UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO E ALGUMAS APLICAÇÕES

CLÁUDIO SILVA DE SOUZA

CAMPINA GRANDE
2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

CLÁUDIO SILVA DE SOUZA

A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof^{a}. Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE
2017

S729d Souza, Cláudio Silva de.
A derivada de uma função e algumas aplicações [manuscrito] / Cláudio Silva de Souza. - 2017.
48 p. : il.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática".

1. Função derivável. 2. Funções. 3. Regra de L'Hôpital. I. Título.

21. ed. CDD 515.25

CLÁUDIO SILVA DE SOUZA

A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO E ALGUMAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 03/08/ 2017

BANCA EXAMINADORA

Luciana R Freitas

Prof^a. Dra. Luciana Roze de Freitas (ORIENTADORA)
Departamento de Matemática - UEPB

Joselma Soares dos Santos

Prof^a. Ma. Joselma Soares dos Santos
Departamento de Matemática - UEPB

Maria Isabelle Silva

Prof^a. Dra. Maria Isabelle Silva
Departamento de Matemática - UEPB

Dedicatória

Dedico o presente trabalho à toda minha família, professores, amigos e especialmente a minha filha Jayslla Cléa da Cunha Souza, minha esposa Jaqueline Mendes da Cunha, minha avó Antônia Pedro da Silva e a minha professora orientadora Luciana Roze de Freitas.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me permitido chegar até aqui me dando força para enfrentar cada obstáculo que surgia ao longo dessa jornada. Agradeço a minha família, principalmente a minha avó Antônia Pedro e minha esposa Jaqueline Mendes pelo apoio e incentivo que me deram durante o curso, sem o apoio e a compreensão de todos eu não teria chegado até aqui. Agradeço aos professores e amigos da graduação, cada um a seu modo contribuiu muito para minha graduação. Agradeço a minha professora e orientadora Luciana pela grande e importante contribuição para meu TCC, sempre com muita educação, muita paciência e sempre disposta a ajudar. Agradeço as professoras Joselma Soares dos Santos e Maria Isabelle Silva por terem aceitado fazer parte da banca examinadora. Agradeço aos amigos Allisson Henrique, Newton César, Bruno Vasconcelos, Pedro Fellype, Raimundo Júnior, Lucas Henrique, Antônio Neto, Juan Azevedo e Tayná Maria.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo realizar um estudo introdutório sobre derivada de uma função real de uma variável real. Para isto, apresentamos o conceito de função derivável, demonstramos às regras de derivação e os principais resultados envolvendo derivada. Em seguida, estudaremos algumas aplicações da derivada, dentre elas, problemas de otimização, Regra de L'Hôpital e aproximação por polinômios.

Palavras-chave: Derivada, Extremos de funções, Regra de L'Hôpital.

Abstract

The present work aims to perform an introductory study on the derivative of a real function of a real variable. For this, we present the concept of derivable function, we demonstrate the rules of derivation and the main results involving derivative. Next, we will study some aplications of the derivative, among them, optimization problems, L'Hôpital Rule and approximation by polynomials.

Keywords: Derivative, Extremes of functions, L'Hôpital Rule

Sumário

Introdução

Sabemos que a matemática cumpre um papel muito importante nas nossas vidas, tendo acompanhado a evolução do ser humano, lhe permitindo avançar cada vez mais no desenvolvimento das ciências, o que lhe possibilita fazer novas e importantes descobertas as quais trazem muitas contribuições para a vida de toda humanidade. Dentre as importantes descobertas matemáticas temos o Cálculo Diferencial, que surgiu no século XVII e foi desenvolvido por gênios da época como Isaac Newton(1642 - 1727), Gottfried Leibniz(1646 - 1716) e Cauchy(1789 - 1857). Os dois primeiros, muito embora tenham trabalhado independentemente, foram os grandes responsáveis pelo surgimento do Cálculo Diferencial. Cada um criou a sua notação para derivadas, por exemplo, enquanto Newton usava a notação $\frac{dy}{dx}$ para a derivada de y em relação a x, Leibniz usava a notação dy, dx, dz,... para representar valores infinitesimais. Essas duas notações são usadas com bastante frequência até os dias atuais. Além disso, Leibniz também foi o responsável por nomear o Cálculo Diferencial Integral. Outra grande contribuição para o Cálculo Diferencial na época foi devido a Cauchy, responsável pela definição de derivadas como conhecemos hoje em dia.

Neste trabalho, vamos realizar um estudo introdutório a respeito da derivada, tratando o assunto de uma forma clara e direta, permitindo assim, uma compreensão mais satisfatória. Uma vez que sabemos que alguns tipos de derivadas exigem um pouco mais de atenção, como por exemplo, os casos da regra da cadeia, da derivada da função inversa, do quociente, entre outros casos que não são resolvidos de uma forma direta.

A derivada tem uma importância muito grande no Cálculo Diferencial, pois permite resolver problemas dos mais simples aos mais complexos tanto na matemática como também em outras áreas do conhecimento.

Neste trabalho, vamos abordar no primeiro capítulo o conceito de função derivável, as regras de derivação e os principais resultados envolvendo derivada.

No segundo capítulo, faremos um estudo sobre crescimento e extremos de uma função e no terceiro capítulo vamos estudar algumas aplicações da derivada, dentre elas, problemas de otimização, regra de L'Hôpital e aproximação por polinômios.

Capítulo 1

A derivada de uma função

Neste capítulo, apresentamos os conceitos e os resultados envolvendo a derivada de uma função real de uma variável real. As definições, os teoremas e as demonstrações abordados neste capítulo podem ser encontrados nas referências [1] e [5].

1.1 A derivada

Definição 1.1. (Derivada) *Diz-se que uma função f, definida num intervalo aberto I, é derivável em $x_0 \in I$ se existir e for finito o limite da razão incremental*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{1.1}$$

quando $x \to x_0$. Esse limite é a derivada da função f no ponto x_0 e é indicado pelas notações

$$f'(x_0), \quad (Df)(x_0) \quad e \quad \frac{df}{dx}(x_0).$$

Fazendo $x = x_0 + h$, podemos escrever a derivada das seguintes formas:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{1.2}$$

Definição 1.2. (Derivadas laterais) *Define-se derivadas laterais à direita e à esquerda como:*

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

caso os limites existam.

