



Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências Humanas e Exatas
Curso de Licenciatura em Matemática

Ivo Lacerda do Nascimento Silva

Equações Diferenciais: aspectos históricos, teoria e aplicações em Física

Monteiro - PB, Brasil

Maio de 2016

Ivo Lacerda do Nascimento Silva

**Equações Diferenciais: aspectos históricos, teoria e
aplicações em Física**

Monografia submetida à coordenação do curso
de graduação em Licenciatura em Matemática
como requisito para obtenção do Título de
Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Robson Batista de Sousa

Monteiro - PB, Brasil

Maio de 2016

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S586e Silva, Ivo Lacerda do Nascimento.
Equações Diferenciais [manuscrito] : aspectos históricos, teoria e aplicações em física / Ivo Lacerda do Nascimento Silva. - 2016.
36 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em MATEMÁTICA) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2016.
"Orientação: Prof. Me. Robson Batista de Sousa, Departamento de Matemática".

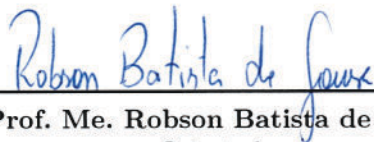
1.Equações diferenciais ordinárias - Primeira ordem. 2. História das equações diferenciais. 3. Teoria das equações diferenciais. I. Título. 21. ed. CDD 515.352

Ivo Lacerda do Nascimento Silva

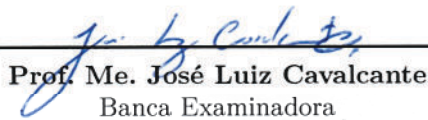
Equações Diferenciais: aspectos históricos, teoria e aplicações em Física

Monografia submetida à coordenação do curso de graduação em Licenciatura em Matemática como requisito para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

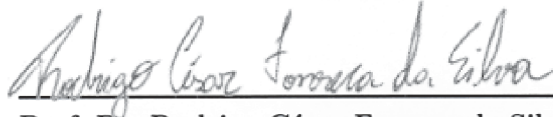
Trabalho aprovado. Monteiro - PB, Brasil, 26 de Maio de 2016:



Prof. Me. Robson Batista de Sousa
Orientador



Prof. Me. José Luiz Cavalcante
Banca Examinadora



Prof. Dr. Rodrigo César Fonseca da Silva
Banca Examinadora

Monteiro - PB, Brasil

Maio de 2016

A todos os professores do curso de Matemática, que foram tão importantes na minha vida acadêmica e que contribuíram de uma forma direta ou indireta para o desenvolvimento desta monografia.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado saúde, força e coragem para superar todas as dificuldades, agradeço também a toda a minha família pelo apoio e por estar sempre ao meu lado, agradeço à todos os meus colegas da UEPB por me ajudarem a concluir este trabalho, agradeço também aos meus professores por me proporcionar um conhecimento para minha formação profissional, agradeço a esta universidade, ao seu corpo docente, direção e administração que me deram a oportunidade de estar concluindo o curso de licenciatura plena em matemática, e agradeço a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, obrigado.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.”
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2).*

Resumo

No presente trabalho foi apresentado um estudo histórico acerca do Cálculo Diferencial e Integral, o qual é um importante ramo da matemática que permite analisar taxas de variação de grandezas. A pesquisa abrangeu alguns dos principais fatos, personagens e respectivos trabalhos que contribuíram para seu desenvolvimento no decorrer do tempo. Estudou-se também a teoria das Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem, cujas aplicações estão presentes em diversos ramos da Engenharia e de ciências como a Física, Química, Biologia, Estatística, entre outras. Algumas aplicações das EDOs de Primeira Ordem para modelar e solucionar determinados problemas físicos foram apresentadas. Podemos perceber que, de fato, as EDOs são de grande importância uma vez que conseguem modelar, de forma bastante fiel, problemas físicos como aqueles dos exemplos apresentados.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem. História. Teoria. Aplicações.

Abstract

In this paper we presented a historical study about the Differential and Integral Calculus, which is an important branch of mathematics that allows us to analyze change rates. The research covered some of the key facts, characters and their works that have contributed to its development over time. It was also studied the theory of first-order Ordinary Differential Equations, that are applied in various problems of engineering and sciences such as Physics, Chemistry, Biology, Statistics, among others. Some applications of first-order ODEs used to model and solve certain physical problems were presented. It can be seen that these equations are very important since they can model, quite faithfully, physical problems such as the presented examples.

Keywords: First-order Ordinary Differential Equations. History. Theory. Applications.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Eudoxo de Cirene e Arquimedes de Siracusa	13
Figura 2 – Zenón de Eléia e Johannes Kepler	14
Figura 3 – Bonaventura Cavalieri e John Wallis	15
Figura 4 – Pierre de Fermat	16
Figura 5 – Evangelista Torricelli e Isaac Barrow	17
Figura 6 – Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz	18
Figura 7 – Joseph-Louis Lagrange e Guillaume François Antoine L’Hospital	20
Figura 8 – Augustin-Louis Cauchy e Bernhard Riemann	20
Figura 9 – Diagrama de forças aplicadas na partícula de massa m	29
Figura 10 – Gráficos de $v(t)$. e $x(t)$	30
Figura 11 – Um corpo no campo gravitacional da terra	32
Figura 12 – Gráfico v x t	35

Sumário

	INTRODUÇÃO	11
1	UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE O CÁLCULO DIFERENCIAL INTEGRAL	13
2	AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	21
2.1	Definições	21
2.2	Equações Diferenciais Exatas	23
2.3	Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem Separáveis	25
2.4	Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem Homogêneas	26
2.5	Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem Lineares	27
3	APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM NA FÍSICA	29
3.1	Aplicação: movimento de uma partícula em um meio viscoso	29
3.2	Aplicação: velocidade de escape	31
3.3	Aplicação: lei do resfriamento de Newton	33
3.4	Aplicação: partícula movendo-se sobre a ação de uma força resistiva e outra variável com o tempo	34
	CONCLUSÃO	36
	REFERÊNCIAS	37

Introdução

As Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem (EDOs) são grandes ferramentas matemáticas utilizadas na modelagem de sistemas físicos. Além da física, as (EDOs) possuem muitas aplicações em diversas áreas do conhecimento, tais como: biologia, geografia, química, economia, engenharias, na própria matemática, etc. O estudo das EDOs se inicia com os próprios criadores do Cálculo, Newton e Leibniz, no final do século XVII. Mas sem deixar de destacar que desde a antiguidades já existiam ideias relacionadas. Em fins do século XVII a teoria das EDOs se transformou numa das ferramentas mais importantes e eficazes para pesquisa científica e tecnologia (ARAÚJO, 2011) .

O objetivo deste trabalho foi realizar um estudo histórico sobre o Cálculo Diferencial e Integral buscando com isso fazer a ligação entre o desenvolvimento do mesmo com as Equações Diferenciais Ordinárias. E, em seguida estudar alguns problemas físicos cuja modelagem matemática e solução se dão através das EDOs.

