



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**Uma Abordagem Histórica e Didática para o Ensino de**  
**Equações do 2º Grau**

**Francielly Gomes Araújo**

**CAMPINA GRANDE - PB**

**Maior de 2016**

Francielly Gomes Araújo

## **Uma Abordagem Histórica e Didática para o Ensino de Equações do 2º Grau**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anibal Meneses Maciel

CAMPINA GRANDE-PB

Maio de 2016

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

A659a Araújo, Francielly Gomes.  
Uma abordagem histórica e didática do ensino de equações do 2º grau [manuscrito] / Francielly Gomes Araújo. - 2016.  
59 p. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)  
- Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e  
Tecnologia, 2016.

"Orientação: Prof. Dr. Anibal de Menezes Maciel,  
Departamento de Matemática".

1. Ensino de matemática. 2. Equações. 3. Equação do  
segundo grau. 4. Didática. I. Título.

21. ed. CDD 515.25

Francielly Gomes Araujo

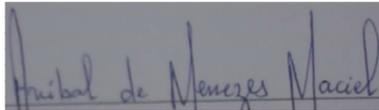
## Uma Abordagem Histórica e Didática para o Ensino de Equações do 2º Grau

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anibal Meneses Maciel

Aprovado em: 23/05/2016

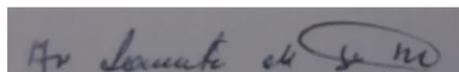
### COMISSÃO EXAMINADORA



---

Prof. Dr. Anibal Meneses Maciel  
Dpto. Matemática - CCT/UEPB

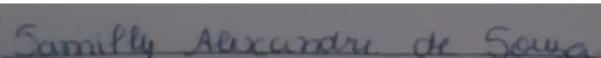
ORIENTADOR



---

Prof. Dr. José Lamartine da Costa Barbosa  
Dpto. Matemática - CCT/UEPB

EXAMINADOR



---

Prof. Ms. Samilly Alexandre de Souza  
Dpto. Matemática - CCT/UEPB

EXAMINADORA

## Agradecimentos

Primeiramente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo da minha vida, e não somente nestes anos como universitária, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

Agradeço a toda minha família, a minha mãe Francimira Araujo, ao meu pai Eraldo Correia pela educação que me deram, pelo incentivo nos estudos e pela compreensão nas minhas escolhas durante todo este período de graduação, as minhas irmãs Analigia Araujo, Emmilly Araujo, Renally Araujo por toda paciência. Agradeço também ao meu namorado Ítalo De Pontes Oliveira que em momento algum deixou de me apoiar. Essas pessoas tiveram papel fundamental para que chegasse até o final da minha graduação e conseqüentemente, para que eu terminasse minha manografia.

Aos meus amigos(as), Carlos Alberto, David Dantas, Larissa Oliveira, Leonardo Colação, Leonardo Figueredo, Leonardo Firmino, Jéssica Sousa, Kisia Ariane, Rogério Eloi, Roseane Lopes, por todo apoio e incentivo, aos meus colegas de curso, Alexandre Ferreira, João Eudes, José Ferreira, Josineide Cardoso, Luciano Soares, Maurino Soares, e Wallace Silva que me ajudaram a continuar esta jornada magnífica.

Ao meu orientador Professor Dr Anibal Menezes Maciel por todo incentivo, paciência, conselho, amizade, orientação e aprendizado que tive durante este período de experiência, o que proporcionou uma boa amizade.

Aos meus professores do departamento de Matemática da UEPB que me proporcionaram conhecimento, maturidade e profissionalismo, e aos meus professores do Ensino Médio que me inspiraram a esse curso.

Ao meu psicólogo Pablo Melo por me ouvir e aconselhar em momentos difíceis.

A PROEX-UEPB pela bolsa concedida.

A todos que me incentivaram a essa jornada magnífica.

*[...] Ter uma ideia, embora imprecisa e incompleta, sobre porque e quando se resolveu levar o ensino da matemática à importância que tem hoje são elementos fundamentais para se fazer qualquer proposta de inovação em educação matemática e educação em geral.*

(Ubiratan D'Ambrósio)

# Dedicatória

À minha família e amigos.

## Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar o teorema de existência e unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias (E.D.Os). Ele nos garante que dada certa condição inicial a existência de pelo menos uma solução para um problema de valor inicial envolvendo uma aplicação contínua, e como também, em seguida, sua aplicação no modelo de Lotka-Volterra de interação entre espécies. Assim, após uma breve abordagem histórica, introduzimos nosso estudo e, em seguida, é feita uma listagem de conteúdos essenciais para a compreensão do nosso objeto de pesquisa. Logo depois, enunciamos e demonstramos o teorema de Picard e de Peano, que consistem nos teoremas principais, posteriormente analisamos o modelo de Lotka-Volterra e por último, apresentamos uma aplicação no controle biológico da broca cana-de-açúcar. Assim, concluindo o trabalho.

**Palavras chave:** Teorema de Existência em E.D.O.; Teorema de Picard e Peano; Modelo de Lotka-Volterra.

# Abstract

This work aims to present the existence and uniqueness theorem of Ordinary Differential Equations (ODE), he guarantees us that given some initial condition the existence of at least one solution for an initial value problem involving the continuous application, and as well, then your application in model Lotka-Volterra interaction between species. So after a historical approach, we introduce our study, then, is made one essential contents listing for the understanding of our research object. Soon after, articulate and demonstrate the Picard and Peano theorem, what a consist of the main theorems, then we analyze the model of Lotka-Volterra and lastly, we present an application in biological control of sugar cane borer. Thus completing the work.

**Key words:** *Existence theorem in E.D.O.; Picard theorem and Peano; Lotka-Volterra model.*

# Sumário

<b>1 Metodologia para o ensino de Equações do segundo grau: o surgimento do tema</b>	<b>11</b>
1.1 Aspectos gerais da pesquisa . . . . .	11
1.2 Introdução . . . . .	11
1.3 Justificativa . . . . .	14
1.4 Questões problemas . . . . .	14
1.4.1 Objetivo geral: . . . . .	16
1.4.2 Objetivos específicos: . . . . .	16
1.5 Metodologia . . . . .	16
<b>2 Materiais manipuláveis</b>	<b>19</b>
2.1 Um breve resumo da origem dos materiais manipuláveis . . . . .	19
2.2 O uso de materiais manipuláveis no ensino da matemática . . . . .	21
2.3 Por que utilizar Materiais Manipuláveis? . . . . .	24
2.4 Materiais manipuláveis e a geometria na equação do segundo grau . . . . .	26
<b>3 O desenvolvimento histórico da equação do segundo grau do antigo Egito a atualidade</b>	<b>29</b>
3.1 Uma abordagem histórica sobre o processo de resolução da equação de 2º grau .	29
3.2 Egípcios . . . . .	31
3.3 Mesopotâmicos . . . . .	32
3.4 Gregos . . . . .	34

3.5	Árabes . . . . .	36
3.6	Hindus . . . . .	38
3.7	Chineses . . . . .	40
3.8	Europeus (A partir de XV) . . . . .	42
3.9	Atualidade . . . . .	44
<b>4</b>	<b>A matemática significativa e os livros didáticos</b>	<b>46</b>
4.1	A importância da matemática significativa na sala de aula . . . . .	46
4.2	Livro didático e o papel do professor de Matemática . . . . .	48
4.2.1	Livros didáticos: Bháskhara x Sridhara e a fórmula resolutive da equação do segundo grau. . . . .	49
<b>5</b>	<b>A tentativa de colocar a matemática significativa em sala de aula</b>	<b>53</b>
5.1	Caracterização da escola . . . . .	53
5.2	O planejamento para a parte prática e material utilizado . . . . .	53
5.3	O desenvolvimento da pratica proposta . . . . .	54

# Capítulo 1

## Metodologia para o ensino de Equações do segundo grau: o surgimento do tema

### 1.1 Aspectos gerais da pesquisa

No decorrer deste capítulo irei relatar o meu interesse com o tema que envolve esta pesquisa, descrevendo diante disso a minha trajetória que me fez ter curiosidade de ir mais a fundo com este tema até o instante da escrita deste trabalho de conclusão de curso. Aqui, também o objetivo da pesquisa, a justificativa, metodologia e como será a estrutura que irei percorrer diante este trabalho.

### 1.2 Introdução

Durante toda a minha vida escolar tive a oportunidade de estudar em boas escolas em minha cidade, cursei o ensino fundamental completo em escolas particulares e tive a nobre oportunidade de estudar o ensino médio no IFPB e sempre ouvia falar de inúmeros laboratórios existentes nelas como o de Física e Química, mas assumo que nunca entrei neles. Os professores que me davam aula sempre falavam que iríamos usar o laboratório em aulas extras onde o ano acabava e elas não ocorriam, nunca os motivos que eles expressavam eram correspondentes a tamanha espera para conhecer um ambiente de estudo diferenciado. Consegui ter oportunidade de entrar em um laboratório no primeiro período do curso de Licenciatura em Matemática da UEPB em Campina Grande, nas disciplinas de Prática Pedagógica e Laboratório de Ensino de Mate-

mática, onde demonstrei bastante curiosidade sobre aquele local. Foi diferente a sensação de assistir aula em um local que não era uma sala com carteiras enfileiradas e apenas um quadro.

No que pude notar naquelas disciplinas foi que como aluna de um curso de Licenciatura não sabia manusear nada daquelas ferramentas que me rodeavam. Sempre me questionava do porque e pra que estava cursando aquelas disciplinas se sempre aprendi e conseguia êxito na matemática do ensino fundamental e médio de forma tradicional, onde o professor enunciava o conteúdo e logo em seguida expunha alguns exemplos no quadro aplicando duas ou três provas bimestrais, não me passava a real importância da necessidade. Com o desenvolver das disciplinas consegui entender o quão importante elas eram para a minha formação, pois nelas tive a oportunidade de aprender como manusear alguns materiais manipuláveis, o que não conhecia até então. Então percebi o quanto era imprescindível a inserção destes materiais em aulas de matemática, o quão aquilo poderia ajudar a facilitar a compreensão de diversos conceitos. Meus professores sempre lecionavam as aulas utilizando a lousa, giz, a fala e grandiosas listas de exercícios que muitas vezes eram cansativas e repetitivas.

Comecei posteriormente com o foco de envolver com o manuseio de diversos materiais manipuláveis que se encontravam naquele laboratório. Iniciei com apresentações nestas disciplinas como manusear estes recursos, daí então meus docentes de Matemática proporcionaram participar de oficinas e exposições colocando em prática aquilo que eu já imaginava. Participar de eventos onde o público eram alunos de ensino fundamental e médio me fizeram ter a chance de ver o quanto estes MD chamavam não só a minha atenção. Vários alunos paravam para conhecer e aceitavam o desafio de aprender brincando com estes materiais manipuláveis, tudo o que eles viam era novo e "legal" para eles, era também uma prática que muitos acusavam não ter vivenciando ainda durante a formação escolar, pois até então não conheciam uma outra forma que a matemática poderia se apresentar.

Atualmente o ensino da Matemática se apresenta descontextualizado, inflexível e imutável, sendo produto de mentes privilegiadas. O aluno é, muitas vezes, um mero expectador e não um sujeito partícipe, sendo a maior preocupação dos professores cumprir o programa. Os conteúdos e a metodologia não se articulam com os objetivos de um ensino que sirva à inserção social das crianças, ao desenvolvimento do seu potencial, de sua expressão e interação com o meio (SCHNEIDER, 2007, p. 4).

Foi tanto o meu envolvimento que participei de um projeto chamado Programa de Apoio a Formação e ao Ensino da Cidade de Campina Grande (PROAFE) que visava aulas experi-

mentais de matemática que tinha por objetivo trazer para o aluno a matemática do dia-a-dia e sua respectiva aplicação no lúdico. Onde pude ver que muitos tinham a curiosidade de assistir estas aulas na busca de uma da matemática fora do contexto tradicional.. Consegui enxergar com estas experiências que diversos conteúdos podem ser vistos de inúmeras formas. Maneiras que proporcionam realmente o interesse e o gostar pelo o que se estuda.

As características típicas do ensino tradicional de matemática, como por exemplo, aulas expositivas e uso exclusivo do quadro e giz, onde o professor sugere para o seu alunado apenas a resoluções de questões ainda prevalecem. Segundo Carvalho (2005), o ensino da Matemática está dividido sob três formas. A primeira é aquela que se classifica na fase em que o professor apresenta o conteúdo mostrando a definição, proposição e fórmulas propriamente deduzidas, logo em seguida tem o momento da manipulação que tem como particularidade exercícios de fixação onde os alunos aplicam as fórmulas e conceitos que lhe foram explicados e por último a aplicação que relaciona o conhecimento teórico com a solução de situações concretas, o autor também nos diz que grande parte dos livros-textos adotam esta estrutura.

Os estudos voltados para a aprendizagem e fixação da matemática em sala de aula sugerem mudanças na prática docente. É necessário hoje em dia que eles utilizem os recursos didáticos e metodológicos, usando como um forte a interdisciplinaridade, a contextualização do conteúdo e as tecnologias, de modo a atrair e motivar mais os alunos pelas aulas de matemática. É importante frisar neste contexto que o profissional em educação matemática diversifique os métodos de avaliação e estabeleça eles saudáveis com seus alunos visando o aperfeiçoamento de sua didática e uma maior qualidade de ensino. É recomendado na prática educacional que o educador crie e recrie sua própria metodologia didática acompanhando as transformações da sociedade e com base em sua experiência docente.

