UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

OS PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO E ALGUMAS APLICAÇÕES

ALLAN KLISMAN ARNAUD MARINHO

CAMPINA GRANDE
Agosto de 2017

ALLAN KLISMAN ARNAUD MARINHO

OS PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE
Agosto de 2017

M338p Marinho, Allan Klisman Arnaud.
Os pontos notáveis do triângulo e algumas aplicações [manuscrito] / Allan Klisman Arnaud Marinho. - 2017
72 p. : il. colorido.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação : Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas , Departamento de Matemática - CCT."

1. Geometria. 2. Geometria plana. 3. Triângulo.

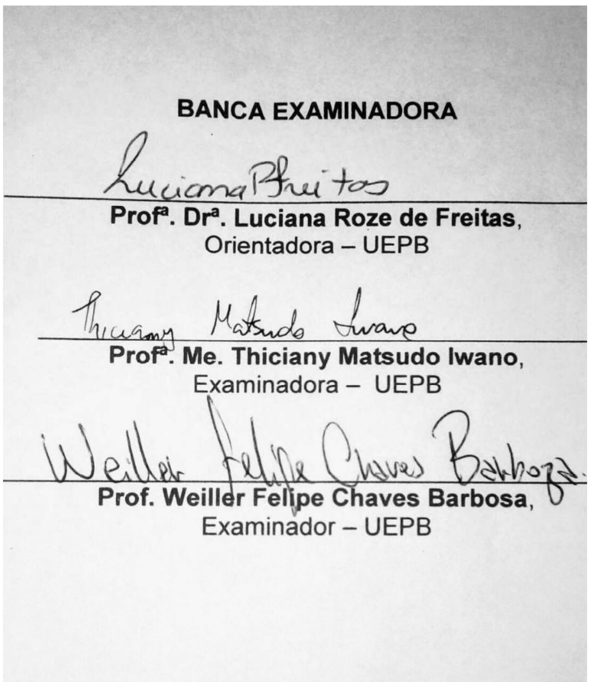
21. ed. CDD 516

ALLAN KLISMAN ARNAUD MARINHO

OS PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado no Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do Título de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em: 15/08/2017



BANCA EXAMINADORA

Luciana RFreitas

Prof^{a}. Dr^{a}. Luciana Roze de Freitas,
Orientadora – UEPB

Thiciany Matsudo Iwano

Prof^{a}. Me. Thiciany Matsudo Iwano,
Examinadora – UEPB

Weiller Felipe Chaves Barboza

Prof. Weiller Felipe Chaves Barbosa,
Examinador – UEPB

CAMPINA GRANDE

Agosto de 2017

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha família e amigos, especialmente, ao meu pai Sr. Alcides Marinho Pereira à minha mãe, Srª. Jane Sinara Arnaud Ferreira Marinho principal incentivadora e motivadora dos meus caminhos e objetivos acadêmicos.

Agradecimentos

Gostaria primeiramente de agradecer ao Senhor todo poderoso, por guiar meus passos e me dar forças e saúde para que eu pudesse chegar até aqui realizando um sonho e grande objetivo na minha vida.

Agradeço aos meus familiares, ao meu pai Alcides Marinho Pereira, minha mãe Jane Sinara Arnaud Ferreira Marinho, por me amar, me educar, e não só me dar apoio nessa graduação mas também por todo apoio durante todas as escolhas da minha vida, e também por saberem dizer não quando foi necessário, agradeço aos meus irmãos, Emily Arnaud, Aleff Senna, Luan Ruffo, e Deywrhamany Oliveira que também são muito importantes na minha vida, e aos meus amigos, Franklin Alves, Victória Alves, Bismark Fernandes, Ramon Lima, entre outros, que me incentivaram e me ajudaram nessa jornada . Aqui deixo meu muito obrigado a essas pessoas que foram de fundamental importância para essa conquista e término da graduação.

Agradeço a minha Orientadora Dra. Luciana Roze de Freitas por toda paciência, atenção, e dedicação me ajudando bastante tanto nas disciplinas quanto na conclusão desse trabalho e consequentemente do curso de Licenciatura em Matemática.

Agradeço aos professores Thiciany Iwano e Weiller Felipe por aceitarem fazer parte da minha banca, e pelas ótimas disciplinas que me permitiram uma boa base para minha vida profissional e também para a realização desse trabalho.

Agradeço aos professores: Vandenberg Lopes Vieira, José Elias da Silva, Fernando Luiz, Pedro Lúcio, Davis entre vários outros que passaram pela minha vida, e que foram verdadeiros mestres e grandes incentivadores para a permanência e conclusão do curso.

Aos meus colegas de curso e de universidade: Gábio Stalin, Eliasibe Elias, Rafael, Janaina Aparecida, Hemerson Gueba, Jeferson Gonzaga, Ramilo, Jeferson Rodrigues, Newton César, entre outros, que batalharam junto comigo, me ajudaram, me motivaram e foram importantíssimos na conclusão desse curso.

"Seja gracioso quando a derrota te surpreender, aprenda com ela, ela é a melhor professora na escola da vida."

(Renzo Gracie)

Resumo

No presente trabalho estudamos o triângulo, seus pontos notáveis e algumas de suas aplicações. Inicialmente, apresentamos algumas definições e resultados preliminares que são necessários para o seguimento do trabalho. Abordamos uma série de conceitos da geometria plana, como congruência e semelhança de triângulo, quadriláteros, além de alguns resultados importantes como o Teorema de Pitágoras, Teorema da bissetriz interna, de Tales, entre outros, que serão de suma importância para chegarmos ao objetivo final. Abordamos ainda as cevianas de um triângulo, os seus pontos notáveis, suas propriedades e consequências, detalhando a teoria de modo que seja possível facilitar sua aplicação. Finalmente, estudamos algumas aplicações dos pontos notáveis de um triângulo em problemas que nos possibilite entender esse tema de extrema importância e que pode ser aplicado de diversas maneiras no ensino básico.

Palavras-chave: Triângulo. Pontos notáveis do triângulo. Geometria Plana.

Abstract

In the present work we study the triangle, its most known notable points and some of its applications. Initially, we present some definicions and preliminary results. We approach a series of concepts of flat geometry, such as congruence and the triangle similarity, quadrilaterals, beside some important results like the Pythagorean Theorem, the internal bisector Theorem of Tales, among others, which they will be of great importance in order to reach the final goal. We also approach the cevianas of a triangle, their remarkable points, their properties and consequences, detailing the theory so that it is possible to facilitate its application.Finally, we study some applications of the remarkable points of a triangle in problems that allow us understand this extremely important theme and that can be applied in many ways in the basic education.

Keywords: Triangle. Remarkable Points. Flat Geometry.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A geometria Euclidiana possui esse nome graças ao matemático Euclides de Alexandria, pois os conhecimentos geométricos são baseados em seus postulados. Ficou conhecido como o "Pai da Geometria", e o seu trabalho se destacou pelo fato de apenas cinco de seus postulados, terem sido capazes de deduzir quatrocentos e sessenta e cinco proposições. Na geometria plana, o triângulo é considerado o polígono mais importante, e é através de seu estudo que é possível compreender diversas outras teorias da matemática. No triângulo existem elementos que são chamados de **pontos notáveis**, cujo estudo é de suma importância para a estrutura de formação e caracterização de um triângulo.

Para estudar o triângulo e utilizar os conhecimentos desejados, foi necessário expor diversos outros conceitos da geometria, tornando assim possível obter um resultado satisfatório e trabalhar a geometria Euclidiana de uma forma mais clara. Como é possível observar, podemos associar diversos conhecimentos matemáticos geométricos em situações do nosso cotidiano, sem mencionar que a geometria é muito presente em exames de grande importância, como por exemplo; o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que segundo pesquisas está entre os conteúdos mais frequentes trabalhados no mesmo.

Este trabalho tem como finalidade expandir os estudos vistos na graduação, e foi dividido em quatro capítulos; no primeiro podemos observar os resultados preliminares, importantes para o seguimento do trabalho. No segundo capítulo estudamos o triângulo e suas propriedades, abordando de forma bem detalhada e objetiva diversos conhecimentos da geometria Euclidiana. No terceiro, estudamos os pontos notáveis de um triângulo e suas propriedades. Por fim, chegamos ao principal capítulo de todo o estudo; as aplicações dos pontos notáveis de um triângulo, dos quais estudamos e trabalhamos em algumas questões a nível de graduação e pós-graduação.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo abordaremos alguns resultados iniciais essenciais para o entendimento dos capítulos posteriores. Apresentaremos as noções de paralelismo, o Teorema de Tales e os polígonos.

1.1 Notações

A seguir apresentamos algumas notações que estarão presentes no presente trabalho.
$A, B, C...$: pontos no plano.
$r, s, t...$: retas no plano.
$\overline{AB}/AB$ ... : segmento ou medida do segmento com extremos A e B.
A_{ABCDE} ... : área do polígono $ABCDE$.
$\overrightarrow{AB}$... : semirreta que contém os pontos A e B.
$\overleftrightarrow{AB}$... : reta que contém os pontos A e B.
$\equiv$: congruência.
$\sim$: semelhança.
$\hat{A}$: ângulo/medida do ângulo.
$d(P, r)$ ou $d(P, \overleftrightarrow{AB})$: distância de um ponto à uma reta.
$\|$: paralelismo.
α, β, γ... : ângulos internos de um polígono.

1.2 Paralelismo

Definição 1.1. Dadas duas retas distintas no plano, ou essas retas se intersectam num único ponto, chamadas de concorrentes, ou elas não se intersectam em nenhum ponto e são chamadas de paralelas.

Na Figura 1.1 podemos ilustrar os dois casos definidos acima.

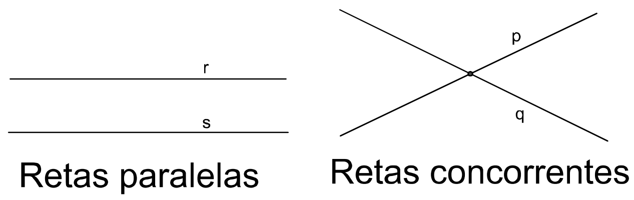


Figura 1.1: Retas paralelas e concorrentes.

Se duas retas r e s forem paralelas, escreveremos $r \| s$. Na geometria euclidiana não podemos deduzir como verdadeiro que por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma única reta paralela à mesma. Neste sentido, enunciamos o quinto postulado, também conhecido como postulado das paralelas.

Postulado 1.2. *Dados, no plano, uma reta r e um ponto $A \notin r$, existe uma única reta s, paralela a r e passando por A.*

Agora iremos lembrar de ângulos opostos pelo vértice e os ângulos suplementares.

Definição 1.3. Ângulos suplementares são dois ângulos que adicionados formam um ângulo raso, ou seja, um ângulo de 180 graus, e dois ângulos são opostos pelo vértice, quando os lados de um deles são semirretas opostas aos lados do outro. Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

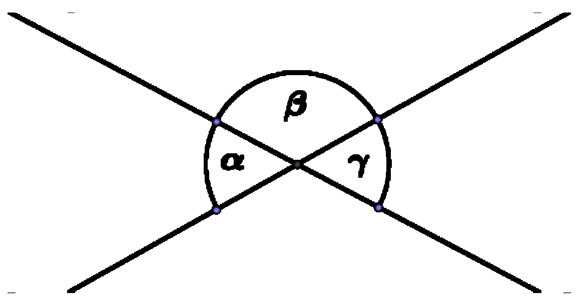


Figura 1.2: Ângulos opostos pelo vértice.

Na Figura 1.2, observamos os ângulos α, β e γ formados pelo encontro de duas retas, desse modo, pela Definição 1.3 temos que α e β são suplementares, assim como β e γ também. Neste caso,

$$\alpha + \gamma = 180^{\circ},$$

e

$$\beta + \gamma = 180^{\circ}.$$

Daí,

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma,$$

logo

$$\alpha = \beta.$$

Ou seja, ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Sejam r e s duas retas paralelas, t uma transversal à r e s, e a, b, c, d, f, g e h os ângulos formados como ilustrado na Figura 1.3.

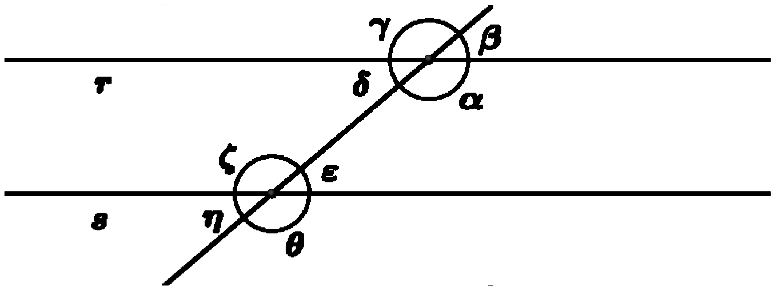


Figura 1.3: Retas paralelas cortadas por uma transversal.

Segue que:

1. Os ângulos correspondentes são: α e θ, β e ε, γ e ζ, δ e η.

2. Os ângulos alternos internos são: α e ζ, δ e ε.

3. Os ângulos alternos externos são: β e η, γ e θ.

4. Os ângulos colaterais internos são: α e ε, δ e ζ.

5. Os ângulos colaterais externos são:β e θ, γ e η.

E a partir daí é válido o teorema a seguir:

Teorema 1.4. *Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos, alternos externos e correspondentes são congruentes, além disso, os ângulos colaterais internos e externos são suplementares.*

Demonstração. Ver referência [5].

□

Teorema 1.5 (Teorema de Tales)**.** *Se retas paralelas são cortadas por duas retas transversais, a razão entre quaisquer dos segmentos encontrados em uma das transversais será igual a razão encontrada nos dois segmentos correspondentes da outra transversal.*

Sejam a, b e c retas paralelas, r e r' duas transversais, como mostra a Figura 1.4,

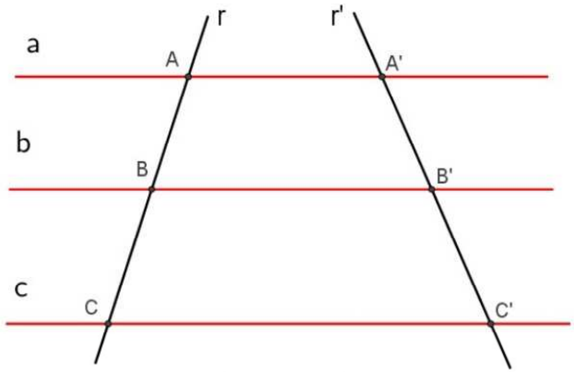


Figura 1.4: Teorema de Tales.

temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser vista em [5]. □

1.3 Polígonos

Definição 1.6. Sejam $n \geqslant 3$ um número natural e $A_1, A_2, ..., A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2...A_n$ é um **polígono (convexo)** se, para $1 \leqslant i \leqslant n$, a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina.

