



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E SOCIAIS APLICADAS – CCEA
CAMPUS VII – GOVERNADOR ANTÔNIO MARIZ
LICENCIATURA EM CIÊNCIAS EXATAS**

**A DESIGUALDADE DE BELL E A LOCALIDADE NA MECÂNICA
QUÂNTICA.**

MARIA DO BONSUCESSO PEREIRA MORAIS

**ORIENTADOR:
PROF. MSC. EVERTON CAVALCANTE**

**PATOS-PB
2012**

MARIA DO BONSUCESSO PEREIRA MORAIS

**A DESIGUALDADE DE BELL E A LOCALIDADE NA MECÂNICA
QUÂNTICA.**

*Monografia apresentada como parte
dos requisitos para a conclusão do
curso de Licenciatura Plena em
Ciências Exatas*

Orientador: Prof. Msc. Everton
Cavalcante

PATOS-PB

2012

M827d MORAIS, Maria do Bonsucesso Pereira.

A desigualdade de Bell e a localidade na mecânica
quântica. / Maria do Bonsucesso Pereira Morais.
Patos: UEPB. 2012.
48f

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso -
(TCC) - Universidade Estadual da Paraíba).
Orientador: Prof. Msc. Everton Cavalcante

1. Física 2. Mecânica quântica
I. Título II. Cavalcante, Everton.

CDD 530.12

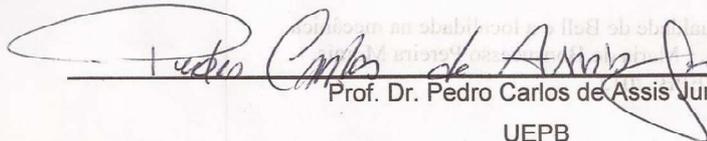
Maria do Bonsucesso Pereira Morais

A desigualdade de Bell e a Localidade na Mecânica Quântica.

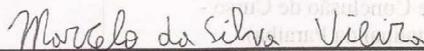
*Monografia apresentada como parte
dos requisitos para a conclusão do
curso de Licenciatura Plena em
Ciências Exatas*

Data da Aprovação: 27 / 06 / 12

Banca Examinadora:

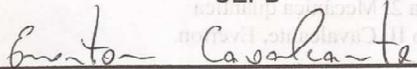

Prof. Dr. Pedro Carlos de Assis Junior

UEPB


Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira

Prof. Dr. Marcelo da Silva Vieira

UEPB


Prof. Msc. Everton Cavalcante

Prof. Msc. Everton Cavalcante

UEPB

*Aos meus pais, Beto e Belinda, a
Minha irmã, Wliany, aos que acreditam
e me apoiam e a Deus pela Força.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela força, aos meus pais, Umbelina e Beto pelo amor incondicional e a confiança; a minha irmã Wliany pela Paciência e compreensão. Agradeço também aos grandes amigos que fiz durante esse período, pelos momentos de descontração. Não se esquecendo de Natana Rodrigues, Veridiana Mathias, Audenora Dutra, Livia Mirely, Mailson, Miriam Rodrigues e Pedro Júnior pelos bons e inesquecíveis momentos, que fazem parte de mim. Não podendo faltar o agradecimento especial ao professor Everton Cavalcante, pela paciência e brilhante orientação. Enfim, agradeço a todos que de alguma forma me ajudaram a trilhar esse caminho.

“Ainda bem que chegamos a um paradoxo. Agora, há esperança de conseguirmos algum progresso.”

(Niels Bohr)

RESUMO

Neste trabalho de Conclusão do curso, iniciamos uma introdução a Mecânica Quântica, discutindo seu surgimento e como a mesma foi aceita pela comunidade científica da época. Depois abordamos alguns conceitos que serviram de base para sua construção, diante de problemas que a Mecânica Clássica não conseguia explicar satisfatoriamente, como o problema da Catástrofe do Ultravioleta, o Efeito Fotoelétrico, entre outros, discutimos também as soluções desses problemas usando a ideia de quantização de energia proposta por Planck, para a Catástrofe ultravioleta e a ideia de fótons proposta por Einstein para explicação do Efeito Fotoelétrico, a qual ele recebeu um Nobel. Estudamos também, a interação entre matéria e radiação através do efeito Compton, explicando que a luz não pode ser tratada somente como um modelo ondulatório, tratando que a matéria tem natureza dual. Tratamos também, alguns dos aspectos quânticos mais intrigantes que se contrapõem a Mecânica Clássica, como o problema da medição, a qual Einstein não concordava e introduzira uma teoria para tal, mostrando que a teoria quântica é incompleta, além do emaranhamento de estados. Realçamos a distinção entre a Teoria Ortodoxa, através da interpretação de Copenhague, rompendo com o determinismo no processo de medição e a Teoria realista amplamente defendida por Einstein para o problema, apontando características para tornar a teoria quântica incompleta e local. Por fim, discutimos como Bell propôs uma desigualdade que viesse a definir os aspectos de determinismo e localidade da teoria, derrubando assim a possibilidade da teoria quântica ser local.

Palavras-chave: Mecânica Quântica, Emaranhamento, Localidade.

ABSTRACT

In this work of conclusion course we started an introduction to quantum mechanics, discussing its inception and how it was the same accepted by the scientific community of the age. later approach some concepts that served as base for his construction, before problems that the Classic Mechanics didn't get to explain satisfactorily, as the problem of the Catastrophe of the Ultraviolet, the Photoelectric Effect among other, we appeared we also pointed the solutions of those problems using the idea of quantization of energy proposed by Planck, for the ultraviolet Catastrophe and the idea of photons proposed by Einstein for explanation of the Photoelectric Effect which he received a Nobel. We also studied, the interaction between matter and radiation through the effect Compton, explaining that the light cannot only be treated as a model wave. We treat also some of the most intriguing aspects of quantum which oppose to classical mechanics, as the problem of measurement, which Einstein did not agree and introduced to such a theory, showing that quantum theory is incomplete, and the entanglement of states. We emphasize the distinction between the Orthodox Theory, through the Copenhagen interpretation, therefore we have no determinism in the measurement process and realistic theory widely held by Einstein to the problem, pointed out features to make quantum theory incomplete and local. Finally, we discuss how a proposed Bell inequality that would define the issues of determinism and locality of the theory, thus cutting down the possibility of quantum theory to be local.

Keywords: quantum mechanics, Entanglement, Locality.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	09
1. CONCEITOS BÁSICOS DA MECÂNICA QUÂNTICA	12
1.1. As Origens Históricas da Mecânica Quântica	12
1.2. A Equação de Schrödinger e a Interpretação de Copenhague	15
1.3. Formalismo Vetorial da Mecânica Quântica	18
2. DETERMINISMO E CAUSALIDADE	21
2.1. Posição Realista e Ortodoxa.....	22
3. O PARADOXO EPR E A DESIGUALDADE DE BELL	27
3.1. Gato de Schrödinger e Emaranhamento	29
3.2. Decaimento do méson π^0 e a Álgebra do Emaranhamento.. ..	31
3.3. Einstein e o Emaranhamento.....	33
3.4. Teorema de Bell.....	34
4. CONCLUSÕES	38
APÊNDICE	39
REFERÊNCIAS	45

INTRODUÇÃO

No fim do século XIX, os físicos tentavam compreender a interação entre matéria e radiação. As informações a respeito de sua natureza foram obtidas através de estudos e diante de evidências experimentais, como a teoria eletromagnética da luz, que deveria ser descrita como um movimento ondulatório. O problema da época era que a teoria eletromagnética não conseguia explicar a radiação do corpo negro. A teoria previa que ela deveria emitir mais radiação de pequenos comprimentos de onda (grande frequência) do que de grande comprimento de onda. Mas não era isso o que se observava [1]. O que se observava era que a intensidade aumentava junto ao comprimento de onda até certo ponto, depois ela decrescia muito diferente do que previu a teoria clássica da luz. Tal discrepância ficou conhecida como Catástrofe Ultravioleta.

O início da mecânica quântica se deu com o estudo desse fenômeno, com Planck sugerindo uma hipótese tão inovadora, quanto ousada para a época que é a quantização de energia, segundo Zemansky [2]:

Planck não tinha muita certeza sobre sua hipótese de quantização, ele imaginava que ela fosse apenas um artifício de cálculo, e não uma hipótese fundamental. Admitindo ser apenas “um ato de desespero” ao qual foi forçado porque “uma explicação teórica, deveria ser encontrada a qualquer preço”.

Posteriormente, atrelado aos estudos de Planck, em 1905, Einstein publica um artigo tratando do “Efeito Fotoelétrico”. Em 1922, ele ganha o Prêmio Nobel de Física com a citação: “Por suas contribuições para a física teórica, e em especial pela sua teoria do efeito fotoelétrico”. Mesmo na citação do Prêmio Nobel, não é mencionado à teoria dos quanta de luz, ainda controversa nessa época [3]. Ele propôs que a energia radiante fosse quantizada em pacotes concentrados, que mais tarde vieram a ser chamados de fótons, supondo que a energia do fóton, está relacionada à sua frequência [4]. Ou seja, o efeito fotoelétrico era explicado somente quando associamos a luz a aspectos corpusculares (fótons). Logo após, surgiu uma importante confirmação, independente da hipótese de Planck, em 1923, o físico

Austríaco Arthur Compton estudando o espalhamento de raios-x detectou um fenômeno que ficou conhecido como Efeito Compton.

