em virtude da regra diagonal (pág. 105),

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$

Dissecação semelhante, permite demonstrar que:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF} \quad \text{ou} \quad \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}$$

A Fig. 49 mostra-nos como Thales utilizou esta relação para medir a altura da Grande Pirâmide de Queops, evitando esperar um dos dias em que o sol meridiano atingisse a altura de 45° sôbre o horizonte. Fincou um bastão no solo, bem na extremidade da sombra da pirâmide. Bastão, raio de sol e sombra formavam um triângulo, de ângulos iguais a 90°, A e 90° — A. A altura da pirâmide, os raios de sol e a sombra acrescida da metade da base formavam outro, de ângulos equivalentes. Como os dois triângulos são semelhantes, os lados correspondentes estão entre si na mesma razão, isto é:

$$\frac{H}{\frac{1}{2}b + S} = \frac{p}{S}$$

Aplicando a regra diagonal, obtém-se para a altura da pirâmide:

$$H = \frac{p}{s}\left(\tfrac{1}{2}b + S\right)$$

A altura do bastão (*p*), a base (*b*) e as duas sombras (*s* e S) podem ser fàcilmente medidas ao meio-dia de qualquer data.

O mesmo método pode servir para determinar a altura de qualquer objeto inacessível. Também podemos calcular a distância a que se encontra de nós, desde que possamos medir o ângulo que o seu tôpo faz com o horizonte (usando para isto um teodolito como o da Fig. 12). A maneira mais rudimentar de determinar êsses elementos, é fazer uma figura em escala. Era êste o método displicente dos gregos. Mas existe um método melhor que o precedente: o da geometria socializada, ou trigonometria (tal como a costumamos chamar) dos alexandrinos.