Durante estes quatro anos em que fui estudante do curso de graduação em Licenciatura Plena em Matemática, fui monitor dos componentes curriculares Física Geral I e História da Matemática. Assim, realizei estudos sobre alguns temas relacionados a estes componentes. Participei de estudos dirigidos, minicursos e cursos de extensão sobre softwares direcionados ao ensino/aprendizagem da Física e Matemática, tais como: Maple e o Tracker. Ministrei um curso de extensão sobre técnicas de resolução de problemas com derivadas e integrais com múltiplas variáveis. Participei de cursos de Extensão, sendo um deles sobre ferramentas matemáticas da Física. Então, devido a todo este contato que tive nas áreas de Física e Matemática, fiquei motivado a desenvolver um TCC que contemplasse ambas as áreas.

Do ponto de vista de procedimento técnico, podemos classificar este trabalho como uma pesquisa bibliográfica, pois, de acordo com Lakatos e Marconi (2009) este tipo de pesquisa abrange toda a bibliografia já tornada pública em relação tema de estudo, que contemplam, boletins, jornais, revistas, livros, pesquisas, teses, monografias, etc. As publicações mais utilizadas neste TCC foram: Machado (2012), Boyer (2011), Boyce (2006), Eves (2004), Sousa (2001) e Batista (2006).

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 1 é apresentada um pouco da história do cálculo diferencial e integral, seguindo uma ordem cronológica e destacando o desenvolvimento do calculo através do matemáticos desta da antiguidades a.c até os matemáticos do seculo XIV. No capítulo 2 é apresentada a teoria das EDOs, com as definições das Equações Diferencias Exatas, Equações Diferenciais Separáveis, Equações Diferenciais Homogêneas e Equações Diferenciais Lineares. No capítulo 3 (último

capítulo) são apresentados algumas aplicações físicas que envolvem as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

1 Uma Breve História Sobre o Cálculo Diferencial Integral

Inúmeras são as descobertas na Matemática que influenciam diretamente no cotidiano e na qualidade de vida das pessoas. O Cálculo Diferencial também chamamos de Cálculo Infinitesimal ou simplesmente Cálculo, foi uma das criações matemáticas mais importantes de todos os tempos, por ter grandes aplicações em vários ramos da Matemática e em outras ciências, como na Física, Química, Estatística, Biologia, entre outras.

A palavra cálculo deriva da palavra grega *calculus* que significa "pedra", pois os gregos usavam esse artifício para fazer contagens e determinar quantidades. Desse modo, o Cálculo abre espaço para problemas que tem como princípio básico a variação de movimento.

Até chegar ao Cálculo Diferencial e Integral repleto de regras e símbolos ensinados nos cursos de Matemática atuais, muitos conceitos foram desenvolvidos e aprimorados. É difícil determinar uma data precisa da origem do cálculo, há registros de problemas em tábuas de argila datados de 2500 anos atrás.

Um dos primeiros matemáticos a introduzir a ideia de integração, mesmo sem de fato usar esse termo, foi Eudoxo de Cirene que criou o chamado Método de Exaustão, tal método se caracteriza por calcular áreas de figuras planas que são limitadas por figuras curvas. Arquimedes de Siracusa desenvolveu e aprimorou o Método de Eudoxo, e ainda realizou outros trabalhos similares com bastante visibilidade em sua época a Quadratura da Parábola e espirais.

Figura 1 – À esquerda: Eudoxo de Cirene (406 - 355 a.C). À direita: Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.C).



Fonte: Disponível em: <http://bit.ly/1sazTsm> e <http://bit.ly/1TMYmKt>.

Outro matemático da antiguidade que utilizou ideias primitivas de cálculo foi Zenón de Eléia (450 a.C), alguns de seus trabalhos, conhecidos como Paradoxos de Zenón abordam a ideia de infinito. Um desses paradoxos é conhecido como Paradoxo de Aquiles, que diz o seguinte: um ponto B se desloca na direção de um ponto A, que está diante dele. Esse ponto B jamais alcançará o ponto A pois deve partir do ponto inicial de A, mas quando o ponto B chega ao ponto inicial do ponto A já estará mais adiante e sempre permanecerá assim. Outro paradoxo que podemos destacar é o Paradoxo da Dicotomia.

O trabalho de Batista (2006) descreve tal paradoxo:

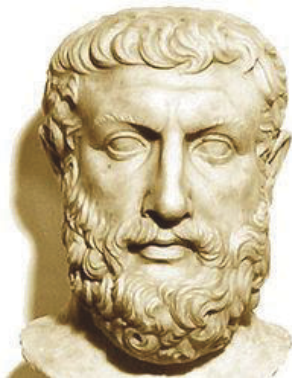
Um desses paradoxos tenta mostrar a impossibilidade de um corredor partir de um ponto A e chegar a um ponto B. Para que um corredor possa mover-se do ponto A para o ponto B, ele precisa primeiro chegar ao ponto médio da distância AB; a partir daí, o ponto médio da distância que falta percorrer e assim por diante. Como esse processo exige um número infinito de passos, uma vez que o corredor sempre deverá percorrer a metade da metade anterior, Zenón argumentava que o corredor jamais chegaria ao ponto B (BATISTA, 2006, p.42-43).

O escritor ainda ressalta em seu trabalho que hoje em dia o paradoxo da dicotomia seria facilmente resolvido, bastaria admitir a distância de A a B como sendo igual a uma unidade de área e a distância total percorrida seria dada pela soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$, e, com isso, se usaria de uma convergência de séries que alcançaria o valor 1.

As ideias formais do Cálculo permaneceram, por vários séculos, pouco estudadas os matemáticos ainda estavam longe do formalismo de hoje.

O alemão Johannes Kepler foi um dos primeiros astrônomos e matemáticos modernos a desenvolver trabalhos utilizando o Cálculo. Em particular, Kepler usou ideias de integração em seus trabalhos relacionados a Lei dos Movimentos Planetários, com o intuito de calcular volumes de áreas de regiões elípticas e volumes de sólidos.

Figura 2 – À esquerda: Zenón de Eléia (450 a.C). À direita: Johannes Kepler (1571 - 1630 d.C).



Um de seus trabalhos mais famosos está relacionado a barris de vinho:

[...] Kepler estava insatisfeito com o modo como os mercadores vendiam o conteúdo de seus barris. Ele procedeu estendendo o método para três dimensões e considerando um sólido como uma coleção de muitas fatias infinitamente finas, ou lâminas e depois somando seus volumes individuais. Sem perceber, Kepler chegou a um passo do Cálculo Integral (BATISTA, 2006, p.45).

Bonaventura Cavalieri, matemático italiano, também publicou trabalhos contendo Limites. Seu livro, *Geometria indivisibilibus continuorum*, publicado em 1635 tornou-se um dos livros mais influentes dos tempos modernos, as ideias envolvidas assemelham-se com as de trabalhos de Arquimedes, mas seus trabalhos eram independentes, apresentando conceitos originais.

Cavalieri desenvolveu alguns trabalhos que ficaram conhecidos como Princípios de Cavalieri, geralmente estudados nas aulas de Geometria, na determinação de volumes de figuras.

Segundo Boyer (2011), o princípio de cavalieri vem nos mostrar que, na existência de dois sólidos com a mesma altura se ocorrer seções feitas por planos paralelos as suas bases e as distancias iguais dessas seções são dadas em uma mesma razão, assim os volumes dos sólidos são dadas na própria razão.

Outra grande influência para o desenvolvimento do Cálculo, dessa vez em termos de Integrais, foi o matemático inglês John Wallis seus trabalhos abordavam, entre outros assuntos, as Cônicas como curvas do 2º grau, séries e fez uso pela primeira vez do símbolo que representa o infinito além de publicar inúmeros trabalhos em Física.