Em seguida deixaremos claro que a equação de Schrödinger dita à evolução da função da onda, e que a interpretação mais aceita atualmente é de Copenhague, descrita em detalhes no desenrolar do texto.

No capítulo dois, abordaremos o determinismo da Mecânica Clássica e a Causalidade proposta pela Mecânica Quântica, por meio da interpretação de Copenhague, exemplificando através do experimento da dupla fenda. Além de tratarmos da superposição de estados e da distinção entre a posição realista, que era amplamente defendida por Einstein e a ortodoxa, a mais aceita atualmente, relacionando essa visão com o artigo publicado por Einstein, Podolsky e Rosen de uma aparente contradição entre a mecânica quântica e a relatividade especial, artigo esse que ficou conhecido como Paradoxo EPR, devido a seus autores.

Atrelados a essas divergências trataremos do paradoxo EPR, mostrando uma maneira que Einstein encontrou para defender que a mecânica quântica é incompleta, introduzindo uma teoria conhecida como Teoria das Variáveis Ocultas, que seria uma maneira de tornar a mecânica quântica uma teoria “completa”. Essa discussão levou Schrödinger a propor um experimento mental intitulado como Gato de Schrödinger, tratando de emaranhamento das partículas, a qual Bell se inspirou para dar êxito em seus trabalhos.

Mostraremos em uma versão simplificada do paradoxo EPR, o decaimento do Méson π^0 , para o colapso da função de onda, no espaço de Hilbert, mostrando do ponto de vista algébrico o emaranhamento, além da correlação de medidas que esta intimamente relacionada à probabilidade de aparecimento de Spin Up e Down, respectivamente, respeitando a conservação do momento angular e o princípio da relatividade restrita de Einstein.

Veremos ainda que na tentativa de manter a localidade na mecânica quântica, por meio de EPR, Bell propôs a desigualdade que deveria ser satisfeita para que uma teoria de variável oculta local fosse possível. Mostraremos ainda que tal desigualdade foi refutada em experimentos.

Por fim, faremos alguns comentários sobre a importância da desigualdade de Bell no tratamento da física quântica como um todo. Além de citarmos algumas tecnologias baseadas no nesse contexto, que algo longo de seu desenvolvimento

vem expondo suas inovações e aplicabilidades cada vez mais inovadoras, como no caso da criptografia quântica, que trata de partículas entrelaçadas, elas são usadas para transmitir sinais que não podem ser vazados sem deixar traços, a computação quântica, que também trata de partículas entrelaçadas, só que as mesmas são usadas para realizar cálculos em paralelo em computadores, o teletransporte, entre tantas outras. Áreas promissoras que vem se desenvolvendo na atualidade.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS BÁSICOS DA MECÂNICA QUÂNTICA

1.1. As Origens Históricas da Mecânica quântica

Em 1672, Newton apresentou uma teoria conhecida como modelo corpuscular da luz. Nesta teoria a luz era considerada como um feixe de partículas emitidas por uma fonte de luz que atingia o olho estimulando a visão. Esta teoria conseguia explicar muito bem alguns fenômenos de propagação da luz, como por exemplo, a reflexão e refração da luz. Contudo, foi o **caráter ondulatório** da luz ficou plenamente estabelecido quando Maxwell formulou a *teoria ondulatória eletromagnética*, considerando a luz uma onda eletromagnética, mas o caráter ondulatório da luz seria colocado à prova novamente com o estudo de um fenômeno que a teoria clássica ondulatória não conseguia explicar. A radiação do corpo negro é representada por um pequeno orifício, que parecerá negro para corpos em temperaturas usuais, um corpo negro seria aquele que consegue irradiar toda a radiação incidente sobre ele, sendo assim um irradiador ideal.

Mesmo com toda solidez teórica, a teoria ondulatória teve que ser revista quando a catástrofe ultravioleta veio à tona. O que foi observado para grandes comprimentos de onda é que a frequência e o comprimento de onda aumentavam juntos até certo ponto, logo após esta decrescia (como mostrado na figura 1), essa discrepância entre a teoria clássica e o experimento ficou conhecido como Catástrofe Ultravioleta.

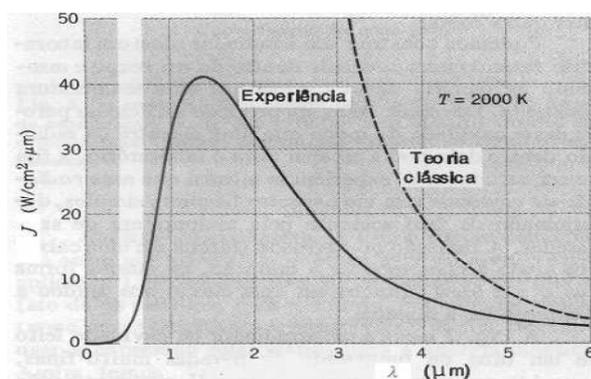


Figura 1: Radiação espectral de um corpo negro à temperatura de 2000 K (linha a cheio) e previsão da teoria eletromagnética clássica (linha a tracejado) [5].

Foi Planck, surpreendendo toda comunidade científica da época, que em 1900, formulou uma hipótese, afirmando que a energia estava associada a níveis discretos, sendo proporcional apenas a frequência, ou seja, a energia absorvida ou emitida pelos átomos é formada de porções discretas chamadas de quanta [1].

A superfície de um corpo negro é um caso limite, em que toda a energia incidente desde o exterior é absorvida, e toda a energia incidente desde o interior é emitida [5]. Consideremos uma cavidade com um pequeno orifício, a energia radiante incide através do orifício que é absorvida pelas paredes, sendo refletida uma pequena proporção por meio do mesmo. Os átomos opostos às paredes emitem também radiação eletromagnética ao mesmo tempo em que absorvem a radiação emitida por outros átomos até que haja o equilíbrio. Uma consequência para isso é que a densidade de energia do campo eletromagnético existente na cavidade é constante [5].

Assim, essa pequena abertura no recipiente faz com que parte da radiação escape e pode ser então analisada. O orifício é visto muito brilhante quando o corpo está à alta temperatura, e se vê completamente negro a baixas temperaturas [5]. Max Planck explica o mecanismo que faz com que os átomos radiantes produzam a distribuição de energia observada, nesse momento da explicação de Planck dá-se o início da teoria quântica. Max Planck sugeriu em 1900 que: A radiação dentro da cavidade está em equilíbrio com os átomos das paredes que se comportam como osciladores harmônicos de frequência dada f [5], que é proporcional a sua energia, sendo representado por:

$$E = hf \quad (1.0)$$

Onde h é a constante de Planck e f sua frequência. Assim, foi constatado que a radiação eletromagnética possui um comportamento dual [4].

Anos mais tarde, embasado nos estudos de Planck, sabendo que a teoria eletromagnética descreve a propagação da luz como um fenômeno ondulatório, Einstein propôs, considerar essa onda como uma série de partículas. Mais tarde, essas partículas foram denominadas *fótons*, que eram constituídos de pequenos pacotes de luz [3]. Tais “pacotes” ao incidir numa placa metálica arrancariam elétrons de sua superfície. Esse fenômeno, conhecido como efeito fotoelétrico, foi explicado satisfatoriamente em 1905, salientando que a luz possui tanto características corpusculares quanto ondulatórias.

A comunidade científica levou mais de 10 anos para reconhecer a validade do trabalho de Einstein e a necessidade de introduzir rupturas nas teorias clássicas [6]. O problema consistia justamente na hipótese de “granular” a energia, pois nos trabalhos de Maxwell a matéria tinha uma descrição contínua, como observado na figura 1.

Robert Andrews Millikan, em 1916, publicou um trabalho acurado sobre o efeito fotoelétrico e a solução apresentada por Einstein reconhecendo [6]: *Eu trabalhei 10 anos de minha vida testando a equação de Einstein de 1905 e contrário a todas as minhas expectativas, eu fui compelido em 1915 a assegurar sua verificação experimental, a despeito de sua não razoabilidade desde que ela parece violar tudo que eu sabia acerca da interferência da luz.*

Sendo que em 1921, Einstein recebeu o prêmio Nobel de Física pelas suas contribuições à Física Teórica, em particular por seu trabalho sobre o efeito fotoelétrico.

Atrelado às ideias de Planck e Einstein, foram feitos experimentos com base na teoria corpuscular da luz. Um desses experimentos foi proposto por Arthur Compton, ficando conhecido como Efeito Compton, que trata do espalhamento de raios-x em materiais. Compton mostrou, em 1923, que um feixe de raios X com certo comprimento de onda, era espalhado por elétrons quando incididos sobre uma amostra de grafite [4]. Para interpretar as observações experimentais, Compton postulou que o feixe de raios X incidente não era uma onda de frequência, mas um conjunto de fótons cada um com a energia associada [7]. A natureza corpuscular da radiação foi então confirmada.

Compton que realizou experiências com espalhamento de raios X e gama na década de 20 [7]. Ele concluiu que era possível interpretar a interação da radiação eletromagnética de um fóton com um elétron livre, devendo haver a conservação do momento linear.

A fórmula para o momento linear p do fóton foi obtida a partir da relação entre momento e energia relativística (Ver Apêndice A) para uma partícula sem massa de repouso [7]:

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (1.1)$$

Onde h é a constante de Planck e λ é o comprimento de onda. Esta é generalização de De Broglie, para partículas com massa em repouso diferente de zero.