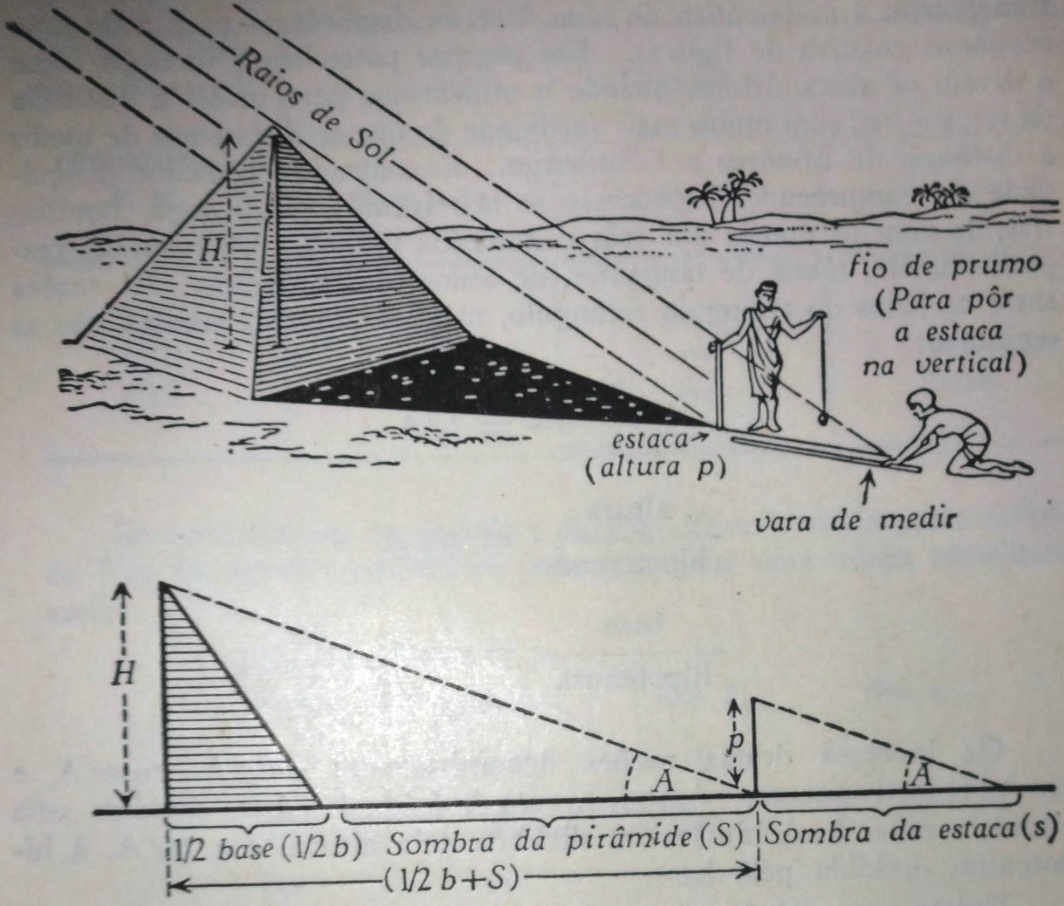


Fig. 49. — COMO TALES MEDIU A ALTURA DA GRANDE PIRÂMIDE.

O ângulo A é a inclinação do sol sôbre o horizonte ao meio-dia e é, pois, o mesmo para ambos os triângulos.

Consiste em se organizar, de uma vez para tôdas, uma tabela das razões entre o bastão e a sombra, para vários ângulos de inclinação. Se voltardes à Fig. 31, vereis que a relação entre bastão e sombra para um ângulo de inclinação, A, é o que, na linguagem dicionária da trigonometria, se denomina tg A. Isto significa: "Procurai um número num dicionário (tábua de tangentes) organizado de uma vez para tôdas, ao invés de vos dar ao trabalho de fazer uma figura em escala cada vez que quiserdes estimar uma altura ou uma distância". Se voltardes à Fig. 43 (i), recordareis que todos os triângulos retângulos que têm o mesmo ângulo A são semelhantes. Assim sendo, a razão entre altura e base (isto é, bastão e sombra, também chamada *declividade)* é sempre a mesma, desde que A seja o mesmo. Só existe um número que a representa para cada valor particular de A. A Demonstração 7 nos mostra que, quando A é fixo, também o é a razão de quaisquer lados correspondentes num triângulo retângulo.

Os gregos, porém, foram incapazes de dar êste passo decisivo que transportou a matemática de uma fase de displicência para a de uma economia coletiva de figuras. Em páginas posteriores, veremos como o deram os alexandrinos, quando o utilizarmos para medir a distância da terra à lua, com muito mais facilidade do que se tivéssemos de medir a distância de Londres a Edimburgo. Encontraremos menor dificuldade em compreender o processo se nos formos, desde logo, familiarizando com os nomes dos três dicionários usados. Chamam-se, respectivamente, tábua de tangentes, de senos e de co-senos. As razões entre os lados do triângulo retângulo, mais comumente usadas, são as seguintes:

$$\frac{\text{altura}}{\text{base}} = tg\,\text{A}$$

$$\frac{\text{altura}}{\text{hipotenusa}} = sen\,\text{A}$$

$$\frac{\text{base}}{\text{hipotenusa}} = cos\,\text{A}$$

Os inversos destas razões denominam-se: *cotg* A. *cosec* A e *sec* A. respetivamente. Assim, a *cotg* A é igual à base dividida pela altura, a *cosec* A, à hipotenusa dividida pela altura, e a *sec* A, à hipotenusa dividida pela base.

Existe uma tabela para cada uma dessas razões. Tão fácil é consultá-las, quanto a um horário de trens. Na tábua de *senos*, uma coluna, tal como a coluna dos horários de trens, dá a hora da partida, aliás, o ângulo A. Outra coluna, tal como a coluna da "hora da chegada" — dá o número desejado, *sen* A. Quanto à construção dessas tábuas, será objeto de outro capítulo. Por hora, limitar-nos-emos a dar uma idéia do processo. Um dos métodos possíveis seria traçar um grande número de triângulos retângulos, cada um com um ângulo agudo diferente (diversos valores de A) e medir, cuidadosamente, os lados, anotando os resultados. Mas o processo, além de trabalhoso e demorado, não seria suficientemente preciso, porque, neste mundo imperfeito, todo o cuidado é pouco e nunca a primeira tentativa é a mais perfeita. Ademais, já sabemos o suficiente para obter os mesmos resultados, com maior rapidez e precisão. Conquanto sem a intenção expressa de fazê-lo, já coletivizamos as *razões* de alguns ângulos, embora muitos nos faltem para completar a tabela.