Diante disso um assunto que chamou bastante atenção foi equação do segundo grau, uma vez que estudei no ensino fundamental de uma forma que gerou muitas dúvidas. O professor desta fase apenas definiu o conteúdo que iríamos aprender e em seguida começou a resolver alguns exemplos, cobrando logo após que a turma fizesse uma quantidade significativa de questões que ele julgava essenciais para o entendimento concreto do que ele estava ensinando sendo cobrado uma avaliação bimestral de apenas perguntas do tipo "resolva", "encontre as raízes", "prove" e o assunto ficou por ai sem que soubéssemos o porque e o pra que do motivo deste assunto nos ser cobrado, penso que a formação que me foi dada neste assunto não me possibilitava na época que vivenciava resolver equações deste tipo sem a fórmula e tão menos

resolver questões contextualizadas.

Neste contexto é notório que diversos conteúdos que subsequentemente apareciam tinham a necessidade do conhecimento de como se resolver uma equação biquadrática e como aluna sempre precisei do conhecimento da fórmula, apenas conhecia o que havia sido passado de forma, porém não sabia de onde o professor tinha tirado aquela "receita" já pronta para aplicar, não tinha a noção do quanto no passado fizeram para existir estas formas de resolver equações, só a partir da minha graduação comecei a enxergar as várias metodologias e didáticas para apresentar um conteúdo, tornando-o algo mais significativo e agradável de se estudar.

### 1.3 Justificativa

O interesse pelo nosso tema de investigação se deu a partir das dificuldades na compreensão deste conteúdo pelos alunos, problemas estes que despertou o meu interesse desde a primeira vez que o assunto me foi apresentado no ensino fundamental até os dias atuais como aluna de graduação e nas oportunidades que tive na minha prática como educadora matemática em algumas escolas, uma vez que os alunos não conseguiam estabelecer uma relação entre esse conteúdo e o cotidiano e sempre aprendiam este conteúdo de forma mecânica e crua apenas para alcançar nota suficiente para dispensar a cobrança do conteúdo.

Estudar profundamente este conteúdo se torna importante pelo fato de como ele é exposto no ensino fundamental. Compreender equação do 2º grau é um assunto que o alunado irá utilizar em diversas fases da sua vida, não só irá precisar lúdico mas também é um conteúdo base para a sequência dos seus estudos nas outras ciências que cercam a matemática, portanto, ele se torna indispensável ser aprendido nesta fase. Com esse estudo é possível notar que é conveniente dar oportunidade aos alunos para que percebam a importância da matemática ao longo da história, de como este assunto foi evoluindo, quem foram seus contribuidores, como ele é abordado em sala de aula, no seu cotidiano e no desenvolvimento do seu raciocínio de maneira coerente, ampliando assim sua visão de mundo.

### 1.4 Questões problemas

A matemática escolar acerca de sua importância gera bastante questionamento entre os alunos e como resultado disso pode se verificar uma grande urgência em inserir estratégias e metodologias

que tem como objetivo mudar o olhar e a forma de se comportar da sociedade em relação a esta ciência.

O conteúdo Equação do 2º grau é abordado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) no bloco Números e Operações, e as orientações deste documento incentivam que o professor procure enunciá-lo através de situações problema, proporcionando ao aluno uma melhor compreensão. Ter como fazer com que o alunado tenha noção do objetivo de entender estas equações gera uma transformação na forma deles verem este assunto pois o que antes era visto como fórmulas e cálculos cansativos e muito repetitivos para estas turmas, passam a ser vistos como estratégias para se conseguir chegar a um propósito. Dessa maneira, o aluno passa a desenvolver o gosto e a reflexão pelos conteúdos matemáticos, pois percebem sua real importância, a matemática significativa. Quando pensamos em trabalhar com resolução de problema, precisamos confiar e investir na capacidade dos alunos e encorajá-los.

Este conteúdo é visto por muitos alunos e professores, apenas como um exercício de treinamento de fórmulas, pois geralmente ele é trabalhado fora de um contexto. Os professores exercem a exposição deste tema muitas vezes de forma "antiga" onde os alunos acabam não conseguindo relacionar problemas do dia a dia com este conteúdo, por isso, devemos buscar diversos problemas que são resolvidos pela Equação do 2º grau, para que os alunos se familiarizem. Convencionalmente trabalham-se estas equações aplicando exercícios de forma mecânica. A maioria dos livros didáticos dá ênfase mais às fórmulas, a questões em que o aluno vai exercitá-las e as situações problema são apresentadas com menos intensidade, apenas no final do capítulo e de forma trivial. Sendo abordados desta forma, os alunos se deparam muitas vezes perguntando, para que este conteúdo? Em que ele será útil na minha vida? Vai me servir para o que? Questionamentos que muitas vezes ficam sem respostas, porque o professor não buscou aprofundar-se mais na história do conteúdo e na sua utilização na vida. De acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p.116) isso faz com que os professores procurem aumentar ainda mais o tempo dedicado a este assunto, propondo em suas aulas, na maioria das vezes, apenas a repetição mecânica de mais exercícios. Essa solução, além de comprovadamente ser ineficiente, reflete grave perda no trabalho com outros temas da Matemática.

Na atualidade os livros didáticos e os professores começam aplicando equações simples, que se estendem por muitas aulas. Depois eles vão aumentando os graus de dificuldades dessas equações, com o objetivo de fazer com que o aluno aprenda, apenas depois de muitos exercícios, eles aplicam alguns problemas, mas procuram não se estender muito, pois acreditam que os

alunos não são capazes de acompanhar. Diante dessa postura do professor, o aluno acaba se prejudicando, pois não consegue adquirir o hábito de aplicar o conteúdo em situações problema, conseguindo assimilar apenas a fórmula sem associá-la a um contexto.

Baseado neste contexto apresentamos nossa questão de pesquisa: como ensinar equação do segundo grau de forma significativa? No contexto de ensino de Matemática para que o aluno possa utilizar esta matéria associando o conhecimento desta disciplina aos diversos contextos socioeconômico, fazendo-o considerar a disciplina como uma ferramenta associada ao dia a dia e útil para o mundo?

#### **1.4.1 Objetivo geral:**

- Relatar a aplicação de uma metodologia para o ensino da equação do 2<sup>o</sup> grau, com alunos do primeiro ano do Ensino Médio por meio da História da Matemática e utilização do Kit de Complemento de Quadrados.

#### **1.4.2 Objetivos específicos:**

- Verificar sobre a importância dos materiais manipuláveis para o uso da matemática;
- Aplicar oficina sobre método de abordagem da equação do 2<sup>o</sup> grau;
- Investigar em livros/revistas didáticos como se apresenta a fórmula resolvente da equação do 2<sup>o</sup> grau nos últimos tempos;
- Desenvolver o pensamento científico e o raciocínio lógico no educando;
- promover melhorias na prática do professor de matemática.

### **1.5 Metodologia**

A ideia deste trabalho surgiu a partir de uma experiência realizada no trabalho de Maciel (2010) onde ele desenvolveu uma oficina para professores em formação e alunos de graduação construindo e utilizando procedimentos de Al-Khwarizmi na resolução de equações do segundo grau com o norte de desenvolver novos métodos de uma maneira mais compreensível e madura.

No nosso caso esta experiência foi aplicada com alunos do 1º ano do ensino médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Assis Chateaubriand, em função da dificuldade de aplicar no nono ano, e teve como objetivo fazer uma revisão preparatória para a introdução de função do segundo grau vendo que muitos alunos chegam ao ensino médio com dificuldade em resolver e aplicar estas equações do segundo grau.

Com isso vamos analisar a importância de novas metodologias para a explicação deste assunto, como é o fato de materiais manipuláveis que se mostra uma rica ferramenta de apoio e construção de conceitos, investigando a evolução histórica do conceito de equações polinomiais do segundo grau no que é demonstrado a grande importância das antigas civilizações para o desenvolvimento deste conteúdo, aspectos de natureza variada que possam influenciar em melhores resultados na questão da prática do professor de matemática, estimulando o docente a conhecer várias maneiras de resolver equações do 2º grau desde a antiguidade e esclarecer dúvidas a respeito da origem e da autoria desses métodos, além de mostrar que o professor deve sair da utilização de apenas a reprodução do livro didático adotado na sua escola, o que fica cansativo para o alunado, mostrando onde resgate histórico das equações do 2º grau pode contribuir para uma melhor compreensão desta questão pelos alunos, sendo feito também uma análise de alguns livros didáticos ressaltando como eles expõem este conteúdo.

### {sectionEstrutura do trabalho

Este trabalho é o resultado de algumas respostas para várias inquietações à respeito das metodologias aplicadas ao ensino do conteúdo de equações do segundo grau, ao qual subdividi em 5 capítulos. No primeiro "Metodologia para o ensino de Equações do segundo grau: o surgimento do tema" cito quais foram os motivos que despertaram o nosso interesse, descrevendo os principais problemas para o desenvolvimento da pesquisa e a metodologia que seria seguida; no capítulo 2 sobre "Materiais Manipuláveis", apresentamos um rápido fragmento da história dos materiais didáticos, enquanto recursos auxiliares no ensino e na aprendizagem matemática, mencionando sua definição por educadores que defendem o uso deles em sala de aula, no capítulo 3 "O desenvolvimento da equação do segundo grau" é feito um estudo desde os egípcios até a atualidade de como se desenvolveu a fórmula resolutive desta equação citando grandes matemáticos que deram suas contribuições para chegar a fórmula que conhecemos hoje, no penúltimo "A matemática significativa e os livros didáticos" realçamos a importância de ensinar a Matemática de forma que não esteja presa ao tradicional, expondo que o uso de livros didáticos não pode ser a única opção do professor, posteriormente ainda neste capítulo é feito uma análise

# Capítulo 2

## Materiais manipuláveis

### 2.1 Um breve resumo da origem dos materiais manipuláveis

O ensino da Matemática do ponto de vista da sua importância sempre foi razão de preocupação, discussão e questionamento. A falar da evolução do ensino da Matemática é importante citar os tão conhecidos filósofos Sócrates (469-399 a.C.), Platão (427-347 a.C.) e Aristóteles (384-322 a.C.), que sem dúvida foram importantes para o desenvolvimento desta ciência. No decorrer do tempo muitos profissionais da educação e matemáticos criaram e desenvolveram instrumentos pedagógicos para facilitar, auxiliar a compreensão e a assimilação dos conteúdos propostos no decorrer das aulas como comenta Januário (2008) em sua pesquisa.

Desta maneira, a história dos recursos didático-pedagógicos confunde-se com a história da matemática e de seu ensino. Em meio a esta perspectiva, Lorenzato (2006, A) nos diz que muitos educadores de diversas épocas prezaram por esses materiais e acreditaram na sua utilização na forma de ensinar para mediar a aprendizagem matemática

Quando fazemos referência aos materiais didáticos é preciso sabermos que eles foram tomando presença na área da Didática à medida que alguns psicólogos, educadores e pedagogos se posicionaram para tratar de aspectos sobre a capacidade de processar informações de como se pode conseguir o aprendizado, de como se explica o conteúdo, entre outras questões dessa natureza Lorenzato (2006, A). Nesse sentido, podemos afirmar que estes materiais conquistaram importância, justamente porque seus apreciadores tinham a segurança que o conhecimento deveria evoluir na forma de tocar e ver o que se é exposto e que o processo de ensino-aprendizagem,

pelo menos para os mais jovens, deveria partir do concreto para o abstrato.

Lorenzato (2006, A) nos informa que já em 1650 Comenius<sup>1</sup> defendia esse direcionamento, demonstrando que o conhecimento é iniciado pelo sentido e colocando-se em prática é que se aprende e ainda diz que "o concreto palpável possibilita apenas o primeiro conhecimento, isto é, o concreto é necessário para a aprendizagem inicial, embora não seja suficiente para que aconteça a abstração matemática"(LORENZATO, 2006, p. 20, B)

No Brasil, segundo Nacarato (2005), os materiais manipuláveis ganharam espaço apenas em 1920, quando surgiu uma tendência de ensino de matemática chamada empírico-ativista, onde a utilização de materiais manipuláveis como forma de recursos didáticos passou a ser defendida. No decorrer desta época, a educação brasileira como sabemos, era voltada para o grupo com maiores condições, ou seja, a classe elitista, em uma tendência mundialmente conhecida por Formalista Clássica.

Junuário (2008) comenta que já em 1882 a Escolanovista que teve início no Brasil por Rui Barbosa (1849-1923) não aceitava o sistema tradicional e defendia a democracia. Justamente por este motivo, as escolas deveriam abrigar homens e mulheres, independente de classe, dando a eles incentivos para que pudessem assim, criar condições de ter um aprendizado de qualidade. No que se sabe desta época a Matemática, era ensinada a partir de definições, axiomas e postulados, de forma que não se ligava a realidade, uma matemática fechada, e pronta.

*Outros fatores contribuintes para a ampliação do uso dos materiais manipuláveis foram os primeiros cursos de formação de professores, na década de 1930, por meio de disciplinas pedagógicas – Didática e Metodologia do Ensino de Matemática. Nessas disciplinas fica evidente as contribuições de Bruner e Dienes, influenciados pelas idéias de Piaget, ao dedicarem-se a estudar o uso de materiais didáticos e propor atividades de interação com o meio ambiente e físico. (NACARATO, 2005, p. 31).*

Em 1942, por meio da Reforma Capanema, é instituído o ensino secundário (ginásio, com duração de quatro anos e colegial, com duração de três anos). Depois de uma década, anos 1950, foi formulada a Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino (CADES) Secundário com o intuito de capacitar professores para lecionarem nesse nível e, conseqüentemente, aumentar e garantir o prosseguimento do ensino público (JANUÁRIO, 2008).