Essas definições são aplicadas mesmo com x_0 sendo extremo esquerdo ou direito, respectivamente, do intervalo onde f esteja definida. É fácil perceber que uma função f é derivável em x_0, se e somente se, suas derivadas laterais nesse ponto existirem e forem iguais.

Definição 1.3. (Função derivada) *Seja f uma função definida num intervalo aberto I. Se f é derivável para todo ponto de seu domínio, dizemos que a função é derivável e que a função $f' : I \to \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in I$ o valor de $f'(x)$ é a função derivada de f. Neste caso,*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \tag{1.3}$$

Exemplo 1.1. *A derivada da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = k$, onde $k \in \mathbb{R}$, é zero para todo x real.*

Solução: *De* (1.3)*, temos que*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 1.2. *A derivada da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, onde $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$, é $f'(x) = a$ para todo x real.*

Solução: *Por* (1.3)*, temos*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[a(x + h) + b] - [ax + b]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[ax + ah + b] - [ax + b]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \to 0} a = a. \end{aligned}$$

Exemplo 1.3. *Seja a função* $f(x) = x^2 + 3x - 4$, *encontre* $f'(2)$.

Solução: *Note que por* (1.2) *temos*

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 + 3(2+h) - 4 - (2^2 + 3\cdot 2 - 4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(4 + 4h + h^2 + 6 + 3h - 4 - 4 - 6 + 4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(7h + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(7+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(7+h) = 7.
\end{aligned}$$

Portanto, $f'(2) = 7$.

Definição 1.4. (Função contínua) *Dizemos que uma função* f *é contínua num ponto* $x = x_0$ *de* D, *se o limite de* $f(x)$ *com* x *tendendo a* x_0 *existir e for igual a* $f(x_0)$.

Observação 1.1. *A derivada de uma função* f *é também uma função. Logo, faz sentido considerar sua derivada que, caso exista, é chamada de derivada segunda de* f *e indicada pelas notações* f'', $D^2 f$ *ou* $d^2 f/dx^2$. *De um modo geral, podemos considerar a derivada de ordem* n *ou derivada* $n-$ *ésima, definida como a derivada da derivada de ordem* $n-1$ *e indicada pelas notações* $f^{(n)}$, $D^{(n)} f$ *ou* $d^n f/dx^n$. *A função que possui derivadas contínuas até a ordem* n *é chamada função de classe* C^n.

Teorema 1.1. *Toda função derivável num ponto* x_0 *é contínua nesse ponto.*

Demonstração. Considerando que uma função f seja derivável, Observe que

$$f(x) = f(x_0) + \left[f'(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] (x - x_0).$$

Passando o limite quando $x \to x_0$ temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) &= f(x_0) + \lim_{x\to x_0} \left[f'(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] (x - x_0) \\
&= f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0 = f(x_0).
\end{aligned}$$

O que prova o teorema. $\square$

1.2 Reta tangente

Definição 1.5. (Reta tangente) *A reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto P é a reta que passa por P e tem declividade $f'(x_0)$. Neste caso, a equação em coordenadas (x, y) é dada por:*

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ ou } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{1.4}$$

Exemplo 1.4. *Seja a curva dada pela equação $y = x^3 - 2x$. Calcule a equação da tangente passando pelo ponto da curva de abscissa $x = 1$.*

Solução: *Como $x = 1$, então $y = x^3 - 2x = 1^3 - 2 \cdot 1 = -1$. Portanto, o ponto é $P(1, -1)$.*

Utilizando a definição de derivada e as propriedades dos limites, podemos calcular diretamente a derivada $f'(x)$ da função $f(x) = x^3 - 2x$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - 2(x+h) - (x^3 - 2x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3xh^2 + 3x^2h + h^3 - 2x - 2h - x^3 + 2x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3xh^2 + 3x^2h + h^3 - 2h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(3xh + 3x^2 + h^2 - 2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (3xh + 3x^2 + h^2 - 2) = 3x^2 - 2
\end{aligned}$$

Logo, $f'(x) = 3x^2 - 2$ é a derivada da função $f(x) = x^3 - 2x$. Em particular, para $x = 1$, temos

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 1.$$

Logo, por (1.4)

$$\begin{aligned}
y &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\
&= -1 + 1(x - 1).
\end{aligned}$$

Portanto, a equação da reta tangente é $y = x - 2$.

1.3 Regras de derivação

Proposição 1.1. (Derivada da soma) *Sejam f e g duas funções definidas num intervalo aberto I. Se as duas funções forem deriváveis em $x_0 \in I$, então a função soma $f+g$ é derivável em x_0 e vale*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Demonstração. Sejam f e g duas funções reais, então

$$(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0) = f(x_0+h) + g(x_0+h) - (f(x_0) + g(x_0))$$

$$= (f(x_0+h) - f(x_0)) + (g(x_0+h) - g(x_0)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0).\end{aligned}$$ □

As derivadas do produto e do quociente exigem um pouco mais de trabalho como vamos ver a seguir.

Proposição 1.2. (Regra do produto e do quociente) *Se f e g são deriváveis num ponto x, então o mesmo é verdade para fg e*

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

. Se, ainda, $g(x) \neq 0$, então a função $\dfrac{f}{g}$ é derivável em x e vale

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Demonstração. Para o caso do produto, observemos que a razão incremental se escreve:

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{[f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)] + [f(x+h)g(x) - f(x)g(x)]}{h}$$

$$= f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x).$$

Agora, é só fazer $h \to 0$ que chegamos no resultado que desejamos, isto é,

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

No que diz respeito ao quociente, devemos considerar primeiro o caso em que $f = 1$, isto é, $\dfrac{1}{g}$. Consideremos a razão incremental

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)g(x)},$$

cujo limite, com $h \to 0$, produz o resultado esperado, ou seja,

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

O caso de um quociente geral f/g pode ser tratado como produto: $f/g = f\cdot\dfrac{1}{g}$. Usando a regra do produto temos que:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}\right),$$

assim, chegamos ao resultado esperado, isto é,

$$\frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

□

Observação 1.2. *Em particular, se k é uma constante e f é uma função derivável tem-se,*

$$(kf)'(x) = (k)'f(x) + kf'(x) = 0\cdot f(x) + k\cdot f'(x) = k\cdot f'(x).$$

Note que usamos o fato de que a derivada da constante é zero.