Observe o polígono convexo de cinco lados na Figura 1.5, onde iremos identificar seus elementos.

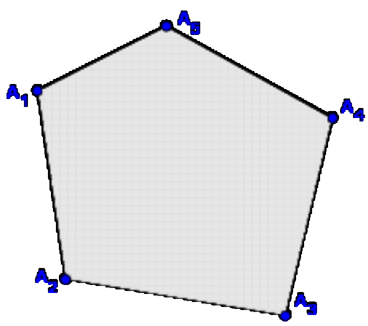


Figura 1.5: Polígono convexo de cinco lados.

1. Os pontos A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 são os vértices do polígono.

2. Os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$ e $\overline{A_5A_1}$ são os lados do polígono.

3. A soma dos comprimentos dos lados do polígono é chamado **perímetro** do polígono.

4. A **região poligonal** que corresponde ao polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$ é a região do plano, delimitada pelos lados $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$ e $\overline{A_5A_1}$.

5. Os ângulos convexos $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$, $\hat{A}_4$, e $\hat{A}_5$ são os **ângulos internos** do polígono.

6. Todo polígono convexo possui dois **ângulos externos** em cada um de seus vértices.

Um polígono é chamado de **n-ágono**, referente a seu número n de lados, alguns podemos nomear a partir do seu número de lados, como podemos observar na tabela a seguir.

Tabela 1.1: N-ágonos.

Número de lados	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Uma **diagonal** de um polígono é todo segmento com extremos nos vértices e que não seja um lado do mesmo, por exemplo, na Figura 1.5, temos como diagonais $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_4}$, $\overline{A_3A_5}$, $\overline{A_4A_1}$ e $\overline{A_5A_2}$.

Proposição 1.7. *Um n-ágono convexo possui exatamente* $\dfrac{n(n-3)}{2}$ *diagonais.*

Demonstração. A demonstração referente a proposição anterior pode ser encontrada na referência [5]. □

Exemplo 1.1. Considerando a Figura 1.5, temos $n = 5$. Substituindo o número de lados na fórmula dada na Proposição 1.7 obtemos,

$$\frac{5(5-3)}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Portanto, um polígono de cinco lados possui cinco diagonais.

Proposição 1.8. *A soma dos ângulos internos de um n-ágono é dado por:*

$$S_i = (n-2) \cdot 180^o.$$

Proposição 1.9. *A soma dos ângulos externos de um n-ágono é dado por:*

$$S_e = 360^o.$$

Demonstração. As demonstrações das Proposições 1.8 e 1.9 podem ser encontradas em [5]

□

Capítulo 2

O triângulo e suas propriedades

Neste capítulo iremos estudar o triângulo, considerado o polígono mais importante da geometria plana. Iremos observar seus elementos, sua classificação, estudar o triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras, analisar a condição de existência, abordar os casos de congruência e semelhança de triângulos, e calcular sua área.

2.1 Triângulo

Considere três pontos A, B e C no plano, se A, B e C estão na mesma reta dizemos que são pontos **colineares** e se não estão na mesma reta são **não colineares**.

Na Figura 2.1, os pontos A, B e C pertencem a mesma reta, logo são colineares.

Figura 2.1: Pontos colineares.

Na Figura 2.2, os pontos A, B e C não pertencem a mesma reta, logo são não colineares.

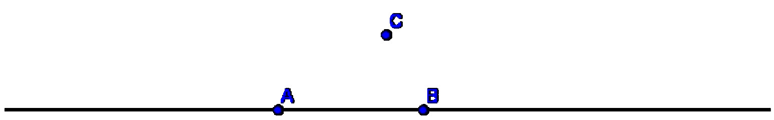


Figura 2.2: Pontos não colineares.

Definição 2.1. Dados três pontos distintos não colineares A, B e C chamamos de triângulo a figura plana formada pelos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$. Os pontos A, B e C são os vértices do triângulo, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são os lados do triângulo e os ângulos formados pelos lados são os ângulos internos do triângulo.

Na Figura 2.3 temos um triângulo ABC de lados a, b e c, vértices A, B e C e ângulos internos α, β e γ. Em geral, detonamos as medidas $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e nos referimos ao triângulo com lados a, b e c.

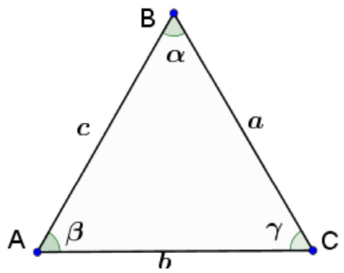


Figura 2.3: Triângulo ABC.

O perímetro de um triângulo denotado por $2p$ é a soma de todos os lados. O semiperímetro p de um triângulo é o resultado da soma dos três lados dividido por dois. Do triângulo de lados a, b e c ilustrado na Figura 2.3 temos:

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Definição 2.2. No triângulo, uma altura é um segmento que parte de um vértice do triângulo e é perpendicular ao lado oposto a esse vértice.

No triângulo ABC mostrado na Figura 2.4 temos que h é uma altura de ABC, pois parte do vértice A, e é perpendicular ao lado oposto $\overline{BC}$.

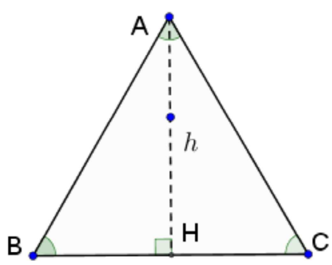


Figura 2.4: Altura do triângulo ABC.

2.2 Classificação de triângulos quanto aos lados

Definição 2.3. Quanto aos lados, os triângulos são classificados como equilátero, isósceles, e escaleno. O triângulo equilátero possui a medida dos três lados congruentes, o triângulo isósceles possui pelo menos a medida de dois lados congruentes, e o triângulo escaleno possui a medida dos três lados diferentes.

Para exemplificar, na Figura 2.5 temos uma ilustração para cada caso.

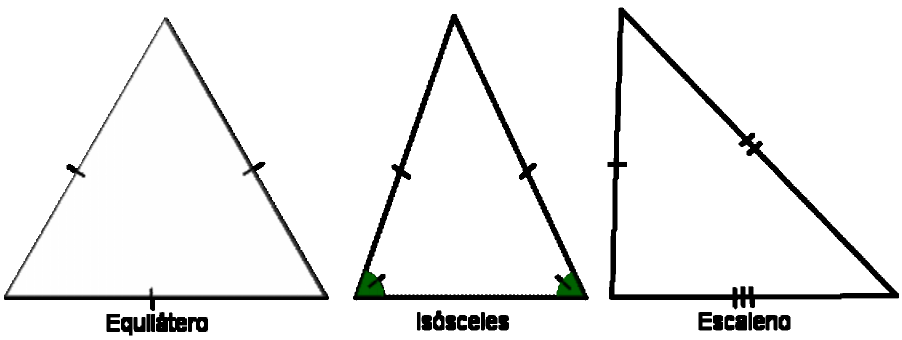


Figura 2.5: Triângulo equilátero, isósceles e escaleno.

Pela Definição 2.3 todo triângulo equilátero é isósceles; no entanto, a recíproca não é verdadeira.

Para triângulos equiláteros podemos chamar quaisquer dos seus lados de base, já num triângulo isósceles ABC, se $\overline{AC} = \overline{BC}$ dizemos que $\overline{AB}$ é a base do triângulo.

2.3 Classificação de triângulos quanto aos ângulos

Definição 2.4. Quanto aos ângulos, os triângulos podem ser classificados como acutângulo, retângulo e obtusângulo. O triângulo acutângulo possui a medida dos três ângulos internos agudos, isto é, menor que 90°. O triângulo retângulo possui um ângulo interno reto, e o triângulo obtusângulo possui um ângulo interno obtuso, isto é, maior que 90°.

Para exemplificar, na Figura 2.6 temos uma ilustração para cada caso.

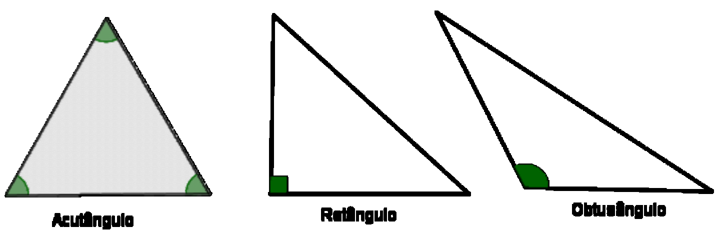


Figura 2.6: Classificação quanto aos ângulos.

2.4 Congruência de triângulos

Seja ABC um triângulo de lados a, b e c, e ângulos internos α, θ e λ , e seja $A'B'C'$ um triângulo de lados a', b' e c', correspondentes, respectivamente, aos lados a, b e c do triângulo ABC e ângulos internos α', θ' e λ', correspondentes, respectivamente aos ângulos internos α, θ e λ do triângulo ABC como mostra a Figura 2.7.

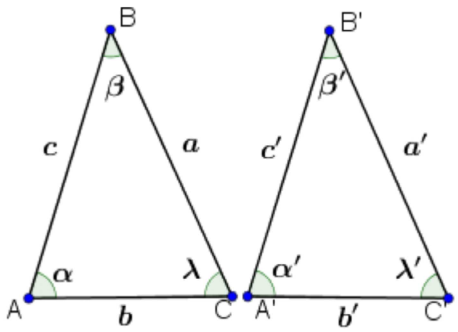


Figura 2.7: Triângulos congruentes.

Definição 2.5. Dois triângulos são congruentes quando a medida dos lados correspondentes são congruentes, e quando as medidas dos seus ângulos correspondentes são congruentes. Neste caso, temos

$$a \equiv a',\ b \equiv b'\ ,\ c \equiv c'\ ,\ \alpha \equiv \alpha',\ \theta \equiv \theta',\ \text{e}\ \lambda \equiv \lambda',$$

e usamos a notação

$$ABC \equiv A'B'C'.$$

2.4.1 Casos de congruência

Podemos concluir que dois triângulos são congruentes através dos seguintes casos de congruência que são os axiomas a seguir:

Caso 1 - Lado, ângulo, lado (LAL)

Quando dois lados correspondentes de dois triângulos são congruentes, e os ângulos formados por esses dois lados também são congruentes, podemos concluir que os dois triângulos são congruentes.

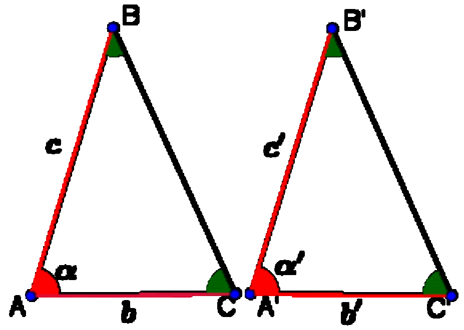


Figura 2.8: Lado, ângulo, lado.

Por exemplo,

$$c \equiv c',\ \alpha \equiv \alpha' \text{ e } b \equiv b',$$

por (LAL), temos

$$ABC \equiv A'B'C'.$$

Caso 2 - Ângulo, lado, ângulo (ALA)

Quando dois ângulos correspondentes de dois triângulos são congruentes e os lados adjacentes a esses ângulos também são congruentes, podemos concluir que os dois triângulos são congruentes.

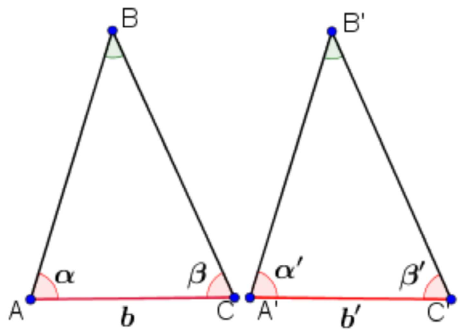


Figura 2.9: Ângulo, lado, ângulo.

Por exemplo,

$$\alpha \equiv \alpha',\ b \equiv b' \text{ e } \beta \equiv \beta',$$

por (ALA), temos

$$ABC \equiv A'B'C'.$$

Caso 3 - Lado, lado, lado (LLL)

Quando os lados correspondentes de dois triângulos são congruentes, podemos concluir que os triângulos são congruentes.

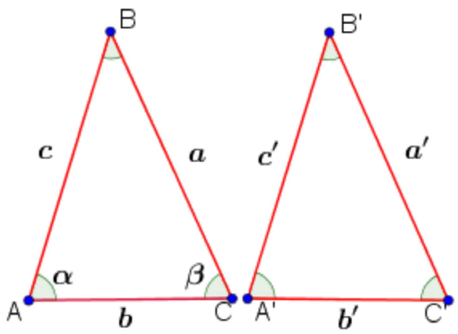


Figura 2.10: Lado, lado, lado.

Neste caso, se

$$a \equiv a',\ b \equiv b \text{ e } c \equiv c',$$

por (LLL), temos

$$ABC \equiv A'B'C'.$$

2.5 Quadriláteros notáveis

Nesta seção estudaremos os quadriláteros notáveis, que serão indispensáveis para o andamento deste trabalho. Os quadriláteros notáveis são aqueles que possuem propriedades particulares, como o quadrado, o retângulo, o losango e o paralelogramo.

Definição 2.6. Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se possuir lados opostos paralelos.