No experimento da dupla fenda, proposto por Young, ao incidirmos uma onda eletromagnética passando pelas fendas projetadas num anteparo, observamos uma sucessão de faixas construtivas e destrutivas, acontecendo o fenômeno da interferência. A esse comportamento da luz De Broglie associou o inverso, ou seja, que toda partícula se comporta como onda, e assim ele propôs que os elétrons apresentavam características tanto ondulatórias quanto corpusculares, comportando-se de um ou outro modo dependendo do experimento específico. Deve-se salientar que a radiação não possui um comportamento puramente ondulatório nem meramente se comporta como um feixe de partículas [4]. A esta interpretação das partículas subatômicas se comportarem ou terem propriedades tanto de corpúsculos quanto de onda, denominamos dualidade onda-partícula.

Foi Louis De Broglie, que em 1924, propôs a existência de ondas de matéria. Considerando que o comportamento dual da radiação também se aplicava a matéria. Assim como um fóton tem associado a ele uma onda luminosa que governa seu movimento, também uma partícula material (por exemplo, um elétron) tem associada a ela uma onda de matéria que governa seu movimento [4].

As propriedades ondulatórias das partículas são então representadas por uma função de onda $[\psi(x, t)]$ associada. Que deve obedecer a uma equação de onda. Foi Erwin Schrödinger que propôs tal equação e então que surgiu de fato a mecânica quântica.

1.2. A Equação de Schrödinger e a Interpretação de Copenhague

A função de onda de um sistema nada mais é do que uma representação matemática abstrata do estado do sistema. Os trabalhos de De Broglie, relacionados à dualidade partícula-onda, estabeleceram um formalismo quantitativo do comportamento ondulatório da matéria, sendo o comprimento de onda da radiação associada à partícula [4]. Ela prevê uma descrição completa do sistema físico ao

qual está associado, sendo a solução de uma equação em derivadas parciais conhecida como equação de Schrödinger. Ela somente tem significado no contexto da teoria quântica, deixando de lado o determinismo da física clássica. Esta equação descreve a evolução temporal e espacial de um estado quântico de um sistema físico, tendo uma grande importância na mecânica quântica.

Como a teoria quântica em todas as suas formulações abandona a noção clássica de trajetória de partícula, Max Born, em 1926, postulou que a probabilidade $p(x, t)$ de se encontrar a partícula entre a posição x_1 e x_2 , no instante t , poderia ser obtida a partir da função de onda pela relação [8]:

$$p = \int_{x_1}^{x_2} \psi^* \psi d\vec{x} \quad (1.2)$$

Essa interpretação de função de onda é conhecida como interpretação de Copenhague.

Sistemas quânticos sob efeito de potenciais independentes do tempo são chamados estacionários. Se considerarmos uma partícula de massa m que se movimenta sobre o eixo x sob a influência de Energia Potencial $V(x)$, a equação de Schrödinger terá a forma [8]:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t) \quad (1.3)$$

Nesse caso, em que a energia potencial é independente do tempo, podemos procurar soluções da equação (1.3) que separam as partes dependentes de x e de t , técnica conhecida como separação de variáveis [9]:

$$\psi(x, t) = \Psi(x)\phi(t) \quad (1.4)$$

Substituindo (1.4) em (1.3), temos:

$$i\hbar \frac{\partial [\Psi(x)\phi(t)]}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 [\Psi(x)\phi(t)]}{\partial x^2} + V(x)[\Psi(x)\phi(t)] \quad (1.5)$$

Ou,

$$i\hbar\Psi(x)\frac{\partial\phi(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\phi(t)\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2} + V(x)[\Psi(x)\phi(t)] \quad (1.6)$$

Dividindo ambos os lados por $\Psi(x)\phi(t)$, temos:

$$\frac{i\hbar\Psi(x)}{\Psi(x)\phi(t)}\frac{\partial\phi(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2\phi(t)}{2m\Psi(x)\phi(t)}\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2} + \frac{V(x)[\Psi(x)\phi(t)]}{\Psi(x)\phi(t)} \quad (1.7)$$

Ou,

$$\frac{i\hbar}{\phi(t)}\frac{\partial\phi(t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m\Psi(x)}\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2} + V(x) \quad (1.8)$$

Observando o fato de que na equação (1.8) o lado esquerdo da igualdade depende apenas da variável t , e do lado direito depende apenas da variável posição x , temos que, uma igualdade como essa só pode ser verdadeira se ambos os lados tem forem iguais a uma constante, que nesse caso é a própria energia do sistema (E). Assim, a equação de derivadas parciais torna-se duas equações diferenciais ordinárias, com as variáveis t e x separadas.

$$\frac{i\hbar}{\phi(t)}\frac{d\phi(t)}{dt} = E\phi(t) \quad (1.9)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (1.10)$$

A equação (1.10) é conhecida como equação de Schrödinger independente do tempo. Um valor possível na medida de alguma grandeza física de energia E é denominado autovalor de energia e a solução para $\Psi(x)$ fisicamente aceitável é a autofunção correspondente (Ver Apêndice B). No caso específico em que a grandeza em questão é a energia da partícula, os autovalores são chamados

de autoenergias ou autoestados. A cada autoestado está associada uma autofunção, que é a função matemática que descreve o estado da partícula (posição, momento, energia, etc.). No instante da medida as variáveis físicas são os observáveis, que são operadores hermitianos, esses operadores têm três propriedades de suma importância [5]:

1. Os operadores hermitianos possuem autovalores reais.
2. As autofunções de um operador hermitiano são, ou podem ser escolhidas de tal forma que sejam ortogonais.
3. As autofunções de um operador linear hermitiano formam um conjunto completo e ortogonal de funções.

Estes operadores pertencem ao espaço de Hilbert de mesma dimensão do número de graus de sistema. Assim, a equação (1.10) pode ser reescrita num espaço de Hilbert, onde as funções de onda Ψ podem ser representadas por vetores de estado $|\Psi\rangle$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2|\Psi(x)\rangle}{dx^2} + V(x)|\Psi(x)\rangle = E|\Psi(x)\rangle \quad (1.11)$$

Bem como os observáveis são reescritos por operadores hermitianos atuando nesses vetores de estado.

Essa é uma maneira alternativa de representar a mecânica quântica que não seja via funções de onda.

1.3. Formalismo Vetorial da Mecânica Quântica

De fato, o espaço de Hilbert é um espaço vetorial complexo, que pode ter dimensão infinita. Nele podemos associar a cada função de onda $\Psi(x)$ um vetor de estado. Assim, cada vetor do espaço de Hilbert representa um estado que poderia ser ocupado pelo sistema, e a densidade de probabilidade passa agora a ser um produto interno desse espaço:

$$\Psi^*\Psi \rightarrow \langle\Psi(x)|\Psi(x)\rangle \quad (1.12)$$

Os vetores de estado não possuem significado físico, e na notação de Dirac, são chamados de “kets” ($|\Psi(x)\rangle$), que obedecem à equação de Schrödinger;

$$i\hbar \frac{d^2}{dt} |\psi(x, t)\rangle = H|\psi(x, t)\rangle \quad (1.13)$$

Onde H é o operador hamiltoniano que representa a energia do sistema. A equação de Schrödinger independente do tempo só existe para certos valores de energia.

$$E_1, E_2, E_3, \dots, E_n, \dots \quad (1.14)$$

Essas energias são chamadas de autovalores, que formam um conjunto discreto. Do mesmo modo, em que a função de onda é representada por um vetor de estado, o complexo conjugado da função de onda esta associada a um vetor de estado do espaço dual, denominado “Bra” ($\langle\Psi|$). As autoenergias de um sistema são os autovalores do operador hermitiano (H), ou seja, são os possíveis valores da medida de energia do sistema, bem como seus autovetores representam os possíveis autoestados do sistema [8].

Vemos então resumidamente que a equação de Schrödinger é uma equação de autovalor na forma (operador)(função) = (constante)(a mesma função) como representado a seguir e na notação de Dirac, a equação (1.13) pode ser escrita por uma equação como sendo:

$$H|\Psi_n\rangle = E_n|\Psi_n\rangle \quad (1.15)$$

Onde;

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad (1.16)$$

É o operador Hamiltoniano (e obviamente Hermitiano) do sistema. Uma vez abordada à problemática quanto aos fundamentos da mecânica quântica, nessa seção tratamos do formalismo vetorial da mecânica quântica através da notação de Dirac, com alguns postulados aferidos por tal teoria.

O primeiro postulado trata do princípio da superposição [10]: Um sistema físico pode se encontrar em vários estados. Sendo que, cada estado possível é descrito por uma função de onda ψ , que é dado por:

$$\psi = \sum_k a_k \psi_k \quad (1.17)$$

Onde ψ_k são os possíveis estados do sistema com amplitudes a_k .

O segundo postulado trata da interpretação da função de onda que caracteriza um sistema do qual podemos calcular varias propriedades, podendo ter valores complexos. Que é a interpretação de Born para a função de onda.

$$\sum_k |\psi_k|^2 = 1 \quad (1.18)$$

Devido à normalização da probabilidade. Utilizaremos da notação bra-ket de Dirac, para distinguir mais facilmente o cálculo das amplitudes, que trata de números complexos e funções de onda, onde $\langle \Psi |$ será o bra e $|\Psi\rangle$ será o ket.

O nosso terceiro postulado trata dos observáveis, que é um jeito de “encontrar” informações sobre um sistema e medir os valores de grandezas característicos do sistema. Essas grandezas físicas são descritos por operadores lineares e hermitianos no espaço de Hilbert (Ver Apêndice C). Para diferenciar os observáveis frequentemente usa-se o acento circunflexo na letra, que seria o operador. Então, para resolvermos uma equação de autovalores precisaríamos resolver [11]:

$$\hat{A}|\psi\rangle = a_n|\psi\rangle \quad (1.19)$$

Como o observável é hermitiano, a_n atribui valores reais.