Exemplo 1.5. *Calcule a derivada da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$.*

Solução: *Pela regra do quociente temos.*

$$f'(x) = \frac{(1)'\cdot x - 1\cdot(1)'}{x^2} = \frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Exemplo 1.6. *Encontre a derivada da função* $2x+1+\dfrac{1}{x}$ *em um ponto qualquer de seu domínio.*

Solução: *Sabemos que a derivada de* $f(x)=ax+b$ *é* $f'(x)=a$*, logo a derivada de* $f(x)=2x+1$ *é* $f'(x)=2$*. Sabemos também que a função* $g(x)=\dfrac{1}{x}$ *é derivável* $\forall x\in\mathbb{R}^*$ *e que* $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$*. Portanto,* $(f+g)(x)=2x+1+\dfrac{1}{x}$ *é derivável para todo* $x\in\mathbb{R}^*$*, assim,*

$$(f+g)'(x)=\left(2x+1+\frac{1}{x}\right)'=(2x+1)'+\left(\frac{1}{x}\right)'=2-\frac{1}{x^2}.$$

Proposição 1.3. (Derivada de potências inteiras) *A função* $f(x)=x^n$*,* $(n\in\mathbb{Z})$ *é derivável para todo* $x\in\mathbb{R}$ *se* $n\geq 0$ *e derivável para* $x\in\mathbb{R}^*$ *se* $n<0$*. Em ambos os casos*

$$f'(x)=nx^{n-1}.$$

Demonstração. Para $n=0$ o resultado é imediato, pois $x^0=1$, cuja derivada é 0. Vamos agora, provar por indução que o caso $n>0$ vale.

Para $n=1$, tem-se

$$f(x)=x^1=x\Rightarrow f'(x)=1=1\cdot x^{1-1}.$$

Vamos supor que o resultado vale para $n=k$, isto é, $f(x)=x^k$ é derivável e $f'(x)=kx^{k-1}$. Então, para n = k+1, aplicando a regra do produto, temos que $f(x)=x^{k+1}=x\cdot x^k$ é derivável e

$$(x^{k+1})'=(x\cdot x^k)'=x'\cdot x^k+x\cdot(x^k)'=x^k+kxx^{k-1}=x^k+kx^k=(k+1)x^k,$$

assim, o resultado vale para n = k + 1. Portanto, pelo principio de indução Matemática, o resultado é válido para todo $n\in\mathbb{Z}$.

Suponha agora, que $n<0$, então $n=-m$, com $m>0$ e

$$x^n=x^{-m}=\frac{1}{x^m}.$$

Se $x\neq 0$ então, pela regra do quociente, $\dfrac{1}{x^m}$ é derivável e vale que:

$$\left(\frac{1}{x^m}\right)'=\frac{(1)'(x^m)-1(x^m)'}{(x^m)^2}=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}=nx^{n-1}.$$

$\square$

Teorema 1.2. (Regra da cadeia) *Consideremos uma função composta $f_o g$, definida num intervalo I, de modo que $g(I) \subset Dom f$. Suponhamos que g seja derivável num ponto $x \in I$ e f derivável em $y = g(x)$. Então a função composta $f(g(x))$ é derivável no ponto x e $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$.*

Demonstração. Como f é derivável no ponto y,

$$\frac{f(y+k) - f(y)}{k} = f'(y) + \eta(k),$$

onde $\eta(k) \to 0$ com $k \to 0$. Podemos escrever essa equação da seguinte forma

$$f(y+k) - f(y) = k[f'(y) + \eta(k)],$$

que é agora verdadeira mesmo que $k = 0$. fazendo $k = g(x+h) - g(x)$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \frac{f(y+k) - f(y)}{h} \\ &= \frac{[f'(y) + \eta(k)]k}{h} \\ &= [f'(g(x)) + \eta(k)]\frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \end{aligned}$$

Logo, da continuidade de g no ponto x segue que $k \to 0$ com $h \to 0$. E, como $n(k) \to 0$ com $k \to 0$, daí, é só fazer h tender a zero na ultima igualdade que obtemos o resultado que queremos, ou seja,

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

$\square$

Proposição 1.4. (Derivada de potências racionais) *Seja n um número racional, então x^n é derivável em qualquer ponto interior do domínio de x^{n-1} e*

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \tag{1.5}$$

Demonstração. Consideremos p e q números inteiros com $q > 0$, vamos supor que

$f(x) = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$. Então

$$(f(x))^q = x^p.$$

Como p e q são números inteiros (para os quais já temos a Regra da potenciação), podemos derivar ambos os lados da equação em relação a x e obter

$$q(f(x))^{q-1} f'(x) = px^{p-1}.$$

Sendo $f(x) \neq 0$, podemos dividir os dois lados da equação por $qf(x)^{q-1}$ para determinar $f'(x)$, assim

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{px^{p-1}}{q(f(x))^{q-1}} \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}}, \text{ pois } f(x) = x^{p/q} \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}}, \text{ pois } \frac{p}{q}(q-1) = p - p/q \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{(p-1)-(p-p/q)}, \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{(p/q)-1}, \end{aligned}$$

o que demonstra a proposição. □

Exemplo 1.7. *Seja* $f(x) = (1-x^2)^{1/4}$ *uma função definida no intervalo* $[-1, 1]$*, determine* $f'(x)$*.*

Solução: *Pela Regra da Potência Racional e Regra da cadeia*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(1-x^2)^{1/4} &= \frac{1}{4}(1-x^2)^{-3/4}(-2x) \\ &= -\frac{x}{2(1-x^2)^{3/4}}. \end{aligned}$$

Esta derivada está definida somente em $(-1, 1)$*, pois* $1 - x^2 \neq 0$*, isto é,* $x \neq 1$ *e* $x \neq -1$*.*

1.3.1 Derivadas das funções trigonométricas

Trataremos aqui, das derivadas das funções trigonométricas $sen\, x$ e $cos\, x$, como também das funções trigonométricas $tan\, x$, $sec\, x$, $cosec\, x$ e $cotan\, x$ que são obtidas a partir das duas primeiras aplicando as regras de derivação.