Pierre de Fermat, matemático francês foi quem primeiro desenvolveu trabalhos

Figura 3 – À esquerda: Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647 d.C). À direita: John Wallis (1616 - 1703 d.C).



Fonte: Disponível em: <http://bit.ly/1qkdcR8> <http://bit.ly/1ZQnJzD>

usando claramente a ideia de derivada, apoiado nos trabalhos de Kepler sobre pontos de máximos e mínimos. Fermat desenvolveu um método que é conhecido como Método de Fermat para determinar máximos e mínimos, embora incompleto, pois não considera quando a derivada é nula, mas o método foi um grande avanço para a matemática naquela época.

Se $f(x)$ tem um máximo ou mínimo comum em x e se e é muito pequeno, então o valor de $f(x - e) = f(x)$ e, para tornar essa igualdade correta, impor que e assuma o valor zero. As raízes da equação resultante darão, então, os valores de x para os quais $f(x)$ assume um máximo ou mínimo (EVES, 2004, p. 429).

Fermat ainda determinou um procedimento que determina a tangente de um ponto quando a equação cartesiana é conhecida. Foi ele quem desenvolveu o estudo das subtangentes.

Figura 4 – Pierre de Fermat (1601 - 1665 d.C).



Fonte: Disponível em: <http://bit.ly/1V1cHsf> .

Dando sequência ao desenvolvimento do Cálculo podemos citar o italiano Evangelista Torricelli e Isaac Barrow, Eles se interessaram por problemas que envolviam velocidades variadas. Barrow percebeu que a derivação e integração são processos inversos e com isso quase chegou a desenvolver o famoso Teorema Fundamental do Cálculo. Esse teorema é a base das operações de derivadas e integrais como inversas uma da outra, porém ficou a cargo de Isaac Newton, formalizar o teorema com base em trabalhos de Barrow.

Em meados do século XVI e início do século XVII muitas descobertas na área de Cálculo já haviam sido efetivadas.

O que faltava era apenas formalizar o Cálculo Diferencial e Integral, definir regras de lei de formação dos conceitos, criar uma simbologia coerente, além de aplicar o rigor e a postura que o Cálculo desempenha hoje em dia.

Figura 5 – À esquerda: Evangelista Torricelli (1608-1647 d.C). À direita: Isaac Barrow (630 - 1777 d.C).



Fonte: Disponível em: <http://bit.ly/1R1RRBT> <http://bit.ly/1saCAKi> .

A Newton e Leibniz foi creditado o título de *Inventores do Cálculo* por terem desenvolvido e formalizado as ideias iniciais de outros matemáticos. Várias polêmicas circularam nos meios matemáticos, pois mesmo os dois desenvolvendo o Cálculo de maneira independente, muitas acusações surgiram de plágio. Por esse motivo, a história referente a esses dois matemáticos merece mais destaque.

Isaac Newton, nasceu na Inglaterra na aldeia de Woolsthorpe, e já na infância criava aparelhos mecânicos, que deu início a desenvolver estudos em Física, Química, Astronomia, Matemática, tinha 18 anos quando ingressou no Trinnith College, onde inicialmente seu principal interesse era o estudo de Química. Depois de algum tempo começou a estudar obras de alguns matemáticos, de forma independente, sobre tudo se destacavam Os Elementos de Euclides, La Géométrie de Descartes, também trabalhos de Kepler e Viéte. Newton foi aluno de Barrow na Universidade de Cambridge, e em consequência disso desenvolveu e aprimorou muitas de suas ideias. Outra grande influência de Newton foi Wallis.

Durante os anos de 1665 e 1669 a peste bubônica assolou grande parte da Inglaterra, fechando as portas da Universidade de Cambridge, obrigando Newton a se recolher a sua terra natal. Nesse período ele desenvolveu grandes e importantes trabalhos, principalmente na área da Física e Matemática, entre as quais a lei da gravidade, a natureza das cores, o teorema binomial e o cálculo infinitesimal.

Newton não tinha muito interesse em publicar suas obras, visto que a publicação de Opitks em 1704 causou-lhe um grande desconforto, devido ao fato de alguns cientistas se opuseram à suas ideias. Talvez por esse motivo muitas de suas obras só foram publicadas após muitos anos de descobertas. Lecionou dezoito anos na Universidade de Cambridge e isso deu a ele muito tempo para prosseguir com suas pesquisas. Por ter sido acometido

por uma doença em 1662, que lhe causou graves males, entre eles problemas mentais, mudou seus focos de estudo e se dedicou a Química, Teologia e Alquimia, mesmo assim, continuava a responder problemas matemáticos que lhes eram enviados. Foi nessa época que trocou algumas correspondências com Leibniz a respeito da criação do cálculo, o que causou muitas brigas entre eles.

A grande contribuição de Newton para a Matemática, foi o método dos fluxos, o seu trabalho de Cálculo usando métodos infinitesimais. Segundo Newton, a taxa de variação de um fluente x é o fluxo de x . Nesta ideia de taxa de variação, estava a essência da fundamentação do cálculo, a teoria dos limites, que será desenvolvida quase dois séculos mais tarde (SOUSA, 2001, p. 21).

Foi indicado inspetor da Casa da Moeda em 1696, sendo promovido a diretor em 1699. Em 1703 foi eleito presidente da Royal Society em 1705, recebeu o título de Sir, que é conferido somente a um britânico de grande destaque na sociedade.

Gottfried Wilhelm Leibniz, nasceu em Leipzig na Alemanha. Com um talento precoce, ainda criança já dominava vários idiomas e tinha grande conhecimento filosófico e matemático de sua época. Também na juventude começou a desenvolver ideias referentes a Matemática Universal que mais tarde apareciam em trabalhos de outros matemáticos.

Figura 6 – À esquerda: Isaac Newton (1642 - 1727 d.C) À direita: Gotfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716 d.C).



Fonte: Disponível em: <http://bit.ly/1Nu8taS> <http://bit.ly/27mjsK6> .

Muito cedo ingressou na Universidade de Leipzig onde graduou-se em direito. Por sua pouca idade, foi-lhe negado o título de doutor, então decidiu mudar-se para Nuremberg, onde obteve o grau de doutor em Filosofia pela Universidade de Altdorf. Daí em diante Leibniz sempre esteve envolvido em assuntos diplomáticos. Lecionou Direito em Altdorf e posteriormente conseguiu uma vaga na corte de Hanover. Foi em uma viagem a Paris em 1672 que conheceu Huygens e seu interesse em estudar matemática foi despertado.

Leibniz desenvolveu e aprimorou uma máquina de calcular e também muitas notações matemáticas novas para sua época. Em 1663 em uma viagem a Londres conheceu as obras de Barrow que era professor de Newton, e talvez as próprias obras de Newton referentes ao cálculo. Por essa razão quando Leibniz apresentou sua obra sobre o Cálculo Diferencial e Integral, muitos boatos sobre plágio surgiram.

Seus trabalhos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral foram desenvolvidas entre 1673 e 1676. Para representar as integrais, usou como símbolo um S alongado, derivado da palavra summa (soma) e usou dx, dy, dz para derivadas. Desenvolveu regras de derivação, como por exemplo, regra da derivada da soma, derivada da constante ser iguala zero e a fórmula da derivada do produto, que por sua vez leva seu nome.