Podemos apreciar o nosso progresso, atentando para uma tabela muito comum, como a que registra as várias etapas de uma viagem de trem.

Partida da Estação de Waverley (Edimburgo) P. M.	Chegada a		
	Newcastle	York	Londres
3.0	—	6.45	—
4.30	6.30	—	—
5.15	—	—	11.58

Se compararardes os desenhos da Fig. 50 com os da parte inferior da Fig. 44, vereis que bem se pode organizar uma tabela semelhante, assim:

Ângulo (A) (Graus)	Tg A	Sen A	Cos A
30°	—	$\frac{1}{2}$	—
45°	1	—	—
60°	—	—	$\frac{1}{2}$

Observareis, também, duas coisas que muito facilitam a confecção das tábuas:

(1) $\text{sen } A = \cos (90° - A)$ Vide demonstração 5 (*b*)

$\cos A = \text{sen } (90° - A)$

(2) $$\text{tg } A = \frac{\text{sen } A}{\cos A} \left(\frac{p}{b} = \frac{p}{h} \div \frac{b}{h} = \frac{p}{h} \times \frac{h}{b} \right)$$

Demonstração 8

"O quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados da base e da altura".

A dissecação necessária a esta demonstração já foi explicada na Demonstração 5 (*e*) e na Fig. 43. A altura baixada do ângulo reto sôbre a hipotenusa divide o triângulo retângulo em dois outros, também retângulos, semelhantes entre si e ao triângulo primitivo. Só o que fizemos na Fig. 51 foi dispô-los de maneira a que se possa per-