Proposição 1.5. *Se* $f(x) = sen\, x$ *então* $f'(x) = cos\, x$.

Demonstração. Usando os limites fundamentais:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos\, x}{x} = 0,$$

obtemos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen\, x}{h}.$$

Note que, usamos a fórmula do *seno* da soma:

$$sen(a+b) = sen\, a\, cos\, b + sen\, b\, cos\, a.$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sen\, x\, cos\, h + sen\, h\, cos\, x - sen\, x}{h}$$

Agora, agrupando os termos com $sen\, x$ e $cos\, x$, passando o limite quando $h \to 0$ e usando os limites fundamentais, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= cos\, x \left(\lim_{h\to 0} \frac{sen\, h}{h}\right) + sen\, x \left(\lim_{h\to 0} \frac{cos\, h - 1}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \left[cos\, x \left(\frac{sen\, h}{h}\right) + senx \left(\frac{cos\, h - 1}{h}\right)\right]. \\ &= cos\, x \cdot 1 + sen\, x \cdot 0 = cos\, x. \end{aligned}$$

Logo, se $f(x) = sen\, x$ então $f'(x) = cos\, x$. $\square$

Proposição 1.6. *Se* $f(x) = cos\, x$ *então* $f'(x) = -sen\, x$.

Demonstração. Para a função $f(x) = cos\, x$, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{cos(x+h) - cos\, x}{h}$$

Onde, usamos a fórmula do *cosseno* da soma

$$cos(a+b) = cos\, a\, cos\, b - sen\, a\, sen\, b.$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h}$$

Agrupando os termos com $sen\, x$ e $cos\, x$ e passando o limite quando $h \to 0$, temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{cos(x+h) - cos\, x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[cos\, x \left(\frac{cos\, h - 1}{h} \right) - sen x \left(\frac{sen\, h}{h} \right) \right]. \\
&= cos\, x \left(\lim_{h \to 0} \frac{cos\, h - 1}{h} \right) - sen x \left(\lim_{h \to 0} \frac{sen\, h}{h} \right) \\
&= 0 \cdot cos\, x - 1 \cdot sen\, x = -sen\, x.
\end{aligned}$$

Portanto, se $f(x) = cos\, x$ então $f'(x) = -sen\, x$. □

As derivadas das funções $f(x) = tan\, x$, $f(x) = sec x$, $f(x) = cosec x$ e $f(x) = cotan\, x$ são:

(i) $(tan\, x)' = sec^2\, x$,

(ii) $(sec x)' = sec x\, tan\, x$,

(iii) $(cosec x)' = -cosec x\, cotan\, x$,

(iv) $(cotan\, x)' = -cosec^2\, x$.

1.3.2 Derivada da função inversa

Agora, vamos falar da derivada da função inversa por meio do teorema e das proposições a seguir.

Teorema 1.3. (Derivada da função inversa) *Seja $y = f(x)$ uma função derivável num intervalo aberto I, com $f'(x)$ sempre positiva ou sempre negativa nesse intervalo. Então sua inversa $x = g(y)$ é derivável no intervalo $J = f(I)$ e*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Demonstração. Sejam $y_0 \in J$, $y \in J$, $x_0 = g(y_0)$ e $x = g(y)$. então

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]^{-1}.$$

Note que J é um intervalo aberto, de modo que podemos fazer y variar em toda uma vizinhança de y_0, com o que x estará variando em toda uma vizinhança de x_0 , e fazendo $y \to y_0$, x tenderá a x_0 (uma vez que g é contínua), chegamos assim, ao resultado que desejamos. $\square$

Exemplo 1.8. *Vejamos que* $(\sqrt{x}\,)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. *Chegaremos a esta fórmula usando a derivada da função inversa.*

Solução: *A função* $g(y) = \sqrt{y}$ *definida para* $y > 0$ *é a inversa de* $f(x) = x^2$. *Usando o Teorema 1.3, temos*

$$(\sqrt{y}\,)' = g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{2g(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Proposição 1.7. *A função arco seno é derivável em* $(-1, 1)$ *e sua derivada é*

$$(arcsen)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demonstração. Seja $f = sen : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$. Temos que $(sen\, x)' = cos\, x > 0$ no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Pelo Teorema 1.3, temos que f^{-1} é derivável em $(-1, 1)$ e

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{cos\ x}.$$

Como $y = sen\ x$ e $sen^2\ x + cos^2\ x = 1$, segue que

$$cos^2\ x = 1 - sen^2 x \Rightarrow cosx = \sqrt{1 - sen^2\ x} = \sqrt{1-y^2}.$$

Portanto,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Sendo $f^{-1}(x) = arcsen\, x$, segue o resultado. $\square$

Exemplo 1.9. *Encontre a derivada da função* $f(x) = arcsen(x^2-1)$ *para* $x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,\right)$.

Solução: *Usando a derivada do arco seno e a regra da cadeia. Sejam,* $g(x) = x^2 - 1$ *e* $h(x) = arcsenx$, *temos que* $g\left((-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,)\right) = (-1, 1)$ *está contido no domínio de* h *são deriváveis em seus domínios, logo* $f = h_o g$ *é derivável em* $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,\right)$ *e vale que:*

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}} \cdot (2x) = \frac{2x}{\sqrt{2x-x^4}}.$$

Proposição 1.8. *A função arco cosseno é derivável em* $(-1, 1)$ *e sua derivada é*

$$(arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demonstração. Seja $f = cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$. Temos que $(cos\, x)' = -sen\, x < 0$ em $(0, \pi)$. Assim, pelo Teorema 1.3, f^{-1} é derivável em $(-1, 1)$ e

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{sen\ x}.$$

Como $y = cos\ x$ e $sen^2\ x + cos^2\ x = 1$, segue que

$$sen^2\ x = 1 - cos^2\ x \Rightarrow sen\ x = \sqrt{1 - cos^2\ x} = \sqrt{1-y^2}.$$

Portanto,

$$(f^{-1})'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Sendo $f^{-1}(x) = arccos\ x$, segue o resultado. $\square$

As derivadas das demais funções trigonométricas inversas são as seguintes:[1]

(i) $(arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(ii) $(arccotan)'(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$.