De acordo com a definição acima e sendo $ABCD$ apresentado na Figura 2.11 um paralelogramo

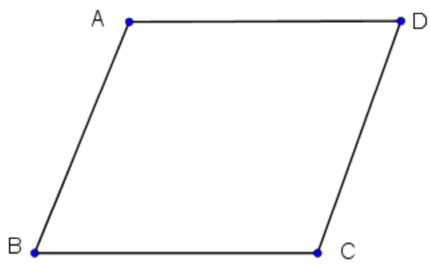


Figura 2.11: Quadrilátero ABCD.

temos

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ e } \overline{AD} \parallel \overline{BC}.$$

Proposição 2.7. *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, seus ângulos opostos forem iguais.*

Demonstração. Suponhamos que o quadrilátero convexo $ABCD$ ilustrado na Figura 2.11 seja paralelogramo, ou seja,

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ e } \overline{AD} \parallel \overline{BC}.$$

Temos que,

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^{\text{o}}$$

e

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^{\text{o}}$$

pois $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são colaterais internos em relação a reta $\overleftrightarrow{AB}$ assim como $\hat{B}$ e $\hat{C}$ em relação a reta $\overleftrightarrow{BC}$ (ver Teorema 1.4). Daí,

$$\hat{A} = 180^{\text{o}} - \hat{B}$$

e

$$\hat{C} = 180^{\text{o}} - \hat{B},$$

logo ,

$$\hat{A} = \hat{C}.$$

E de forma análoga concluímos que

$$\hat{B} = \hat{D}.$$

Reciprocamente, seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$ como mostra a Figura 2.12.

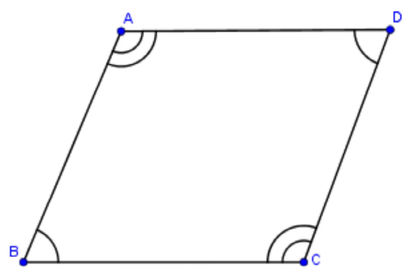


Figura 2.12: Ângulos opostos congruentes.

Então,

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D},$$

e como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360º(ver Teorema1.8), temos

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D} = 180^{\circ},$$

o que nos mostra que os pares de ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, e $\hat{C}$, $\hat{D}$ são respectivamente colaterais internos em relação às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, e portanto

$$\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}.$$

Sendo também

$$\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ},$$

de forma análoga, podemos concluir que

$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}.$$

□

Proposição 2.8. *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, seus pares de lados opostos forem iguais.*

Demonstração. Suponhamos que o quadrilátero $ABCD$ ilustrado na Figura 2.13 é paralelogramo.

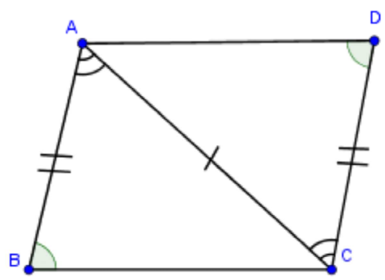


Figura 2.13: Quadrilátero ABCD 1.

Por hipótese temos que $ABCD$ é paralelogramo, ou seja $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, o que garante que $A\hat{C}B \equiv A\hat{C}D$ e que $C\hat{A}B \equiv A\hat{C}D$. Logo, por (ALA) $ABC \equiv CDA$ e portanto,

$$\overline{AB} = \overline{CD} \text{ e } \overline{AD} = \overline{BC}\ .$$

Reciprocamente, seja $ABCD$ um quadrilátero convexo ilustrado na Figura 2.14 tal que,

$$\overline{AB} = \overline{CD} \text{ e } \overline{AD} = \overline{BC}.$$

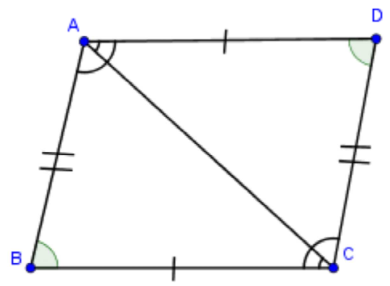


Figura 2.14: Quadrilátero ABCD 2.

Por (LLL) de congruência de triângulos, temos

$$ABC \equiv CDA,$$

ou seja

$$B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A \text{ e } B\hat{C}A \equiv D\hat{A}C.$$

As igualdades acima garantem que os pares de ângulos se alternam internamente, logo

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ e } \overline{AD} \parallel \overline{BC}.$$

□

As demonstrações das Proposições 2.10 e 2.12 podem ser encontradas na referência [5].

Definição 2.9. Um retângulo é um paralelogramos com todos os ângulos retos.

Proposição 2.10. *Um paralelogramo é um retângulo se, e só se, suas diagonais tiverem comprimentos iguais.*

Definição 2.11. Um losango é um paralelogramo com todos os lados iguais.

Proposição 2.12. *Um paralelogramo é um losango se, e só se, tiver diagonais perpendiculares.*

Definição 2.13. Um quadrilátero é um quadrado quando for simultaneamente um retângulo e um losango.

Proposição 2.14. *A área de um paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado.*

Demonstração. Seja $ABCD$ um paralelogramo e trace a partir dos pontos A e B, dois segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$, perpendiculares à reta que contém $\overline{CD}$.

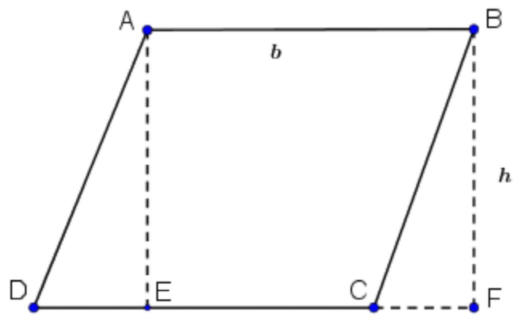


Figura 2.15: Paralelogramo.

O quadrilátero $ABFE$ é um retângulo cuja a área é $\overline{AB} \cdot \overline{BF}$, que é exatamente $b \cdot h$.

Por fim, observe que pelo caso (ALA) os triângulos ADE e BCF são congruentes e que

$$A_{ABCD} = A_{ABCE} + A_{ADE} = A_{ABCE} + A_{CBF} = A_{ABFE} = b \cdot h.$$

□

2.6 Base média de um triângulo

Definição 2.15. Base média de um triângulo, é um segmento que liga os pontos médios de dois de seus lados. Logo, todo triângulo possui três bases médias.

Observando a Figura , dizemos que $\overline{MN}$ é a base média relativa à base $\overline{AB}$, $\overline{MP}$ a base média relativa à $\overline{AC}$ e $\overline{NP}$ a base média relativa à $\overline{BC}$.

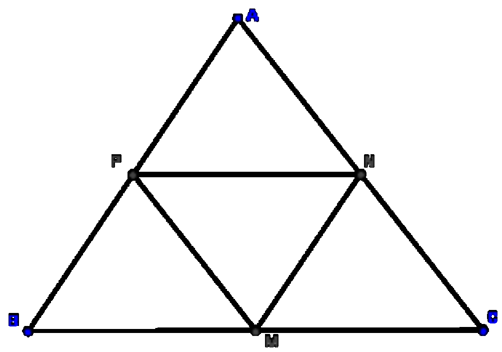


Figura 2.16: Bases médias de um triângulo.

O Triângulo MPN é chamado de triângulo medial de ABC.

A seguir, enunciaremos uma proposição que é um importante resultado sobre base média de um triângulo, conhecido como teorema da base média.

Teorema 2.16. *Seja ABC um triângulo qualquer. Se $\overline{MN}$ é a base média de ABC em relação a $\overline{AB}$, então $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ (ver Figura 2.16). Reciprocamente, pelo ponto médio P do lado $\overline{AB}$ traçarmos a paralela ao lado $\overline{BC}$, então tal reta intersecta o lado $\overline{AC}$ em se ponto médio N. Ademais, em um dos quaisquer casos acima temos*

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}.$$

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser vista na Referência [5]

$\square$

2.7 Semelhança de triângulos

Teorema 2.17. *Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.*

Demonstração. A demonstração desse teorema é uma consequência do Teorema de Tales.

$\square$

Se uma reta r paralela a $\overline{BC}$ corta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo ABC, nos pontos D e E, respectivamente como ilustrado na Figura 2.17 então vale a igualdade:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$$

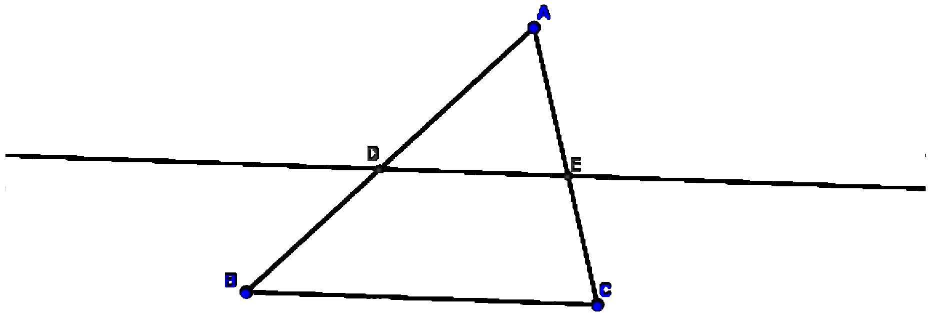


Figura 2.17: Triângulo cortado por reta paralela.

Definição 2.18. Dois triângulos são semelhantes se houver proporcionalidade entre seus lados correspondentes, e seus ângulos correspondentes forem congruentes.

Observe os triângulos ilustrados na Figura 2.18.

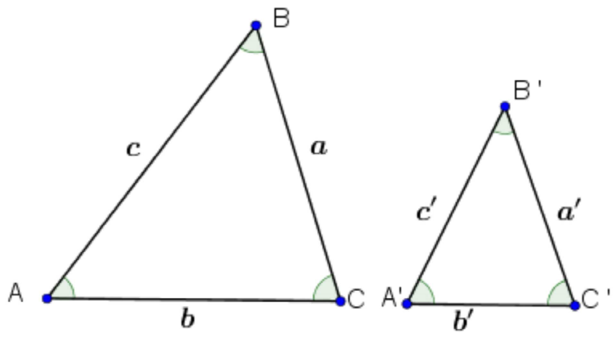


Figura 2.18: Semelhança de triângulos.

Se

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k,$$

onde $k > 0$ é chamado de razão de semelhança e

$$\hat{A} \equiv \hat{A}',\ \hat{B} \equiv \hat{B}',\ \hat{C} \equiv \hat{C}',$$

então ABC é semelhante a $A'B'C'$ e escrevemos

$$ABC \sim A'B'C'.$$

2.7.1 Casos de semelhança

Podemos concluir que dois triângulos são semelhantes através dos seguintes casos de semelhança:

Teorema 2.19 (Caso AA)**.** *Quando pelo menos dois ângulos correspondentes de dois triângulos são congruentes temos que os triângulos são semelhantes.*

Demonstração. Sejam D e E pontos nos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo ABC, respectivamente, tais que $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ e $\overline{AE} = \overline{A'C'}$:

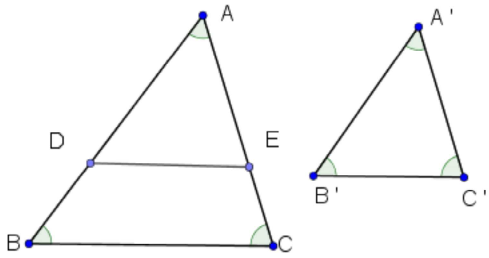


Figura 2.19: Caso AA.

Pelo caso (LAL) de congruência de triângulos, segue que $ADE \equiv A'B'C'$, assim,

$$A\hat{D}E = \hat{B}\,' = \hat{B},$$

o que implica que $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ são paralelos. De acordo com o Teorema 2.17 temos,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}.$$

Ou seja,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}.$$

De forma análoga mostramos que,

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

□

Teorema 2.20 (LAL)**.** *Quando dois lados correspondentes de dois triângulos forem proporcionais, e os ângulos formados por esses lados forem congruentes podemos concluir que os triângulos são semelhantes.*

Demonstração. Seja D um ponto no lado $\overline{AB}$ tal que $\overline{AD} = \overline{A'B'}$. Sejam r a reta paralela a $\overline{BC}$ que passa por D e E o ponto de interseção desta reta com o lado $\overline{AC}$ como mostra a Figura 2.20.

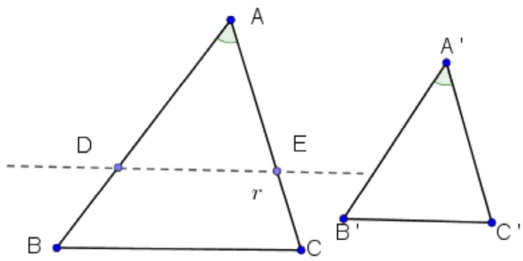


Figura 2.20: Caso LAL.

Como r é paralela a $\overline{BC}$, segue que $A\hat{D}E = A\hat{B}C$ e $A\hat{E}D = A\hat{C}B$, o que implica que pelo caso (AA) de semelhança de triângulos, $ABC \sim ADE$.

Como

$$\overline{AD} = \overline{A'B'} \text{ e } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

logo, usando a hipótese

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}},$$

ou seja,

$$\overline{A'C'} = \overline{AE}.$$

Pelo caso (LAL) de congruência de triângulos segue que,

$$ADE \equiv A'B'C',$$

portanto, como $ABC \sim ADE$ então $ABC \sim A'B'C'$.

□

Teorema 2.21 (LLL). *Quando os três lados correspondentes de dois triângulos são proporcionais podemos concluir que esses triângulos são semelhantes.*

Demonstração. Sejam D um ponto pertencente ao lado $\overline{AB}$ tal que $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ e E o ponto de interseção da reta paralela a $\overline{BC}$ que passa por D como mostra a Figura 2.21.

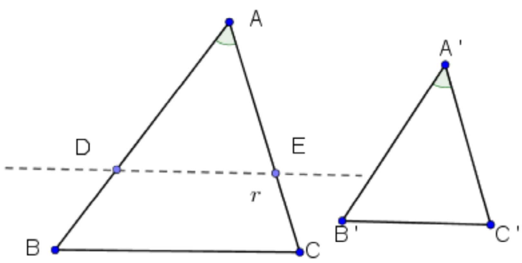


Figura 2.21: Caso LLL.