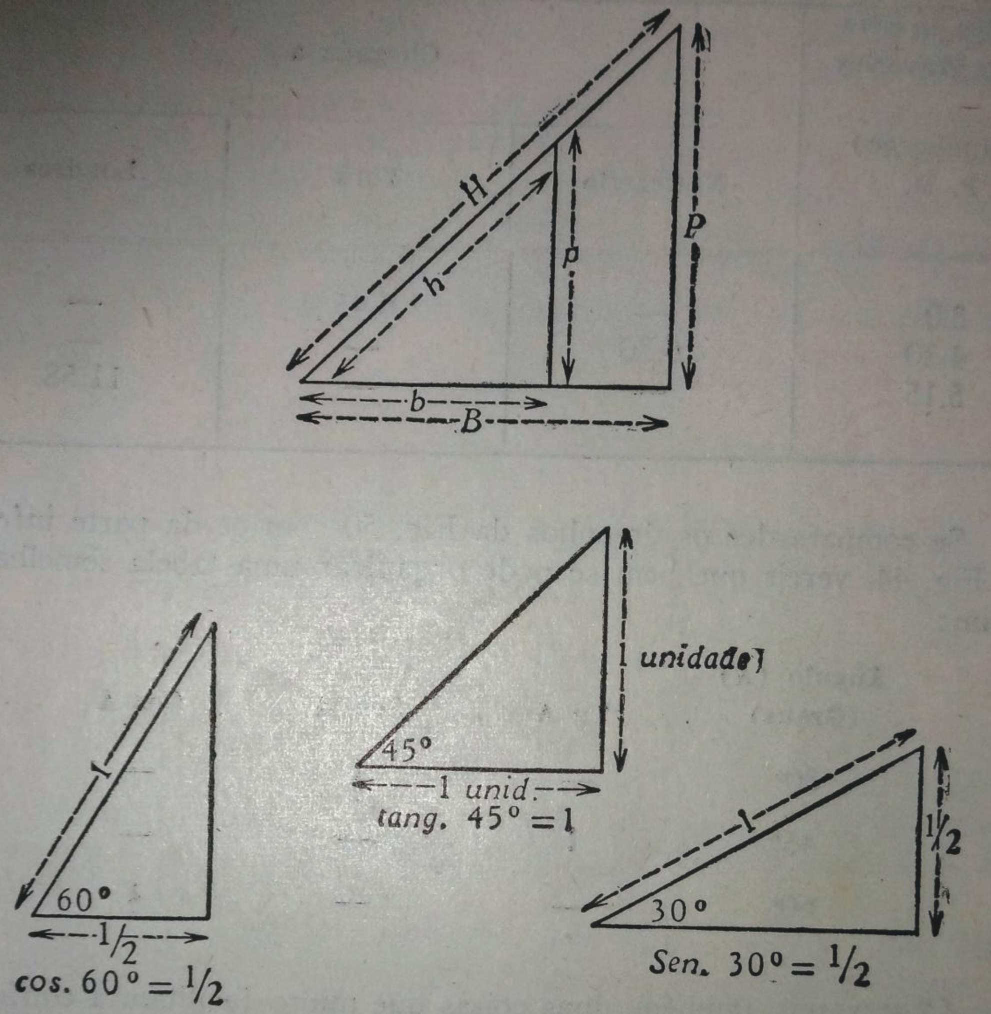


Fig. 50

ceber, à primeira vista, quais os lados e ângulos correspondentes. Em virtude de (iii) na Fig. 51:

$$\frac{a}{c} = \frac{x}{a} \quad \text{(Demonstração 7)}$$

$$a^2 = cx \quad \text{(Regra diagonal, pág. 104)}$$

Em virtude de (iv), e por motivos análogos:

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{b}$$

$$b^2 = cy$$

Combinando os dois resultados, e como $c = x + y$, vemos que:

$$a^2 + b^2 = cx + cy$$

$$\because\ a^2 + b^2 = c\,(x + y) \quad \text{(Demonstração 2)}$$

$$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2$$

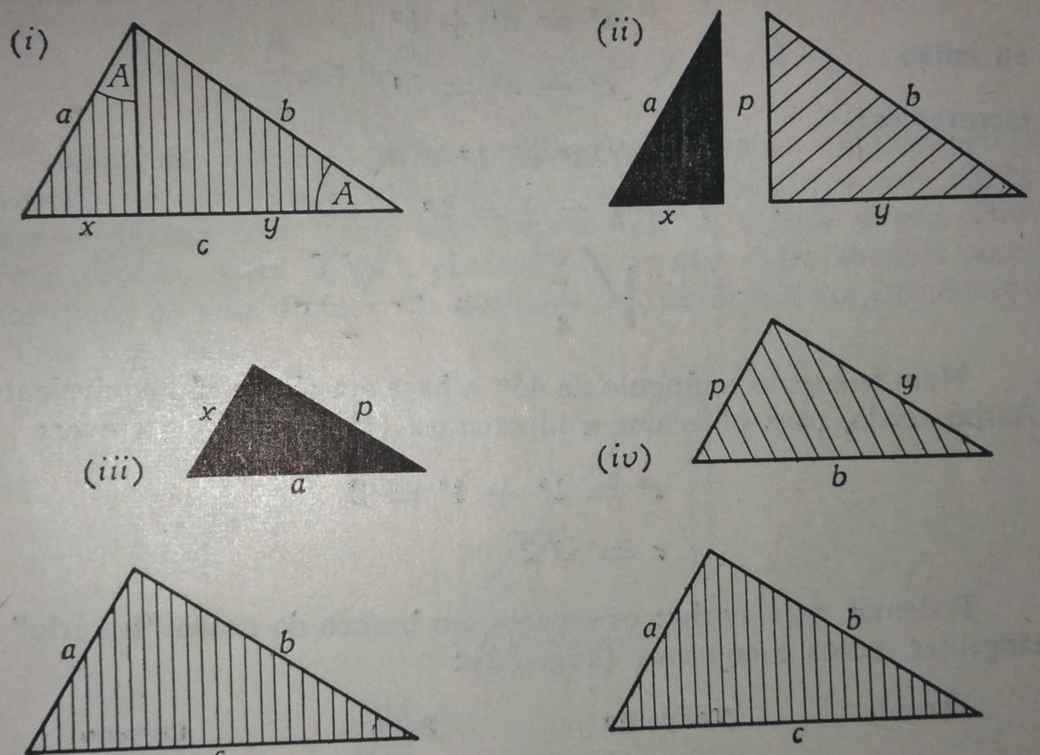


Fig. 51. — DEMONSTRAÇÃO 8.