(iii) $(arcsec)'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

(iv) $(arccosec)'(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

[1] Mais detalhes podem ser encontrados na referência [4]

Capítulo 2

Crescimento e extremos de uma função

Neste capítulo vamos apresentar a relação entre derivada, o crescimento e os extremos de uma função. Para isso, vamos usar o Teorema do Valor Médio, Teorema de Rolle e o Teste da derivada primeira e da derivada segunda.

Definição 2.1. (Extremos) *Seja f uma função de domínio D. Diz-se que um ponto $a \in D$ é máximo local de f se existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D \Rightarrow f(x) \leq f(a),$$

e a é ponto de mínimo local se existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (a-\delta, a+\delta) \cap D \Rightarrow f(x) \geq f(a).$$

Usamos o qualificativo "absoluto" para designar o máximo e o mínimo de uma função em todo o seu domínio D, daí designamos máximo e mínimo absolutos ao maior e ao menor valor da função em seu domínio D, chamados valores extremos da função ou extremos absolutos. No entanto são também de grande importância os valores extremos da vizinhança de um ponto, chamados de extremos locais.

Teorema 2.1. *Se f é uma função derivável num ponto c, onde ela assume valor máximo ou mínimo, então $f'(c) = 0$.*

Demonstração. No caso em que f assume um valor em c, observamos que, para $|h|$

suficientemente pequeno, $f(c+h)-f(c) \leq 0$, de sorte que

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0, \text{ se } h > 0$$

e

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0, \text{ se } h < 0.$$

Como consequência, o limite dessa razão quando $h \to 0$ só pode ser zero, donde $f'(c) = 0$. O raciocínio é análogo no caso em que c é ponto de mínimo.[1] $\square$

Observação 2.1. *Note que, a recíproca desse Teorema não é verdadeira, pois por exemplo, a função $f(x) = x^3$, tem derivada nula em $x = 0$, sem que esse ponto seja de máximo ou de mínimo.*

Exemplo 2.1. *A função $f(x) = x^2$ tem mínimo local e absoluto em $x = 0$, pois $f(x) = x^2 \geq f(0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.*

Definição 2.2. (Ponto crítico) *Um ponto c do domínio de uma função f é chamado ponto crítico se ocorrer um dos seguintes casos:*
(a) f não é derivável em c.
(b) f é derivável em c e $f'(c) = 0$.

Exemplo 2.2. *Encontre os pontos críticos da função $f : [-4, 2] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 2.$$

Solução: *A função é derivável no intervalo aberto $(-4, 2)$ e sua derivada é $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$. Os únicos pontos críticos de f são os valores onde*

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = \frac{2}{3}.$$

2.1 Teorema do Valor Médio

Teorema 2.2. (Teorema de Rolle) *Se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$, derivável em (a, b), com $f(a) = f(b)$, então sua derivada se anula em (a, b), isto é, $f'(c) = 0$ para algum $c \in (a, b)$.*

[1] A demonstração completa do Teorema 2.1 pode ser encontrada na referência[1]

Demonstração. Pode ser que f seja constante e neste caso, f' se anula em todos os pontos de (a,b). Se f não for constante, terá que assumir valores maiores ou menores do que $f(a) = f(b)$. Então, se f assumir valores maiores do que $f(a)$, ela irá assumir seu máximo num ponto c; e se assumir valores menores do que $f(a)$, ela irar assumir seu mínimo num ponto c. Em todo caso, $f'(c) = 0$. $\square$

Exemplo 2.3. *Seja a função $f(x) = x^3 - x + 1$. Temos que $f(-1) = f(1) = 1$, f é contínua em $[1,1]$ e derivável em $(1,1)$, Pelo Teorema de Rolle, há pelo menos um valor de $x \in (-1,1)$ tal que $f'(x) = 0$. Sendo assim, determine o valor de x.*

Solução: *De fato, como $f(x) = x^3 - x + 1$ então $f'(x) = 3x^2 - 1$, logo*

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3},$$

e tanto $\frac{\sqrt{3}}{3}$ quanto $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ estão contidos em $(-1,1)$.

Exemplo 2.4. *Mostre que a função $f(x) = x^3 + ax + b$, com $a > 0$, possui uma única raiz real.*

Solução: *Como $f(x)$ é uma função polinomial de grau ímpar, tem-se que*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad e \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Logo, como f é contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário (ver [1], pg.171) existe x_0 tal que $f(x_0) = 0$. Usando o Teorema de Rolle vamos mostrar que $f(x)$ possui raiz única. Vamos fazer a prova por contradição. Supondo que houvesse outra raiz x_1, então teríamos $f(x_0) = f(x_1)$. Logo, existe um $c \in (x_0, x_1)$ (caso $x_0 < x_1$) ou $c \in (x_1, x_0)$ (caso $x_1 < x_0$) tal que $f'(c) = 0$. Mas observe que a derivada de f é $f'(x) = 3x^2 + a$. Daí,

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + a = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-a}{3}}.$$

Como, por hipótese, $a > 0$, então f' não tem raiz real, contradizendo $f'(c) = 0$. Portanto, não há outra raiz x_1.

Teorema 2.3. (Teorema do Valor Médio) *Se f é uma função contínua num intervalo $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \tag{2.1}$$

Demonstração. Consideremos a função

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Observe que F se anula em $x = a$ e $x = b$. Sendo F contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), aplicando a esta função F o Teorema de Rolle, obtemos que existe $c \in (a,b)$ tal que $F'(c) = 0$, isto é,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

$\square$

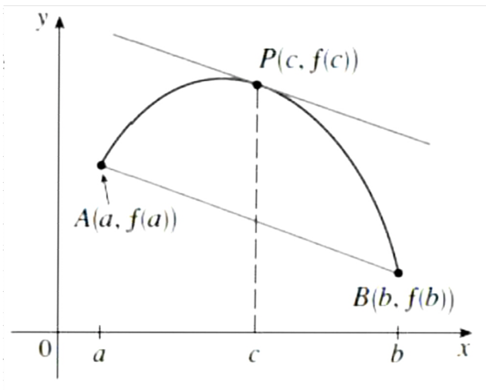

Figura 2.1: Fonte: Teorema do Valor Médio - IM - UFAL.