Observe que $A\hat{D}E = \hat{\text{B}}$, ou seja, por (AA) $ADE \sim ABC$. Logo

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}.$$

Mas como

$$\overline{AD} = \overline{A'B'} \text{ e } \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}},$$

então

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

o que implica que

$$\overline{B'C'} = \overline{DE}.$$

De forma análoga mostramos que

$$\overline{A'C'} = \overline{AE}.$$

Logo,

$$ADE \equiv A'B'C'$$

o que implica,

$$ABC \sim A'B'C'.$$

□

2.8 Teorema de Pitágoras

Como já foi visto neste capítulo, o triângulo retângulo é aquele que possui um ângulo reto, ou seja, possui um ângulo interno com medida igual a 90 graus, além disso, os dois lados perpendiculares são chamados de catetos, e o outro é chamado de hipotenusa, que é o lado oposto ao ângulo reto. A seguir, enunciaremos o Teorema de Pitágoras, um dos teoremas mais conhecidos e importantes na matemática. Embora acredite-se que o teorema seja anterior ao matemático grego Pitágoras (570 a.C. – 495 a.C.), o teorema leva seu nome pela sua descoberta e demonstração.

Teorema 2.22. *Sejam c e b catetos de um triângulo retângulo e a sua hipotenusa. Então*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Demonstração. Demonstraremos o Teorema de Pitágoras utilizando a semelhança de triângulos.

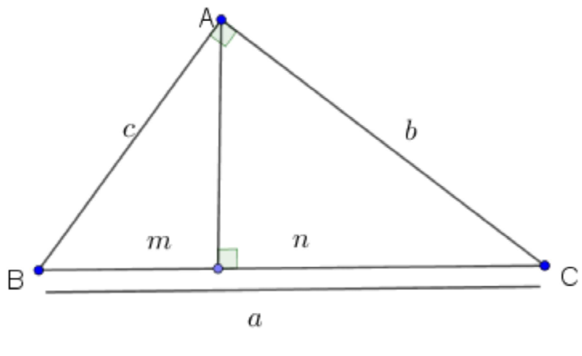


Figura 2.22: Triângulo Retângulo ABC.

Seja ABC um triângulo retângulo cujo ângulo reto esta no vértice A e o segmento h é a altura do triângulo referente a este vértice. O ponto H divide a hipotenusa em segmentos de medidas m e n. Pelo caso (AA) o triângulo ACH é semelhante ao triângulo BCA, pois ambos tem um ângulo reto e compartilham o mesmo ângulo no vértice C, o mesmo vale para o triângulo ABH que também é semelhante à CBA. Logo a semelhança dos triângulos nos leva ao seguinte raciocínio:

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b} \text{ e } \frac{c}{a} = \frac{m}{c}.$$

Fazendo o produto dos meios pelos extremos, obtemos:

$$b^2 = a \cdot n \text{ e } c^2 = a \cdot m.$$

Somando essas igualdades temos:

$$b^2 + c^2 = a(m + n),$$

como $m + n = a$, então,

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

□

2.9 Relações trigonométricas no triângulo retângulo

As relações trigonométricas no triângulo retângulo consistem em relacionar seus lados e seus ângulos de modo que possamos determiná-los e para isso vamos estudar os conceitos de seno, cosseno e tangente.

Definição 2.23. As proporções entre os 3 lados dos triângulo retângulos são denominados seno, cosseno, tangente, entre várias outras, dependendo dos lados considerados na proporção.

O seno de um ângulo é determinado através da medida do cateto oposto ao ângulo sobre a hipotenusa, o cosseno através da medida do cateto adjacente sobre a hipotenusa e a tangente através da medida do cateto oposto sobre o cateto adjacente.

Seja ABC um triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c, e ângulos internos α, β, e 90°.

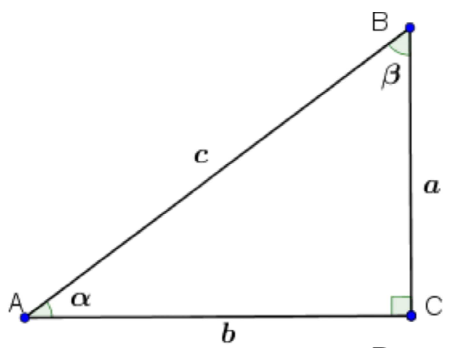


Figura 2.23: Relações trigonométricas.

Temos que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c}, \cos\alpha = \frac{b}{c}, \text{ e tg } \alpha = \frac{a}{b}$$

e em relação ao ângulo β,

$$\text{sen } \beta = \frac{b}{c}, \cos \beta = \frac{a}{c} \text{ e tg } \beta = \frac{b}{a}.$$

2.10 Lei dos cossenos

Seja ABC um triângulo de lados a, b e c e ângulos internos α, β e γ como mostra a Figura 2.24.

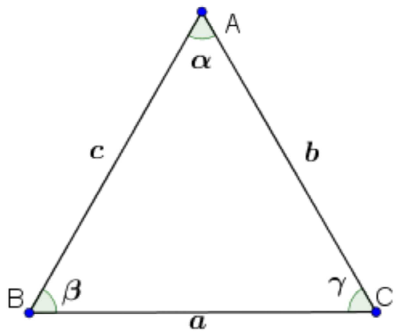


Figura 2.24: Triângulo qualquer.

Então, temos as relações:

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cdot cos\ \alpha$

2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot ac \cdot cos\ \beta$

3. $c^2 = b^2 + a^2 - 2 \cdot ba \cdot cos\ \gamma$

Ao traçarmos a altura h partindo do vértice C em relação ao lado $\overline{AB}$ de um triângulo qualquer obtemos dois triângulos retângulos ACH e BCH como mostra a Figura 2.25. Provaremos (1) e vamos supor que α é um ângulos agudo. Os demais casos são obtidos de modo análogo.

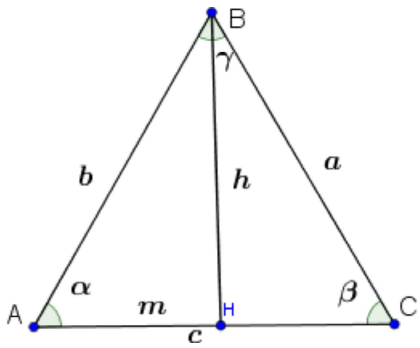


Figura 2.25: Lei dos cossenos.

Temos que b é o lado oposto ao vértice B, a é o lado oposto ao vértice A, e como c foi dividido em dois segmentos, chamamos $\overline{AH} = m$ e o segmento $\overline{HB} = c - m$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ACH, temos:

$$b^2 = m^2 + h^2$$

daí,

$$h^2 = b^2 - m^2. \tag{2.1}$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BCH:

$$a^2 = h^2 + (m - c)^2. \tag{2.2}$$

Substituindo (2.1) em (2.2):

$$a^2 = b^2 - m^2 + m^2 - 2mc + c^2$$

logo,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2mc. \tag{2.3}$$

Sabemos que

$$cos\ \alpha = \frac{m}{b},$$

então,

$$m = b \cdot cos\alpha. \tag{2.4}$$

Substituindo (2.4) em (2.3):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot\ cos\ \alpha \cdot \mathrm{c},$$

o que prova (1).

As equações (1), (2) e (3) são chamadas **Lei dos Cossenos**.

2.11 Área do triângulo

Definição 2.24. É chamado de área do triângulo a quantidade de espaço da superfície interna delimitada pelos seus lados.

Seja ABC um triângulo de altura h, semiperímetro p, lados a, b e c, e ângulos α, θ, e γ.

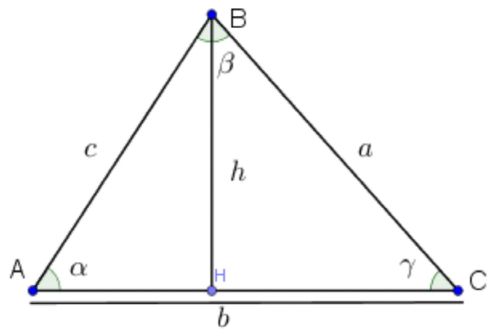


Figura 2.26: Área do triângulo.

Podemos calcular a área A do triângulo a partir da base b e da altura h relativa a esta base, utilizando a seguinte fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}.$$

Demonstração. Dado um triângulo ABC, traçando pelo vértice A uma reta paralela em relação à $\overline{BC}$, e por B uma reta paralela em relação à $\overline{AC}$. Estas retas definem o polígono $ABCD$, que é um paralelogramo.(Figura 2.27)

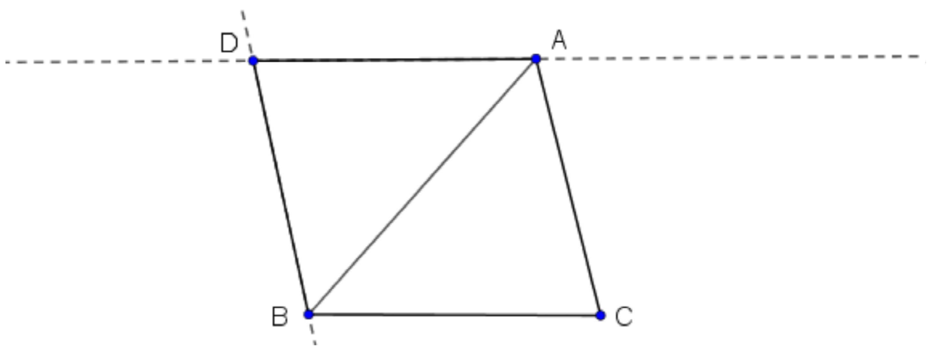


Figura 2.27: Paralelogramo ABCD.

Temos que por (LLL) os triângulos ABC e BAD são congruentes. Como

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{BAD}$$

e

$$A_{ABC} = A_{BAD},$$

então,

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}A_{ABCD}.$$

Por fim, observe que a altura partindo do vértice A, do triângulo ABC é exatamente a altura do paralelogramo $ABCD$ em relação ao lado $\overline{BC}$. Pela Proposição 2.14, temos

$$A_{ABCD} = b \cdot h.$$

Logo,

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}A_{ABCD}.$$

$\square$

Exemplo 2.1. Observe o triângulo representado na Figura 2.28.

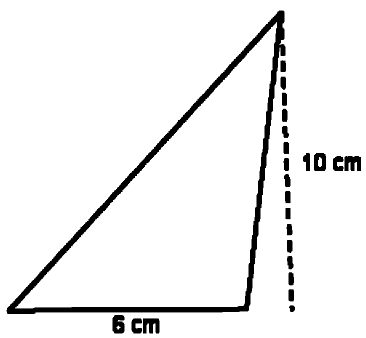


Figura 2.28: Triângulo de base 6cm e altura 10 cm.

Sabendo que a altura do triângulo mede 10 centímetros e que a base mede 6 centímetros, podemos calcular a área do triângulo da seguinte forma:

$$\text{A} = \frac{6 \cdot 10}{2} = \frac{60}{2} = 30cm^2.$$

2.12 Área de um triângulo equilátero

Já foi visto neste capítulo que um triângulo equilátero possui a medida de seus lados congruentes, agora iremos aprender a calcular a sua área. Observe o triângulo equilátero ABC de medidas l e altura h.

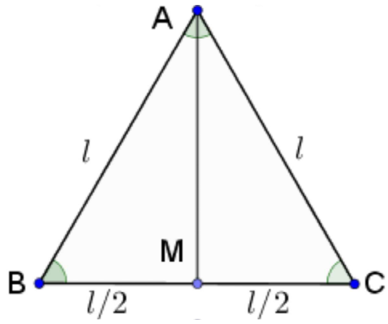


Figura 2.29: Triângulo equilátero de altura h *e lado l*.

Calculando a medida da altura através do Teorema de Pitágoras temos:

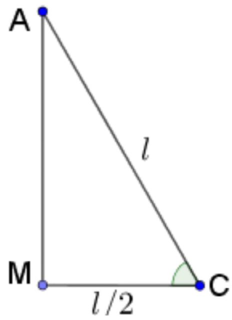


Figura 2.30: Parte do triângulo equilátero da figura anterior.

$$l^2 = h^2 + (\frac{l}{2})^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}.$$

Logo,

$$h^2 = \frac{3l^2}{4},$$

daí,

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Agora que encontramos a altura h do triângulo equilátero ABC, encontraremos sua área utilizando a seguinte fórmula:

$$A = \frac{B \cdot h}{2}.$$

Substituindo o valor de h, obtemos:

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2},$$

logo,

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

A partir dessa fórmula e sabendo a medida do lado, podemos calcular a área de qualquer triângulo equilátero.

Exemplo 2.2. Observe o triângulo equilátero exemplificado na Figura 2.31.

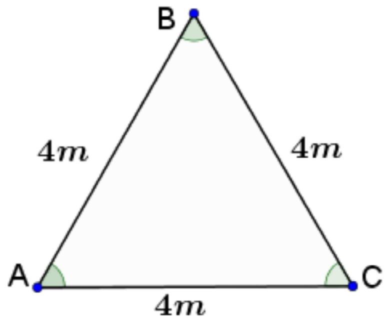


Figura 2.31: Triângulo equilátero de lado igual a 4m.

Como o triângulo é equilátero, a área do triângulo pode ser calculada da seguinte forma:

$$A = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}.$$

2.13 Soma dos ângulos internos de um triângulo

Teorema 2.25. *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.*

Demonstração. Sejam ABC um triângulo isósceles, e M o ponto médio de $\overline{BC}$ que divide ABC ao meio como mostra a Figura 2.32.

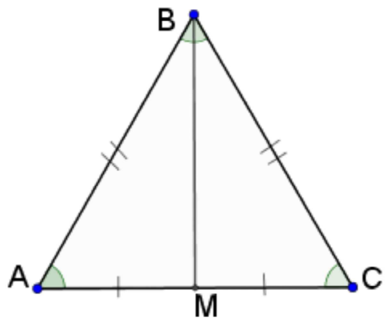


Figura 2.32: Ângulos de um triângulo equilátero.

Por (LLL) de congruência de triângulos temos que,

$$ABM \equiv ACM,$$

e daí segue que ,

$$\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{C}}.$$

□

Vale também a recíproca:

Teorema 2.26. *Se os ângulos da base de um triângulo são congruentes, então ele é isósceles.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo cujo os ângulos da base são congruentes, e $\overline{AH}$ um segmento perpendicular em relação a base $\overline{BC}$ como mostra a Figura2.33.