Nesta época muito educadores foram contratados para lecionarem cursos, esses profissionais criaram e usaram diversos materiais manipuláveis como uma forma de tornar o ensino

---

<sup>1</sup>Jan Amos Comenius (1592–1670) considerado o pai da didática, propunha uma escola aberta a todos e era contra a educação tradicional imposta pela igreja católica, que favorecia o abstrato.

da matemática concreto e encorajar os alunos às descobertas por meio da experimentação, destacando-se entre eles Júlio Cesar de Mello e Souza (Malba Tahan), Irene Albuquerque, Manoel Jairo Bezerra (JANUÁRIO, 2008). Alguns desses experimentos e ideias metodológicas resultaram em muitos livros publicados pela CADES/MEC.

Posteriormente com a realização dos cinco Congressos Brasileiros de Ensino de Matemática<sup>2</sup> com várias pautas em relação à melhoria da qualidade de educação, ocorreu uma ampliação da discussão sobre a forma de trabalhar esta ciência, tornando seu ensino e aprendizado em algo significativo e amplo. É conhecido por diversos autores que durante este período houve o fim do projeto da CADES tendo assim o surgimento do Movimento da Matemática Moderna (MMM)<sup>3</sup> que não obteve muito sucesso sendo levado ao fracasso. No começo da década de 80 surge Movimento da Educação Matemática (MEM). Com esse rumo, como afirma Januário (2008), amplia-se o uso e os tipos de materiais didáticos como uma forma de intermediar a relação professor-aluno-saber e, posteriormente, inúmeras nomenclaturas aparecem para designá-los.

## 2.2 O uso de materiais manipuláveis no ensino da matemática

Quando falamos nas aulas de matemática, não é novo pensar nas preocupações dos professores em melhorar estas aulas, tornando-as encontros que levem ao aluno uma aprendizagem significativa. Por outro lado, sempre se buscou novas metodologias para facilitar seu ensino e, como consequência, sua aprendizagem. Diante este contexto, a participação aluno durante sequências de aulas de matemática se resume a adquirir informações e a memorizá-las não havendo, com isso, uma contribuição significativa a evolução de outras formas de seu pensamento. O ensino se torna desinteressante para o aluno, pouco atrativo e, como consequência, o aluno não encontra motivo para aprender

Na sequência da história da educação, podemos destacar alguns professores, pesquisadores e pensadores que se destinaram ao estudo de instrumentos para auxiliar no estudo dessa ciência. Um exemplo desta situação é o caso de Fiorentini (1995), Passos (2006) e de Lorenzato (2006), que defendem o prolongamento da sua utilização, por acreditarem que esta metodologia é

---

<sup>2</sup>Salvador (1955), Porto Alegre (1957), Rio de Janeiro (1959), Belém (1961) e São José dos Campos (1966). (FIORENTINI e LORENZATO, 2006).

<sup>3</sup>O Movimento da Matemática Moderna foi um movimento internacional do ensino de matemática que surgiu na década de 1960 e se baseava na formalidade e no rigor dos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra para o ensino e a aprendizagem de Matemática.

uma forma de facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos, uma vez que para além de despertar a motivação e incentivar a aprendizagem, desperta a curiosidade, a concentração e a criatividade. Nesta perspectiva já existem diversos jogos e materiais manipuláveis criados e aprofundados por diversos estudiosos que contribuíram para a melhoria destes.

A preocupação com o ensino significativo está presente também nos documentos oficiais. Com a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei nº 9.394/1996, foram elaborados diversos documentos para que profissionais como professores, pedagogos e gestores pudessem ter uma melhor noção de que forma trabalhar a Matemática para que esta ciência promovesse, dentre outras habilidades, autonomia e reflexão aos educandos, qualificando-os para uma sociedade complexa. Dentre esses documentos, destacam-se os PCN; PCNEM; PCN+; e OCEM como descreve Januário (2008).

No âmbito das metodologias de ensino da matemática existem os materiais manipuláveis que tem a definição de objetos didáticos intuitivos e dinâmicos tendo como foco visar a compreensão de diversos conceitos, como consequência atribuir motivação para auxiliar o aluno execução das tarefas propostas, em qualquer fase de desenvolvimento, onde, através do contato direto com o objeto, o aluno entrega-se intuitivamente ao processo de descoberta, adquirindo assim uma forma de assimilar o conteúdo de forma dinamizada.

Esses tipos de materiais tem a grande capacidade de estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, como afirma Lorenzato (2006, A), justamente através da sua manipulação, exploração e investigação, o aluno aprende a comunicar, a raciocinar e a resolver problemas de forma natural e clara, ou seja, eles criam situações que se aproximam da realidade, permitindo uma melhor compreensão dos problemas que lhes são propostos e facilitando a busca de diversos caminhos de soluções. Nesta direção, utilizar materiais manipuláveis na sala de aula é também uma prática social, em que os envolvidos interagem uns com os outros, engajados em atividades nas quais os significados podem ser compartilhados por diversos meios.

*Assim, na medida em que os sujeitos vão se apropriando dos costumes e ações corriqueiras da prática de um determinado grupo, eles vão apresentando formas diferentes de participação. Para participar de uma prática social, não é preciso, necessariamente, estar presente, até porque as diversas interações promovidas no âmbito da prática social não fazem nenhuma referência aos limites físicos da comunidade, ou seja, não há limites fronteiraços para a prática social (PEREIRA; OLIVEIRA, 2015, p. 5).*

No entanto, como a aprendizagem dos conteúdos matemáticos é fortemente influenciada pelo meio em que se encontra, é importante que para o conteúdo selecionado seja encontrado um

suporte físico para um envolvimento ativo que influenciará significativamente a construção do conhecimento do aluno, ou seja, um local adequado para o desenvolvimento dessas atividades.

Para Lorenzato (2006, p. 18-19 A), os materiais manipuláveis, constituem uma variação dos materiais didáticos. Ele diferencia esses recursos em:

- materiais manipuláveis estáticos – aqueles que "não possibilitam modificações em suas formas, [...] apenas a observação"; são exemplos os sólidos geométricos construídos em madeira ou cartolina". Porém, dentre os estáticos, há os materiais que permitem uma participação mais ativa do aluno, "é o caso do ábaco, do material montessoriano [...], dos jogos de tabuleiro";
- materiais manipuláveis dinâmicos – aqueles que "permitindo transformações por continuidade, facilitam ao aluno a realização de redescobertas e a construção de uma efetiva aprendizagem"; são aqueles que o aluno, ao manipular, pode modificar suas formas, dando nova estrutura ao objeto.

Uma vantagem observada nos materiais manipuláveis dinâmicos em relação aos materiais manipuláveis estáticos, na visão do autor, está no fato de que este facilita melhor a percepção de propriedades, bem como a realização de redescobertas que podem garantir uma aprendizagem mais significativa. O autor ainda revela que os materiais didáticos podem desempenhar várias funções, dependendo do objetivo a que se prestam: apresentar um assunto, motivar os alunos, auxiliar a memorização de resultados e facilitar a redescoberta. Ou seja, estes materiais podem ser colocados dentro das aulas de matemática como uma forma de integrar o conhecimento para que os alunos possam formar conceitos e ter noção da necessidade do que se estuda.

*Os materiais manipuláveis são caracterizados pelo envolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem ativa. (...) Os recursos didáticos nas aulas de matemática envolvem uma diversidade de elementos utilizados principalmente como suporte experimental na organização do processo de ensino-aprendizagem. Entretanto considero que esses materiais devem servir como mediadores para facilitar a relação professor/aluno/conhecimento no momento em que um saber está sendo construído (PASSOS, 2006, p. 78)*

Vale ressaltar que apesar de importante, o material didático manipulável, não garante a aprendizagem do aluno, ele é um complemento, uma expectativa dos professores quanto ao uso de manipuláveis para reduzir as dificuldades do ensino da Matemática. É preciso que ele reflita sobre a atividade que está sendo trabalhada e se possível, extraia conclusões para o seu conhecimento.

de como é exposta a fórmula resolutive da equação do segundo grau, mostrando erros encontrados nestes livros didáticos, no ultimo, "A tentativa de colocar a matemática significativa em sala de aula"descrevo de que forma a pesquisa foi realizada; caracterizando o local e os sujeitos da pesquisa; fazendo um da parte prática.

## 2.3 Por que utilizar Materiais Manipuláveis?

Integrar o uso de materiais manipuláveis se torna indispensável ao ensino e aprendizagem da Matemática e de outras áreas. "Na matemática eles envolvem os alunos ativamente, respeita as diferenças individuais, beneficia o ritmo particular de aprendizagem, aumenta a motivação e é um ótimo instrumento de avaliação"(TAVARES, 2013, p. 3).

*Os materiais manipuláveis são um exemplo de materiais que, ao longo dos anos, têm vindo a ser utilizados na construção e na procura de conceitos. São, portanto, objetos que têm vindo a assumir diversos significados e muitos são os pedagogos, psicólogos e médicos que descrevem os seus atributos, defendendo piamente a sua utilização (CAMACHO, 2012, p. 35).*

O uso do MD, nos auxiliam a uma compreensão mais fixa do conteúdo, dando uma ferramenta para que os alunos tenham um conhecimento mais fixo do conteúdo em que lhe estar sendo aplicado. Inserir MD em aulas de matemática posteriormente, a linguagem gráfica conduz à tradução simbólica, como nos mostra o autor a seguir:

*Uma aula de matemática em que se utilizam manipuláveis, por exemplo, pode configurar uma comunidade de prática. O professor e os alunos presentes nesta aula compartilham um modo especial de comunicação, quando denominam, por exemplo, um recorte de papel como triângulo, ou quando identificam uma superfície de revolução em um objeto de massa acrílica, o que pode não ocorrer em outro ambiente, mas é ali aceito e utilizado. Podem possuir também um objetivo comum, seja ele o de aprender matemática ou mesmo o de ser aprovado na disciplina, além de terem um compromisso mútuo, podendo ser apenas o de frequentar as aulas, ou empenhar -se nas realizações das tarefas (SOUZA, 2011, p.18).*

Continuando na linguagem de Lorenzato (2006, A), o uso de materiais manipuláveis produz um maior rendimento na aprendizagem dos alunos, de todas as idades e em todos níveis de escolaridade, do que a sua não utilização. A introdução de conceitos matemáticos, através da utilização de materiais manipuláveis, pode fazer com que a Matemática se torne mais viva e intensa e que as ideias abstratas tenham mais significado através das experiências com objetos reais.

*Se for verdadeiro que "ninguém ama o que não conhece", então fica explicado por que tantos alunos não gostam de matemática, pois se a eles não foi dado conhecer a matemática, como pode vir á admirá-la? No entanto, com o auxílio do MD, o professor pode empregá-lo corretamente, conseguir uma aprendizagem com compreensão, que tenha significado para o aluno, diminuindo, assim o risco de serem criadas ou reforçadas falsas crenças referentes á matemática, como a de ser ela uma disciplina "só para poucos privilegiados", "pronta muito difícil" e outras semelhanças (LORENZATO, 2006, p. 31, A).*

Em um momento de aprendizagem com materiais manipuláveis, os vários sentidos do aluno são chamados, através do contato e da movimentação, envolvendo-o fisicamente, sendo esta interação favorável ao processo de aprendizagem. Por outro lado, tem a capacidade de possibilitar que o aluno reconheça estes materiais como um meio de descodificação e de representação de enunciados, um auxílio na definição de estratégias de resolução de problemas e verificação concreta de resultados, assim como comunicar o seu raciocínio usando corretamente a linguagem matemática. Aprender torna-se, assim, um processo ativo de construção do conhecimento com significado.

Ainda para Lorenzato (2006, A), conforme a intenção do professor e a forma que são utilizados, os materiais manipuláveis podem desempenhar diversas funções em sala de aula e, por isso, o docente de matemática deve questionar-se antes de apresentá-los à classe, procurando responder o porquê de sua intenção em utilizá-los para ver se de fato inserir estes MD no conteúdo determinado será viável.

*Para apresentar um assunto, para motivar os alunos, para auxiliar a memorização de resultados, para facilitar a redescoberta pelos alunos? São as respostas a essas perguntas que facilitarão a escolha do MD [material didático] mais conveniente à aula. (LORENZATO, 2006, p. 18, A).*

No que podemos ver em sala de aula, alguns alunos são isolados da turma (por vários motivos dentre os quais não vamos citar neste trabalho), não participam das atividades que são chamados a se posicionarem, ou ainda, não revelam ao professor as suas dúvidas, o que acarreta mais dificuldade do desenvolvimento do "saber matemático". Nesses casos, esses recursos podem ajudar a contribuir para a socialização dos alunos, promovendo a integração e a participação ativa nas atividades propostas. Eles colocam o alunado no centro das atenções pedagógicas do professor, ou seja, a maior preocupação do docente não está no conteúdo a ser exposto, mas no saber a ser construído.

Lorenzato (2006, A) ainda discute que por melhor que sejam estes materiais eles não nos garantem um bom ensino sendo assim uma alternativa metodológica para os professores, jamais excluindo os professores na tarefa de disseminar o conhecimento. De acordo com o autor, ter um bom material didático não basta, mas sim, o professor saber a melhor maneira de aplicar e dominar o conteúdo que está implícito no objeto.