O Teorema do Valor Médio significa que, geometricamente existe um número c entre a e b, tal que a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Note que a fórmula

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

é válida quando a e b são substituídos por dois números quaisquer x_1 e x_2 do intervalo

$[a, b]$, não importando qual desses dois números é o menor, isto é,

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2), \tag{2.2}$$

onde c é um número conveniente entre x_1 e x_2.

Exemplo 2.5. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(0) = -2$ e $f'(x) \leq 5$. Qual o valor máximo possível para $f(2)$?*

Solução: *Pelo Teorema do Valor Médio, há um número $c \in (0, 2)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{f(2) - (-2)}{2} = \frac{f(2) + 2}{2}.$$

Como $f'(c) \leq 5$, temos que

$$\frac{f(2) + 2}{2} \leq 5 \Rightarrow f(2) + 2 \leq 10 \Rightarrow f(2) \leq 8,$$

assim, temos que o maior valor possível para $f(2)$ é 8.

2.2 O crescimento da função e a derivada

Nesta seção iremos apresentar uma relação entre as propriedades de crescimento de uma função e sua derivada. Essa relação nos mostra que a função é crescente nos intervalos onde a derivada é positiva e decrescente nos intervalos onde a derivada é negativa.

Proposição 2.1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) então:*
(i) f é não decrescente em $[a, b]$ se, e somente se, $f'(x) \geq 0$ para quaisquer $x \in (a, b)$. Além disso, se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é crescente no intervalo $[a, b]$.
(ii) f é não crescente em $[a, b]$ se, e somente se, $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Além disso, se $f'(x) < 0$ para quaisquer $x \in (a, b)$ então f é decrescente no intervalo $[a, b]$.

Demonstração do item (i). Vamos supor que f seja não decrescente em $[a, b]$ e determinemos o sinal de $f'(x)$. Se $h > 0$, temos que $x + h > x$ e, usando o fato de que f é não decrescente:

$$f(x + h) \geq f(x) \Rightarrow f(x + h) - f(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Se $h < 0$, temos que $x + h < x$ e, mais uma vez usando o fato de que f é não decrescente:

$$f(x+h) \leq f(x) \Rightarrow f(x+h) - f(x) \leq 0 \Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Note que em ambos os casos, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$. Portanto,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Suponhamos agora que $f'(x) \geq 0$ para quaisquer $x \in (a, b)$. Sejam x_0, $x_1 \in [a, b]$ com $x_0 < x_1$. Aplicando o Teorema do Valor Médio no intervalo $[x_0, x_1]$, temos que existe $c \in (x_0, x_1)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Como $x_1 - x_0 > 0$ e $f'(c) \geq 0$, então $f(x_1) - f(x_0) \geq 0$, ou seja, $f(x_1) \geq f(x_0)$ e, portanto, f é não decrescente. No entanto, se vale que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, fica garantido que $f'(c) > 0$ e vale que $f(x_1) - f(x_0) > 0$ então $f(x_1) > f(x_0)$, o que mostra que f é crescente. A demonstração do item (ii) ocorre de maneira análoga. $\square$

Exemplo 2.6. *Seja $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função.*

Solução: *Como $f'(x) = 2x - 2$, logo*

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

e

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

E a derivada tem valor zero em $x = 1$. O valor da função no ponto $x = 1$ é

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 2 - 3 = -4.$$

Assim, o trinômio decresce (derivada negativa) no intervalo $(-\infty, 1)$, atingindo o ponto $V = (1, -4)$ e começa a crescer (derivada positiva), isto é, cresce no intervalo $(1, +\infty)$ Observe que o vértice é o ponto de mínimo da função.

2.3 Teste da derivada primeira e da derivada segunda

Vimos que se $f'(c) = 0$ então c é ponto crítico de f e $f(c)$ pode ser mínimo local, máximo local ou nenhum dos dois. Como o crescimento e decrescimento do gráfico de uma função está relacionado com o sinal da derivada, podemos usar esta relação para, dado um ponto com c tal que $f'(c) = 0$, dizer em quais dos três casos ele se enquadra.

Proposição 2.2. (Teste da derivada primeira) *Seja a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) e seja c um ponto crítico de f. As seguintes afirmações ocorrem:*
(i) Se f' passa de positiva para negativa em c, então f tem máximo local em c.
(ii) Se f' passa de negativa para positiva em c, então f tem mínimo local em c.
(iii) Se f' não muda de sinal em c, então f não tem máximo nem mínimo local em c.

Demonstração do item (i). Se f' passa de positiva para negativa em c, então existem $x_0, x_1 \in (a, b)$, $x_0 < c < x_1$, tais que $f'(x) > 0$ se $x \in (x_0, c)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (c, x_1)$. Da Proposição 2.1. temos que f é crescente em $[x_0, c]$ e decrescente em $[c, x_1]$, daí temos que $f(c)$ é valor máximo de f no intervalo $[x_0, x_1]$ que contém c.
Demonstração do item (ii). Se f' passa de negativa para positiva em c, então de modo análogo ao que foi feito no item (i) existe um intervalo $[x_0, x_1]$ contendo c tal que f é decrescente em $[x_0, c]$ e crescente em $[c, x_1]$. logo, $f(c)$ é valor mínimo no intervalo $[x_0, x_1]$.
Demonstração do item (iii). Seja $I \subset [a, b]$ um intervalo contendo c. Como f' não muda de sinal em c então existe um intervalo $[x_0, x_1]$ contendo c tal que f é crescente (respectivamente, decrescente) em $[x_0, c]$ e permanece crescente (respectivamente, decrescente) em $[c, x_1]$. Aproximando x_0 e x_1 de c o quanto for necessário, podemos supor que $[x_0, x_1] \subset I$. Daí, $f(c)$ não pode assumir valor nem de máximo nem de mínimo em I. $\square$