O princípio da correspondência é o nosso quarto postulado, dizendo que os operadores momento e posição não comutam. Já o postulado cinco trata da equação de Schrödinger (1.13) e medidas quânticas tratando da probabilidade de encontrar uma partícula em uma determinada região, sob condições de normalização. Antes da medida o sistema pode se apresentar como uma superposição de estados, no entanto depois da medição saberemos exatamente o estado. Contudo, daremos prosseguimento ao texto tratando alguns aspectos mais intrigantes da mecânica quântica.

CAPÍTULO 2

DETERMINISMO E CAUSALIDADE

Na mecânica clássica podemos descrever facilmente a trajetória de uma partícula, por meio de coordenadas generalizadas (q), necessitando apenas de $3N$ coordenadas para localizar todas as partículas.

$$q_1, q_2, \dots, q_N, \dots, q_{3N} \quad (2.0)$$

Num sistema, que contém poucas partículas a evolução do estado é completamente determinada por uma trajetória no espaço associado, onde podemos assim determinar sua posição em qualquer instante de tempo. Com a interpretação de Copenhague não existe esse determinismo clássico da trajetória de uma partícula na mecânica quântica. Agora tratamos apenas da probabilidade da partícula estar em uma dada região do espaço.

Os espaços associados na mecânica quântica são compostos por vetores de estado, e os observáveis físicos são operadores hermitianos, onde seus autovalores representam os possíveis resultados da medida, cada qual com a probabilidade de ocorrência associada.

Como vimos à luz tem características tanto de onda como de partícula. Tais características se apresentam conforme o experimento, de modo que na interação com a matéria ela se comporta como partícula, enquanto na sua propagação ela se comporta como onda. Assim, no experimento de Young não podemos afirmar com exatidão sobre qual fenda o fóton passou. O mesmo acontece para uma dupla fenda com elétrons. Isso acontece porque a natureza ondulatória e corpuscular do elétron não pode ser simultaneamente determinada [12]. Tal característica das partículas nos remete ao cerne do princípio de causalidade na mecânica quântica: Que não é mais possível se pensar em trajetória bem definida para as partículas quânticas.

De fato, o próprio ato da medida rompe com o determinismo clássico. Após a medição, o sistema passa a se encontrar em um novo estado, estado este que depende do resultado obtido. Esse rompimento se dá ao custo de um desconhecimento das condições de transição entre estados no momento da medida,

assim, pode-se dizer que no decorrer da medição o sistema evoluiu de maneira indeterminista. Esta transição tem sido chamada de "colapso do pacote de onda" ou "redução de estado" [12]. Temos então que, um estado genérico de uma partícula é uma superposição de todos os possíveis estados de se obter na medida:

$$|\Psi\rangle = C_1|\phi_1\rangle + C_2|\phi_2\rangle + \dots + C_n|\phi_n\rangle \quad (2.1)$$

Onde os coeficientes $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ são as amplitudes de probabilidade de transição para os autoestados associados.

A observação do fenômeno da interferência favoreceu a interpretação que, segundo a qual existe uma onda associada ao elétron que passou pela dupla fenda. Para essa entidade não observada, que tornaria possível determinar a trajetória do elétron, há uma interpretação defendida por Einstein: Que eles têm realidade bem definida.

2.1. Posição realista e ortodoxa

Discussões a respeito de como interpretar a mecânica quântica surgiram tão logo esta teoria foi formulada. De um lado, Einstein, acreditava e defendia o determinismo clássico, tomando uma posição realista, já Born, indo contra essa concepção, introduziu junto a Heisenberg e Pauli o conceito de "complementariedade" [12]. Esse princípio afirma que qualquer experimento com uma entidade quântica, como um elétron, pode ser compreendido ou em um cenário corpuscular, ou em um cenário ondulatório, mas nunca em ambas ao mesmo tempo [8], introduzindo assim a ideia ortodoxa.

Para a mecânica clássica um observável tem suas características bem definidas, Einstein defendia essa linha de pensamento, segundo o qual, nada se propaga a uma velocidade maior que a da luz, logo, para uma partícula ter determinado valor, é porque ela já o tinha independente da medição. Pois, ao medirmos a energia de uma partícula, que provem do espectro discreto, a mesma já estava antes da medida com esse valor de energia. Partindo desse princípio, Einstein, Podolsky e Rosen, publicaram um artigo [13], conhecido como EPR, no qual tentaram provar que a mecânica quântica seria incompleta, "*Pois mesmo que*

você saiba tudo que a teoria quântica tem a dizer (a saber: da função de onda), ainda não será possível determinar suas características” [1]. Tal artigo revelou o que hoje conhecemos como o Paradoxo EPR.

A interpretação de Copenhague, ao EPR, assume que o ato da medida força a função de onda a um colapso, que seria a transição entre a onda espalhada, sem trajetória definida, para a onda espacialmente localizada, ou seja, antes da medida, o estado da partícula é uma superposição de estados que se torna um ou outro quando a observação acontece [8]. Neste caso o sistema composto deveria evoluir de maneira determinista (pois seria um sistema quântico fechado), mas ao mesmo tempo estariam ocorrendo reduções de estado indeterministas durante as medições efetuadas pelo aparelho no objeto [14]. Imaginemos assim que duas amplitudes de onda (antes da medida) sejam separadas a uma grande distância, e só então a medida seja feita em uma delas, segundo a posição ortodoxa, após a medida de uma das ondas, instantaneamente a outra desaparece, aparentemente violando a teoria da relatividade restrita de Einstein.

Antes de continuar, pode-se duvidar se esta questão possui em geral algum sentido. De fato, pode-se aceitar que uma “coisa real” é apenas aquilo que resulta da própria observação, e não algo existindo objetivamente no espaço e no tempo sem depender do ato de observar. Se aceitarmos este ponto de vista claramente, fica evidente que não é necessário fazer nenhuma consideração sob o domínio de um sistema quântico [15].

Einstein se apegou ao princípio de localidade, considerando a ação à distância absurda. Segundo ele deveria haver algo nessa teoria que até então ninguém conseguiu demonstrar. Ele então introduziu variáveis ocultas, que seriam reais e não observáveis. A posição ortodoxa, conhecida como interpretação de Copenhague, acreditava que o ato da medida força a função de onda espalhada a comprimir-se em um “pacote”, ou seja, há um colapso nessa função de onda. Seguindo esse raciocínio no experimento da dupla fenda, tal concepção emerge ao tentar incidir um elétron num anteparo, passando pelas fendas. Não sabemos por qual das fendas ele passou, no entanto, percebemos um fenômeno de interferência. Agora, se tentarmos medir para esclarecer tal fato, o simples fato da medição faz com que a informação da trajetória do corpúsculo seja apagada. Isso ocorre instantaneamente, com uma probabilidade de ocorrência associada.

No entanto, na Física Quântica acontece algo parecido com a ação à distância, a qual a posição realista não concordava, para Einstein, no processo de medição um determinado observável físico já tem determinada medida mesmo antes da medida acontecer, já para a interpretação de Copenhague, o simples ato da medida perturba o sistema, admitindo essa ação à distância. A isto se dá o nome de não-localidade.

Então, toda argumentação não aparece tão explícita no artigo de 1935 [16]. Neste artigo ele propõe um experimento que revelaria existirem propriedades físicas das partículas subatômicas que não estariam expressas no formalismo da teoria, daí sua incompletude. O argumento de EPR, para essa incompletude, seria do seguinte modo: Suponha que o par de partículas separadas a uma enorme distância, uma das partículas está na terra e outra em júpiter (por exemplo), se medirmos o spin de uma dessas partículas e essa medição for 1, com certeza saberemos que a medida da outra será -1, é porque tal partícula já tinha essa medida desde que surgiu, independente do processo de medição.

Antes de prosseguirmos com tal discussão é conveniente, fazermos duas definições [17]:

- Elemento de Realidade: São quantidades físicas cujos valores podem ser previstos sem que haja a perturbação do sistema;
- Teoria Completa: Para cada elemento de realidade, deve haver uma descrição do sistema físico;

A partir dessas definições, a argumentação de EPR trata que, se a mecânica quântica é uma teoria completa, os observáveis não comutam, sendo assim, nunca serão elementos de realidade simultânea. Para tanto, se uma quantidade pode ser prevista com certeza, a outra não poderá [17]. Idealizando um experimento, eles chegaram a uma contradição desse argumento. Diante dos conceitos da mecânica quântica, temos que todo elemento da realidade física, tem que ter uma contrapartida na teoria física, só que em uma situação hipotética descrita de modo que não fira o princípio da incerteza (Ver Apêndice D), por meio de uma condição suficiente de realidade não seria possível. Já pelo princípio de localidade, um sistema não pode ser afetado por medições realizadas a distância.

Em 1951 o jovem físico norte americano, Bohm faria outra apresentação do experimento EPR que simplificaria imensamente a manipulação do seu

formalismo matemático e, por isto, facilitaria os trabalhos ulteriores de Bell [16]. Lembrando que, no caso das grandezas tratadas por Einstein em 1935, a posição, por exemplo, poderia admitir numa dada direção todos os valores reais. Já para a posição ortodoxa, isso não seria possível, o que teríamos eram possíveis valores de medida.