Newton e Leibniz seguiram linhas diferentes na criação do cálculo. Apesar da polêmica que perdura ao longo da história, o uso de caminhos diferentes para obtenção de uma mesma teoria, indica que foi dois desenvolvimentos independentes (SOUSA, 2001, p. 22).

Newton desenvolveu o Cálculo primeiramente, mas foi Leibniz quem primeiro publicou o trabalho referente ao que Newton tinha desenvolvido. Eles desenvolveram suas teorias de maneira independente e com intuítos diferentes. Para Newton o Cálculo o ajudaria a resolver fenômenos físicos, já Leibniz queria desenvolver uma simbologia matemática universal. Por isso é creditado aos dois o título de 'Inventores' do Cálculo.

Posteriormente no século XVIII matemáticos aprimoraram e aplicaram o Cálculo em várias áreas da Matemática. Joseph-Louis Lagrange desenvolveu símbolos que são utilizados até hoje e também criou o nome derivada. O primeiro livro referente ao assunto foi escrito por Guillaume François Antoine (Marquês de l'Hôpital) que desenvolveu um método de calcular o limite de uma função quando o numerador e o denominador tendem a zero. Tal método ficou conhecido como Regra de L'Hospital e é muito utilizado nos dias de hoje. Os matemáticos da família Bernoulli também desenvolveram estudos na área de Cálculo.

Apenas no século XIX o matemático Augustin-Louis Cauchy definiu formalmente Limites. O alemão Bernhard Riemann desenvolveu estudos sobre integrais, e em particular desenvolveu o estudo sobre uma integral com características especiais que ficou conhecida com Integral de Riemann que por sua vez é bem estudada nos cursos de Análise Matemática.

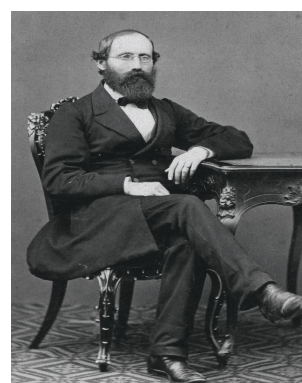
Com isso, fica notório que o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral foi um processo longo e trabalhoso. Muitos foram os matemáticos que participaram desse desenvolvimento, até chegar a uma concretização. E mesmo hoje em dia ainda existem muitas áreas de estudo destinadas ao Cálculo. O cálculo é muito importante para a Matemática bem como para o desenvolvimento de outras ciências.

Figura 7 – À esquerda: Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813 d.C). À direita: Guillaume François Antoine L'Hospital (1789-1866 d.C).



Fonte: Disponível em: <http://bit.ly/1saDmHq> <http://bit.ly/1saDpmC>.

Figura 8 – À esquerda: Augustin-Louis Cauchy (1789-1857 d.C). À direita: Bernhard Riemann (1826 - 1866 d.C).



Fonte: Disponível em: <http://bit.ly/1TcSZsb> <http://bit.ly/27mjXns> .

2 As Equações Diferenciais

Neste capítulo será apresentada a teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, uma vez que, em outro momento (capítulo 3), alguns problemas físicos serão modelados e solucionados através das mesmas. A teoria descrita neste trabalho é a mesma apresentada por Machado (2012).

Existem apenas duas soluções para uma equação diferencial, ou ela são explícitas ou implícitas. Tais soluções podem descrever ou pelo menos se aproximar das soluções de fenômenos.

Alguns exemplos de aplicações de equações diferenciais

- 1) Movimento de projéteis, plantas e satélites ;
- 2) Estudo do decaimento radioativo de núcleos estáveis;
- 3) Propagação de calor através de uma barra;
- 4) Estudo de todos os tipos de onda;
- 5) Crescimento da população;
- 6) Estudo de reações químicas;
- 7) Descrição quântica de um átomo de hidrogênio;
- 8) Cálculo do potencial elétrico de uma distribuição de cargas;
- 9) Estudo do oscilador harmônico;

2.1 Definições

Definição 2.1. Uma variável independente é aquela que tem um valor, sem depender de qualquer variável para representar as variáveis a, b, c, d, e que são livres, temos como uma variável de um conjunto a seguinte identificação $\{a\}$. Daí, analisamos que a é uma variável livre da questão.

Definição 2.2. Quando houver uma dependência de uma variável a outra. A mesma é chamada de variável dependente. Falamos mais que a variável é uma função das variáveis das quais ela tem dependência. Ao depender de outras variáveis, ela não admitir nenhum valor. Como modelos de variáveis onde existe uma dependência, as imediatas função: $a(e)$, $b(a,c)$, $e(a,b,c)$, $e(a)$. A notação $\{a(\{e\})\}$ serve para identificar o conjunto de todas as variáveis dependentes de um problema.

Definição 2.3. Quando uma equação envolve uma derivada de uma ou mais variáveis dependentes, comportando-se como variável independentes, chamamos de equação diferencial.

Definição 2.4. Equação Diferencial Ordinária é aquela onde há uma relação entre uma única variável independente com derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes.

Definição 2.5. Equação Diferencial Parcial é aquela que irá abranger uma junção entre derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes, com mais de uma variável livre.

Definição 2.6. O que definirá a ordem de uma equação diferencial, será a derivada de maior ordem. Quanto maior a ordem da derivada, maior será a ordem da equação.

Definição 2.7. Uma equação diferencial, é uma equação diferencial linear quando suas derivadas tem o expoente 1 ou 0 caso o contrario será uma equação diferencial não linear. Uma equação linear e ordinária possui apenas uma única variável dependente, pode ser escrita de uma forma geral por:

$$a_0(x) \frac{d^m y}{dx^m} + a_1(x) \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = b(x). \quad (2.1)$$

Definição 2.8. Uma função $y = f(\{x\})$, sendo uma representante do conjunto das variáveis independentes é considerada uma solução explícita de uma equação diferencial, isto é, se substituirmos a função na equação transformamos em uma identidade.

Definição 2.9. Uma função $g(\{x\}, \{y\})$ representa um conjunto de variáveis dependentes e independentes, se dividirmos implicitamente e a equação diferencial volta a sua forma inicial. Daí, chegamos a conclusão que a função é uma solução implícita de uma equação diferencial.

Definição 2.10. Dizemos que temos um problema de valor inicial quando seguimos condições iniciais, estabelecidas a priori, para um mesmo valor da variável independente de uma equação diferencial.

Definição 2.11. Se uma equação diferencial representa um fenômeno, e se esta equação tiver condições específicas para dois ou mais valores de variável independente, então possuímos uma questão com condições de contorno.

Estudaremos alguns métodos para resolver equações diferenciais de primeira ordem ao longo desse capítulo com o objetivo específico de aplicar esses métodos ao estudo da parte fundamental da física e verificar a importância destas operações matemáticas em sua construção. A definição de derivadas de ordem superior se dará apenas como um recurso didático e ferramental matemático para a obtenção dos resultados propostos para este trabalho de conclusão de curso.

2.2 Equações Diferenciais Exatas

Definição 2.12. Considerando G uma função de duas variáveis pertencentes ao conjunto dos números reais, de maneira que G tenha derivadas parciais primeira ordem contínuas, a diferencial total dG da função é definida por:

$$dG(x, y) = \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} d(x) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} d(y). \quad (2.2)$$

Definição 2.13. Uma equação diferencial só é exata se existir uma função $f(x, y)$ que satisfaça as seguintes igualdades

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad e \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y).$$

E assim, a expressão:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0, \quad (2.3)$$

é uma equação diferencial exata.