Exemplo 2.7. *Encontre os mínimos e máximos locais da função $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.*
Solução: *Pela regra do quociente a derivada da função é*

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Logo,

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ e } x = 1.$$

Assim, concluímos que:

(i) $x = -1$ *é mínimo local, pois em* $x = -1$ *podemos verificar que a derivada* f' *passa de negativa para positiva. De fato,* $f'(x) < 0$*, se* $x < -1$ *e* $f'(x) > 0$ *se* $x > -1$

(ii) $x = 1$ *é máximo local, pois em* $x = 1$ *podemos mostrar que a derivada* f' *passa de positiva para negativa. De fato,* $f'(x) > 0$*, se* $x < 1$ *e* $f'(x) < 0$*, se* $x > 1$*.*

Proposição 2.3. (Teste da derivada segunda) *Seja* f *uma função derivável num intervalo aberto* I*, e seja* $c \in I$ *tal que* $f'(c) = 0$*. Se* $f''(c)$ *existe temos as seguintes afirmações.*

(i) Se $f''(c) < 0$*, então* f *possui um máximo local em* c*.*

(ii) Se $f''(c) > 0$*, então* f *possui um mínimo local em* c*.*

Observação 2.2. *Se* $f''(c) = 0$ *o teste da derivada segunda é inconclusivo.*

Demonstração do item (i). Supondo que $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$. Temos

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0.$$

Daí, existe um intervalo (a, b) contendo c tal que $\dfrac{f'(x)}{x - c} < 0$ para quaisquer $x \in (a, b)$. Portanto,

$$a < x < c \Rightarrow x - c < 0 \quad \text{e} \quad \frac{f'(x)}{x - c} < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \tag{2.3}$$

$$c < x < b \Rightarrow x - c > 0 \quad \text{e} \quad \frac{f'(x)}{x - c} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0. \tag{2.4}$$

Portanto, f passa de crescente para decrescente em c. Assim, pelo teste da derivada primeira, f tem máximo local em $x = c$. A demonstração do item (ii) ocorre de maneira análoga. □

Exemplo 2.8. *Encontre os valores de máximo e mínimo local da função* $f(x) = x^3 - x^2$*.*

Solução: *Derivando a função obtemos* $f'(x) = 3x^2 - 2x$*. Assim,*

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad ou \quad x = \frac{2}{3},$$

ou seja, os pontos críticos de f *são* $x = 0$ *e* $x = \dfrac{2}{3}$*. Derivando mais uma vez obtemos* $f''(x) = 6x - 2$*. Pelo teste da derivada segunda temos*

(i) $\quad f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow x = 0$ *é máximo local.*

e

$(ii)\quad f''\left(\frac{2}{3}\right) = 6\left(\frac{2}{3}\right) - 2 = 2 > 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ *é mínimo local.*

Exemplo 2.9. *Determinar os máximos e mínimos locais para* $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$ *e* $h(x) = -x^4$.

Solução: *As três funções são deriváveis em todo o domínio e*

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0,$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0,$$

e

$$h'(x) = 0 \Rightarrow -4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Note que, nos três casos, $x = 0$ *é o único ponto crítico. Além disso, é fácil observar que* $f''(0) = g''(0) = h''(0) = 0$. *No entanto,* $x = 0$ *não é mínimo nem máximo local de* f, *é ponto de mínimo local de* g *e ponto de máximo local de* h. *Note que, não podemos aplicar o teste da derivada segunda quando* $f''(c) = 0$, *pois o teste é inconclusivo. Portanto, nos três casos devemos aplicar o teste da derivada primeira, pois este pode ser usado em qualquer caso.*

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo apresentamos de algumas aplicações da derivada, dentre elas, problemas de otimização, regra de L'Hôpital e aproximação por polinômios. As definições, os teoremas, e os exemplos apresentados nesse capítulo são oriundos das referências [2], [5] e [11].

3.1 Problemas de otimização

Uma das aplicações da derivada mais usadas no Cálculo são os problemas de otimização. São problemas modelados por uma função buscando obter os valores de máximo ou mínimo da função. Nesta seção daremos alguns exemplos de problemas de otimização, em várias áreas do conhecimento, para mostrar como o Cálculo pode ser aplicado nos mais diversos campos do conhecimento humano.

Exemplo 3.1. *Encontre dois números não negativos cuja soma é* 30 *e tal que o produto de um dos números pelo quadrado do outro é máximo.*

Solução: *Sejam x e y os números. Então $x + y = 30$ e queremos maximizar $P = xy^2$, onde devemos ter $0 < x, y < 30$, pois x e y são não negativos. Fazendo, $y = 30 - x$, obtemos*

$$P(x) = x(30 - x)^2 = x^3 - 60x^2 + 900x.$$

A derivada de $P(x)$ é

$$P'(x) = 3x^2 - 120x + 900.$$

Daí,

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 120x + 900 = 0 \Rightarrow x = 10 \ \text{ou} \ x = 30,$$

ou seja, os pontos críticos de P são $x = 10$ e $x = 30$. Como $x = 30$ deve ser desprezada, resta $x = 10$, (pois $x < 30$). Pelo teste da derivada segunda,

$$P''(x) = 6x - 120 \Rightarrow P''(10) = 6 \cdot 10 - 120 = -60 < 0,$$

logo $P = xy^2$ é máximo para $x = 10$.

Exemplo 3.2. *Uma fazenda produz laranjas e ocupa uma certa área com 50 laranjeiras. Cada laranjeira produz 600 laranjas por ano. Verificou-se que para cada nova laranjeira plantada nesta área, a produção por árvore diminui de 10 laranjas. Quantas laranjas devem ser plantadas no pomar de forma a maximizar a produção?*

Solução: *Para x novas árvores plantadas, o número total de árvores passa a ser $50 + x$, mas a produção individual passa ser de $600 - 10x$ laranjas por árvore, totalizando uma produção de*

$$P(x) = (50 + x)(600 - 10x) = 30000 + 100x - 10x^2$$

laranjas por ano na fazenda.