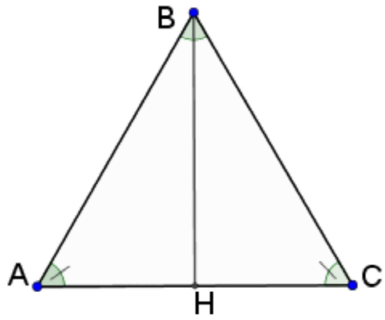


Figura 2.33: Triângulo de bases iguais.

Temos que

$$\hat{B} \equiv \hat{C}$$

e

$$A\hat{H}B \equiv A\hat{H}C = 90^o,$$

consequentemente

$$H\hat{A}C \equiv H\hat{A}B.$$

Logo, por (ALA)

$$AHB \equiv AHC,$$

ou seja

$$\overline{AB} \equiv \overline{AC}.$$

Portanto, ABC é isósceles. □

Teorema 2.27. *A soma dos ângulos internos de um triângulo ABC qualquer é igual a 180^o.*

Demonstração. Seja r a reta paralela ao lado $\overline{AC}$ do triângulo ABC que passa pelo ponto B como mostra a Figura 2.34.

Já que $\alpha' + \beta + \theta'$ formam um ângulo raso temos:

$$\alpha' + \beta + \theta' = 180^o.$$

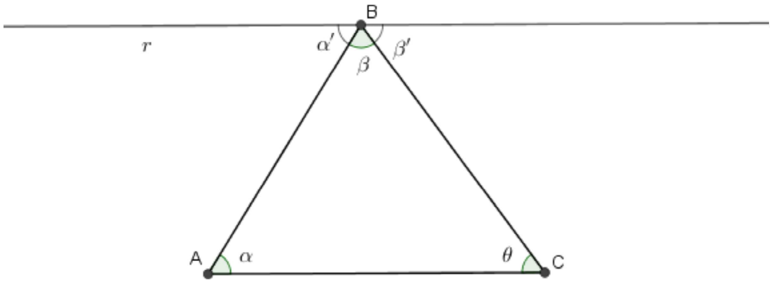


Figura 2.34: Soma dos ângulos internos de um triângulo

Como α e α' assim como θ e θ' são alternos internos, segue que $\alpha \equiv \alpha'$. Da mesma forma $\theta \equiv \theta'$. Portanto,

$$\alpha + \beta + \theta = 180^o.$$

□

Exemplo 2.3. Observe na Figura 2.35 o triângulo com medidas dos ângulos internos x, 35^o e 90^o.

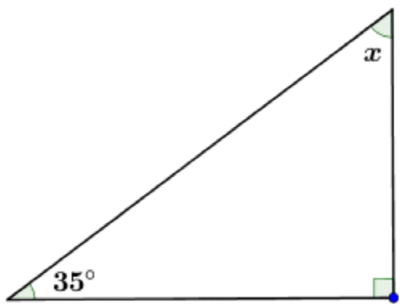


Figura 2.35: Triângulo com Ângulos internos de medidas 35^o e 90^o

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180^o, podemos calcular x utilizando a seguinte relação:

$$x + 90^o + 35^o = 180^o.$$

Daí,

$$x = 180^o - 135^o.$$

Portanto,

$$x = 45^o.$$

Uma das consequências do teorema anterior é o corolário a seguir.

Corolário 2.28. *Os ângulos de um triângulo equilátero são todos iguais a 60^o.*

Demonstração. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180\ ^o$, e pelo Teorema 2.22, temos que os ângulos de um triângulo equilátero são todos iguais, concluímos que cada um mede 60^o.

□

2.14 Teorema do ângulo externo

Definição 2.29. Um ângulo externo de um triângulo é o ângulo formado pelo prolongamento de um lado e o lado adjacente.

Corolário 2.30. *Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração. Observe o triângulo ABC na Figura 2.36.]

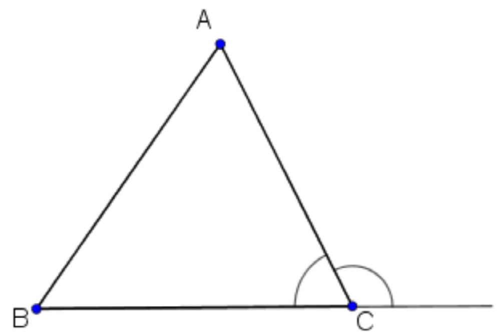


Figura 2.36: Teorema do ângulo externo.

Veja que,

$$A\hat{C}S = 180^{\text{o}} - \hat{C}.$$

Pelo Teorema 2.27 temos,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\text{o}}$$

daí,

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^{\text{o}} - \hat{C} = A\hat{C}S.$$

□

2.15 Desigualdade triangular

Proposição 2.31. *Se ABC é um triângulo tal que $\hat{B} > \hat{C}$, então $\overline{AC} > \overline{AB}$.*

Demonstração. Como $\hat{B} > \hat{C}$, traçaremos a semirreta $\overrightarrow{BS}$, que intersecta o interior de ABC e tal que $C\hat{B}S = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$ como mostra a Figura.

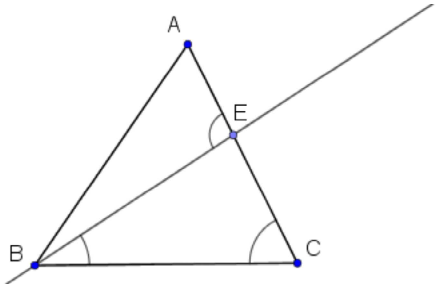


Figura 2.37: Relação entre os lados e ângulos de um triângulo.

Sendo E o ponto de interseção de $\overrightarrow{BS}$ com o lado $\overline{AC}$, segue do teorema do ângulo externo que

$$A\hat{E}B = C\hat{B}E + B\hat{C}E = \frac{1}{2}(\ \hat{B} - \ \hat{C}) + \ \hat{C} = \frac{1}{2}(\ \hat{B} + \ \hat{C}).$$

Mas, como

$$A\hat{B}E = \hat{B} - \frac{1}{2}\ (\hat{B} - \ \hat{C}) = \frac{1}{2}(\ \hat{B} + \ \hat{C}),$$

segue que o triângulo ABE é isósceles de base $\overline{BE}$. Portanto,

$$\overline{AB} = \overline{AE} < \overline{AC}.$$

$\square$

Corolário 2.32. *Se ABC é um triângulo tal que $\hat{A} \geqslant 90^o$, então $\overline{BC}$ é seu maior lado. Em particular, num triângulo retângulo a hipotenusa é o maior lado.*

Proposição 2.33 (Desigualdade triangular)**.** *Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos outros dois lados.*

Demonstração. Observe na Figura 2.38 o triângulo ABC com lados $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{CA} = b$, marque o ponto P sobre a semirreta $\overrightarrow{CA}$ tal que $A \in \overline{CP}$ e $\overline{AB} = \overline{AP}$.

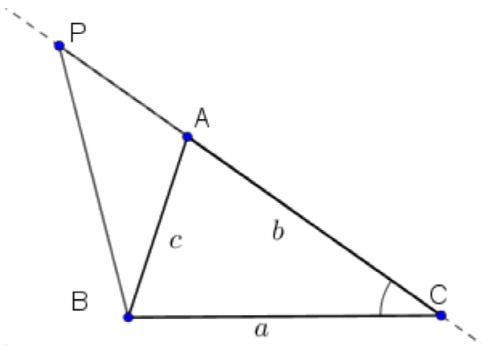


Figura 2.38: Desigualdade triangular.

Mostraremos que

$$a < b + c,\ b < a + c \text{ e } c < a + b.$$

Temos que

$$\overline{CP} = \overline{AC} + \overline{AP} = \overline{AC} + \overline{AB} = b + c.$$

Pela Proposição 2.31, é suficiente mostrarmos que $B\hat{P}C < P\hat{B}C$. De fato,

$$B\hat{P}C = B\hat{P}A = \mathrm{P\hat{B}A} < P\hat{B}A + A\hat{B}C = P\hat{B}C.$$

Sendo a, b e c os lados do triângulo ABC, segue a chamada desigualdade triangular

$$a < b + c,$$

e como a prova das demais são análogas também segue que

$$b < a + c \text{ e } c < a + b.$$

□

Em resumo, de acordo com a Proposição 2.33 se existe um triângulo ABC com lados medindo a, b e c, logo:

$$a < b + c, \, b < a + c \text{ e } c < a + b.$$

Exemplo 2.4. Observe na Figura 2.39 o triângulo ABC de medidas 12, 10 e 9 centímetros, e observemos se é possível existir um triângulo com essas medidas.

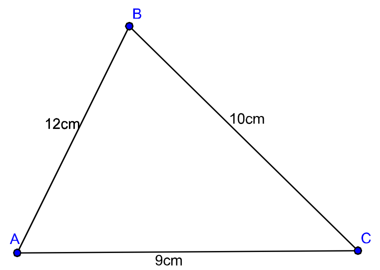


Figura 2.39: Triângulo de medidas 12, 10 e 9.

Temos que,

$$12 < 10 + 9 = 19, \, 10 < 12 + 8 = 20 \text{ e } 9 < 12 + 10 = 22.$$

Portanto, o triângulo ABC existe.

Capítulo 3

Pontos notáveis de um triângulo

Neste capítulo será estudado o assunto principal desse trabalho que são os *pontos notáveis* de um triângulo, apresentamos alguns conceitos, e demonstramos os principais resultados relacionados.

3.1 Cevianas notáveis de um triângulo

Definição 3.1. É chamado de ceviana todo segmento de reta que liga um vértice de um triângulo a reta suporte do lado oposto.

Na Figura 3.1 temos que $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, e $\overline{CF}$ são cevianas do triângulo ABC.

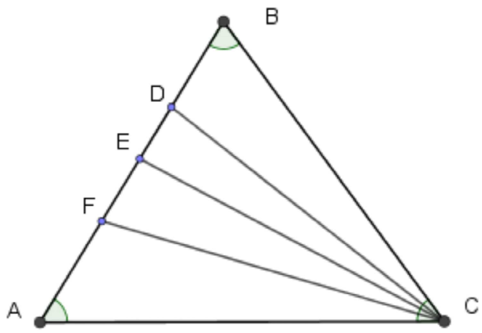


Figura 3.1: Cevianas de um triângulo.

Em um triângulo existem infinitas cevianas, dentre elas existem três tipos muito importantes e por isso são chamadas de cevianas notáveis, que são a **mediana**, a **bissetriz interna** e a **altura** que já foi definida no Capítulo 1.

Na Figura 3.2 temos três cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ concorrentes no ponto P:

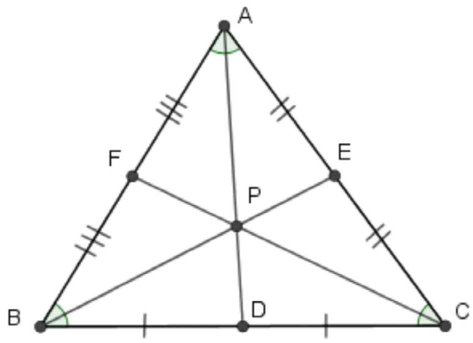


Figura 3.2: Cevianas Concorrentes.

Teorema 3.2. *Se três cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$, de um triângulo ABC são concorrentes, então*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$

Demonstração. Seja P o ponto de encontro das três cevianas e denote como S_{ABC} a área de um triângulo ABC. Note que os triângulos BDP e CDP possuem a mesma altura h em relação às bases $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$, respectivamente, e os triângulos ABD e ACD têm altura H em relação às bases $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$, respectivamente.

Assim,

$$S_{ABD}=\frac{1}{2}H \cdot \overline{BD},\ S_{ACD}=\frac{1}{2}H \cdot \overline{CD}$$

e

$$S_{BDP}=\frac{1}{2}h \cdot \overline{BD} \text{ e } S_{CDP}=\frac{1}{2}h \cdot \overline{CD}.$$

Isto implica que

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{S_{ABD} - S_{BDP}}{S_{ACD} - S_{CDP}} = \frac{\frac{1}{2}H \cdot \overline{BD} - \frac{1}{2}h \cdot \overline{BD}}{\frac{1}{2}H \cdot \overline{CD} - \frac{1}{2}h \cdot \overline{CD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}.$$

Da mesma forma que,

$$\frac{S_{BCP}}{S_{ABP}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \text{ e } \frac{S_{CAP}}{S_{BCP}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}.$$

Logo,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} \cdot \frac{S_{BCP}}{S_{ABP}} \cdot \frac{S_{CAP}}{S_{BCP}} = 1.$$

□

Além disso, a recíproca também é verdadeira.

Teorema 3.3. *Se três cevianas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ satisfazem* $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$, *então elas são concorrentes.*

Demonstração. Seja P o ponto de encontro das cevianas $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$. Vamos mostrar que $\overline{CF}$ passa por P.

Seja $\overline{CF'}$ uma ceviana que passa por P. Logo, pelo Teorema 3.2, temos:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = 1.$$

Usando a hipótese, obtemos:

$$\frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}.$$

O que implica que $F = F'$, pois F e F' estão no segmento $\overline{AB}$. Portanto a ceviana $\overline{CF}$ passa por P.

□

3.2 Mediana

Para definirmos mediana antes devemos lembrar da definição de ponto médio.

Definição 3.4. Ponto médio é o ponto que divide um segmento exatamente ao meio, obtendo dois segmentos iguais.

Na Figura 3.3 temos o segmento $\overline{AB}$ onde traçamos o ponto médio M.

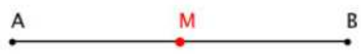


Figura 3.3: Ponto médio.

Ou seja,

$$\overline{MA} \equiv \overline{MB}.$$

Definição 3.5. No triângulo, uma mediana é um segmento de reta que liga um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.

No triângulo ABC mostrado na Figura 3.4 temos que M é ponto médio do segmento $\overline{AC}$ que é o lado oposto ao vértice B. Portanto, $\overline{BM}$ é uma mediana de ABC.