Sendo assim observamos que, o surgimento da mecânica quântica abriu horizontes sob uma forma de compreender os fenômenos físicos diferente da visão da Mecânica de Newton, através de uma descrição de probabilidade dos sistemas físicos. Essa teoria foi alvo de inúmeras críticas devido às concepções de sua natureza, onde as origens de tais questionamentos estão em no artigo *“Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”* que ficou conhecido como paradoxo EPR, devido a seus autores, Einstein, Podolsky e Rosen [13].

Diante dessas críticas que aferem o principio da teoria quântica, como conclusão para os problemas apontados pelo artigo, seria necessário desenvolver teorias complementares, introduzindo variáveis reais e não observáveis tal teoria foi chamada de teoria de variáveis ocultas. Esses debates levaram anos, motivado por tal Bell demonstrou tais inconsistências observadas na teoria abordada por Einstein, Podolsky e Rosen, onde a correlação é perfeita em certos sistemas físicos, então a mecânica quântica, admite ação à distância e essa correlação perfeita está atrelada a ideia de emaranhamento.

De maneira simplificada, dois ou mais objetos constituem um sistema emaranhado, quando a descrição deste sistema depende do que ocorre com todos os seus constituintes, mesmo quando os objetos encontram-se espacialmente separados, e sem mais interagirem [18]. Isso tornaria impossível a mecânica quântica de representar esse sistema como um produto de estados associados.

O grande mérito do trabalho de Bell foi o desenvolvimento de sua expressão como forma de sanar tais discussões entre o realismo clássico e a ortodoxia quântica, sob a forma de uma desigualdade que poderia ser testada experimentalmente, mostrando assim uma hipótese implícita no argumento de EPR, sobre a localidade, onde qualquer quantidade física de um sistema tem valor bem definido independente se a medida é feita ou não e que sistemas distantes entre si não tem influencia direta sobre o outro [19].

Diante de inúmeras discussões, o conceito amplamente aceito atualmente é que a teoria quântica é não local, devido a esses estudos e provas experimentais a partir do mesmo, sendo assim a posição ortodoxa a mais aceita até hoje, indo contra os princípios de EPR.

CAPÍTULO 3

O PARADOXO EPR E A DESIGUALDADE DE BELL.

Apesar de proporcionar contribuições que foram fundamentais para o desenvolvimento da mecânica quântica, Einstein não concordava com algumas concepções dessa natureza. Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen publicaram o paradoxo EPR, no intuito de alicerçar a teoria realista, pois do jeito que se apresentava a mecânica quântica estava limitada a uma mera discussão de resultados experimentais. Com esse artigo, eles introduziram a hipótese de localidade na mecânica quântica, dizendo que a medição feita a grandes distâncias não se propagariam a uma velocidade maior que a da luz, seguindo seu princípio relatividade restrita. Não acreditando que ao medir um observável na Terra, a escolha poderia afetar instantaneamente o estado da partícula na Lua, pois essa velocidade seria muito grande, só que para a interpretação de Copenhague isso é possível admitindo assim ação á distância.

Einstein, Podolsky e Rosen propuseram que, em um sistema composto de duas partículas que interagem num dado instante, após separar espacialmente seja feita uma medição em uma das partículas e com essa informação junto a descrição da função de onda associada (advinda do teoria quântica) podemos prever o valor da outra partícula, que não foi objeto de medição, é porque elas já o tinham esse valor. EPR não duvidaram que a mecânica quântica estivesse correta, no entanto, como dito no artigo [13], *“Somos forçados a concluir que a descrição da mecânica quântica da realidade física por meio de funções de onda não esta completa”*.

Este artigo foi proposto a fim de afirmar as bases conceituais da posição realista. Como podemos imaginar este processo para grandezas que são canonicamente conjugadas no formalismo da teoria quântica e como neste formalismo estas grandezas não podem ter definição simultânea, chegamos a uma situação em que o sistema físico teria propriedades não admitidas pelo formalismo da teoria. Tendo então um formalismo incompleto e se colocaria então a questão de buscar um formalismo mais abrangente [16].

Desse pressuposto, Einstein acreditava que existia outra quantidade, λ , necessária para caracterizar completamente o estado de um sistema que ainda não

a conheciam, chamando λ , de variável oculta, que real e não observável. Esta seria a maneira de tornar a mecânica quântica completa, para essa posição tais variáveis constituiriam uma interpretação na qual os valores, λ , são bem definidos e em geral não observáveis. Mas como podemos atribuir valores reais ao que não pode ser observado?

Em 1964, John Bell mostrou que toda interpretação realista da mecânica quântica seria não local, ele parte do experimento EPR, onde admite que duas partículas que interagem e separam-se posteriormente, descritas por um estado “singleto” com spin total nulo, para que haja a conservação do momento angular. Ele apresentou o teorema da impossibilidade de teorias de variáveis ocultas (TVOs) locais, como forma de sanar as discussões realistas e ortodoxas, na qual esse resultado foi o mais importante da teoria quântica até então.

Como consequência desse teorema, e dos experimentos que posteriormente foram realizados, mostrando que de fato as previsões da teoria quântica são corretas (em oposição às previsões das TVOs locais). O teorema de Bell tem encontrado diversas aplicações, ficando clara a distinção das teorias realistas e ortodoxas [20].

Ele toma a premissa einsteiniana da independência de sistemas físicos distantes no contínuo espaço e no tempo [16]. O que trouxe evidências que isto leva à predeterminação das variáveis da partícula não sujeita à medição. E que, como a teoria quântica não representa esta predeterminação, isto implica a possibilidade de uma mais completa especificação do sistema [16].

A contribuição essencial de Bell vem a partir deste ponto. Ele demonstra num critério físico e matemático que ele denomina de localidade; com base neste critério formula um modelo de uma descrição mais completa, usando variáveis adicionais às usadas pela teoria quântica e busca tirar consequências deste modelo.

Ele mostrou então, que toda interpretação realista da mecânica quântica seria não local, derrubando a hipótese de Einstein para a localidade, e mostrando que as variáveis ocultas não representariam a descrição completa do sistema. Temos então dois caminhos a seguir, o primeiro seria admitir uma interação que se propagasse instantaneamente entre duas partículas, isso significa admitir uma violação na relatividade restrita de Einstein. O nosso segundo caminho introduz uma discussão que dura 30 anos [16], que são testes experimentais tratando da

desigualdade de Bell, e, portanto as possíveis teorias relativísticas locais e a afirmativa das possíveis até então, teoria quântica. Sendo assim, a violação das desigualdades de Bell desqualificou fisicamente as teorias de variáveis ocultas locais. E toda a discussão em termos de variáveis ocultas tem como propriedade a não localidade. De modo que ele provou que qualquer teoria de variável oculta local seria incompatível com a mecânica quântica [8].

3.1. Gato de Schrödinger e emaranhamento

O conceito de emaranhamento aparece pela primeira vez na década de 30, durante os intensos debates sobre os fundamentos da Mecânica Quântica, que aspiravam mostrar que esta não é uma teoria completa [21]. Sendo assim, o emaranhamento surge a partir de discussões filosóficas, esse é considerado um momento marcante para a teoria quântica. É somente nos anos 60 que o físico John Bell eleva o status do emaranhamento, conduzindo este aos laboratórios através do que hoje conhecemos como as desigualdades de Bell, que possibilitam uma discussão mais objetiva sobre esse assunto.

Para obter seus resultados, Bell se inspirou na ideia de emaranhamento, que seria um tipo de correlação estritamente quântica. O primeiro a propor o conceito de emaranhamento, foi o físico Austríaco Erwin Schrödinger, por intermédio de um experimento de pensamento, no qual teríamos um gato, uma caixa, um dispositivo com veneno e um átomo instável. O gato se encontra dentro da caixa, e não podemos vê-lo, se o átomo decaír o dispositivo é acionado liberando o veneno e assim matando o gato, caso contrário, nada aconteceria. Se quisermos ver, qual o estado do gato, teremos que fazer uma medida, na mecânica clássica nada aconteceria já no mundo quântico esse simples ato perturba o sistema. Ao que percebemos, não sabemos qual o estado do gato até que se façamos uma medida, antes de tal, não temos como saber, logo, há uma probabilidade para que o gato esteja vivo e morto, tendo assim uma superposição de estados: Gato Vivo e Gato Morto. Podendo de alguma maneira escondida nos processos decorrentes da transição entre o mundo microscópico do macroscópico [10].

Desde seus primórdios a Mecânica Quântica tem desafiado nosso senso comum, ou melhor, nossos conceitos clássicos, com a introdução de ideias como:

dualidade onda partícula, superposições macroscópicas, entre tantas. No entanto, para muitos, entre eles Erwin Schrödinger, o emaranhamento entre partículas é o efeito mais característico da Mecânica Quântica [21].

Os conceitos propostos pelo artigo EPR, iniciou essas discussões sobre o processo de medição da posição e o momento de duas partículas correlacionadas. Nesse experimento, Schrödinger apresentou como argumento para a “incompleteza” da teoria quântica, o gato de Schrödinger seria um experimento de pensamento, com o objetivo de explicar o emaranhamento de estados. Isso é uma das motivações para tentar criar mais sistemas quânticos possíveis e estudar sua decorrência [10].