Teorema 2.1. Se $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ for verificada e esta igualdade for verdadeira, a equação diferencial $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$, é exata.

Demonstração. Nosso objetivo agora é definir as derivadas parciais de ordem maior do que um. Em primeiro lugar, observe que, dependendo da função f , $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$ também são funções de duas variáveis definidas em intervalos abertos, de modo que também podemos calcular suas derivadas parciais, que são as seguintes funções:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = (f_x)_x, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = (f_y)_y \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = (f_y)_x \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = (f_x)_y, \quad (2.7)$$

Este conjunto de derivadas parciais da função f são chamadas de derivadas parciais de segunda ordem de f e suas notações são as seguintes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = (f_x)_x = f_{xx} = f_{11}; \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = (f_x)_y = f_{xy} = f_{12}; \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = (f_y)_x = f_{yx} = f_{21}; \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = (f_y)_y = f_{yy} = f_{22}; \quad (2.11)$$

Então, usando a maneira de resolução de uma equação diferencial exata, analisamos a proposição. Vamos supor que a equação diferencial $M(x, y) + N(x, y) = 0$ é exata, então existe uma função $F(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad . \quad (2.12)$$

e,

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \quad . \quad (2.13)$$

Assim, temos:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}, \quad (2.14)$$

e,

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad (2.15)$$

daí, podemos inverter as ordens das derivadas, ou seja:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad (2.16)$$

e, assim, temos:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (2.17)$$

Dando continuidade à prova, falaremos na hipótese:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (2.18)$$

Nesse ponto, queremos provar que existe uma função $F(x, y)$ tal que :

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad (2.19)$$

e,

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y), \quad (2.20)$$

onde a proposição $M(x, y) + N(x, y) = 0$ seja exata. Admitindo a expressão $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$ como sendo verdadeira então , podemos fazer:

$$F(x, y) = \int M(x, y) \partial x + \phi(y) \quad . \quad (2.21)$$

A integral é realizada na variável x , onde consideramos y como constante. como queremos obter uma solução geral para $F(x, y)$, o termo surge, diferenciando a equação com relação à y . Temos então,

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + \frac{d\phi(y)}{dy}, \quad (2.22)$$

e, temos que ter também, $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = N(x, y)$, para provarmos que é diferencial exata.

Então, temos :

$$N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + \frac{d\phi(y)}{dy}, \quad (2.23)$$

e,

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \partial x, \quad (2.24)$$

como solução da expressão para $\phi(y)$, temos:

$$\phi(y) = \int \left[N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \partial x \right] dy,$$

e finalmente,

$$F(x, y) = \int M(x, y) \partial x + \int \left[N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \partial x \right] dy,$$

onde $F(x, y)$ está sujeita às condições :

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (2.25)$$

Logo, temos:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad (2.26)$$

e,

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y). \quad (2.27)$$

Então, concluímos que a equação diferencial $M(x, y) + N(x, y) = 0$ é exata. ■

2.3 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem Separáveis

Definição 2.14. As equações diferenciais, com a forma específica $F(x)G(y)dx + f(x)g(y)dy = 0$, são identificadas como separáveis se elas podem ser destrinchadas da seguinte maneira:

$$\frac{F(x)}{f(x)}dx + \frac{g(y)}{G(y)}dy = 0, \quad (2.28)$$

que é uma equação diferencial exata, pois,

$$M(x, y) = M(x) = \frac{F(x)}{f(x)}, \quad (2.29)$$

e,

$$N(x, y) = N(y) = \frac{g(y)}{G(y)}. \quad (2.30)$$

2.4 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem Homogêneas

Definição 2.15. Se uma função F satisfaz a relação $F(tx, ty) = t^n F(x, y)$ para algum n real. E quando substituimos x por tx e y por ty e depois fatorarmos o t , a expressão fica da forma $F(tx, ty) = t^n F(x, y)$.

Definição 2.16. Se a equação de primeira ordem pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (2.31)$$

ela é homogênea.

Se houver uma função t tal que $f(x, y)$ seja escrita como:

$$f(x, y) = t\left(\frac{y}{x}\right), \quad (2.32)$$

onde a equação ficará:

$$\frac{dy}{dx} = t\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.33)$$

De forma análogo, a equação será homogênea se as funções $M(x, y)$ e $N(x, y)$ forem homogêneas de mesmo grau.

Como se resolve uma equação diferencial homogênea? A resposta é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.2. Temos a equação diferencial $M(x, y) + N(x, y) = 0$ é homogênea, fazendo uma mudança de variável $y = vx$ ou $v = \frac{y}{x}$, transformamos a equação diferencial em uma equação diferencial separável nas variáveis x e v .

Demonstração. Sendo a equação $M(x, y) + N(x, y) = 0$ como ela é homogênea, podemos escrevê-la da seguinte maneira:

$$\frac{dy}{dx} = t\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.34)$$

fazendo a troca de variável, $y = xv$ temos,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(vx) = v + x \frac{dv}{dx}, \quad (2.35)$$

onde a equação ficará:

$$v + x \frac{dv}{dx} = t\left(\frac{y}{x}\right) = t(v), \quad (2.36)$$

como $v = \frac{y}{x}$, escrevemos a equação da seguinte forma

$$[v - t(v)] dx + x dv = 0, \quad (2.37)$$

que é uma equação separável,

$$\frac{dv}{v - t(v)} + \frac{dx}{x} = 0, \quad (2.38)$$

integrando, tem-se:

$$\int \frac{dv}{v - t(v)} + \int \frac{dx}{x} = c, \quad (2.39)$$

resolvendo, temos:

$$\int \frac{dv}{v - t(v)} + \ln|x| = c. \quad (2.40)$$

Após a resolução com a troca de variáveis $v = \frac{y}{x}$ para voltar as variáveis iniciais. ■

2.5 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem Lineares

Definição 2.17. Teremos um equação diferencial linear se pudermos escrever uma equação ordinária, da seguinte forma :

$$a_0(x) \frac{dy}{dx} + a_1(x) y = g(x) \quad (2.41)$$

reduzindo temos :

$$\frac{dy}{dx} + p(x) y = Q(x). \quad (2.42)$$

onde $p(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas. A equação da forma $\frac{dy}{dx} + p(x) y = Q(x)$, pode ser reescrita como:

$$\frac{dy}{dx} + p(x) y = Q(x), \quad (2.43)$$

A equação pode ser reescrita da forma como: $[p(x)y - Q(x)] dx + dy = 0$, onde é uma equação do tipo $M(x, y)dx + N(x, y) dy = 0$, pois, $M(x, y) = p(x) y - Q(x)$ e $N(x, y) = 1$, mas não é exata porque

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = p(x), \quad (2.44)$$

e,

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 0, \quad (2.45)$$

logo, pode ser convertida em uma equação exata, temos que utilizar o fator integrante.

Definição 2.18. Se tivermos uma equação não exata do tipo $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, e multiplicarmos pelo fator integrante $\mu(x, y)$ que é uma função, obteremos uma equação exata do tipo:

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0. \quad (2.46)$$

Se utilizarmos fatores integrantes, a equação $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$ será resolvida pelo teorema seguinte.