## **2.4 Materiais manipuláveis e a geometria na equação do segundo grau**

É reconhecido por vários pesquisadores na área educacional que ensinar equações do segundo grau é um desafio para um professor porque se trata de um assunto complexo para a faixa etária do alunado em questão, que são do último ano do ensino fundamental II, ou seja, do 9º ano. Quando estudamos equações do 2º grau, o processo para chegar a resolução mais usado pelos professores é a fórmula geral, pelo fato de sua demonstração ser longa, complicada e cansativa para os alunos ela é raramente apresentada. Para ensinar este tipo de equações podemos fazer aulas com o uso de alguns materiais que tenham como objetivo completar o conhecimento que se pretende alcançar, existem diversos materiais manipuláveis que o profissional de educação pode escolher para expor o conteúdo de uma maneira mais interessante para seus alunos. Para que de fato ocorra aprendizagem por meio do uso de material concreto, devemos destacar que será proveitoso para a resolução dessas equações do uso da Geometria em união com a álgebra e aritmética.

O estudo da geometria possibilita uma abordagem crítica da realidade, relacionando o conteúdo com situações concretas. Fazendo com que o aluno parta do concreto para mais tarde chegar a situações mais abstratas.

No que concerne aprender Álgebra os PCNs (BRASIL, 1998, p. 115) afirmam: O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas.

Já a aritmética tem o dever de proporcionar o desenvolvimento dos alunos em um sentido numérico através de um processo longo em que se trabalhe o raciocínio figurativo e intuitivo gerado assim meios de produzir afirmações aritméticas com significados, sendo capazes de cons-

truir justificativas.

*A proposta de ensinar geometria, álgebra e aritmética integradamente pode ser útil também para atender o currículo em espiral, que recomenda voltar ao assunto várias vezes, embora, com diferentes enfoques. Para muitos alunos, essa integração pode ser um apoio para aprendizagem, pois facilita a percepção do significado de conceitos e símbolos (LORENZATO, 2006. p 70, A).*

É notório neste sentido que ela se destaca com maior efeito incluindo seu emprego pelos alunos e possibilitando maior compreensão. desse modo junto com o material concreto pode ampliar de uma forma relevante e dar sentidos a visualização dos alunos.

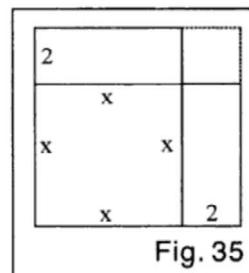
No momento inicial da aprendizagem, os modelos funcionam como uma primeira forma de representação dos conceitos geométricos (PAIS, 1996). Por meio dessa definição o autor em (2000), afirma que a construção dos conceitos geométricos pode ser dificultada por concepções com o forte no imaginário cognitivo e muitas delas possivelmente originadas tanto em relação ao uso de desenhos como de materiais concretos. Podemos, então, virar o nosso olhar para o fato de que o material manipulativo ajuda a formalizar a ideia de equações do segundo grau na perspectiva geométrica.

*Na sucessão de complexidade do processo de aprendizagem da geometria estão as imagens mentais as quais caracterizam-se como um suporte bem mais sofisticado de representação conceitual. Se por um lado, tais imagens estão mais próximas da abstração, por outro, distanciam-se dos conceitos pelo seu aspecto subjetivo. Daí, a necessidade de uma interpretação mais dinâmica que contemple a dialética contida nesses pólos duais (PAIS, 2001, p. 4).*

Em seu livro, Lorenzato (2006, B), mostra como a geometria pode resolver  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  e outras equações do segundo grau como mostra o exemplo na Figura 1.

Figura 2.1: Texto escrito e desenho geométrico na resolução da equação do segundo grau.

**E ainda existem equações do 2º grau que são mais fáceis de serem resolvidas geometricamente, como a seguinte,  $x^2+4x-45 = 0$ , que pode ser transformada em  $x^2+4x = 45$ . A figura, cuja área é 45, mostra que é preciso acrescentar um quadrado (menor)**



**Fig. 35**

**de 2 por 2 para se obter o quadrado (maior) de  $x+2$  por  $x+2$ .**

**Assim fazendo, a área dessa figura passa de 45 para 49, o que revela que seu lado  $x+2$  mede 7, portanto  $x = 5$ .**

Lorenzato (2006, B p. 64) ainda argumenta que "considerando que os conceitos não são construídos em sequência linear nem forma isolada, não é recomendável que seja apresentadas separadas ao aluno as noções de aritmética, geométrica e álgebra", mostrando assim que uma pode sim depender da outra, servindo a união delas um caminho para um aprendizado mais coerente do conteúdo.

Podemos assim reconhecer que existe uma grande variedade de métodos para resolver equações deste tipo que proporciona ao educando uma nova forma de direcionar a visão geral acerca destas metodologias conectando aos conceitos da matemática. Sair do ensino "comum" da matemática, já é algo novo para os alunos, grande maioria já consegue virar os olhos para a novidade daquele momento novo em que lhe é passado, tendo chances assim de fazer com que este público tenha mais atenção as aulas de matemática. A medida que tentamos propor novas formas para o aluno aprender este conteúdo sem dúvida, se apresentarmos de maneira correta, teremos chances que podemos comprovar, de fazer com que a aula se torne mais significativa e envolvente, fazendo assim o aluno querer aprender "de onde" e "como" surgiu a fórmula que já foi lhe entregue pronta. É de fato importante que nos professores de Matemática passemos para os nossos alunos formas diferentes de expor este conteúdo que muitas vezes só resolvemos porque temos fórmulas decoradas. É um problema apontado por vários alunos que se não lhes forem dados as formulas de resolução vários não conseguiriam chegar ao resultado da questão.

Agora, já conhecido que os materiais manipuláveis são considerados como uma ferramenta complementar de ensino, iremos conhecer como a equação do segundo grau se desenvolveu, faremos uma viagem no tempo para assim adquirir a noção de quanto tempo foi necessário para obter a fórmula que consegue solucionar qualquer tipo de equação que estamos estudando.

## Capítulo 3

# O desenvolvimento histórico da equação do segundo grau do antigo Egito a atualidade

### 3.1 Uma abordagem histórica sobre o processo de resolução da equação de 2° grau

Atualmente o ensino da Matemática conta com diversas metodologias de ensino para facilitar e estimular a aprendizagem dos alunos e é tarefa do professor se decidir então qual é a melhor que se adeque ao conteúdo abordado. Dentre as inúmeras metodologias de ensino temos a História da Matemática, que se bem trabalhada pode fornecer os contextos aos problemas, como também os instrumentos para a construção das estratégias de resolução.

*Apresentada em várias propostas como um dos aspectos importantes da aprendizagem matemática, por propiciar compreensão mais ampla da trajetória dos conceitos e métodos dessa ciência, a História da Matemática também tem se transformado em assunto específico, um item a mais a ser incorporado ao rol de conteúdos, que muitas vezes não passa da apresentação de fatos ou biografias de matemáticos famosos (BRASIL, 1997, p 19).*

Pode-se facilmente notar que é grande a curiosidade de alguns alunos sobre o desenvolvimento histórico dos temas de Matemática que lhes são proporcionados em sala de aula e, muitas vezes, os estudantes ficam esperando por esse esclarecimento num curso mais avançado. O que acontece de fato é que muitas vezes os cursos se sucedem chegam ao final e sua curiosidade nem

sempre tem condições de ser sanada.

A História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática (PCN, 1997).

*Uma percepção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e seu ensino. Ter uma ideia, embora imprecisa e incompleta, sobre por que e quando se resolveu levar o ensino da matemática à importância que tem hoje são elementos fundamentais para se fazer qualquer proposta de inovação em educação matemática e educação em geral. Isso é particularmente notado no que se refere a conteúdos. A maior parte dos programas consiste de coisas acabadas, mortas e absolutamente fora do contexto moderno. Torna-se cada vez mais difícil motivar alunos para ciência cristalizada. Não é sem razão que a história vem aparecendo como um elemento motivador de grande importância (D' AMBRÓSIO, 1996, p. 29).*

Na medida em que falamos em História da Matemática, o nosso pensamento já nos leva a associar às civilizações antigas, contudo, é de suma importância que comecemos daquela época e finalizemos com os tempos atuais

*É costume dividir o passado da humanidade em eras períodos, com particular referência a níveis e características culturais...A Idade da Pedra, um longo período que precede o uso de metais, não teve um fim abrupto. Na verdade, o tipo de cultura que representou terminou muito mais tarde na Europa do que em certas partes da Ásia e da África. O surgimento de civilizações caracterizadas pelo uso de metais teve lugar primeiro em vales de rios, como o do Egito, Mesopotâmia, Índia e China (BOYER, 1974, p. 23).*

Tudo o que vamos estudar estar subdividido em períodos, iremos frisar ainda a importância da cultura das civilizações como Egito, Mesopotâmia, China. dentre outras. A partir de agora, vamos agora mergulhar no tempo explorando o desenvolvimento do estudo da equação do segundo grau ou equação biquadrática destacando as civilizações antigas até o tempo de hoje que contribuíram de forma direta para o aperfeiçoamento da escrita e soluções de equações deste tipo.

## 3.2 Egípcios

A maior parte da população egípcia morava em pequenas cabanas feitas de junco, madeira e barro. As casas eram construídas nos locais mais elevados, para não serem atingidas pelas inundações. Essas casas, além de fornecer abrigo nas noites frias, protegiam das tempestades de areia. Nas épocas de muito calor, as famílias procuravam locais mais elevados para tomar ar fresco e fugir do mormaço do interior das casas.

O estudo do Egito antigo está determinado entre 4.000 a.C. e 30 a.C. Houve vários períodos importantes dentro da história egípcia antiga, mas todos eles tiveram basicamente o mesmo aspecto social político e econômico, bem como matemático e científico. Somente com a invasão pelos romanos no século I a.C. é que ocorre um rompimento com sua cultura milenar. Alguns ramos da ciência tiveram avanços significativos, dentre eles a medicina e a astronomia.

Os médicos (sacerdotes) egípcios possuíam grande conhecimento, como comprovam as múmias de vários faraós descobertas nos dois últimos séculos, e também os procedimentos médicos encontrados em alguns papiros<sup>1</sup>

Além disso, os sacerdotes egípcios faziam cálculos astronômicos para determinar, por exemplo, quando iriam ocorrer as cheias do Nilo, e baseados nestes cálculos eles construíram um calendário com 12 meses de 30 dias. A maioria dos relatos históricos sobre a matemática egípcia indica que sempre foi essencialmente prática, baseada em métodos empíricos de tentativa e erro.

De acordo com Fragoso (2000), apesar dos egípcios terem desenvolvido técnicas para o tratamento de alguns problemas envolvendo frações de numerador unitário, áreas de algumas figuras planas, volumes de alguns sólidos e uma curiosa técnica de resolução de equações do primeiro grau, denominada pelos europeus de "método da falsa posição", como foi registrado em papiros de Rhind de Moscou, entre outros papiros de ordem matemática não foi encontrado registro do tratamento de equação polinomial do 2º grau.

---

<sup>1</sup>Papiros :Cyperus papyrus, ou simplesmente papiro, é uma planta famosa desde 40 séculos antes da era cristã. Magnificamente adaptada às margens do Nilo, onde acompanhava em grande quantidade o curso do rio, tem uma longa haste, sem nós nem folhas, de secção triangular e da grossura de cerca de seis centímetros, a qual termina por uma graciosa umbela em forma de penacho, formado por um tufo de pequenos ramos filamentosos verdes. O que aparecia acima da terra era, em síntese, uma planta em forma de junco com, aproximadamente, três metros de altura. Mas suas raízes também são longas, medindo às vezes seis ou sete metros, e com grossura igual à do caule. Veja no final desta página a foto de uma planta do papiro, embora deva ser dito que a espécie que crescia no tempo dos faraós está atualmente extinta. E a fama do papiro é mais do que merecida, pois foi ele que forneceu à humanidade um dos principais instrumentos do progresso: o papel" (fonte: <http://www.fascinioegito.sh06.com/papiros.htm>)

Ainda, Fragoso (2000) comenta que os pesquisadores e historiadores matemáticos mantêm viva a suspeita que essa civilização tenha desenvolvido alguma técnica de resolução, mesmo não existindo registros deste conteúdo. Essa suspeita baseia-se na resolução pelo método da falsa posição, conhecido como "dupla falsa" para equações simultâneas do tipo  $x^2 + y^2 = k$  e  $y = ax$  sendo  $k$  e  $a$  números positivos, como podemos ver no problema retirado do papiro de Berlim que pede para solucionar as equações simultâneas  $x^2 + y^2 = 100$  e  $y = 34x$ .

### 3.3 Mesopotâmicos

A palavra mesopotâmia tem origem grega e significa "terra entre rios". Essa região localiza-se entre os rios Tigre e Eufrates no Oriente Médio, onde atualmente é o Iraque. Esta civilização é considerada uma das mais antigas da história. Vários povos antigos habitaram essa região entre os séculos V e I a.C. Entre estes povos, podemos destacar: babilônicos, assírios, sumérios, caldeus, amoritas e acádios.

Vale dizer que os povos da antiguidade buscavam regiões férteis, próximas a rios, para desenvolverem suas comunidades. Dentro desta perspectiva, a região da mesopotâmia era uma excelente opção, pois garantia a população: água para consumo, rios para pescar e via de transporte pelos rios. Outro benefício oferecido pelos rios eram as cheias que fertilizavam as margens, garantindo um ótimo local para a agricultura.