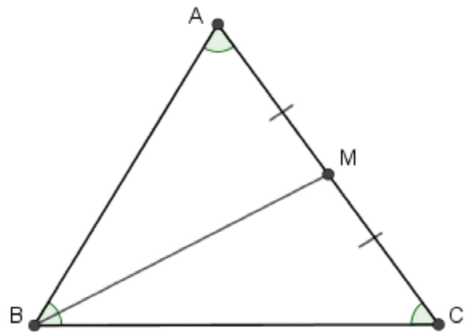


Figura 3.4: Mediana de um triângulo.

3.3 Bissetriz interna

Definição 3.6. No triângulo, uma bissetriz interna é um segmento que liga um vértice do triângulo ao seu lado oposto, dividindo o ângulo associado a esse vértice ao meio.

No triângulo ABC mostrado na Figura 3.5 temos que $\overline{AD}$ é uma bissetriz interna de ABC, pois parte do vértice A, divide o ângulo associado ao vértice A ao meio, ou seja, divide em outros dois ângulos congruentes, e vai até o lado oposto.

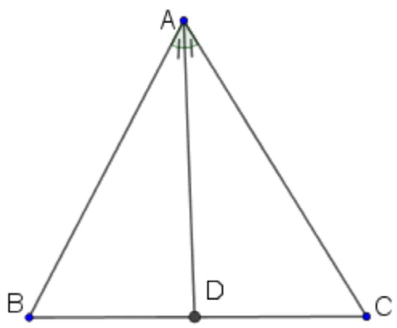


Figura 3.5: Bissetriz interna.

Teorema 3.7. *A bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes.*

No triângulo ABC mostrado na Figura 3.5 temos:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

Demonstração. Dado o triângulo ABC mostrado na Figura 3.6 vamos traçar a bissetriz interna $\overline{AD}$ e as retas paralelas à bissetriz interna em relação aos vértices B e C. A paralela à $\overline{AD}$ passando por C encontra a reta que passa por $\overline{BA}$ no ponto E.

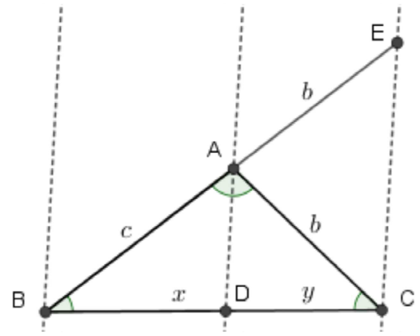


Figura 3.6: Teorema da bissetriz interna.

Temos que $\overline{AE} = b$ e $\overline{AC} = b$, De fato, o ângulo $B\hat{A}D$ é correspondente ao ângulo $B\hat{E}C$, logo $B\hat{A}D \equiv B\hat{E}C$. Por outro lado, como o ângulo $A\hat{C}E$ é alterno interno ao ângulo $D\hat{A}C$, logo $A\hat{C}E \equiv D\hat{A}C$. Por $\overline{AD}$ ser bissetriz interna do triângulo ABC temos pela Definição 3.6 que $B\hat{A}D \equiv D\hat{A}C$, consequentemente $A\hat{C}E \equiv B\hat{E}C$. Daí conclui-se que o triângulo ACE é isósceles de base $\overline{EC}$ pois os ângulos da base são congruentes. Portanto,

$$\overline{AC} = \overline{AE} = b.$$

Aplicando o Teorema de Tales, obtemos:

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b} \text{ ou } \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

□

Exemplo 3.1. Seja $\overline{AG}$ a bissetriz interna do triângulo ABC exemplificado na Figura 3.7.

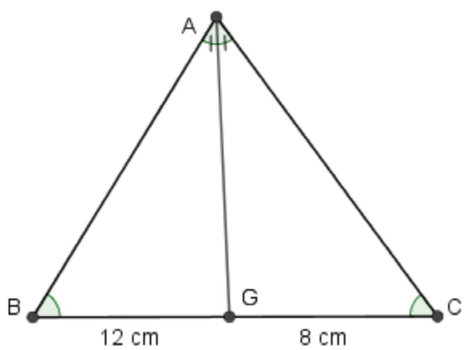


Figura 3.7: Aplicando o teorema da bissetriz interna.

Para encontrarmos a medida do lado $\overline{AC}$, aplicaremos o teorema da bissetriz interna:

$$\frac{12}{8} = \frac{\overline{AC}}{32}.$$

De onde temos,

$$8 \cdot \overline{AC} = 384.$$

Logo,

$$\overline{AC} = \frac{384}{8} = 48.$$

Definição 3.8. Sejam P um ponto no plano e r uma reta no mesmo plano, a distância entre P e r é o segmento que liga P até r e é denotado por $d(P; r)$.

Proposição 3.9. *Seja $A\hat{O}B$ um ângulo dado, P pertence a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, se e somente se, P equidista dos lados..*

Demonstração. Observe o ângulo $A\hat{O}B$ indicado na Figura 3.8 :

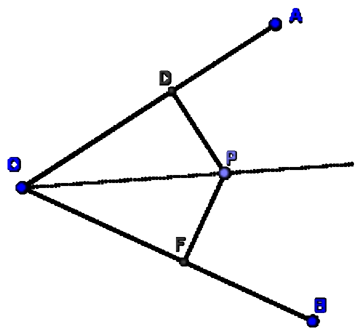


Figura 3.8: Bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

Suponha que P pertence a bissetriz de $A\hat{O}B$, e sejam D e F respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de P às retas $\overleftrightarrow{AO}$ e $\overleftrightarrow{BO}$. Temos que ,

$$D\hat{O}P = F\hat{O}P, \text{ e } O\hat{D}P = O\hat{F}P = 90^{\text{o}}.$$

Consequentemente,

$$O\hat{P}D = O\hat{P}F.$$

Como $\overline{OP}$ é lado comum aos triângulos ODP e OFP segue por (ALA) que os mesmos são congruentes. Daí,

$$\overline{PD} = \overline{PF}.$$

Logo,

$$d(P; \overleftrightarrow{AO}) = d(P; \overleftrightarrow{BO}).$$

□

3.4 Mediatriz

Definição 3.10. Mediatriz é uma reta que passa pelo ponto médio de um segmento, formando um ângulo reto.

No triângulo, uma mediatriz é uma reta perpendicular a um lado que passa pelo ponto médio desse lado. Na Figura 3.9 temos a mediatriz referente ao lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC.

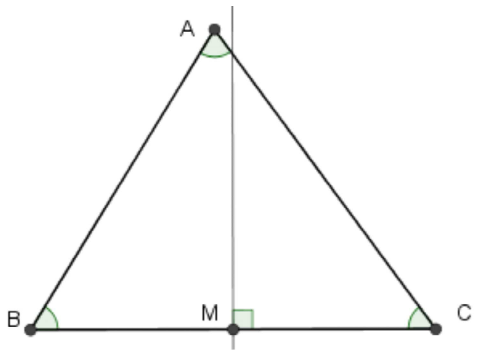


Figura 3.9: Mediatriz de um triângulo.

Observação 3.11. *Os pontos da mediatriz equidistam dos extremos (Figura 3.10).*

É possível mostrar usando congruência de triângulo que um ponto pertence a mediatriz se, e somente se, equidista dos extremos.

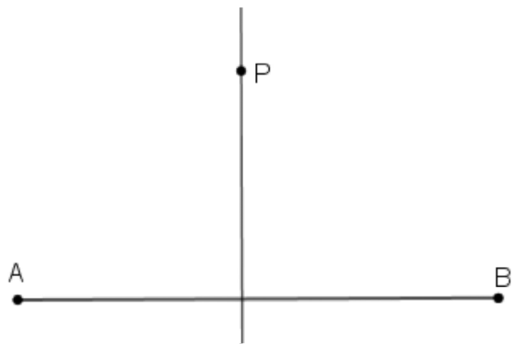


Figura 3.10: Mediatriz.

Ou seja,

$$\overline{PA} = \overline{PB}.$$

A partir do que foi visto, podemos notar que todo triângulo possui três medianas, três bissetrizes internas, três alturas e três mediatrizes. A seguir iremos estudar o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro, que são os pontos notáveis de um triângulo.

3.5 Baricentro (G)

Teorema 3.12. *As medianas de um triângulo o divide em seis triângulos de mesma área.*

Demonstração. Observe o triângulo ABC de medianas $\overline{AN}$, $\overline{BP}$, e $\overline{CM}$ na Figura 3.11:

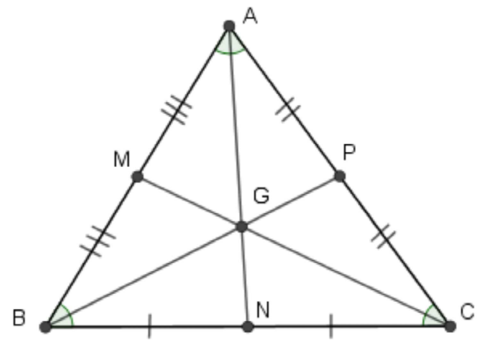


Figura 3.11: Baricentro de um triângulo.

Seja S_{ABC} a área de um triângulo ABC e observe que :

$$\begin{aligned} S_{BGN} &= S_{CGN} \qquad (3.1)\\ S_{BGM} &= S_{AGM}\\ S_{CGP} &= S_{AGP}. \end{aligned}$$

Pois têm a mesma altura em relação as bases congruentes. Do mesmo modo,

$$S_{ANC} = S_{ANB}. \qquad (3.2)$$

Mas como

$$S_{ANC} = S_{AGP} + S_{CGP} + S_{CGN} = 2S_{AGP} + S_{CGN},$$

e

$$S_{ANB} = S_{AGM} + S_{BGM} + S_{BGN} = 2S_{AGM} + S_{BGN}.$$

Logo, usando (3.1) e (3.2), temos

$$S_{AGP} = S_{AGM}.$$

De forma análoga mostramos que

$$S_{AGP} = S_{BGN}.$$

□

Proposição 3.13. *Em todo triângulo as medianas se intersectam no mesmo ponto chamado de **baricentro**.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo de medianas $\overline{AN}, \overline{BP}$ e $\overline{CM}$ como mostra a figura 3.11. Pelo Teorema 3.12 temos

$$S_{BGN} = S_{CGN} = S_{BGM} = S_{AGM} = S_{CGP} = S_{AGP}.$$

Daí,

$$\frac{S_{BGN}}{S_{CGN}} \cdot \frac{S_{BGM}}{S_{AGM}} \cdot \frac{S_{CGP}}{S_{AGP}} = 1,$$

logo

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = 1. \tag{3.3}$$

Assim, como as medianas $\overline{AN}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CM}$ satisfazem (3.3), pelo Teorema 3.3 elas concorrem ou se intersectam no mesmo ponto.

□

Teorema 3.14. *O baricentro de um triângulo divide as medianas na razão 2 : 1.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.12, e ainda utilizando a Figura 3.11 temos:

$$S_{AGB} = 2S_{GBN}. \tag{3.4}$$

Como em relação as bases $\overline{AG}$ e $\overline{GN}$, AGB e GBN têm a mesma altura h, temos,

$$S_{AGB} = \frac{1}{2}\overline{AG} \cdot h \tag{3.5}$$

e

$$S_{GBN} = \frac{1}{2}\overline{GN} \cdot h. \tag{3.6}$$

De (3.4), (3.5) e (3.6)

$$\overline{AG} = 2\overline{GN},$$

e de forma análoga mostramos que

$$\overline{BG} = 2\overline{GP}$$

e

$$\overline{CG} = 2\overline{GM}.$$

□

3.6 Incentro (I)

Proposição 3.15. *Em todo triângulo as bissetrizes internas se intersectam no mesmo ponto chamado de* ***incentro****.*

Na Figura 3.12 temos que $\overline{AE}, \overline{BD}$, $\overline{CF}$ são bissetrizes internas, logo o ponto I é o incentro, centro do círculo inscrito no triângulo.

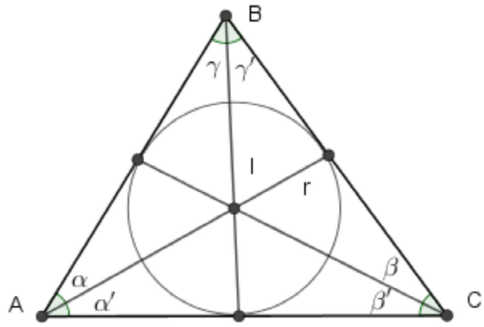


Figura 3.12: Incentro do triângulo.

Demonstração. Observe o triângulo ABC na Figura 3.13:

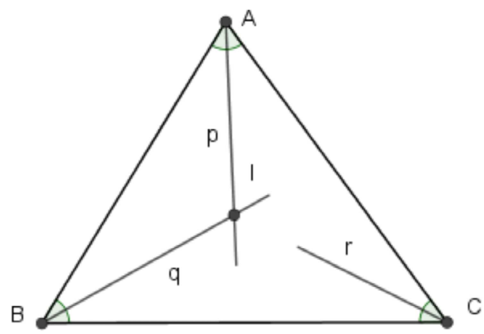


Figura 3.13: Concorrência das bissetrizes internas de um triângulo.

Sejam p, q, e r respectivamente as bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ e I o ponto de interseção entre as retas p e q. Como $I \in p$, pela Proposição 3.9, I equidista $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, e da mesma forma como $I \in q$, I equidista $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

Logo, o ponto I equidista $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, assim novamente pela Proposição 3.9, I pertence a bissetriz do ângulo $\hat{C}$ e consequentemente $I \in r$. Assim, r, s e t concorrem em I.

□

3.7 Circuncentro (C)

Proposição 3.16. *Em todo triângulo as mediatrizes se intersectam no mesmo ponto chamado de* ***circuncentro****.*

Demonstração. Sejam ABD um triângulo qualquer, r, s e t, respectivamente, as mediatrizes dos lados $\overline{BD}, \overline{DA}$ e $\overline{AB}$, e C o ponto de interseção das retas r e s como mostra a Figura 3.14.