Teorema 2.3. A equação $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ tem o fator integrante que é $\mu(x, y) = e^{\int P(x)dx}$, onde sua solução é :

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left[e^{\int p(x)dx} Q(x) dx + C \right]. \quad (2.47)$$

Tornando $[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0$ em uma equação exata, com seu fator integrante $\mu(x)$ podemos reescrever a equação exata da seguinte forma. onde podemos reduzir para :

$$\mu p(x) = \frac{d\mu}{dx}. \quad (2.48)$$

Por separação de variáveis, temos:

$$\frac{d\mu}{\mu} = p(x) dx. \quad (2.49)$$

O que nos dá por integração direta:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\mu}{\mu} &= \int p(x) dx \\ \ln |\mu| &= \int p(x) dx \\ \mu(x) &= e^{\int p(x)dx}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Multiplicando a equação $\frac{dy}{dx} = p(x) dx$, pelo fator integrante, temos:

$$e^{\int p(x)dx} \frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)dx} p(x) y = e^{\int p(x)dx} Q(x) \quad (2.51)$$

onde podemos reescrever da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [e^{\int p(x)dx}] &= e^{\int p(x)dx} \frac{dy}{dx} + y \frac{d}{dx} [e^{\int p(x)dx}] \\ \frac{d}{dx} [e^{\int p(x)dx}] &= e^{\int p(x)dx} \frac{dy}{dx} + ye^{\int p(x)dx} p(x) \\ \frac{d}{dx} [e^{\int p(x)dx}] &= e^{\int p(x)dx} Q(x) \\ \int \frac{d}{dx} [e^{\int p(x)dx}] &= \int e^{\int p(x)dx} Q(x) \\ e^{\int p(x)dx} &= \int e^{\int p(x)dx} Q(x) \\ y(x) &= e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} Q(x) dx + C \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

3 Aplicações de Equações Diferenciais de Primeira Ordem na Física

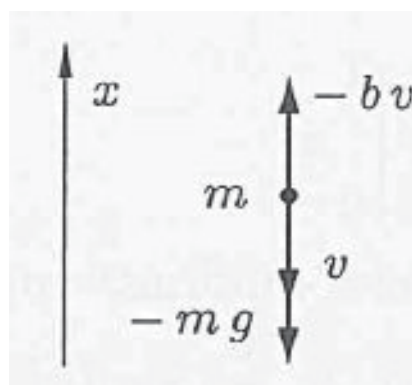
Neste capítulo vamos resolver alguns problemas físicos que são modelados e solucionados pelas Equações Diferenciais de Primeira Ordem. Os quais são: Movimento de uma partícula em um meio viscoso, Lei do Resfriamento de Newton, Velocidade de Escape, Partícula Movendo-se Sobre a Ação de Duas Forças Uma Resistiva e outra Dependente do Tempo.

3.1 Aplicação: movimento de uma partícula em um meio viscoso

Uma partícula de massa m cai sob a ação da gravidade e sofre uma força resistiva proporcional à velocidade. Sabendo que a partícula foi abandonada a partir do repouso, determine a velocidade, $v(t)$, para os instantes subsequentes.

Como a orientação positiva do eixo vertical dirigida para cima, como pode ser observado na Figura 9, a equação diferencial do movimento desta partícula é dada por $m \frac{dv}{dt} = -mg - bv$. As forças presentes nesta equação estão esquematizadas na mesma Figura. Dividindo-se esta equação por m e rearranjando os termos, resulta em:

Figura 9 – Diagrama de forças aplicadas na partícula de massa m .



Fonte: (WATARI, 2004, p.45).

reescrevendo a equação de movimento, temos :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}v = -g, \quad (3.1)$$

que é uma equação linear de primeira ordem, onde as correspondências

$$x \rightarrow t, \quad p(x) \rightarrow \frac{b}{m} \quad e \quad q(x) \rightarrow -g$$

pode ser estabelecidas. Como $\int^\xi p(\eta)d\eta = \int^\xi \frac{b}{m}d\eta = \frac{b}{m}\xi$, a solução geral é, então,

$$v(t) = e^{-\frac{b}{m}t} \left[\int^t e^{\frac{b}{m}s}(-)gds + C \right] = e^{-\frac{b}{m}t} \left[-\frac{mg}{b}e^{\frac{b}{m}t} + C \right] = -\frac{mg}{b} + e^{-\frac{b}{m}t}.$$

Impondo-se a condição inicial $v(0)$, obtém-se $C = -\frac{mg}{b}$, portanto,

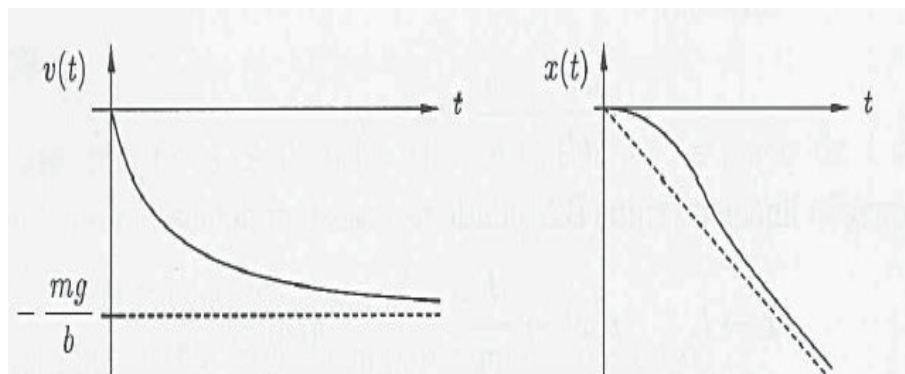
$$v(t) = -\frac{mg}{b} \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t} \right), \tag{3.2}$$

é a solução procurada. O que se espera quando $\frac{b}{m}t \ll 1$, isto é, $t \ll \frac{b}{m}$? Utilizando o fato que $e^\xi \sim \xi + 1$, quando $\xi \ll 1$,

$$v(t) \approx -\frac{mg}{b} \left(1 - 1 + \frac{b}{m}t \right) = -gt, \tag{3.3}$$

que coincide com o resultado para uma partícula em queda livre. Como no começo do movimento a velocidade é muito pequena, a força resistiva é desprezível. Portanto, espera-se que, no início, o movimento seja aproximadamente o de queda livre. A velocidade aumenta com o passar do tempo até atingir um valor limite, quando $t \rightarrow \infty$ (após um tempo longo), dado por $-\frac{mg}{b}$ e denominado *velocidade terminal*. O comportamento de v em função de t pode ser observado na Figura 10.

Figura 10 – (a) Gráfico de $v(t)$ (b) Gráfico de $x(t)$



Fonte: (WATARI, 2004, p.46).