Também se observa, na figura, que

$$\frac{p}{x} = \frac{y}{p}$$

e pois

$$p^2 = xy \qquad \text{ou} \qquad p = \sqrt{xy}$$

Nesta última expressão, p se denomina *média geométrica* ou *média proporcional* de x e y. Assim, a média geométrica de 3 e 27 é $\sqrt{3 \times 27}$, isto é, $\sqrt{81} = 9$. A média aritmética dos mesmos números seria: $\frac{1}{2}(3 + 27) = 15$. Em noventa e nove por cento das vêzes em que os políticos aludem a médias, esquecem de dizer a qual se referem. Há muitas espécies de médias, cada uma com um emprêgo particular.

Esta demonstração é da maior importância na determinação das *razões* dos ângulos. Deveis lembrar-vos (e, se já esquecestes, recordai-o na Fig. 44) que quando os ângulos de um triângulo valem 30°, 60° ou 90°, a hipotenusa (c) é o dôbro do lado (a) oposto ao ângulo de 30°. Para obter o terceiro lado (b), atribuímos à hipotenusa o valor 1, e ao invés de escrevermos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

ou então

$$c^2 - a^2 = b^2$$

escrevemos:

$$1^2 - (\tfrac{1}{2})^2 = b^2$$

$$1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} = b^2$$

$$b = \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Num triângulo retângulo de 45°, a base e a altura são equivalentes. Assim sendo, para obtermos a hipotenusa (c) podemos escrever:

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$c = \sqrt{2}$$

Podemos, pois, encher os espaços em branco do nosso "horário" de tangentes, senos e co-senos (Fig. 52):

Ângulo	Tangente	Seno	Co-seno
30°	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
60°	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Os geômetras gregos nunca tiveram a idéia de organizar uma tábua como esta, e menos ainda de estendê-la a todos os graus. Assim sendo, deixaremos para mais tarde a explicação de como se pode organizar uma tábua. Entrementes, é importante observar que nada mais nos amarra ao obelisco solar. Os geômetras gregos dispunham de meios de medir alturas sem recorrer à sombra. Quando se possui um simples teodolito (vide Fig. 12), pode-se afastar-se de x metros da base do barranco representado na Fig. 45, até avistar o cume do mesmo, a 30° de elevação. Chamando h a altura do barranco,

$$\frac{h}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad h = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

Se o observador volta a aproximar-se do barranco, e caminha y metros até avistar-lhe o cume a 60°,

$$\frac{h}{y} = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad h = y \cdot \sqrt{3}$$

Nem são essas as únicas utilizações da tabela trigonométrica. Suponha-se que não se pode subir ao cume do barranco nem aproximar-se de sua base. Isto não impede que se calcule a sua altura. Para fazê-lo, basta obter a distância horizontal entre os dois pontos dos quais se visa o cume do barranco aos 30° e 60° respectivamente. (Vide Fig. 53).