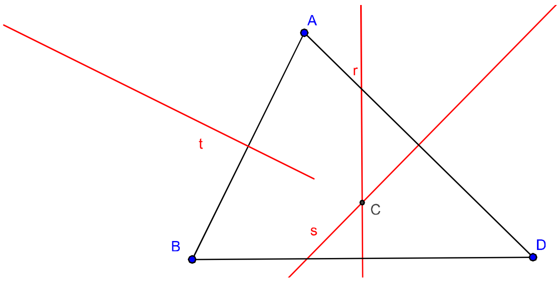


Figura 3.14: Demonstração circuncentro.

Pela Observação 3.11 de mediatriz de um triângulo temos $\overline{CB} = \overline{CD}$ (pois $C \in r$) e $\overline{CD} = \overline{CA}$ (pois $C \in s$).

Portanto, $\overline{CB} = \overline{CA}$ e segue, novamente pela Observação 3.11 de mediatriz de um triângulo, que $C \in t$.

$\square$

O circuncentro do triângulo é o centro do círculo circunscrito ao triângulo e pode estar interno, externo ou sobre o ponto médio da hipotenusa do triângulo.

Caso 1 - Triângulo acutângulo

No triângulo acutângulo o circuncentro C está localizado na parte interna do triângulo como mostra a Figura 3.15.

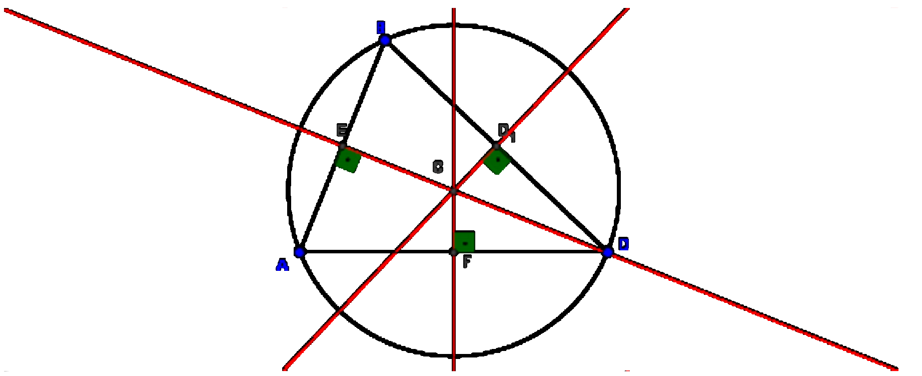


Figura 3.15: Circuncentro interno.

Caso 2 - Triângulo retângulo

No triângulo retângulo o circuncentro C está localizado sobre o ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo como mostra a Figura 3.16.

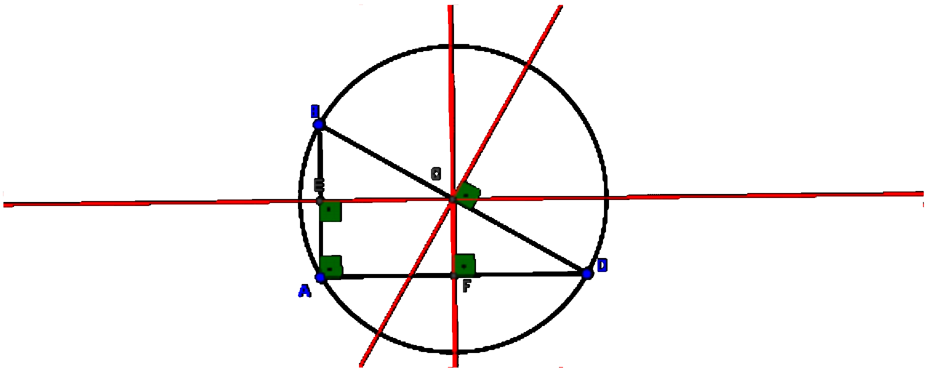


Figura 3.16: Circuncentro sobre o hipotenusa.

Caso 3 - Triângulo obtusângulo

No triângulo obtusângulo o circuncentro C está localizado na parte externa do triângulo como mostra a Figura 3.17.

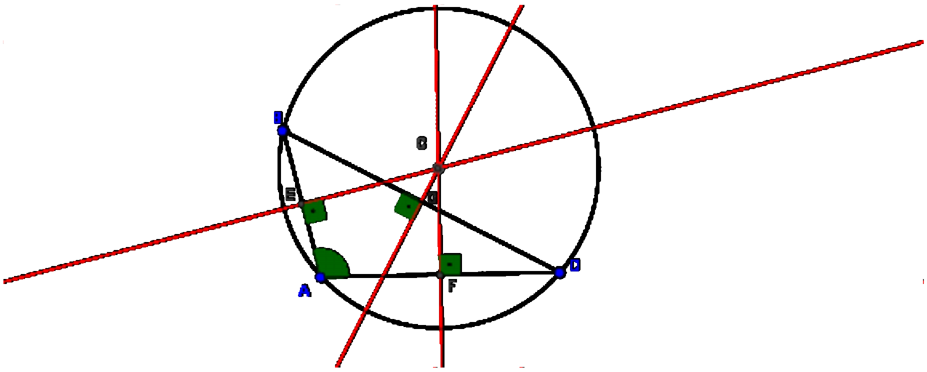


Figura 3.17: Circuncentro externo.

3.8 Ortocentro (O)

Proposição 3.17. *Em todo triângulo as alturas se intersectam no mesmo ponto chamado de* ***ortocentro****.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer, iremos considerar três casos possíveis:

Caso 1 - Triângulo retângulo

Se ABC for retângulo como mostra a Figura 3.18, suponhamos que $\hat{A} = 90^o$, então, o vértice A é o pé das alturas b e c. Como a altura h, por definição, passa pelo vértice A, então as alturas de ABC concorrem em A que nesse caso é o ortocentro de ABC.

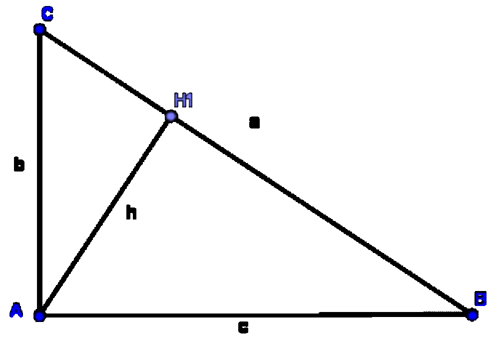


Figura 3.18: Ortocentro do triângulo retângulo.

Caso 2 - Triângulo acutângulo

Seja ABC um triângulo acutângulo como mostra a Figura 3.19, traçamos, respectivamente por A, B e C, retas p, q e r paralelas também respectivamente a $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, e sejam o encontro das retas p e q o ponto V, assim como o encontro das retas q e r o ponto U e o encontro das retas r e p o ponto I.

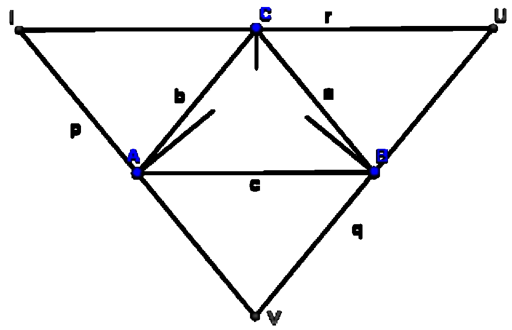


Figura 3.19: Ortocentro do triângulo acutângulo.

Logo, os quadriláteros $ABCI$ e $ABUC$ são paralelogramos, de modo que $\overline{CI} = \overline{AB} = \overline{CU}$, daí, C é o ponto médio de $\overline{UI}$, e analogamente, B é o ponto médio de $\overline{UV}$ e A o ponto médio de $\overline{IV}$.

Como a altura relativa ao lado a é perpendicular, segue que também é perpendicular ao lado $\overline{IV}$ pois o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{IV}$, analogamente as alturas em relação a $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são perpendiculares respectivamente aos segmentos $\overline{UV}$ e $\overline{UI}$. Portanto, temos que as alturas de ABC são mediatrizes de UIV, e pela Proposição 3.16, as mediatrizes se intersectam no mesmo ponto, e portanto as alturas de ABC devem se intersectar no mesmo ponto.

Caso 3 - Triângulo Obtusângulo

O caso 3 é totalmente análogo ao caso 2.

$\square$

Para a localização do ortocentro, existem as seguintes possibilidades: interno ao triângulo, externo ou coincidente com um dos vértices do triângulo, dependendo da classificação dos triângulos quanto aos ângulo.

No caso do triângulo ser acutângulo, o ortocentro se encontra interno ao triângulo como mostrado na Figura 3.20 como o ponto O.

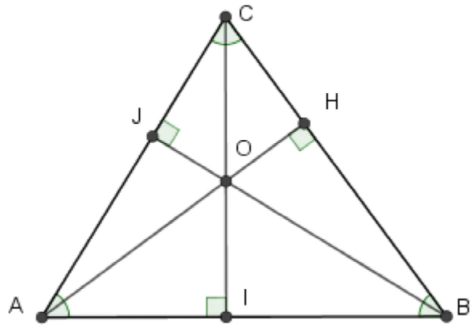


Figura 3.20: Ortocentro interno.

No caso do triângulo ser retângulo, o ortocentro coincide com o vértice sobre o ângulo reto como mostrado na Figura 3.21, ou seja, o ortocentro é o próprio vértice A.

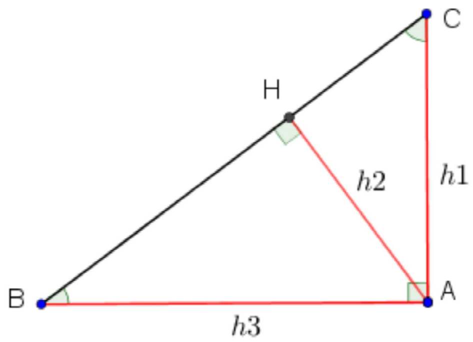


Figura 3.21: Ortocentro sobre o vértice.

No caso do triângulo ser obtusângulo, o ortocentro O se encontra externo ao triângulo como mostrado na Figura 3.22.

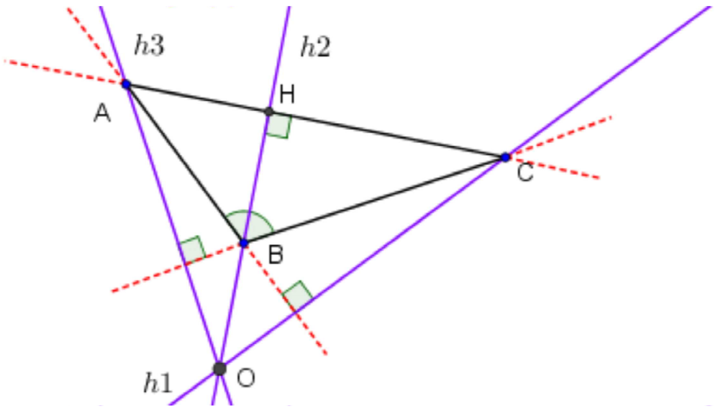


Figura 3.22: Ortocentro externo.

Capítulo 4

Algumas aplicações dos pontos notáveis de um triângulo

Neste último capítulo iremos apresentar alguns problemas envolvendo pontos notáveis de um triângulo, o que nos permitirá enxergar como tal conteúdo é cobrado e abordado nos níveis fundamental, médio e superior.

Problema 1- Nível superior (Demonstração alternativa para o Teorema 3.14)

Uma mediana de um triângulo é o segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto. Considere o triângulo ABC na figura a seguir e sejam M, N e P os pontos médios dos lados BC, CA e AB, respectivamente. As medianas BN e CP se cortam no ponto G. Seja X o ponto médio do segmento AG

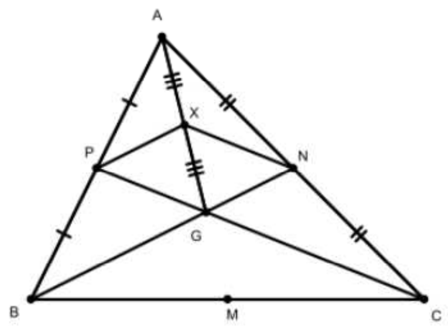


Figura 4.1: Problema 1.

(a) Usando o quadrilátero $GPXN$, verifique que o ponto G divide o segmento CP na razão 2:1, ou seja, que $CG = 2GP$.

(b) A partir do item anterior, verifique que a mediana AM corta a mediana CP no mesmo ponto G. Note que isto mostra que as três medianas de um triângulo passam por um mesmo ponto. Este ponto é chamado de Baricentro do triângulo.

(c) Suponha que as medianas BN e CP possuem o mesmo comprimento, verifique que $AC = AB$.

Solução (a):

Como o ângulo $\hat{A}$ é comum aos triângulos AXN e AGC e

$$\frac{AX}{AG} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2},$$

observamos que AXN e AGC são semelhantes. Logo,

$$XN = \frac{GC}{2}$$

e como $A\hat{X}N$ e $A\hat{N}X$ correspondem, respectivamente, a $A\hat{G}C$ e $A\hat{C}G$ segue também que

$$XN \parallel GC.$$

Analogamente, provamos que

$$PX \parallel BN.$$

Assim, como o quadrilátero $GPXN$ possui lados opostos paralelos, é um paralelogramo. Como paralelogramos também possuem lados opostos de mesma medida temos

$$CG = 2XN = 2GP.$$

Solução (b):

Chamaremos de G' o ponto onde AM corta CP.

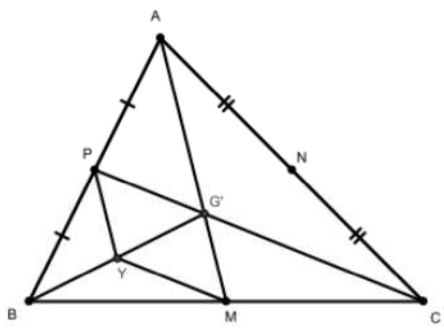


Figura 4.2: Problema 1, letra (b).

Usando a mesma ideia da letra (a), o quadrilátero $G'PYM$ é um paralelogramo e $CG' = 2G'P$. Como G e G' dividem o segmento de C para P na mesma razão, podemos concluir que $G = G'$ e que as três medianas passam por G.