Observe que $-mg - bv_{terminal} = 0$, o que significa que a velocidade aumenta até a força resistiva equilibrar a força peso. Lembrando-se que $\frac{dx}{dt} = v$, o espaço percorrido é dado por:

$$\int_0^t x(t')dt' = x(t) - x(0) = \int_0^t v(t')dt'. \tag{3.4}$$

Substituindo-se $v(t')$ dado pela Eq. 3.2, e supondo-se que $x(0) = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t -\frac{mg}{b} (1 - e^{-\frac{b}{m}t'}) dt' \\ &= \frac{-mg}{b} \left(t' + \frac{m}{b} e^{-\frac{b}{m}t'} \right) \Big|_0^t \\ &= -\frac{mg}{b} \left(t + \frac{m}{b} e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{m}{b} \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

ou seja,

$$x(t) = \frac{m^2g}{b^2} \left(1 - \frac{b}{m}t - e^{-\frac{b}{m}t} \right). \quad (3.6)$$

Se analisarmos esta expressão para $t \ll \frac{m}{b}$, isto é, no início do movimento, como foi feito com $v(t)$ obtém-se:

$$x(t) \approx \frac{m^2g}{b^2} \left(1 - \frac{b}{m}t - 1 + \frac{b}{m}t - \frac{1}{2} \frac{b}{m}t^2 \right) = -\frac{1}{2}gt^2, \quad (3.7)$$

onde $e^\xi \sim 1 + \xi + \frac{1}{2}\xi^2$ quando $\xi \ll 1$ foi utilizado. Novamente, este é o resultado para queda livre, como esperar-se-ia para o começo do movimento. Por outro lado, quando t torna-se grande $x(t) \rightarrow -\frac{mg}{b}t$, isto é, partícula tende a cair com velocidade constante, que é a velocidade terminal. O comportamento completo de $x(t)$ pode ser observado na Figura 10. Tanto a expressão 3.2 de $v(t)$ quando a 3.6 de $x(t)$ mostram que, à medida que a força resistiva aproxima-se da força peso, a queda dessa partícula tende a um movimento uniforme como a velocidade limite dada por $\frac{mg}{b}$, em valor absoluto.

3.2 Aplicação: velocidade de escape

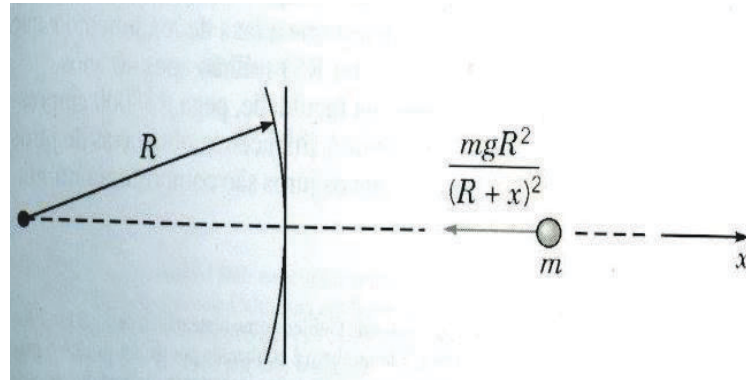
Um corpo de massa constante m é projetado para fora da terra em direção perpendicular à superfície da terra com uma velocidade inicial v_0 . Supondo desprezível a resistência do ar, mas levando em consideração a variação do campo gravitacional da terra com a distância, encontre uma fórmula para a velocidade desse corpo em movimento. Encontre, também, velocidade inicial necessária para levantar o corpo até uma altitude máxima de ξ acima da superfície da terra e a menor velocidade inicial para a qual o corpo não retorne à terra; esse último é a **velocidade de escape**.

Vamos colocar o eixo positivo dos x apontando para fora do centro da terra, ao longo da linha do movimento, com $x = 0$ na superfície da terra (observe a Figura 11). A Figura está desenhada horizontalmente para lembrá-lo de que a gravidade está diferenciada para o centro da Terra, o que não é necessário para baixo de uma perspectiva longe da superfície da Terra. A força gravitacional agindo sobre o corpo (isto é, seu peso) é inversamente proporcional ao quadrado da distância ao centro da terra e é dado por $w(x) = -k/(x + R^2)$, onde k é uma constante R é o raio da Terra e o sinal de menos significa que $w(x)$ aponta na direção negativa do eixo x . Sabemos que, na superfície da

Terra, $w(0)$ é dada por $-mg$, onde g é a aceleração da gravidade no nível do mar. Portanto, $k = mgR^2$ e:

$$w(x) = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}. \quad (3.8)$$

Figura 11 – Um corpo no campo gravitacional da terra.



Fonte: (BOYCE, 2006, p.33).

Como não existe outras forças agindo sobre o corpo, a equação de movimento é:

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}, \quad (3.9)$$

e a condição inicial é:

$$v(0) = v_0. \quad (3.10)$$

Infelizmente a Eq. 3.9 envolve variáveis demais, já que depende de t , x e v . Para concertar essa situação, podemos eliminar t da Eq. 3.9 considerando x , em vez de t , como a variável independente. Precisamos expressar, então, dv/dt em função de dv/dx pela regra da cadeia, logo, temos:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}, \quad (3.11)$$

e a Eq. 3.9 é substituída por:

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}. \quad (3.12)$$

A Eq. 3.12 é separável, mas não-linear, logo, separando as variáveis e integrando, obtemos:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{R+x} + C. \quad (3.13)$$

Como $x = 0$ quando $t = 0$, a condição inicial 3.10 em $t = 0$ pode ser substituída pela condição $v = v_0$, quando $x = 0$. Portanto, $c = v_0^2/2 - gR$ e,

$$v = \pm \left(v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{R+x} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.14)$$

Note que a Eq. 3.14 fornece a velocidade em função da altitude, em vez de em função do tempo. O sinal de mais tem que ser escolhido se o corpo está subindo e o sinal de menos se o corpo está caindo de volta na Terra.

Para determinar a altitude máxima atingida pelo corpo fazemos $v = 0$ e $x = \xi$ na Eq. 3.14 e depois resolvemos para ξ obtendo:

$$\xi = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}. \quad (3.15)$$

Resolvendo a Eq. 3.15 para v_0 encontramos a velocidade inicial necessária para levantar o corpo até a altitude ξ , a saber,

$$v_0 = \left(2gR \frac{\xi}{R + \xi} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.16)$$

A velocidade de escape v_l é encontrada, então, fazendo-se $\xi \rightarrow \infty$. Temos, então,

$$v_l = \sqrt{2gR}. \quad (3.17)$$

O valor numérico v_l é de aproximadamente 6,9 milhas/s ou 11,1 km/s.

Esse cálculo para velocidade de escape despreza os efeitos da resistência do ar, de modo que a velocidade de escape real (incluindo o efeito da resistência do ar) é um pouco maior. Por outro lado, a velocidade de escape efetiva pode ser reduzida substancialmente se o corpo for transportado a uma distância considerável acima do nível do mar antes de ser lançada. Ambas as forças gravitacionais e de atrito ficam bastante reduzidas; a resistência do ar, em particular, diminui rapidamente quando a altitude aumenta. Devemos ter em mente que pode ser impossível, na prática, alcançar uma velocidade inicial muito grande instantaneamente, veículos espaciais, por exemplo, recebem sua aceleração inicial durante um período de vários minutos.

3.3 Aplicação: lei do resfriamento de Newton

A lei do resfriamento de Newton diz que dT/dt , à taxa de variação da temperatura de um corpo em relação ao tempo é proporcional a diferença da sua temperatura T e da Temperatura ambiente T_0 , ou seja:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0). \quad (3.18)$$

Onde $k > 0$ é uma contante. Vamos supor a temperatura ambiente constante. Nesse caso, a equação diferencial é de variáveis separáveis, e também linear. Onde a solução geral da Eq 3.18 é dada por:

$$T = T_0 + ce^{-kt}, \quad (3.19)$$

onde, c é uma constante arbitrária, que fica determinada à partir das condições iniciais. Note que, se $t \rightarrow \infty$, tem-se $T \rightarrow T_0$, ou seja, a temperatura do corpo tende à temperatura ambiente, o que é razoável do ponto de vista da Física.