*Necessidades óbvias das atividades de pastoreio levaram a um grande desenvolvimento de aritmética de contagem e de cálculos astronômicos. O conhecimento matemático dos babilônicos está registrado em tabletes de argilas nos quais são impressas marcas na forma de cunha, daí serem chamados caracteres cuneiformes (D'AMBRÓSIO, 1996, p. 35).*

Castelo (2003) diz que os povos que habitavam esta região tinham maior habilidade para efetuar cálculos, o que tudo indica que era porque a linguagem babilônica era mais acessível do que a egípcia. É comprovado que os babilônicos tinham técnicas para resolver equações quadráticas e biquadráticas, sua geometria tinha um suporte geométrico valioso. A ciência e por consequência, a matemática mesopotâmica teve um grande desenvolvimento por parte dos sacerdotes que detinham o saber nesta civilização. Assim como a Egípcia, esta civilização teve a matemática e outras ciências extremamente voltadas para a prática com o objetivo de facilitar o cálculo do calendário, a administração da colheita, cobranças de impostos e também outros registros.

*Há uma abundância de material relativo á matemática da Mesopotâmia, mas estranhamente provém de dois períodos muito separados no tempo. Há uma grande quantidade de tabletas dos primeiros séculos do segundo milênio a.C. A maior parte das contribuições importantes para matemática remontam no período mais antigo, mas há uma contribuição de que não ha evidencias anterior a quase 300 a.C. Os babilônios parecem a princípio não ter tido um modo claro de indicar a posição "vazio", isto é não tinham o símbolo zero"(BOYER, 2001 p 18).*

O primeiro registro conhecido da resolução de problemas envolvendo o que hoje chamamos de equação do 2º grau como afirma Pedroso (2010), data de 1700 a.C. aproximadamente, feito numa tábula de argila como podemos conferir na figura 2 abaixo, através de palavras, considerada uma "receita matemática" infalível para solucionar tal tipo de equação e que na época só tratava de raiz positiva<sup>2</sup>. A solução era apresentada como uma "receita matemática" e fornecia somente uma raiz positiva. Segundo Eves (1995) os mesopotâmicos enunciavam a equação e sua resolução em palavras, mais ou menos do seguinte modo:

Qual é o lado de um quadrado em que a área menos o lado dá 870 (passando para a linguagem algébrica, a solução deste problema equivale resolver a equação  $x^2 - x - 870 = 0$ ). E a "receita" era :

Tome a metade de 1 (coeficiente de x) e multiplique por ela mesma ( $0,25 \times 0,25 = 0,25$ ) Some o resultado a 870 (termo independente). Obtém-se um quadrado ( $870,25 = 29,5^2$ ) cujo lado somado à metade de 1 vai dar (30) que é o lado do quadrado procurado.

Abaixo vamos conferir a Placa de argila, que atualmente pode ser encontrada no Museu Britânico, em Londres, Inglaterra retratando o problema que foi registrado em escrita cuneiforme que resolvemos acima.

---

<sup>2</sup>As raízes negativas só entraram no contexto matemático a partir do século XVIII.

Figura 3.1: Fotografia da placa de argila 13901, Curadores do Museu Britânico



Fonte: Luiz Roberto Dante, 2012, p. 31

Como já vimos os babilônios davam um tratamento puramente geométrico à resolução de problemas envolvendo equações do segundo grau. Esse tratamento aparece em escritos babilônios que datam 4000 anos atrás.

### 3.4 Gregos

A Grécia antiga compreendia uma região chamada Hélade e ocupava o sul dos Bálcãs (Grécia continental), a Península do Peloponeso (Grécia peninsular), as ilhas do Mar Egeu (Grécia Insular), além das colônias na costa da Ásia Menor e no sul da Península Itálica (Magna Grécia).

A civilização grega propriamente dita, foi formada nos séculos XX a.C. por invasões de Aqueus, Jônios, Eólios e Pórios. A Grécia antiga é considerada o berço da civilização ocidental, mas na realidade ela se desenvolveu partir da civilização cretense. Como a Grécia antiga era chamada de Hélade como dito acima, este povo foi denominado na antiguidade de "helenos". A história da Grécia é dividida, pelos historiadores, em quatro períodos principais: Pré-Homérico, Homérico, Arcaico e Clássico.

O caráter da Matemática grega é completamente diferente da matemática babilônica como afirma Castelo (2010). Embora os próprios gregos reconhecessem que muito deviam à matemática egípcia e babilônica, eles transformaram os conhecimentos destas duas civilizações

em um corpo de resultados bem estruturados, no qual a argumentação é feita com um tipo bem específico de discurso e demonstrações matemáticas. A base da revolução matemática exercida pela civilização grega partiu de uma ideia muito simples. Enquanto Egípcios e Babilônicos perguntavam "como"? os filósofos gregos começaram a indagar "porque"? Assim, a matemática que até este momento era essencialmente, prática, passou a ter seu desenvolvimento voltado para a conceituação, teoremas e axiomas. A substituição da escrita grosseira por um alfabeto fácil de entender ajudou bastante no desenvolvimento da ciência e matemática.

No período inicial o sistema de numeração grego não trouxe grandes aperfeiçoamentos em relação ao egípcio e, em particular, ao babilônico. Os gregos não utilizavam a notação posicional já conhecida na mesopotâmia. Apesar disto, devido à vasta influência grega na cultura ocidental posterior, vários prefixos de numeração, tais como penta (representando cinco), deca (dez), hecaton (cem) e quilo (mil) se conservam até os dias de hoje.

Pedroso (2010), acredita que a dificuldade no tratamento com os números, racionais e irracionais, e a falta de praticidade do sistema de numeração grego, que era literal, além do gosto natural pela geometria, levou essa civilização (500 a 200 a.C.) a desenvolver um tratamento geométrico de muitos problemas matemáticos, dentre os quais, a solução de equações do 2º grau. Em "Os Elementos de Euclides" particularmente encontra-se algumas proposições desse tipo de equação.

Continuando esta linha de pensamento, Castelo (2013), diz que durante o período grego, vários filósofos e matemáticos deram sua contribuição no desenvolvimento da matemática.

*Os primeiros avanços da matemática grega são atribuídos a Tales de Mileto (ca 625-547 a.C.) e a Pitágoras de Samos (ca 560-480 a.C.). Muito do conhecimento que hoje temos da matemática grega está na obra dos três maiores filósofos da antiguidade Grega, Sócrates, Platão e Aristóteles, que viveram no século VI a. C. (D'AMBRÓSIO, 1996, p. 36).*

Nesta época surgiram os cientistas, homens que dedicaram a sua vida á procura do e que conhecimento e que por isso recebiam um salário. Um exemplo é Euclides (360 a.C.- 295a.C.) Sua obra mais famosa é a coleção "Os elementos" obra em 13 volumes que contém aplicações de álgebra à geometria baseado numa dedução estritamente lógica de teoremas, postulados, definições de axiomas. Até os dias hoje é o livro mais impresso na matemática. Euclides elaborou também obras que abordam temas como perspectivas, seções cônicas, geometria esférica, teoria dos números e rigor. Sua esfera de criação é tão ampla que alguns pesquisadores chegaram a acreditar que os trabalhos a ele atribuídos não pertencessem a um único ser. Este

autor no "Elementos" resolve equações polinomiais do segundo grau através de métodos geométricos. e Diofanto (200 - 284) que é mais conhecido por seu "Arithmetica", uma obra contendo 130 problemas algébricos e suas soluções numéricas [equações algébricas] e teoria dos números, além de introduzir notação simbólica diferente para o quadrado de uma incógnita, para o cubo, exercendo grande influência na História da Matemática. Ele contribuiu para mais um avanço na busca da resolução de equações do segundo grau ao apresentar uma outra representação da equação introduzindo alguns símbolos, pois até então a equação e sua solução eram representados em forma discursiva.

Acerca do desenvolvimento acima podemos observar que as descobertas matemáticas são relacionadas com os avanços obtidos pela sociedade tanto intelectuais como comerciais, ambos se completam. Castelo (2013), defende que todas as descobertas matemáticas realizadas pelos povos pré-históricos, egípcios e babilônicos serviram como apoio para a matemática desenvolvida pelos gregos. Registros comprovam que a matemática grega foi, e continua sendo, a base de nossa matemática atual. Todo o desenvolvimento tecnológico obtido em nossos dias tem como ponto de partida a matemática grega. Sabe-se que nesta época vários filósofos e matemáticos deram sua contribuição para o desenvolvimento da matemática.

Neste contexto, Castelo (2013), explica que sem a axiomatização desenvolvida pelos gregos, não haveria o desenvolvimento da matemática abstrata e dos conceitos, postulados, definições e axiomas tão necessários à nossa matemática. Da matemática da antiguidade, fundamental a nós hoje, podemos citar: processos de contagem, numeração, trigonometria, astronomia, geometria plana e volumes de corpos sólidos, sistema sexagesimal, equações quadráticas e biquadráticas, relações métricas nos triângulos retângulos, entre outras. O método nesta época era até então o de resolução por meio geométrico. A geometria era a ferramenta de formulação dos problemas e conseqüentemente a incógnita, ou seja, o número que se desejava descobrir era sempre um segmento que seria obtido através da e do compasso.

### 3.5 Árabes

Ao falar dos povos árabes Fragoso (2000), afirma que eles foram ao mesmo tempo responsáveis pela maior destruição do conhecimento ocidental, e por sua preservação. Em 641 d.C. o museu de Alexandria foi invadido e incendiado pelo domínio islâmico sendo perdido grande conteúdo e importantes obras. Os árabes tiveram um papel muito importante na história da matemática,

pois eles traduziram, fielmente, os clássicos gregos (Apolônio, Arquimedes, Euclides, Ptolomeu e outros). Estes clássicos estariam perdidos para nós sem os árabes, visto o fechamento da escola de Atenas por Justiniano.

Castelo (2013) diz que "as atividades matemáticas árabes começaram com a tradução dos Siddanthas hindus por al-Fazari e culminaram com uma grande importância com Mohamed Ibu-Musa al-Khowarizmi (Figura 3), por volta de 825".

Figura 3.2: Pintura de Al-Khowarizmi



Fonte: <http://www.infoescola.com/matematica/equacoes-biquadradas>

É importante falar sobre Al-Khowarizmi, são poucos detalhes conhecidos de sua vida. É certo, porém, que se aprofundou no estudo de várias ciências, como aritmética, álgebra, astronomia, geografia e sobre o calendário, tendo escrito tratados em todos estes campos do conhecimento. Alguns de seus trabalhos foram traduzidos para o latim e estudadas pelas mentes mais avançadas da Europa na época, contribuindo para que o continente se libertasse do domínio intelectual da igreja, preparando as bases do humanismo renascentista. Seus tratados são até hoje reconhecidos, valorizados e ainda empregados. Por isso mesmo, ele é considerado uma das maiores mentes científicas do período medieval e mais importante matemático muçulmano. Em Al-jabr wa'l muqabalah encontramos também operações com expressões binomiais, as regras que governam as operações com sinais (que atualmente chamamos de regras de sinais), problemas de herança, além de outras demonstrações geométricas. A exposição deste autor foi tão completa e sistemática que ficou conhecido como o pai da álgebra.

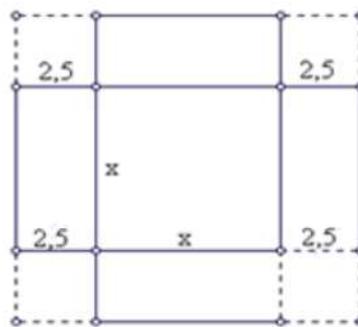
A astronomia de Al-Khowarizmi era um resumo dos Siddanthas, o qual mostrava uma influência grega nos textos sânscritos.

*Al-Khowarizmi apresentou a equação polinomial do segundo grau, bem como sua resolução de forma retórica, além de uma comprovação geométrica denominada, atualmente, método de completar quadrados. Entretanto, tal como seus predecessores apresentava somente uma das raízes positivas (FRAGOSO, 2000, p. 58).*

Al- Khowarizmi apresentou e solucionou a equação, no século IX da seguinte forma:

A equação abaixo é representada por um quadrado de lado  $x$ , e sobre os quatro lados se constrói retângulos de largura 2,5 unidades como podemos conferir na figura a seguir, a exposição geométrica deste exemplo. Para completar o quadrado maior precisamos construir quatro quadrados menores nos cantos da figura, cada um com área igual a 6,25 unidades. Portanto para "completar o quadrado" somamos 4 vezes 6,25 unidades ou seja 25 unidades, obtemos então um quadrado com área total  $39 + 25 = 64$ . Concluimos que o lado do quadrado maior mede 8 unidades e se subtrairmos 2 vezes 2,5 unidades ou seja 5 unidades, achamos  $x = 3$ .

Figura 3.3: Resolução geométrica da equação  $x^2 + 10x = 39$



Fonte: <http://www.matematica.br/historia/al-kowarizmi.html>

## 3.6 Hindus

Os indianos dos primeiros tempos foram exterminados por volta de 1500 a.C. Este país tinha como política, vários pequenos principados desunidos, o que propiciou muitas invasões em seu território (arianas, persas, gregas, árabes e ingleses). Estes invasores se estabeleceram como classe dominante, evitando a miscigenação com o povo nativo.