O importante é notar que o estado do gato está intimamente relacionado ao estado do átomo instável. Não sabemos de fato, se o gato está vivo ou morto, antes da medição, admitindo aqui uma dos pilares da mecânica quântica que é a superposição de estados, no momento da medida a função de onda colapsa para um de seus autoestados, estando assim, o gato ou vivo ou morto, associado a uma probabilidade de ocorrência. Esta solução, porém soa absurda, já que nossa noção intuitiva de um objeto clássico é que ele não existe em tais superposições e que seu estado macroscópico não é afetado pelo ato de observação [14].

Schrödinger percebeu que o princípio da superposição de estados possibilita que as partículas subatômicas estejam correlacionadas, sugerindo assim o emaranhamento. Esse é um dos pilares da mecânica quântica, tanto na formulação das funções de onda, quanto na formulação dos vetores de estado, nessa concepção os possíveis estados das duas partículas podem ser dados pelo produto tensorial dos vetores de estado, desde que, a existência de uma não altere a linearidade na outra representação.

O gato de Schrödinger é o epítome desse fato: fazendo uma analogia a uma versão do experimento da dupla fenda temos que, uma partícula atravessa uma fenda dupla, formando no anteparo um padrão de interferência. Por trás de uma das fendas há um detector, para sabermos por qual das fendas a partícula passou, desse ponto percebemos que o padrão de interferência mudou. No caso da partícula em uma caixa (gato de Schrödinger), se ele registra o estado da partícula (nesse caso, o gato) o aparelho pode até matar o gato, pois este será acionado liberando o veneno. Como sabemos que na verdade quântica a partícula atravessa as duas

fendas em um estado de superposição, o gato deveria ser num estado de superposição também. Na mecânica quântica o gato pode estar em uma superposição de "morto" e "vivo" [11], até que a medida seja feita.

O experimento mental proposto por Schrödinger trata dessa correlação de estados, na qual se a partícula decair o gato vai estar morto, caso contrário, o gato vai estar vivo. Porém se interferimos no evento não veremos essa superposição de estados (gato vivo e morto), pois essa onda espalhada (gato antes da medição) com o processo da medição torna-se “um pacote comprimido”, tendo característica corpuscular, pois a medição sempre perturba a partícula e, portanto, altera seu estado.

3.2. Decaimento do méson π^0 e álgebra do emaranhamento

Em uma versão simplificada do paradoxo EPR, Bohm propôs diferentemente do artigo, que o colapso da função de onda é instantâneo [12]. Considere o decaimento do méson pi neutro em um elétron e um pósitron [8]:

$$\pi^0 \rightarrow e^- + e^+ \quad (3.0)$$

Para garantir a conservação do momento angular, o pión que tem spin zero, força tanto onda do elétron quanto do pósitron a ser do tipo:

$$|\Psi_{e^+e^-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\rangle_{e^-} |+\rangle_{e^+} + |+\rangle_{e^-} |-\rangle_{e^+}) \quad (3.1)$$

Estando (3.1) num espaço de Hilbert quadridimensional, se o elétron tiver spin para baixo, o pósitron deverá ter spin para cima, para garantir a conservação do momento angular, e vice-versa. De modo que as medidas de spin do elétron estão correlacionadas, ou ainda emaranhadas. A mecânica quântica não consegue dizer qual combinação que obteremos com o decaimento do pión, mas informa que essas medidas estão correlacionadas [8]. Agora suponha que separamos o elétron e o pósitron a uma distancia muito grande, e assim mede-se o spin do elétron, por exemplo, se obtiver spin up automaticamente você ira saber que o spin do pósitron será down, pois essas medidas estão correlacionadas. Ou seja, independente da

distância entre eles, a medida de spin em um já informa automaticamente o valor do spin do outro.

Para a posição realista não há nada de novo nisso, pois o elétron já tinha spin up e o pósitron spin down independente da medida, provavelmente o que aconteceu é que não se sabia disso até então. Para a visão ortodoxa, nenhuma partícula tinha spins definidos, assim a medição fez com que o elétron sofresse um colapso, de maneira que instantaneamente definiu-se a medida do pósitron. Einstein considerava absurda essa ação à distância, concluído que a posição ortodoxa seria insustentável, e os spins do elétron e do pósitron são bem definidos, quer a mecânica quântica aceite ou não [8].

O pressuposto fundamental do artigo EPR é que nada pode se propagar a uma velocidade maior do que a da luz, propondo assim localidade. Se fosse possível o colapso da função de onda ser não instantâneo, então a “informação” viajaria a uma velocidade finita, violando assim a conservação do momento angular. Pois se medíssemos o spin do elétron antes do colapso o alcançar teríamos a probabilidade de encontrar ambas as partículas com spin para cima, ou para baixo [8]. Logo, isso não pode acontecer, pois a correlação de spins é perfeita, sendo assim o colapso é instantâneo.

Do ponto de vista algébrico, dizemos que um estado está emaranhado quando não podemos decompô-lo em estados situados num espaço de Hilbert menor. Como por exemplo, um estado de sistemas compostos de dois níveis $|-\rangle$ e $|+\rangle$; temos;

$$|\Psi\rangle = (|-\rangle|+\rangle + |+\rangle|-\rangle) \quad (3.2)$$

Agora vamos tentar reescrever (3.2), como um estado de um produto tensorial de dois estados superpostos, na forma do singleto:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a|-\rangle + b|+\rangle) \otimes (c|+\rangle + d|-\rangle) \quad (3.3)$$

Ou ainda, subtendendo a normalização:

$$ac|-\rangle|+\rangle + ad|-\rangle|-\rangle + bc|+\rangle|+\rangle + bd|+\rangle|-\rangle \quad (3.4)$$

Percebe-se que para (3.1) é satisfeito se,

$$ad = bc = 0 \quad (3.5)$$

O que implica em ac ou bd nulos. Isso torna impossível escrever $|\Psi\rangle$ como um estado de produtos individuais, assim temos que $|\Psi\rangle$ é um estado emaranhado.

3.3. Einstein e o emaranhamento

O emaranhamento do ponto de vista ortodoxo resulta numa ação a distância, como no decaimento do méson π , vimos que as medidas estão correlacionadas por uma a combinação de spin up e spin down e vice-versa, com certa probabilidade de aparecimento.

Na visão realista, o elétron já tinha spin para cima e o pósitron spin para baixo, mesmo antes da medição, mas a visão ortodoxa afirma que a medida do elétron faz com que a função de onda colapse instantaneamente para o pósitron a uma determinada distância. A visão realista mostra em EPR, o princípio de localidade, tornando assim insustentável a posição ortodoxa, pois o elétron e o pósitron têm seus spins bem definidos e a velocidade com que essa informação de transmissão do spin up para o down (por exemplo) é menor que a velocidade da luz.

Contudo, a velocidade dessa informação seria finita, que levaria a uma violação do momento angular, pois se medíssemos o spin do elétron antes da informação do colapso o alcançar, haveria assim uma probabilidade de encontrarmos ambas as partículas com spin para baixo. Devendo haver uma condição suficiente para um elemento de físico ser real, se for possível prever o valor de uma quantidade física sem perturbar o sistema, sendo assim, antes da medida teríamos o conhecimento completo dos parâmetros do sistema.

Deve-se haver a conservação do momento angular (Ver Apêndice D), logo, a correlação de spins é perfeita, evidentemente o colapso da função de onda é instantâneo. No entanto, temos que admitir, na visão de Einstein, que a teoria quântica não seja completa. Ou seja, a teoria trás alguns parâmetros desconhecidos de natureza causal. Acreditando que uma teoria quântica completa seria possível,

EPR introduz variáveis ocultas, que não teriam valores bem definidos para elas, λ , que em geral não são observadas.

Na tentativa de manter a localidade na mecânica quântica, anos depois do EPR, Bell, provou que “qualquer teoria de variável oculta local seria incompatível com a mecânica quântica” [8], como veremos a seguir.

3.4. Teorema de Bell

Abordamos até então a ideia proposta por EPR [13], discutindo o que denominamos paradoxo, que impunha a mecânica quântica ser uma teoria física local, embasados numa teoria física Realista. Deveríamos saber então, antes da medida, os parâmetros que definem o sistema. Uma primeira interpretação realista, ou seja, que concebe que entidades não observáveis também tenham propriedades bem definidas da Teoria Quântica (afora a corpuscular) supõe que a ontologia do mundo é apenas ondulatória, não havendo partículas. O que parece ser uma partícula seria, na verdade, um pacote de onda comprimido [14].

Como vimos à posição ortodoxa, nos mostra o colapso da função de onda, e uma consequência para isso seria a não localidade. Segundo essa interpretação, o ato da medição faz com que de imediato haja a transição entre a onda espalhada (sem trajetória definida) para a onda espacialmente localizada [14]. Introduzindo a ideia de localidade de EPR [13], a teoria quântica necessitaria de outra quantidade física real (λ) além da função de onda, que possa caracterizar o estado de um sistema completamente, conhecido como a Teoria das Variáveis Ocultas.

Posteriormente, em 1964, Bell apresenta o “Teorema das Variáveis Ocultas Locais” como forma de sanar as discussões Realistas e Ortodoxas, mostrando uma não localidade ao nos referirmos ao colapso. Em especial, a mecânica quântica prevê correlações que não podem ser atingidas por teorias ditas realistas locais [22].