Aplicação 3.1. Um corpo resfria-se de $300^\circ C$ a $150^\circ C$ em 30 minutos quando imerso em um meio de temperatura constante, igual a $15^\circ C$. Determine a temperatura do corpo 30 minutos depois de a temperatura ter atingido $150^\circ C$.

Vamos adotar $t = 0s$ quando $T = 300^\circ C$. Substituindo na Eq 3.19, e, lembrando que $T_0 = 15^\circ C$, obtém-se:

$$300 = 15 + ce^{-k \cdot 0} = 15 + c \quad \therefore \quad c = 285. \quad (3.20)$$

Portanto, obtém-se:

$$T = 15 + 285e^{-kt} \quad (3.21)$$

Como $T = 150^\circ C$ para $T = 30^\circ C$, temos $150 = 15 + 285e^{-k \cdot 30}$; logo:

$$e^{30k} = \frac{135}{285} \quad \therefore \quad (e^k)^{30} = \frac{135}{285} \quad \therefore \quad (e^k) = \left(\frac{135}{285}\right)^{\frac{t}{30}} \quad (3.22)$$

Substituindo na Eq 3.21, tem-se:

$$T = 15 + 285e^{-kt} = 15 + 285\left(\frac{135}{285}\right)^{\frac{t}{30}}. \quad (3.23)$$

O problema pediu a temperatura quando o tempo decorrido após o instante inicial é $30 + 30 = 60$ minutos, o que se obtém fazendo $t = 60s$:

$$T = 15 + 285\left(\frac{135}{285}\right)^{\frac{60}{30}} = 15 + 285\left(\frac{135}{285}\right)^2 = 15 + \frac{135^2}{285} \equiv 79,9^\circ C. \quad (3.24)$$

3.4 Aplicação: partícula movendo-se sobre a ação de uma força resistiva e outra variável com o tempo

Uma partícula de massa m move-se sob a ação de uma força resistiva, $-bv$, e de uma força aplicada, $F(t) = F_0 \left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$. Determine $v(t)$, sabendo que a partícula encontrava-se em repouso no instante inicial ($t_0 = 0$).

Orientando-se eixo no mesmo sentido da força aplicada, a equação diferencial do movimento desta partícula é dada por: $m \frac{dv}{dt} = -bv + F_0 (1 - e^{-\frac{b}{m}t})$. Dividindo-se esta equação por m , chega-se a:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v + \frac{F_0}{m} (1 - e^{-\frac{b}{m}t}), \quad (3.25)$$

que também é equação linear de primeira ordem, onde as correspondências análogas $x \rightarrow t$, $p(x) \rightarrow \frac{b}{m}$ e $q(x) \rightarrow \frac{F_0}{m} (1 - e^{-\frac{b}{m}t})$ podem ser estabelecidas. Também, como no exemplo anterior, tem-se $\int^\xi p(\eta)d\eta = \int^\xi \frac{b}{m}d\eta = \frac{b}{m}\xi$, e a solução geral é dada por:

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-\frac{b}{m}t} \left[\int^t e^{\frac{b}{m}s} \frac{F_0}{m} (1 - e^{-\frac{b}{m}s}) ds + C \right] \\ v(t) &= e^{-\frac{b}{m}t} \left[\frac{F_0}{m} \left(\int^t e^{\frac{b}{m}s} ds - \int^t ds \right) + C \right] \end{aligned}$$

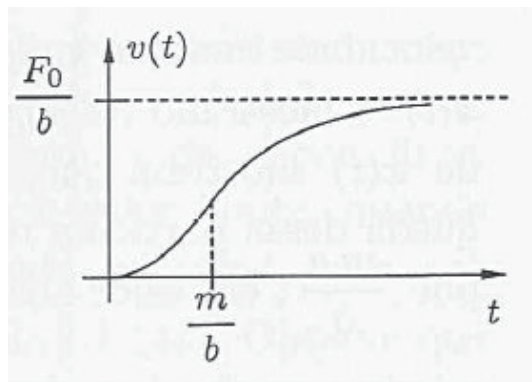
$$v(t) = e^{-\frac{b}{m}t} \left[\frac{F_0}{m} \left(\frac{m}{b} e^{\frac{b}{m}t} - t \right) + C \right] = \frac{F_0}{b} \left(1 - \frac{b}{m} t e^{-\frac{b}{m}t} \right) + C e^{-\frac{b}{m}t}. \quad (3.26)$$

Ao impor a condição inicial, $v(0) = 0$, obtém-se $C = -\frac{F_0}{b}$. Portanto, solução procurada é :

$$v(t) = e^{-\frac{b}{m}t} \left[\frac{F_0}{m} \left(\frac{m}{b} e^{\frac{b}{m}t} - t \right) + C \right] = \frac{F_0}{b} \left(1 - \frac{b}{m} t \right) e^{-\frac{b}{m}t}. \quad (3.27)$$

O gráfico de $v(t)$ em função de t pode ser observado na Figura 12.

Figura 12 – Gráfico v x t .



Fonte: Watari (2004, p.48).

Conclusão

Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) fizemos um estudo histórico acerca do Cálculo Diferencial e Integral, onde destacamos alguns matemáticos importantes que moldaram o cálculo desde a antiguidade até os séculos XVIII e XIX, fazendo do cálculo um grande instrumento para o desenvolvimento da matemática e de outras ciências. Estudamos a teoria das Equações Diferenciais ordinárias de Primeira Ordem, dos tipos: Exatas, Separáveis, Homogêneas e Lineares com o objetivo de resolvermos alguns problemas físicos, tais como: movimento de uma partícula em meio viscoso, a lei de resfriamento de Newton, a velocidade de escape de um corpo, e o movimento de um corpo sobre a ação de uma força resistiva proporcional a velocidade e outra força dependente do tempo.

Assim, Através deste estudo foi possível verificar quão importantes são as Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem, pois as mesmas além de serem utilizadas na própria matemática, também são utilizadas em outras áreas do conhecimento como por exemplo: na Física, Química, Biologia, Geografia, Engenharia e Economia, etc.

Referências

- ARAUJO, J. E. d. *Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações*. Campina Grande: Universidade Estadual da Paraíba, Curso de Matemática, Departamento de Matemática, 2011. Citado na página 11.
- BATISTA, R. J. e. R. C. D. *Introdução à História do Cálculo Diferencial e Integral*. Rio de Janeiro: tradução de Valéria de Magalhães Lorio. LTC., 2006. Citado 3 vezes nas páginas 11, 14 e 15.
- BOYCE, W. E. *Equação diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. São Paulo: [s.n.], 2006. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 32.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 15.
- EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. [S.l.]: Editora da Unicamp, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 16.
- LAKATOS, E.; MARCONI, M. D. A. *Fundamentos de metodologia científica*. [S.l.]: Atlas, 2009. Citado na página 11.
- MACHADO, K. D. *Equações diferenciais aplicadas*. [S.l.]: Vol. 1, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 21.
- SOUSA, V. C. *A origem do Cálculo Diferencial e Integral*. [S.l.: s.n.], 2001. Citado 3 vezes nas páginas 11, 18 e 19.
- WATARI, K. *Mecânica Clássica*. [S.l.]: São Paulo, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 35.