*Muito pouco se sabe sobre o desenvolvimento da matemática Hindu antiga diante da falta de registros históricos autênticos. Uma fonte histórica antiga ainda preservada são as ruínas de uma cidade de 5000 anos, encontrada em Mohenjo Daro, um sítio localizado a nordeste da cidade de Karachi no Paquistão (EVES, 2004, p. 86).*

Castelo (2013), nos diz que a matemática hindu tem grande influência no mundo inteiro: os universalmente conhecidos algorismos arábicos são de origem hindu. Os hindus conheciam a extração da raiz quadrada e cúbica e tinham noções das leis fundamentais da trigonometria.

Seus conhecimentos matemáticos, tão essenciais para várias ciências, foram divulgados na Europa pelos árabes. São do 3º milênio a.C. os primeiros vestígios matemáticos da civilização que se desenvolveu no vale do rio Indo. Descobertas recentes parecem indicar que os harapas, povos que habitavam aquela região, adotaram um sistema decimal de pesos e medidas. Os hindus foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra. Muitos dos problemas aritméticos eram resolvidos por falsa posição. Outro método de resolução preferido era o de inversão no qual se trabalha para trás, a partir dos dados.

A matemática hindu produziu até o renascimento grandes personagens, dentre o quais destacam-se:

Sridhara (séc XI, d.C) O matemático Sridhara como podemos ver abaixo, obteve a Fórmula (conhecida como sendo) de Bhaskara, que é a fórmula geral para a resolução de equações do segundo grau. Um fato curioso é que a Fórmula resolutiva conhecida no nosso país por Fórmula de Bhaskara não foi descoberta por ele mas pelo matemático hindu Sridhara, pelo menos um século antes da publicação de Bhaskara, fato reconhecido pelo próprio, embora o material construído pelo pioneiro não tenha chegado até nós.

Figura 3.4: O matemático inventor da fórmula geral da equação do segundo grau



Fonte:<http://www.harekrsna.org/gbc/black/sridhara.htm>

Bhaskara (1114-1185) Bhaskaracharya foi um dos mais importantes matemáticos do século XII, graças aos seus avanços em álgebra, no estudo de equações e na compreensão do sistema numérico - avanços esses que os matemáticos europeus levariam séculos ainda para atingir. As

duas obras mais conhecidas de Bháskara, Lilavati e Vijaganita, que tratam de Aritnmética e Álgebra, respectivamente, contém numerosos problemas sobre equações do primeiro e segundo graus, porém resolvidas também com receitas em prosa. Na sequência deste trabalho vamos comentar um pouco sobre como é tratado a fórmula geral que resolve as equações do segundo grau, e como ela é exposta para os alunos em sala de aula.

### 3.7 Chineses

Em diversos livros de história podemos tirar como informação que a civilização chinesa desenvolveu-se, desde o 3º milênio a.C., ao longo das margens do rio Amarelo e do Azul, na dinastia Hsia, iniciada pelo imperador Yu. Continuou com a dinastia Shang, por volta de 1500 a.C., que ocupou a região de Shangai. São desta dinastia os primeiros numerais chineses inscritos sobre carapaças de tartarugas e ossos de animais - os ossos oraculares que usavam para adivinhações. A dinastia Shang domina até cerca de 1027 a.C. A partir daí, o poder é exercido pela dinastia Chou; a China torna-se um Estado feudal. O grande império desintegra-se, por volta do 700 a.C., e até aproximadamente, 400 a.C. coexistem estados independentes em, praticamente, permanente guerra uns com os outros.

Os historiadores consideram muito difícil datar documentos matemáticos da China. O clássico mais antigo da matemática chinesa "Chou Pei Suang Ching" tem uma variação de quase mil anos entre suas datas mais prováveis de escrita. A maior dificuldade em datar este documento ocorre porque foi escrito por várias pessoas, em períodos diferentes. O Chou Pei indica que na China a geometria originou-se da mensuração, assim como na babilônia, sendo um exercício de aritmética ou álgebra. Neste trabalho há indicações que os chineses conheciam o teorema de Pitágoras. Durante toda sua história, a ciência chinesa sofreu com vários problemas, que impediram sua continuidade e aprimoramento. Em 213 a.C. o imperador da China mandou queimar os livros existentes. Mesmo que algumas cópias tenham sido salvas, a perda foi irreparável. No século XX, Mao-Tsé-Tung, com sua "Revolução Cultural" também promoveu uma queima generalizada de livros, considerados "subversivos".

O ponto alto da matemática chinesa ocorreu no século XIII durante o fim do período Sung. Nesta época foi descoberta a impressão, a pólvora, o papel e a bússola. Obras chinesas desta época influenciaram fortemente a Coreia e o Japão. Muitas dessas obras desapareceram da China neste período, reaparecendo apenas no século XIX. Yang Hui (1261 – 1275), matemático

talentoso trabalhou com séries numéricas e apresentou uma variação chinesa para o triângulo de Pascal.

De acordo com Fragoso (2003), em 1903, o último e maior dos matemáticos chineses, Chu Shi-chieh, apresentou na obra *Ssu-yuan yúchien* (Precioso espelho dos quatro elementos) uma técnica especial para a resolução da equação polinomial do segundo grau, onde se baseia em aproximações sucessiva, o que é chamado de método de fan-fan, ou fan-fa, que também foi apresentado de forma retórica com grande precisão. Este método tal como os mesopotâmicos, gregos, hindus e árabes, evidenciaram apenas uma única raiz positiva.

Abaixo mostraremos o método precioso de fan-fa, em um exemplo que é exposto por Fragoso(2000). Ao solucionarem a equação da forma  $x^2 + 252x - 5292 = 0$ , o procediam da seguinte maneira:

$$x^2 + 252x = 5292$$

$$x' = 19 + x$$

"solução aproximada"

$$(19 + x)^2 + 252(19 + x) = 5292$$

"substituíam o valor de  $x'$  na incógnita  $x$  da equação original"

$$361 + 38x + x^2 + 4788 + 252x = 5292$$

$$x^2 + 290x = 143$$

$$x' = 19 + 1431 + 290$$

$$x' = 19, 49$$

"Repetiam o cálculo até que aparecesse (fan-fa) um número cujo valor não se modificasse (convergência). Sendo esse número a solução desejada."

$$x'' = 19, 49 + x$$

$$x^2 + 252x = 5292$$

$$(19, 49 + x)^2 + 252(19, 49 + x) = 5292$$

$$x^2 + 290, 98x = 0, 66$$

$$x'' = 19, 49 + 0, 661 + 290, 98$$

$$x'' = 19, 49$$

(valor convergente)

$x''$  é o valor, aproximado, de uma das raízes da referida equação.

### 3.8 Europeus (A partir de XV)

Embora ainda não usasse o formalismo atual, o processo para resolver problemas envolvendo equações do segundo grau resumia-se na receita usada por Bhaskara. Do século XVI à XVII, muitos foram os matemáticos que desenvolveram formas distintas para representar a resolução de equações do segundo grau.

A ideia de usar uma convenção alfabética para diferenciar incógnitas de constantes foi do matemático francês François Viète (Fontenay-le-Comte, 1540 - Paris, 13 de Dezembro de 1603), como pode-se constatar em sua obra de 1591, *In Artem Analyticem Isogoge* (Introdução à arte analítica), onde empregou consoantes para as incógnitas e vogais para as constantes.

Tabela 3.1: Substituição de palavras por símbolos de Viète.

Nossa linguagem	Linguagem de Viète
$x^2 = 9$	A área é igual a 9
$2x^2 - 5x + 2 + 0$	A2 área $\overline{m}$ A5 $\overline{p}$ é igual a 0

Fonte: Adaptado de Giovanni e Giovanni jr., 2010.

Posteriormente, Viète adotou o símbolo + para substituir  $\overline{p}$  e o símbolo - para substituir  $\overline{m}$ . Assim:

Tabela 3.2: Símbolo + e - como Viète adotou.

Nossa linguagem	Linguagem de Viète
$x^2 = 9$	A área é igual a 9
$2x^2 - 5x + 2 + 0$	A2 área $\overline{m}$ A5 $\overline{p}$ é igual a 0

Fonte: Adaptado de Giovanni e Giovanni jr., 2010.

Podemos verificar nas tabelas acima que Viète passou a representar:

- a incógnita por uma vogal
- a palavra mais pelo símbolo  $\overline{p}$  (do francês plus) e a palavra menos pelo símbolo  $\overline{m}$  (do francês moins) - o traço sobre a letra indicava que ela estava sendo usada como símbolo matemático

- a palavra área para indicar quadrado (no caso da equação do 2°).

Porém, do século XV ao XVII muitos foram os notáveis matemáticos que apresentaram maneiras diferentes de resolver as equações do segundo grau, dentre eles Descartes, e Além de René Descartes, no século XVIII que praticamente criou a notação que usamos até hoje (tabela 3), o alemão Karl G. Christian Von Staudt e o inglês Sir John Leslie, em sua obra *Elements of Geometry*, obtiveram as soluções positivas e negativas de uma equação polinomial do segundo grau, através da utilização de eixos cartesianos e de uma circunferência.

Tabela 3.3: Substituição de palavras por símbolos.

Viète	Descartes
A área é igual a 9	$x^2 = 9$
A2 área - A5 + 2 é igual a 0	$2x^2 - 5x + 2 = 0$

Fonte: Adaptado de Giovanni e Giovanni jr., 2010.

Assim podemos perceber que os matemáticos buscaram, através da geometria, formas diferentes do método algébrico que hoje usamos para solucionar as referidas equações.

No decorrer deste capítulo vimos até então que vários foram os autores que puderam contribuir para o desenvolvimento das equações do segundo grau, no quadro abaixo podemos ver diferentes formas de representação feitas entre os séculos XV e XVII pelos matemáticos europeus.

Tabela 3.4: Substituição de palavras por símbolos de Viète

Notação:  $x^2 + 5x - 6 = 0$

Ano	Autor	Notação Matemática
1494	Luca Pacioli (Itália)	Trouame. 5. n° che gioto al suo qdrat° facia 6
1514	Vander Hoecke (Inglaterra)	I Se. + Pri. dit is ghelijc 6
1521	F. Ghaligai (Alemanha)	$I\Box$ e $5C^\circ$ - 6 numeri.
1545	Girolamo Cardano (Itália)	Quadratus p 5 rebus aequalis 6
1559	J. Buteo (Itália)	$I\Diamond$ P 5p [P 6
1591	François Viète (França)	1 p 5N m 6 aequatur 0
1691	René Descartes (França)	$x^2 + 5x - 6 = 0$
1693	Honh Wallis (Inglaterra)	$x^2 + 5x - 6 = 0$

Fonte: Fragoso (2000).

### 3.9 Atualidade

Muitas vezes, cometemos o erro de achar que à medida que os avanços na ciência são obtidos, eles chegam automaticamente ao ensino. E pior que isso: essa substituição do novo conhecimento pelo antigo é sempre bem feita! Ou seja, temos uma falsa certeza que o ensino dos dias atuais é necessariamente melhor que o ensino de anos anteriores.

*"Hoje, a matemática vem passando por uma grande transformação. Isso é absolutamente natural. Os meios de observação, de coleção de dado e de processamento desses dados, que são essenciais na criação da matemática, mudaram profundamente. Não que se tenha relaxado o rigor, mas, sem dúvida, o rigor científico hoje é de outra natureza"*(D' AMBRÓSIO, 1996, p. 58)

No ensino de equação de 2º grau, temos um bom exemplo desse questionável progresso. Os alunos brasileiros estudam estas equações a partir da 9º ano do Ensino Fundamental, e aprendem a fórmula resolvente fornecida pelos hindus e a representação herdada dos europeus. Porém é importante que se saibam que desde muitos séculos antes de Cristo já havia uma preocupação com o desenvolvimento desse tipo de equação, analisando, inclusive as relações entre seus coeficientes e raízes.

Hoje, quando pensamos em resolver uma equação do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$ , associamos automaticamente aquela fórmula geral  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  (indevidamente chamada no Brasil por "Fórmula de Bhaskara") em que, o termo é denominado discriminante, ou seja, é o termo que discrimina a quantidade de raízes que uma equação polinomial do segundo grau possui.

No decorrer deste capítulo reconhecemos que é de extrema importância aplicar não só no conteúdo de equações do segundo grau mas em todos uma introdução da história do assunto que será abordado, pois se torna uma forma diferente e complementar de aplicar uma aula de matemática que desperta o interesse do aluno. Visto o desenvolver desta parte iremos no próximo capítulo conhecer o que é a matemática significativa e o porque unir várias formas de ensinar é importante para a aprendizagem dos alunos e mostrar que a utilização apenas do livro didático não é recomendado.

# Capítulo 4

## A matemática significativa e os livros didáticos

### 4.1 A importância da matemática significativa na sala de aula

Comumente é visto no ensino de matemática, professores explorando os conteúdos seguindo por receitas que são sempre repetitivas, acreditando na memorização de conceitos, de exemplos e exercícios que impõem uma forma "mecânica" para ser executados, ou focando em conteúdos de pouco significado para os alunos, claramente não refletirá numa aprendizagem que tenha sentido real para o alunado.

*"A problemas a serem enfrentados, tais como a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno. Há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama"(PCN, 1997, p 15).*

A preocupação com o ensino significativo também faz parte dos documentos oficiais. Com a publicação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei nº. 9.394/1996 foram criados diversos documentos para que docentes e gestores pudessem ter orientação de como trabalhar a Matemática para que esta ciência promovesse, dentre outras habilidades, autonomia e reflexão aos estudantes, preparando-os para uma sociedade complexa (SOUZA. et al. 2008. p. 5).