Bell deteve-se em estabelecer critérios que validassem a Interpretação de Einstein, sendo a mecânica quântica uma teoria relativística local. Introduzindo que uma teoria de variáveis ocultas constitui uma interpretação realista, pois ela atribui valores bem definidos para variáveis que em geral não são observadas [14]. Ele

decidiu orientar detectores de elétrons e pósitrons para uma mesma direção, permitindo que fossem rotacionados de forma independente [8] sobre eixos arbitrários “a” e “b”, tendo que um mede a posição do elétron e outro do pósitron, respectivamente. Sugeriu também uma infinidade de sistemas idênticos, que se reconstituem após a medida para a correlação das medidas de spin up (1) e spin down (-1). Os coeficientes de correlação, que são os termos $C(a, b)$, expressam-se como resultados obtidos para uma das partículas que se correlacionam com os resultados obtidos para outra partícula [14]. Sobre esses eixos, a correlação é definida por:

$$C(a, b) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n_1 k} a_n b_k \quad (3.6)$$

Onde N é o total de medidas do sistema. Para os eixos arbitrários de medidas da orientação de spin, a, a', b, b' , temos:

$$c(a, b) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \quad (3.7)$$

Ou,

$$c(a, b) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} [a(-) + a(+)] [b(-) + b(+)] \quad (3.8)$$

Assumindo que a variável oculta “ λ ” esteja relacionada aos resultados de spin, e que todas as medidas estejam sujeitas a mesma distribuição de probabilidades $[\rho(\lambda)]$, então temos:

$$C(a, b) = \int \rho(\lambda) [p_A(-, \lambda) + p_A(+, \lambda)] [p_B(-, \lambda) + p_B(+, \lambda)] d\lambda \quad (3.9)$$

Ou ainda, fazendo;

$$A = [p_A(-, \lambda) + p_A(+, \lambda)] \quad (3.10)$$

E

$$B = [p_B(-, \lambda) + p_B(+, \lambda)] \quad (3.11)$$

Temos;

$$C(a, b) = \int \rho(\lambda) A(a, \lambda) B(b, \lambda) d\lambda \quad (3.12)$$

Considerando que a integral sob o domínio da função de distribuição de probabilidades é normalizada a unidade, podemos aferir que (3.12), pode ser reescrita como sendo:

$$|C(a, b) - C(a, b')| + |C(a', b') + C(a', b)| \leq 2 \quad (3.13)$$

É conveniente ressaltar que existem varias equações para descrever a desigualdade de Bell, que vão depender dos parâmetros iniciais impostos em (3.12). Esta é uma ferramenta para solucionar as discussões Realistas e Ortodoxas, e a prova da impossibilidade de qualquer Teoria de Variável Oculta (TVOs) Local. Pois, com ela vemos que, se a mecânica quântica tiver uma característica local, dada por tal teoria, a desigualdade de Bell é satisfeita.

Partindo de preceitos teóricos, cientistas mostraram que seriam possíveis duas partículas se “entrelaçarem”, de modo que a determinação de certa característica em uma delas imediatamente seria transposta para a outra, não importando a distância entre elas, no que prevalece a posição Ortodoxa da mecânica quântica. Esse debate marcou a década de setenta, houve então depois a descrição da desigualdade de Bell a realização de diversos testes experimentais. O ápice deste processo, e o mais rigoroso, foi o experimento de Aspect [23], em 1982. Onde vários autores opinaram que o conjunto dos experimentos indicava uma violação das desigualdades de Bell [16].

Após o experimento de Aspect ampliou-se sensivelmente o número dos adeptos que tinham esta mesma avaliação, esses testes experimentais ([23],[24]) foram realizados na Áustria, no início da década de oitenta, revelando que pares de fótons emaranhados violavam a desigualdade de Bell.

Pensamos que se os anos setenta foram marcados pelos testes experimentais das desigualdades de Bell, e entre um significativo número de físicos

pela expectativa de uma “implosão” nos fundamentos da teoria quântica [16]. Deve-se salientar que Bell depositava na sua teoria a expectativa de futuro da teoria quântica a partir da década de setenta

A confirmação experimental veio como um choque para a comunidade científica. Isso porque Bell provou que qualquer teoria de variável oculta local seria incompatível com a mecânica quântica [8]. Ou seja, existe uma impossibilidade da natureza em agruparmos causalidade e localidade em uma teoria para o mundo quântico.

4 CONCLUSÕES

Nesse trabalho estudamos o desenrolar da Mecânica Quântica até sua formulação proposta por Bell. Abordamos as escolas de pensamento das Teorias Realistas e Ortodoxas no seu período de desenvolvimento, enfatizando as propostas de Einstein no paradoxo EPR.

Discutimos a localidade proposta por Einstein e a teoria das variáveis ocultas, que propôs que a teoria quântica não era completa, pois admite causalidade. Bell no intuito de confirmar tal afirmação propôs uma desigualdade chamada desigualdade de Bell. Ao resolvê-la encontramos que mecânica quântica é uma teoria não-local, e que qualquer TVO não é condição suficiente para que a mecânica quântica fosse completa segundo a proposta de Einstein.

Dentre algumas das aplicações promissoras com o desenvolvimento da teoria quântica, utilizando a ideia proposta pela desigualdade de Bell pode ser citada a criptografia quântica, computação quântica, teletransporte, entre outros. Áreas promissoras que vem se desenvolvendo na atualidade.

APÊNDICE

Apêndice A

Efeito Compton

Para analisar o Efeito Compton, é necessário levar em conta que o efeito é relativístico já que o fóton é uma partícula relativística e viaja a velocidade da luz. Então devemos usar as equações da relatividade para a variação da massa, da energia e do momento linear. A massa m de uma dada partícula é dada por:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Sendo m_0 a massa de repouso, c a velocidade da luz. As energias totais antes e depois do choque são dadas respectivamente por;

$$E = hv + mc^2 \quad \text{e} \quad E = hv' + mc^2$$

Aplicando a conservação da energia e momento linear, obtém-se:

- Sobre a conservação da energia

$$hv + m_0c^2 = hv' + mc^2$$

$$h \frac{c}{\lambda} + m_0c^2 = h \frac{c}{\lambda'} + mc^2$$

Reorganizando a equação acima e elevando ambos os lados ao quadrado obtém-se:

$$\left[hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) + m_0c^2 \right]^2 = m^2c^4$$

Ou,

$$h^2 c^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right)^2 + 2 h c^3 m_0 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) + m_0^2 c^4 = m^2 c^4$$

- Sobre a conservação do momento linear

Conservação do momento linear componente x e componente y respectivamente:

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \phi + mv \cos \theta \quad \text{e} \quad 0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \phi + mv \sin \theta$$

Eliminando os termos contendo θ nas equações acima. Para isto faz-se o quadrado de ambos os lados das duas equações acima.

$$h^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\cos \phi}{\lambda'} \right)^2 = m^2 v^2 \cos^2 \theta \quad \text{e} \quad \frac{h^2}{\lambda'^2} \sin^2 \phi = m^2 v^2 \sin^2 \theta$$

Somando ambas as equações:

$$h^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\cos \phi}{\lambda} \right)^2 + \frac{h^2}{\lambda'^2} \sin^2 \phi = m^2 v^2 \cos^2 \theta + m^2 v^2 \sin^2 \theta = m^2 v^2$$

Multiplicando por c^2 ambos os lados da equação acima, chega-se a:

$$c^2 h^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\cos \phi}{\lambda} \right)^2 + \frac{c^2 h^2}{\lambda'^2} \sin^2 \phi = c^2 m^2 v^2$$

$$\frac{c^2 h^2}{\lambda^2} - \frac{2 c^2 h^2 \cos \phi}{\lambda \lambda'} + \frac{c^2 h^2}{\lambda'^2} = c^2 m^2 v^2$$

Subtraindo as duas equações acima:

$$-\frac{2 c^2 h^2}{\lambda \lambda'} + m_0^2 c^4 + 2 h c^3 m_0 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) + \frac{2 c^2 h^2}{\lambda \lambda'} \cos \phi = m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2$$

O segundo membro da equação acima pode ser reescrito:

$$m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = m^2 c^2 (c^2 - v^2) = \frac{m_0^2 c^2}{\frac{(c^2 - v^2)}{c^2}} (c^2 - v^2) = m_0^2 c^4$$

Com isto a equação acima assume a forma

$$\frac{2 c^2 h^2}{\lambda \lambda'} (1 - \cos \phi) = 2 h c^3 m_0 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) = 2 h c^3 m_0 \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda \lambda'}$$

Simplificando ambos os lados da equação acima:

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{c m_0} (1 - \cos \phi) = \frac{2 h}{c m_0} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)$$

Onde foi usada a relação trigonométrica:

$$1 - \cos \phi = 1 - \cos \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{2} \right) = 1 - \cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) + \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)$$

Definido $\lambda_0 = \frac{2h}{cm_0}$ como sendo o comprimento de onda de Compton, temos que:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_0 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Apêndice B

Autovalores e Autofunções

Para esclarecer estes novos conceitos serão mostrados que a função $\psi = Ae^{ikx}$ é uma autofunção do operador momento linear (\hat{p}) e que a função $\psi = Ae^{ikx^2}$ não é autofunção de \hat{p} . Para verificar isto basta aplicar o operador \hat{p} na função de onda, como a seguir. Por definição o operador momento é igual a:

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$$

Portanto;

$$\hat{p}_x \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (Ae^{ikx}) = \frac{\hbar}{i} ikAe^{ikx} = \hbar k (Ae^{ikx}) = \hbar k \psi$$

Que pode ser escrita na forma;

$$\hat{p}_x \psi = \hbar k \psi = p \psi$$

Assim é possível dizer que a função de onda $\psi = Ae^{ikx}$ é autofunção do operador \hat{p} com autovalor $\hbar k$. Como o número de onda k pode ser escrito em termos do comprimento de onda λ , temos que:

$$p = \hbar k = \frac{\hbar}{2\pi} k = \frac{\hbar}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\hbar}{\lambda}$$

Que é equivalente ao resultado obtido por Bohr na quantização do átomo de hidrogênio. A agora será verificando que a função $\psi = Ae^{ikx^2}$ não é autofunção do operador \hat{p} .

$$\hat{p}_x \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (Ae^{ikx^2}) = \frac{\hbar}{i} 2ikx (Ae^{ikx^2}) = (2\hbar kx) \psi$$

Analisando o último termo entre parêntese na equação acima nota-se que ele não é uma constante, mas sim depende da posição. E se esta equação fosse escrita por:

$$\hat{p}_x \psi = (2\hbar kx)\psi = (2\hbar kx)\psi'$$

Ela seria uma equação de autovalor? Não, mesmo nesta forma ela não é uma equação de autovalor por que as funções ψ e ψ' são diferentes.