Solução (c):

Se as medianas BN e CP possuem o mesmo comprimento, então os triângulos PGB e NGC são congruentes pelo caso LAL, pois:

$$PG = \frac{CP}{3} = \frac{BN}{3} = NG,$$

$$P\hat{G}B = N\hat{G}C,$$

$$GB = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}CP = GC.$$

Consequentemente,

$$PB = NC,$$

ou seja

$$\frac{AB}{2} = \frac{AC}{2}$$

e

$$AB = AC.$$

Problema 2 - Nível médio (OBMEP 2016)

Os pontos M, N e P são escolhidos sobre os lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$ do triângulo ABC de modo que $\overline{BM} = \overline{BP}$ e $\overline{CM} = \overline{CN}$. A perpendicular baixada de B à $\overline{MP}$ e a perpendicular baixada de C à $\overline{MN}$ se intersectam em I. Prove que os ângulos $I\hat{P}A$ e $I\hat{N}C$ são congruentes.

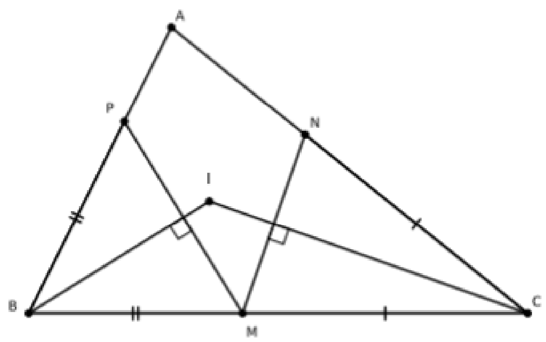


Figura 4.3: Problema 2.

Solução:

Como MNC é isósceles de base MN, $\overline{CI}$ é uma altura e também a bissetriz relativa ao vértice C. Consequentemente,

$$I\hat{C}N = I\hat{C}M.$$

Por (LAL) de congruência de triângulos, segue que

$$ICM \equiv ICN.$$

Daí,

$$I\hat{M}C = I\hat{N}C.$$

De forma semelhante, temos

$$B\hat{P}I = B\hat{M}I.$$

Assim,

$$I\hat{P}A = 180^o \text{ - } I\hat{P}B = 180^o \text{ - } I\hat{M}B = I\hat{M}C = I\hat{N}C.$$

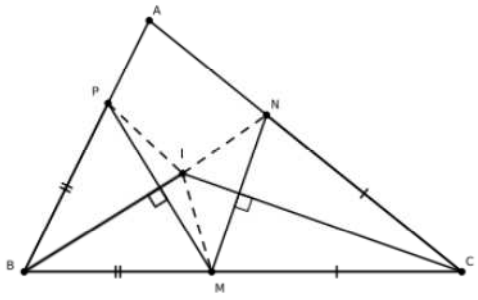


Figura 4.4: Resolução do Problema 2.

Problema 3 - Nível superior (PROFMAT)

No triângulo ABC tem-se $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$. A semirreta $\overrightarrow{AD}$ ($D \in \overline{BC}$) é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ e o ponto I é o incentro do triângulo.

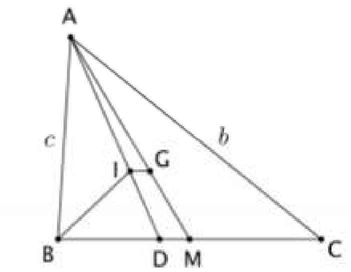


Figura 4.5: Problema 3.

(a) Calcule a razão $\dfrac{\overline{IA}}{\overline{ID}}$ em função dos lados a, b e c.

(b) Sendo G o baricentro de ABC mostre que, se $\overline{IG}$ é paralelo a $\overline{BC}$, então $a = \dfrac{b+c}{2}$.

Solução (a):

Pelo teorema da bissetriz interna, temos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{c}{b}.$$

A partir da propriedade das proporções temos,

$$\frac{\overline{BD}}{c} = \frac{\overline{DC}}{b} = \frac{a}{b+c},$$

pois

$$\overline{BD} + \overline{DC} = a.$$

Logo

$$\overline{BD} = \frac{ac}{b+c}.$$

Sendo I o incentro então $\overline{BI}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$. Pelo mesmo teorema,

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

Solução (b):

Seja M o ponto médio de $\overline{BC}$. Como

$$\overline{IG} \parallel \overline{BC},$$

então, pelo item a) e pelo Teorema de Tales

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{ID}} = \frac{b+c}{a} = \frac{\overline{GA}}{\overline{GM}}.$$

Como G é o baricentro de ABC é válida a seguinte igualdade,

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{ID}} = \frac{b+c}{a} = \frac{\overline{GA}}{\overline{GM}} = \frac{2}{1}.$$

Logo,

$$a = \frac{b+c}{2}.$$

Problema 4 - Nível superior (PROFMAT)

Considere um triângulo ABC inscrito em uma circunferência de centro O. Os pontos D e E das retas BC e AC, respectivamente, são tais que AD é perpendicular a BC e BE é perpendicular a AC. As retas AD e BE cortam-se em H. Sejam M, N e P os pontos médios dos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AH}$ e $\overline{AB}$, respectivamente.

(a) Mostre que $OMNP$ é um paralelogramo.

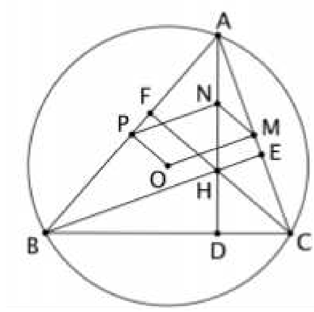


Figura 4.6: Problema 4.

(b) Mostre que em um triângulo qualquer, a distância do ortocentro a um vértice é o dobro da distância do circuncentro ao lado oposto.

Solução (a):

O ponto O é o circuncentro de ABC e, portanto, pertence as mediatrizes dos lados do triângulo. Assim, $\overline{OM}$ é perpendicular a $\overline{AC}$ e $\overline{OP}$ é perpendicular a $\overline{AB}$. Como P e N são pontos médios de AB e AH então $\overline{PN} \parallel \overline{BH}$ que, por sua vez, é perpendicular a $\overline{AC}$. Logo, $\overline{PN} \parallel \overline{OM}$ porque são perpendiculares a $\overline{AC}$. Agora, $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ são alturas do triângulo ABC e seja $\overline{CF}$ a terceira altura. Logo, $\overline{CF}$ passa por H, o ortocentro do triângulo. Repetindo o argumento, como N e M são pontos médios de $\overline{AH}$ e $\overline{AC}$ então $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{CH}$ que, por sua vez, é perpendicular a $\overline{AB}$. Logo, $\overline{MN} \parallel \overline{OP}$ pois são perpendiculares a $\overline{AB}$. Assim, $OMNP$ é um paralelogramo.

Solução (b):

A distância do circuncentro O ao lado $\overline{AC}$ é $\overline{OM}$. No triângulo AHB, como P e N são pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AH}$ respectivamente, então $\overline{BH}$ é o dobro de $\overline{PN}$ que, por sua vez, é igual a $\overline{OM}$. Portanto,

$$\overline{BH} = 2 \cdot \overline{OM}.$$

Problema 5 - Nível médio(UNIFOR-CE 2012)

Em um triângulo ABC, retângulo em A, a mediana relativa à hipotenusa é perpendicular ao segmento $\overline{BC}$. Se $\overline{BC} = 2$ cm, então é verdade que

(a) a medida de um dos catetos é 1 cm.

(b) as mediatrizes dos catetos se interceptam no interior do triângulo ABC.

(c) o quadrado da soma das medidas dos catetos é igual a 4 cm^2.

(d) a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC é igual a 2 cm.

(e) a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC é igual a 1 cm.

Solução:

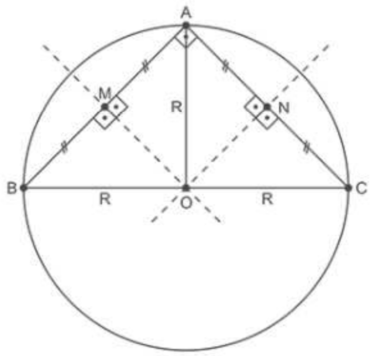


Figura 4.7: Problema 5.

Vamos resolver o problema analisando as alternativas.

letra (a)

Temos que

$$\overline{AB} = \overline{AC},$$

pois ABC é isósceles em relação a $\overline{BC}$ e

$$(\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 = 2^2.$$

Assim,

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{2}.$$

Logo a medida de um dos catetos não é igual a 1 cm.

letra (b)

Sabemos que o circuncentro O do triângulo ABC é o ponto médio da hipotenusa $\overline{BC}$, ou seja, as mediatrizes não se intersectam no interior e sim sobre o lado que é a hipotenusa.

letra(c)

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$(\overline{AB} + \overline{AC})^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{2})^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8.$$

letra(d)

Temos que

$$R + R = 2cm.$$

Logo,

$$R = 1cm.$$

Portanto a resposta do problema é a letra (e).

Problema 6 - Nível fundamental

As bissetrizes de um triângulo ABC se encontram num ponto O. Determine as medidas dos ângulos $A\hat{O}B$, $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ em função dos ângulos $\hat{A}$,$\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo.

Solução: Seja ABC o triângulo cujo as bissetrizes se intersectam no ponto O.

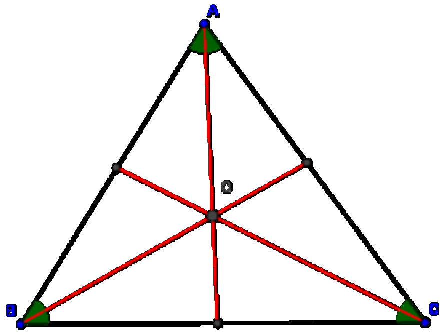


Figura 4.8: Problema 6.

Observando a figura, temos que

$$A\hat{O}B = 180^{\circ} - \left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}\right). \tag{4.1}$$

Por outro lado, temos

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ},$$

daí

$$\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90^{\circ},$$

ou seja

$$\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = 90^{\circ} - \frac{\hat{C}}{2}, \tag{4.2}$$

Substituindo (4.1) em (4.2), obtemos

$$A\hat{O}B = 180^{\circ} - 90^{\circ} - \frac{\hat{C}}{2} = 90^{\circ} - \frac{\hat{C}}{2}.$$

E de forma análoga

$$A\hat{O}C = 90^{\circ} - \frac{\hat{B}}{2},$$

e

$$B\hat{O}C = 90^{\circ} - \frac{\hat{A}}{2}.$$

Problema 7 - Nível superior (Pontos notáveis de um triângulo isósceles)

Seja ABC um triângulo isósceles, e sejam G, I, O e C, respectivamente, o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro. Mostre se ABC é isósceles,então G, I, O e C são colineares.

Solução:

Provaremos que se ABC é isósceles, então G, I, O e C são colineares. Vamos ilustrar o triângulo ABC isósceles em relação a $\overline{BC}$ na figura abaixo, onde M é ponto médio do lado $\overline{BC}$.

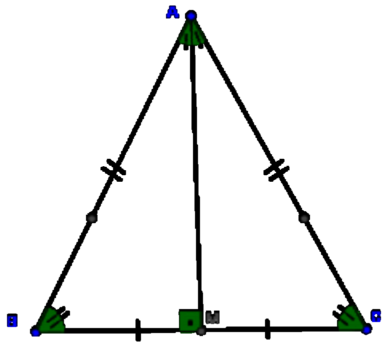


Figura 4.9: Problema 7.

Como ABC é isósceles em relação a $\overline{BC}$, temos

$$\overline{AB} \equiv \overline{AC}.$$

Temos que $\overline{AM}$ é uma mediana de ABC, então divide o triângulo que é isósceles em dois triângulos congruentes, ou seja, por (LLL)

$$AMB \equiv AMC.$$

Daí,

$$M\hat{A}B \equiv M\hat{A}C,$$

o que implica que $\overline{AM}$ também é bissetriz interna de ABC. Temos também,

$$A\hat{N}B \equiv A\hat{M}C,$$

além disso são suplementares, logo

$$A\hat{N}B + A\hat{M}C = 180^{o}.$$

Daí,

$$A\hat{N}B = A\hat{M}C = 90^{o}.$$

Portanto, por definição, $\overline{AM}$ é um altura relativa à $\overline{BC}$ e também uma mediatriz, e isso implica que, G, I, C e O pertecem a AM, ou seja, são colineares.

Considerações Finais

A realização deste trabalho contribuiu grandiosamente para o estudo da geometria, mostrando aplicações e detalhando de forma clara e ampla seus conceitos. Me permitiu aprofundar em diversos estudos vistos na graduação, e me motivou a aprender ferramentas que possibilitam um melhor entendimento e uma melhor exposição da teoria, como o geogebra, que foi de fundamental importância para a construção desse trabalho, sendo utilizado em todas as figuras. Um trabalho extenso e nada simples, porém gratificante, o estudo e a realização de trabalhos envolvendo a geometria é geralmente complexo e trabalhoso, mas cada dificuldade gerou um aprendizado diferente e que só veio agregar e motivar para uma futura pós-gradução seguindo esse rumo.

Enfim, me orgulho de ter seguido e desenvolvido um trabalho com um tema que embora trabalhoso, me agrada e interessa, e fica a sensação de dever cumprido e a certeza da minha contribuição para a comunidade acadêmica, motivando e incentivando o estudo da geometria através das minhas pesquisas.

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 1995.

[2] DANTE, Luiz Roberto. *Geometria e trigonometria*. São Paulo :Editora Abril, 2011.

[3] DOLCE, Osvaldo. POMPEU, José Nicolau *Fundamentos de matemática elementar 9*. São Paulo: Atual Editora, 2013.

[4] DOLCE, Osvaldo. IEZZI, Gelson. MACHADO, Antônio. *Geometria plana: conceitos básicos*. Rio de Janeiro : Editora Atual, 1992.

[5] NETO, Antonio Caminha Muniz. *Coleção Profmat: Geometria*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2013.

[6] SANTOS, Almir Rogério Silva. VIGLIONI, Humberto Henrique de Barros *Geometria Euclidiana Plana*. Sergipe: UFS, 2011.

[7] REZENDE, Eliane Quelho Frota. DE QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim. *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas*. São Paulo: Unicamp, 2008.