A matemática que é apresentada na escola que muitas vezes é compartilhada pelos professores do Ensino de Matemática se caracteriza por um excesso de abstração sendo um peso na vida dos alunos, esta disciplina também se apresenta de forma vaga de contextualização e por um objeto de estudo vazio, ou seja, o conhecimento matemático que é acumulado pelos alunos quase sempre acaba por se restringir em códigos e regras que sozinhos não levam nenhum sentido no entender dos alunos. O que deveria ser maravilhoso torna-se muito complexo, desmotivador e conseqüentemente cansativo.

*Motivação é algo que leva os alunos a agirem por vontade própria. Ela inflama a imaginação, excita e põe em evidência as fontes de energia intelectual, inspira o aluno a ter vontade de agir, de progredir. Em suma, motivar é despertar o interesse e o esforço do aluno. É fazer o estudante desejar aprender aquilo que ele precisa aprender (ZÁBOLI, 1999, p. 46).*

Partindo desta ideia torna-se evidente que é necessário utilizar "artifícios" de ensino que tenham como objetivo desafiar os alunos a resolver as perguntas que lhes são propostas, seguindo sempre que possível partir da realidade que se encontra o público em questão, dando a importância devida às diferentes formas de resolução destes problemas sendo uma meta, ampliar os conhecimentos que eles já tem, tornando assim uma aprendizagem significativa. A aprendizagem significativa como afirma Nunes (2007) pressupõe ainda que o aluno manifeste uma disposição para tal, caso contrário ocorrerá uma aprendizagem mecânica dos conteúdos estudados

*A aprendizagem significativa caracteriza-se pela interação de uma informação a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do sujeito, não a qualquer aspecto. Uma informação é aprendida de forma significativa, quando se relaciona a outras ideias, conceitos ou proposições relevantes e inclusivos, que estejam claros e disponíveis na mente do indivíduo e funcionem como âncoras (SOARES, 2009, p. 53).*

Colocar em prática a aprendizagem na escola é permitir o alunado passe a ter uma compreensão a partir de exemplos com ligação ao seu dia-a-dia, como consequência eles ganharem a capacidade de solucionar questões mais elaboradas. É possível ver assim que o processo de ensino e aprendizagem da Matemática deve ser bem trabalhado nas escolas, para que futuramente os alunos não apresentem dificuldades graves, quanto a construção deficiente do pensamento lógico-abstrato. Existindo assim, o ensino da matemática significativa é possível então que estes alunos tomem decisões com uma noção mais ampla e ganhem uma certa autonomia em situações que lhes forem impostas.

Dessa maneira, a Matemática pode ser vista com um significado e razão para ser estudada, se aproximando de uma visão ampla e mais próxima à realidade tendo condição para o reconhecimento do contexto sociocultural dos alunos, construção de alunos pensantes, criativos, críticos, participativos e preparados para o mundo real.

## 4.2 Livro didático e o papel do professor de Matemática

Desde o começo das séries iniciais até qualquer modalidade de ensino usamos livros didáticos que são recursos de fácil alcance, estes tem como função, ser um apoio para o professor seguir o conteúdo e ser um material de consulta para os alunos como fonte de pesquisa e atividades de pratica do que lhe foi exposto e será cobrado. Na escola os materiais mais utilizados para expor o que é programado à cada série é o livro didático que influencia a aprendizagem, o que acontece é que na sala de aula ele acaba sendo o único recurso que os professores utilizam para colocar em pratica o conhecimento. Com isso vale ressaltar neste texto que, em muitas escolas brasileiras, ele é o único instrumento de que o professor dispõe.

Vale salientar neste trabalho também que muitas vezes nem sempre o professor chega a utilizar os livros didáticos que é disponibilizado para os alunos. Apesar dos professores eleger um livro para o decorrer do ano, se nota que muitas vezes ele não é utilizado. No decorrer dos meus estudos do fundamental e médio tive a oportunidade de ter bons livros de matemática e pude perceber que raramente os professores pediam para que utilizássemos como apoio à aula, a maioria das vezes eles chegavam sempre com aulas preparadas que não possibilitava um meio para que a gente soubesse de onde o professor tirou aquele texto exposto no quadro, também observei este tipo de comportamento dos professores nas disciplinas de Estagio Supervisionado I, II e III, os alunos sempre carregavam os livros de matemática e quase nunca chegavam a abrir o livro, fato que considero um papel importante e trivial, o professor saber fazer o uso do Livro Didático que ele próprio ajudou a escolher e aplicar as recomendações dele. Os LD se tornam neste desenvolvimento um fator ímpar para a sala de aula e o desenvolvimento do alunado, apenas ele não é suficiente como vim desenvolvendo ao longo deste trabalho, imagina o mediador das aulas nem ao menos fazer o uso dele?

*Há o papel ideal e o papel real. O papel ideal seria que o livro didático fosse apenas um apoio, mas não o roteiro do trabalho dele. Na verdade isso dificilmente se concretiza, não por culpa do professor, mas de novo vou insistir, por culpa das condições de trabalho que o professor tem hoje. Um professor hoje nesse país, para ele minimamente sobreviver, ele tem que dar aulas o dia inteiro, de manhã, de tarde e, frequentemente, até a noite. Então, é uma pessoa que não tem tempo de preparar aula, que não tem tempo de se atualizar. A consequência é que ele se apoia muito no livro didático. Idealmente, o livro didático devia ser apenas um suporte, um apoio, mas na verdade ele realmente acaba sendo a diretriz básica do professor no seu ensino. (SOARES, 2002, p. 2).*

Ao falar de livros didáticos não poderíamos deixar de falar sobre Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) que segundo o Ministério da Educação (MEC), tem como principal objetivo contribuir para o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica. Neste guia de livros didáticos é possível ver que no ano de 2008 ele traz dados importantes para a utilização deste recurso durante as aulas, o que de fato se nota a importância de analisar um livro para que ele possa ser bem utilizado.

Quando falamos da importância do papel do professor na escolha do livro e na forma que ele pode ser aproximar da realidade que o aluno vive em sala de aula, o guia evidencia que:

*O livro didático é um material de forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento (BRASIL, 1998, p.67).*

#### **4.2.1 Livros didáticos: Bháskhara x Sridhara e a fórmula resolutiva da equação do segundo grau.**

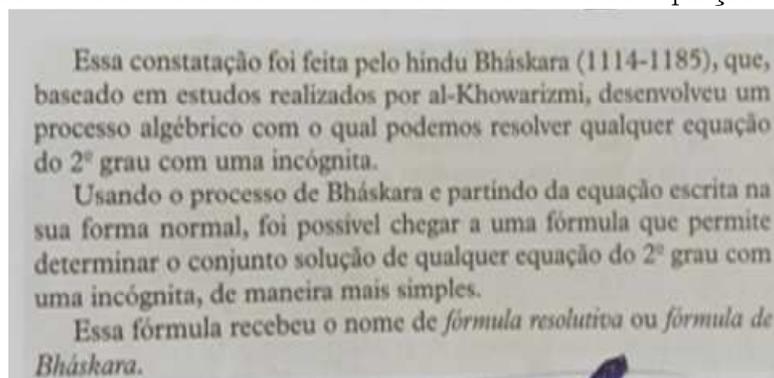
Ao analisar livros didáticos é possível perceber a existência de falhas na sua composição, às vezes na forma de apresentação do conteúdo, nas atividades propostas, no desenvolvimento dos conceitos no decorrer das páginas, até na parte da impressão, figuras e gráficos não são chamativos a ponto de envolver os alunos a ter intenção de ler o que consta no texto do livro, ou ainda de inadequação à realidade local, às práticas sociais do grupo escolar em questão.

É possível notar que se analisarmos os livros que são disponibilizados desde décadas passadas até hoje a fundo é possível encontrar erros de informações envolvendo datas históricas,

autores, gráficos e até desenvolvimento de resultados. Um erro que notamos foi que em alguns livros didáticos é exposto erroneamente quem de fato desenvolveu a fórmula resolvente da equação estudada neste trabalho. Vendo que existem falhas iremos apontar em alguns livros bastante conhecidos e utilizados do 9º ano Ensino Fundamental, o uso inadequado do nome da fórmula resolvente da equação do segundo grau que é conhecida erroneamente no Brasil como fórmula de Bháskara (1114-1185). Pelo o que se sabe este costume é apenas brasileiro, pois não é encontrado em livros e pesquisas o nome de Bháskara para a fórmula em outros países. Conferimos no capítulo 3 deste trabalho que a fórmula que soluciona equações deste tipo foi obtida um século antes por um matemático hindu conhecido por Sridhara. A seguir iremos apontar como os livros didáticos trabalham com esta questão que ainda gera um pouco de confusão na hora de ler estes livros didáticos.

Vamos começar pelo livro de Geovanni, Geovanni Jr. "Pensar e descobrir". O LD analisado foi publicado em 2000 e trata-se do exemplar do professor; é composto por dez capítulos, indicação de leituras, bibliografia, respostas de exercícios, glossário e por projeto de intervenção pedagógica. Ao final do livro, constam sessenta e quatro páginas de orientações para o professor de Matemática. Os autores iniciam com uma parte histórica relativamente interessante, incentivando aos leitores a viajar na história do conteúdo em questão, ele apresenta alguns matemáticos importantes que contribuíram para o desenvolvimento das equações do 2º grau, lança problemas que desafiam os alunos, desenvolve o método de al-Khowarizmi, porém como podemos ver na figura 6 abaixo em um texto sobre o criador da fórmula resolvente destas equações que aparece de uma forma errada, mostrando que Bháskara foi o criador da fórmula que soluciona uma equação biquadrática.

Figura 4.1: Bháskara como criador da fórmula resolvente da equação do segundo grau.

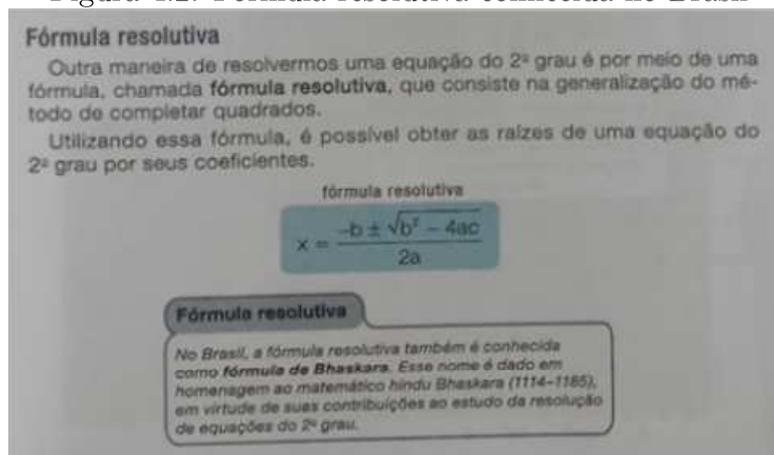


Fonte: Giovanni, Giovanni Jr, "Pensar e descobrir", p. 119

Posteriormente encontramos no livro de Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro "Vontade

de saber Matemática" publicado em 2010 onde consegui ver que este LD da maior ênfase as fórmulas, a questões em que o aluno vai exercitá-las e as situações problema nele proposto são apresentadas com menos intensidade. É possível observar no decorrer dos textos do livro que os autores já comentam que Bháskara ajudou no desenvolvimento da fórmula e que é conhecida por Fórmula de Bhaskara no nosso país com foco de deixar mais claro que por trás deste grande matemático houve outro que de fato criou a fórmula que resolve.

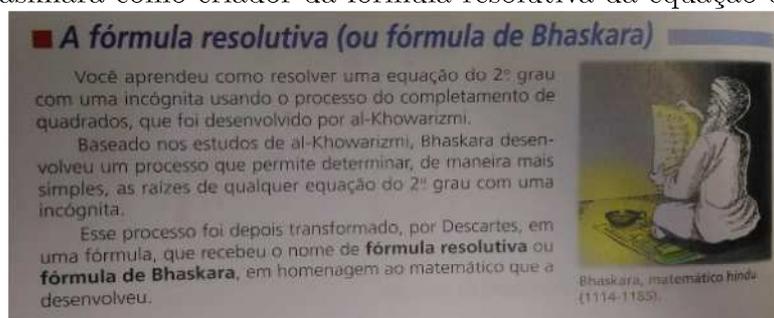
Figura 4.2: Fórmula resolutive conhecida no Brasil



Fonte: SOUZA. PATARO. Vontade de saber Matemática, p 39

Na edição renovada de Geovanni, Geovanni Jr (2010), "Pensar e descobrir" dez anos depois da que foi comentada acima, podemos notar na análise do livro que foram feitas mudanças convenientes para os alunos e professor, apresenta porém para o leitor como podemos conferir na figura 8 seguinte, o mesmo erro apontando que Bhaśkhara baseando-se nos métodos de al-Khowarizmi foi o criador da fórmula da equação do segundo grau, em uma década.

Figura 4.3: Bháskhara como criador da fórmula resolutive da equação do segundo grau.



Fonte: Giovanni, Giovanni Jr, "Pensar e descobrir", p. 116

O último livro que foi analisado foi o de Luiz Roberto Dante, do Projeto Teláris publicado pela editora ática em 2012, nele é possível perceber que antes de falar sobre a fórmula da equação

do segundo grau o autor generaliza a ideia de complemento de quadrado para chegar a fórmula resolutive do segundo grau e logo após comenta em seus textos quem foi Bháskara e por que "fórmula de Bhákhara"mostrando assim o quanto é importante conhecer os fatos históricos.