Apêndice C

Espaço de Hilbert

As operações no espaço de Hilbert seguem as seguintes regras: H é um conjunto de objetos, com uma operação de soma de vetores definida de tal forma que:

- Se dois vetores $|f\rangle$ e $|g\rangle \in H$ então a soma $|f\rangle + |g\rangle$ também é um vetor de H .
- A soma é comutativa e associativa: $|f\rangle + |g\rangle = |g\rangle + |f\rangle$ e $(|f\rangle + |g\rangle) + |h\rangle = |f\rangle + (|g\rangle + |h\rangle)$.
- Existe em H um vetor chamado nulo de tal forma que: $|f\rangle + 0 = |f\rangle$ para qualquer $|f\rangle \in H$.

Também está definida uma operação de produto escalar de tal forma que, se α e β pertencem ao conjunto dos complexos, e $|f\rangle$ e $|g\rangle$ são elementos de H então:

$$\begin{aligned} \alpha|f\rangle &\in H \\ (\alpha\beta)|f\rangle &= \alpha(\beta|f\rangle) \\ (\alpha + \beta)|f\rangle &= \alpha|f\rangle + \beta|f\rangle \\ \alpha(|f\rangle + |g\rangle) &= \alpha|f\rangle + \alpha|g\rangle \\ 1|f\rangle &= |f\rangle \end{aligned}$$

Onde temos que H tem um produto interno, ou seja, pode-se definir uma operação entre dois vetores $|f\rangle$ e $|g\rangle$ que fornece um escalar, denotada por, $|f\rangle \cdot |g\rangle$, sendo que ele possui as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} (|f\rangle \cdot |g\rangle) &= (|g\rangle \cdot |f\rangle)^* \\ (|f\rangle \cdot |g\rangle + |h\rangle) &= (|f\rangle \cdot |g\rangle) + (|f\rangle \cdot |h\rangle) \\ (|f\rangle \cdot \alpha|g\rangle) &= \alpha(|f\rangle \cdot |g\rangle) \\ (\alpha|f\rangle \cdot |g\rangle) &= \alpha'(|f\rangle \cdot |g\rangle) \\ (|f\rangle \cdot |f\rangle) &\geq 0 \text{ e } (|f\rangle \cdot |f\rangle) = 0 \text{ se e somente se } |f\rangle = 0 \text{ (vetor nulo)} \end{aligned}$$

Apêndice D

Equações Fundamentais

Equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

Equação de Schrödinger independente do tempo

$$H\psi = E\psi, \quad \psi = \psi e^{-iEt/\hbar}$$

Operador Hamiltoniano

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$$

Operador momento

$$\mathbf{p} = -i\hbar \nabla$$

Dependência do tempo de um valor esperado

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, Q] \rangle + \left\langle \frac{\partial Q}{\partial t} \right\rangle$$

Princípio de incerteza generalizada

$$\sigma_A \sigma_B \geq \left| \frac{1}{2i} \langle [A, B] \rangle \right|$$

Princípio de incerteza de Heisenberg

$$\sigma_x \sigma_p \geq \hbar / 2$$

Comutador canônico

$$[x, p] = i\hbar$$

Momento angular

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x, \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

Matrizes de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

REFERÊNCIAS

- [1]- J. E. Villate; *Física Moderna: Texto de apoio para docentes do 12º ano*. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Setembro de 2005.
- [2]- YOUNG, H. D.; *Ótica e Física Moderna*. Tradução de Cláudia Martins, 12 ed. São Paulo: Pearson, 2009. Título original: Sears and Zemansky's University Physics, 12 edition, Americana.
- [3]- DIONÍSIO, P. H.; *Albert Einstein e a Física Quântica*. Instituto de Física – UFRGS; Porto Alegre.
- [4]- ALMEIDA, W. B. & SANTOS, H. F.; *Modelos Teóricos para Compreensão de Estrutura da Matéria*, Disponível em: <<http://qnesc.sbg.org.br/online/cadernos/04/mod-teor.pdf>> acesso em: 24-06-2012.
- [5]- HOSSRI, I. M. *O Limite Clássico da Mecânica Quântica*. 2008. 71 f. Tese (Monografia em Física)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC, São Paulo. 2008.
- [6]- GUTMANN F. *et al*; *Efeito Fotoelétrico*, Universidade Federal da Bahia, 2002. Disponível em: <http://www.fis.ufba.br/~edmar/fis101/roteiros/Fotoeletrico.pdf>, acesso em 26 de junho de 2012.
- [7]- CHIBENI, S. S., *O Surgimento da Física Quântica*, Departamento de Filosofia - IFCH – UNICAMP, 1992.
- [8]- GRIFFITHS, D. J.; *Mecânica Quântica*. São Paulo: Pearson.
- [9]- ARFKEN, G. B. & WEBER, J. H.; *Física Matemática para engenharia e Física*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- [10]- ARAÚJO, M. A. N.; *Os Postulados da Mecânica Quântica: Sistemas de dois Níveis*. Departamento de física, Universidade de Évora, 2005.
- [11]- COURTEILLE, W.; *Mecânica Quântica Aplicada*. Universidade de São Carlos, São Paulo; 2011.
- [12]- JÚNIOR, O. P.; *O Problema da Medição em Mecânica Quântica: Um Exame Atualizado*; Publicado em *Cadernos de História e Filosofia da Ciência* (série 3): dez 1992.
- [13]- A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev. 47 (1935) 777.

- [14]- JÚNIOR, O. P.; *Conceitos e Interpretações da Mecânica Quântica: O Teorema de Bell*; Depto. De Filosofia, FFLCH, Universidade de São Paulo: São Paulo.
- [15]- BOLIVAR, A. O.; *Limite Clássico de Mecânica Quântica*; Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 25, no. 2, Junho, 2003. Recebido em 16 de agosto, 2002. Aceito em 17 de abril, Distrito Federal: 2003.
- [16]- JUNIOR, O. F.; *Sobre as Desigualdades de Bell*; Universidade Federal da Bahia, Salvador. Publicado em: Cad. Cat. Ens. Fís., Florianópolis, 226 v. 8, n. 3: 212-226 dez. 1991.
- [17]- NEVES, L. T.; *Estados Emaranhados de Qubits e Qudits Criados com Pares de Fótons Produzidos na Conversão Paramétrica Descendente*; Universidade de Minas Gerais; Tese (Doutorado em Física), Minas Gerais: 2006.
- [18]- ALMEIDA, M. P.; *Aplicações de estados emaranhados em posição-momento transversal dos fótons produzidos pela conversão paramétrica espontânea de frequências*, Programa de Graduação em Física, UFRJ, 2006.
- [19]- JUNIOR, O. P.; *Interpretações básicas da teoria quântica: Einstein estava errado, no argumento de EPR?*; adaptado do Encontro no Hades; IFUSP:2012.
- [20]- _____; *Conceitos e Interpretações da Mecânica Quântica: o Teorema de Bell*, 1 Depto. de Filosofia, FFLCH, Universidade de São Paulo.
- [21]- OLIVEIRA, T. R.; *Emaranhamento e Estados de Produto de Matrizes em Transições de Fase Quânticas*, Universidade Estadual de Campinas. Tese (Doutorado em Física); Campinas: 2008.
- [22]- QUITINO, M. T. C. & SANTOS, M. A.; *Desigualdades de Bell: Uma introdução à não-localidade quântica*, 27 de maio de 2011.
- [23] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*, Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 91.
- [24] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem*, Phys. Rev. Lett. 47 (1981) 460.
- [25]- CURSO DE ENGENHARIA QUÍMICA. Enviado por: Rayla Costa. disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAABoyMAA/introducao-fisica-quantica>. Acesso em: 30 de maio de 2012, às 18h37min.
- [26]- HALLIDAY, D.; RESNICK, R; WALKER, J. *Fundamentos de Física 4 – Ótica e Física Moderna*. Tradução de Denise Helena da Silva Sotero, Gerson Bazo

Costamilan, Luciano Videira Monteiro e Ronaldo Sérgio de Biasi. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1995. 355p. Título original: Fundamentals of Physics, 4th edition, Extended Version.

[27]- BELL, J. S., *Physics* (Long Island City, N.Y.) 1, 195 (1964).

[29]- LIMA, C. R. A.; *Notas de aulas de física moderna: Mecânica quântica de Schrödinger*. Capítulo 6; Edição de janeiro de 2008.

[30] ZETTILI. N.; *Quantum Mechanics: concepts and applications*, 2 ed. Jacksonville, USA, Wiley, 2009.