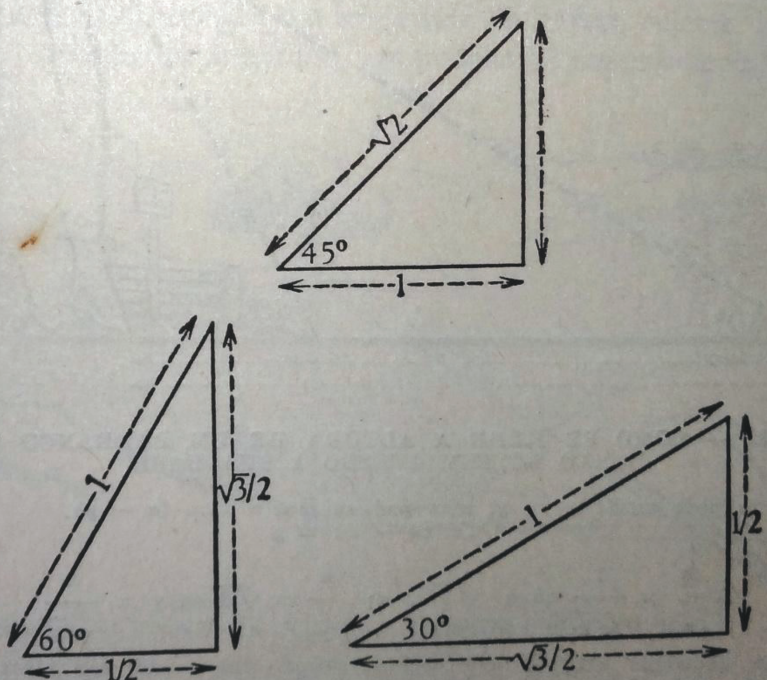


Fig. 52

$$\text{tg } 45° = 1 \quad ; \text{ sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}; \text{ cos } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{tg } 60° = \sqrt{3} \; ; \text{ sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ cos } 60° = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}; \text{ sen } 30° = \frac{1}{2} \quad ; \text{ cos } 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

No fim dêste capítulo inquiriremos porque os gregos, podendo organizar um dicionário de ângulos, não o fizeram. Cumpre observar, a êste respeito, que, na confecção de uma tábua desta espécie, o matemático esbarra inevitàvelmente com quantidades como $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ (aproximadamente 1,414 e 1,732), inexprimíveis com os números de que dispunham. O homem prático — que quando não tem cão, caça com o gato — tinha de resolver o problema, ou bem com figuras na areia (Fig. 55), ou com outro gênero de figuras baseadas na média geométrica. Explicá-las-emos mais tarde.

QUATRO DEMONSTRAÇÕES DE ASTRONOMIA

Para aperfeiçoar o método de medir distâncias inacessíveis por meio de ângulos e distâncias conhecidos — como na determinação da

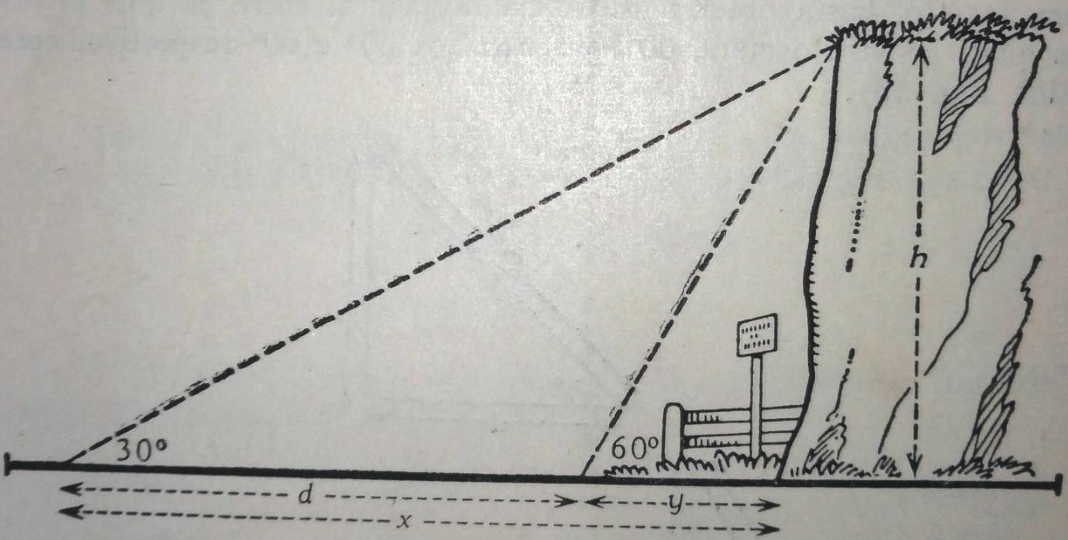


Fig. 53. — COMO SE MEDE A ALTURA DE UM BARRANCO QUANDO NÃO SE TEM ACESSO À SUA BASE.

Não se pode medir x ou y, mas pode-se medir $d = (x - y)$.

$$\therefore (x - d) = y$$

$$\therefore \frac{h}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } h \cdot \sqrt{3} = x; \quad \frac{h}{y} = \sqrt{3} \text{ ou } y = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$h \cdot \sqrt{3} - d = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

Multiplicando ambos os membros por $\sqrt{3}$ temos:

$$3\,h - d\,\sqrt{3} = h$$

$$2\,h = d\,\sqrt{3}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot d$$

E' êste, em essência, o método de se medir a distância da lua à terra.