Figura 4.4: Que foi Bhaskara e por que "Fórmula de Bhaskara".

Bhaskara (1114-c. 1185) foi um matemático e astrônomo indiano, considerado um dos mais importantes matemáticos do século XII. Porém, curiosamente, a fórmula de resolução de equações do 2º grau, que leva seu nome, não foi escrita por ele!

**Ilustração fictícia do matemático indiano Bháskara.**

Na verdade, o hábito de dar o nome de Bháskara para essa fórmula se estabeleceu no Brasil por volta de 1960. Esse costume, aparentemente, é apenas brasileiro, pois não se encontra o nome de Bháskara para a fórmula em outros países.

Os fatos apresentados a seguir contribuem para indicar que Bháskara provavelmente não é o autor da fórmula.

- Problemas que recaem em uma equação de 2º grau já apareciam, há quase 4 mil anos, em textos escritos pelos babilônios (como foi visto na introdução do capítulo). Nesses textos, o que se tinha era uma "receita" (escrita em prosa, sem uso de símbolos) que ensinava como determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos (veja o texto "Os babilônios e as equações do 2º grau", na seção *Ponto de chegada*).
- As duas obras mais conhecidas de Bháskara, *Lilavati* e *Vijaganita*, que tratam de Aritmética e Álgebra, respectivamente, contêm numerosos problemas sobre equações de 1º e 2º graus, porém resolvidas também com receitas em prosa.
- Até o fim do século XVI, não se usava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do 2º grau, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isso começou a ser feito a partir de François Viète, matemático francês que viveu de 1540 a 1603.

Logo, embora não devam ser negadas a importância e a riqueza da obra de Bháskara, não é adequado atribuir a ele a fórmula de resolução da equação do 2º grau.

Adaptado de: Revista do Professor de Matemática, n. 5 e n. 39.

Fonte: Dante, 2012, p 37

A lógica de analisar livros didáticos mostra que é necessário um norte que encaminha para o auxílio de metodologias complementares e não tira de forma alguma a "força" que os LD tem. No último capítulo deste trabalho será colocado em prática tudo o que foi comentado no desencandejar do texto, será relatada uma experiência onde foi utilizada metodologias complementares de ensino da equação do segundo grau.

# Capítulo 5

## A tentativa de colocar a matemática significativa em sala de aula

### 5.1 Caracterização da escola

A escola escolhida para realizar esta experiência foi EEEFM - Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio (Pública Estadual) localizada na Avenida Tavares, no bairro Santo Antônio da Cidade de Campina Grande-PB em virtude das experiências anteriores que obtive nas disciplinas obrigatórias de Estágio na referente Universidade. É considerada uma escola antiga e conhecida de bairro que funciona sempre no período diurno e noturno onde opera com as seguintes etapas de ensino; Fundamental, Médio e Educação de Jovens e adultos-Supletivo. O corpo docente da escola pelas informações colhidas é completo e a estrutura física da escola passa por reformas de extensos períodos.

### 5.2 O planejado para a parte prática e material utilizado

Para compreendermos melhor a importância da utilização de materiais didáticos nas aulas de Matemática, foram realizadas atividades práticas de exploração de materiais manipuláveis envolvendo o conteúdo de Equações do Segundo Grau com alunos da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Assis Chateaubriand, inspirado na experiência de Maciel (2010). Para isso foi desenvolvido um plano de aula para servir de base para esta atividade que foi desenvolvida.

Procuramos com isso, condições para analisar se realmente os materiais manipuláveis contribuem para o processo de ensino-aprendizagem e também verificar se os alunos sentem-se interessados em aulas com as aplicações destes materiais.

### 5.3 O desenvolvimento da pratica proposta

A experiência aqui relatada foi desenvolvida em uma turma do primeiro ano do ensino médio com uma turma constando de 20 alunos matriculados sendo dois desses alunos portadores de necessidades especiais. A prática foi desenvolvida na sala de aula com a ideia inicial de dividir a turma em grupos porém apenas entre 12 e 15 alunos compareceram nas aulas. Para que fosse possível obter os dados necessários da nossa pesquisa foram utilizados como instrumentos a observação participante e a análise do material produzido pelos alunos. Em geral os alunos desta série conseguem ver o conteúdo de funções todo detalhado, porém muitos saem do nono ano do ensino fundamental com uma dificuldade extrema de resolver uma equação biquadrática, este problema foi um ponto que nos fez escolher o primeiro ano para aplicar nossas atividades com a finalidade de revisar e fixar realmente o conteúdo que muitos afirmaram durante as aulas não conseguir solucionar.

O decorrer desta atividade foi composta de três atividades investigativas que tiveram como objetivo a introdução dos conceitos relacionados com equações do segundo grau, por meio da construção de um modelo de al-Khowarizmi que traduzisse a situação proposta. As situações propostas foram as seguintes:

Foi feito uma breve introdução do conteúdo do qual seria trabalhado naqueles momentos de aulas diferenciais posteriormente mencionei fatos históricos de como foi desenvolvidos os métodos para o desenvolvimento da fórmula que se resolve equações do segundo grau. Vários alunos ficaram curiosos de como seria trabalhar equações do segundo grau de uma forma que fugia do tradicional e conseqüentemente se mostraram interessados a descobrir o que estava sendo proposto naquele momento. Distribui para todos os alunos, régua e retas em um envelope com fatos históricos misturados para que eles montassem uma linha do tempo em períodos que transcorrem antes e depois de Cristo trabalhando com a noção intuitiva também de escalas e como transformar séculos em anos e vice-versa. Mediante a situação ia sendo comentado o que tinha acontecido nestes períodos de tão importante e sobre alguns matemáticos que deram importantes contribuições para o desenvolvimento do estudo. A figura 10 que podemos conferir

abaixo mostra uma aluna construindo a linha do tempo onde conclui que os alunos não tinham ainda a noção fixa do conteúdo de escalas.

Figura 5.1: Desenvolvimento da linha do tempo com os alunos.



Fonte: Próprio autor

A segunda etapa foi dividida em duas fases. A primeira comecei a questionar a turma sobre o que eles conheciam da fórmula que os ajuda a solucionar as equações que eles chamam de equações de grau dois. Muitos comentaram que não lembravam qual era a fórmula e que só lembravam se fosse para estudar para uma prova que fosse ocorrer em um período próximo mostrando com isso o que foi descrito nos capítulos anteriores deste trabalho, que muitos alunos só estudam para uma determinada prova e depois muitos não fixam o conteúdo para outras etapas que serão necessárias. Posteriormente falei sobre al-Khowarizmi e seu método de completar quadrados perguntando aos alunos qual a importância que motivou aquele matemático a criar um método de resolver uma equação desta natureza. A segunda fase foi proposto para os alunos que desenvolvessem o método de complemento de quadrados a partir do material que eles terminaram de confeccionar para solucionar o que lhes foi pedido. Para isso foi necessário a utilização do quadro para explicar corretamente o que eles deveriam seguir.

Figura 5.2: Desenvolvendo o método de al-Khowarizmi no quadro.



Fonte: Próprio autor

Durante a execução desta fase foi importante parar um pouco e esperar para sequenciar as etapas porque neste momento o alunado demonstrou dúvidas de fatoração de uma equação do segundo grau, comprovei que nenhum aluno conseguiu deixar a equação na forma  $(a+b)^2$ , sendo necessário um momento extra de explicação que não estava planejado, passando este imprevisto foi possível terminar a atividade. Consegui que todos os alunos que estavam presentes em sala de aula participassem da execução que lhes foi proposta.

Figura 5.3: Alunos desenvolvendo o método do complemento de quadrados.



Fonte: Próprio autor

Por último foi desenvolvido também no quadro passo a passo a fórmula resolutiva da equação do segundo grau, esta etapa os alunos comentaram no final que foi uma etapa muito cansativa e não muito interessante porém tirou muitas dúvidas de como chegaram aquela fórmula considerada por eles simples e básica de se aplicar.

O trabalho permitiu a criação de um ambiente de confiança entre os alunos e mediadora e, na medida em que as etapas foram sendo vencidas, foi possível observar que os alunos estavam mais independentes e autônomos.

## REFERÊNCIAS

## Considerações finais

O trabalho aqui desenvolvido, teve como objetivo analisar o valor do uso de materiais manipuláveis como auxílio ao ensino aprendizagem da Matemática, verificando assim a metodologia que vem sido aplicada nas salas de aula para a explicação do conteúdo de Equações do segundo grau, mostrando que os professores do Ensino Médio e Fundamental ao abordar este conteúdo e outros não pode ficar meramente ligado apenas ao uso do livro didático escolhido pelas escolas.

Como visto no decorrer do texto foi necessário também explorar o uso da História dos conteúdos como uma forma de introduzi-los sendo assim uma combinação de forte valor para melhorar o ensino, despertando a curiosidade dos alunos. Entre os objetivos específicos investigamos alguns livros didáticos, onde foi notório alguns erros de informações, nos levando a concluir que é necessário uma avaliação mais detalhada dos livros didáticos escolhidos para determinadas séries.

Com a apresentação da oficina em uma turma do primeiro ano ensino médio foi possível ver que efetivamente o uso de novas metodologias (no caso desenvolvimento do método do complemento de quadrado) para o ensino deste conteúdo é uma ferramenta que permitiu explorar a noção de equações de uma forma que motivou os estudantes, encaminhando pelo o que pudemos analisar, os alunos a tomar decisões mais livres de soluções do problema que lhe foi proposto. Sobre a indagação de Lorenzato (2006, A) envolvendo o motivo de se utilizar materiais manipuláveis em aulas de matemática consideramos que os materiais selecionados e as atividades propostas foram adequados, pois os alunos entusiasmaram-se com a oficina que não desenvolviam habitualmente e sentiram-se motivados a trabalhar e resolver as questões. No que concerne a atividade apresentada, não foi possível verificar a evolução da aprendizagem desses alunos não sendo possível avaliar o desempenho posterior da turma em questão, sendo assim uma alternativa para subseqüentes aplicações, que o mediador da atividade possa aplicar questionários e analisar um tempo maior a turma.

Mediante a situação, reconhecemos que os objetivos foram de fato alcançados e que a experiência aplicada pode servir como sugestão de trabalho para professores do ensino médio como forma de introduzir o conteúdo de funções.

## Referências bibliográficas

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Guia de Livros Didáticos PNLD 2008: Matemática**. Brasília: MEC, 2007.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental: Matemática**. MEC/SEB, 1998.

CAMACHO. Mariana Sofia Fernandes Pereira. **Materiais Manipuláveis no Processo Ensino/Aprendizagem da Matemática Aprender explorando e construindo**. 2012. In: <http://digituma.uma.pt/bitstream/10400.13/373/1/MestradoMarianaCamacho.pdf>. Acesso em; 17 de fevereiro de 2016, 17:30.

D' AMBRÓSIO. Ubiratan. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. Campinas. SP: Papyrus, 1996.

DANTE. Luiz Roberto. **Matemática: Projeto Teláris**. São Paulo, Editora ática, 2012. p. 45.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 3ª reimpressão. Tradução: Higino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2008.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino de matemática**. Boletim SBEM, v. 7, n.4, 1990.

FRAGOSO, Wagner da Cunha. **Equação do 2º grau: uma abordagem histórica**. Rio Grande do Sul: UNIJUÍ, 1999. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/requacoes.html>. Acesso em; 17 de março de 2016, 18:12.

FRAGOSO. **Revista de Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. Rio de Janeiro: Ed.oito- n 7, Junho de 2000. p 57.

GIOVANNI. J. R.; GIOVANNI JR. J.R. **Matemática: Pensar e descobrir**. São Paulo: FTD, 2000. 114-115 e 120 p.

GIOVANNI. J. R; GIOVANNI JR. J.R. **Matemática: Pensar e descobrir**. São Paulo: FTD, 2010. p. 116 e 123.

LORENZATO. Sérgio. **O laboratório de ensino em matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores associados, 2006. A. p 2-27)

LORENZATO. Sérgio. **Para aprender matemática**. São Paulo: Autores associados,

2006,B. p 53-71.

NUNES. José Messildo Viana.**História da matemática e aprendizagem significativa da área do círculo: Uma experiência de ensino-aprendizagem.** 2007. Disponível em: [http://www.repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/3117/1/Dissertacao\\_HistoriaMatematicaAprendizagem.pdf](http://www.repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/3117/1/Dissertacao_HistoriaMatematicaAprendizagem.pdf). Acesso em 22 de abril de 2016.

SCHNEIDER. Clarice Lucia.**O processo de ensino aprendizagem.** 2010. Disponível em: < <http://www.somatematica.com.br/artigos/a32/> > Acesso em 23 de abril de 2016.

SOARES. Luís Havelange.**Aprendizagem Significativa na Educação Matemática: uma proposta para a aprendizagem de Geometria Básica** 2009. <http://www.fisica.ufpb.br/~romero/pdf/DissertacaoHavelange.pdf>. Acesso em 12 de março de 2016.

SOUZA. J.R. ; PATARO. P. R. M. **Vontade de saber Matemática.** São Paulo: FTD, 2009. p. 33

PAIS, L.C. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria.** 2001. Disponível em <[http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo\\_producoes/docs\\_23/analise\\_significado.pdf](http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf)>. Acesso em 01 de abril de 2016, 23:11.

TAVARES. Liliana Cristina. **Materiais manipuláveis: do explorar ao integrar.** Ludomedia, 2013.