Devemos ter $x > 0$ (não se pode plantar um número negativo de árvores) e, como a produção não pode ser negativa, devemos ter

$$600 - 10x > 0 \Rightarrow x < 60.$$

Derivando $P(x)$, obtemos

$$P'(x) = 100 - 20x \ \text{e} \ P''(x) = -20.$$

Logo, há um ponto crítico em

$$100 - 20x = 0 \Rightarrow x = 5.$$

Este ponto será de máximo, pois $P''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, deve-se plantar 5 novas árvores para maximizar a produção.

Exemplo 3.3. *Um reservatório de água tem o formato de um cilindro sem tampa superior e tem uma superfície total de $36\pi m^2$. Encontre os valores da altura h e raio da base r que maximizam a capacidade do reservatório.*

Solução: *O volume do cilindro é dado pelo produto da área da base pela altura. Logo, $V = \pi r^2 h$. A superfície lateral do cilindro é $S = 2\pi rh$ e a área da base é πr^2, logo calculando a superfície total, temos*

$$2\pi rh + \pi r^2 = 36\pi \Rightarrow h = \frac{36 - r^2}{2r},$$

o que resulta em

$$V = V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \frac{36 - r^2}{2r} = \frac{\pi r(36 - r^2)}{2}.$$

Derivando $V(r)$, obtemos

$$V'(r) = \frac{3\pi}{2}(12 - r^2) \;\; e \;\; V''(r) = -3\pi r.$$

Os pontos críticos de V são obtidos fazendo

$$V'(r) = 0 \Rightarrow \frac{3\pi}{2}(12 - r^2) = 0 \Rightarrow r = 2\sqrt{3} \;\; ou \;\; r = -2\sqrt{3}.$$

Como somente os valores positivos de r fazem sentido para o problema, o único candidato a solução é $r = 2\sqrt{3}$. Como $V''(r) < 0$ para $r > 0$, pelo teste da derivada segunda o volume máximo é atingido para $r = 2\sqrt{3}$.

3.2 Regra de L'Hôpital

A Regra de L'Hôpital é o método usado para solucionar indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. As demais formas de indeterminações podem ser transformadas em indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ através de transformações algébricas simples. Para provar a Regra de L'Hôpital usaremos o resultado a seguir que estende o Teorema do Valor Médio.

Teorema 3.1. (Teorema do Valor Médio de Cauchy) *Sejam f e g funções contínuas num intervalo $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$ então existe*

$c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{3.1}$$

Demonstração. Inicialmente, note que se $g(b) = g(a)$, então, pelo Teorema de Rolle, deve existir $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, o que contraria as hipóteses do teorema. Logo, $g(b) \neq g(a)$. Seja agora h uma função definida no intervalo $[a, b]$ por

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Como f e g são contínuas em $[a, b]$, então h também é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e

$$h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x).$$

Mas

$$h(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$$

e

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b).$$

Logo, $h(a) = h(b)$. Aplicando o Teorema de Rolle à função h chegamos a conclusão de que existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Logo,

$$h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0.$$

Considerando que $g'(c) \neq 0$ por hipótese e que $g(b) - g(a) \neq 0$, resulta que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

e assim concluímos a demonstração. □

Teorema 3.2. (Regra de L'Hôpital) *Sejam f e g funções deriváveis num intervalo aberto I, exceto possivelmente num ponto $a \in I$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, $g'(x) \neq 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$ e $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou é $\pm\infty$, então*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3.2}$$

O mesmo é válido para limites laterais e limites no infinito, ou seja, quando a é substituído por a^+, a^-, ∞ e $-\infty$. No caso de limites no infinito o intervalo I ocorre da seguinte maneira, (b, ∞) para $x \to \infty$ e $(-\infty, b)$ para $x \to -\infty$.

Demonstração. Vamos fazer inicialmente, a demonstração dos limites laterais à direita $x \to a^+$. Suponha que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$ e que $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ exista. Então, vamos provar que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Considere funções F e G definidas em I por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases} \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq a \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}$$

Seja $x \in I$, com $x > a$. Como f e g são deriváveis em $I \setminus \{a\}$, então F e G são deriváveis no intervalo $(a, x]$ e, portanto, são contínuas em $(a, x]$. Mas F e G também são contínuas em a, pois

$$\lim_{x\to a^+} F(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = F(a) \ \text{ e } \lim_{x\to a^+} G(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0 = G(a).$$

Daí, temos que F e G são contínuas em $[a, x]$, são deriváveis em (a, x) assim, vale que $G'(x) \neq 0$ em (a, x) (pois, por hipótese, o mesmo vale para g). Logo, satisfazem as condições do Teorema do Valor Médio de Cauchy e existe $c_x \in (a, x)$ tal que

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)}.$$

Note que $F(a) = G(a) = 0$, $F'(c_x) = f'(c_x)$ e $G'(c_x) = g'(c_x)$ para $c_x \in (a, x)$. Portanto,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Agora, aplicando o limite quando $x \to a^+$ nessa equação, como $c_x \in (a, x)$, temos que $c_x \to a^+$, o que resulta em

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

assim, concluímos a demonstração para o limite lateral à direita $x \to a^+$. A prova para o limite lateral à esquerda ocorre de maneira análoga e assim podemos considerar provado o caso dos limites $x \to a^+$, $x \to a^-$ e $x \to a$.

Vamos provar agora a Regra de L'Hôpital para limites no infinito, ou seja, $x \to \pm\infty$.

Sejam as funções $F, G : \left(0, \dfrac{1}{b}\right) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \text{ e } G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right).$$

Então,

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{t\to 0^+} G(t) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Usando a Regra da Cadeia temos que, F e G são deriváveis em $\left(0, \dfrac{1}{b}\right)$ com

$$F'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right) \text{ e } G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right).$$

Aplicando a parte que já foi provada da Regra de L'Hôpital, temos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{-\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2 g'\left(\frac{1}{t}\right)}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},
\end{aligned}$$

assim, concluímos a demonstração do teorema. $\square$

Exemplo 3.4. *Calcule* $\lim_{x\to 0} \dfrac{sen\, px}{sen\, qx}$*, em que* p*,* $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*.*

Solução: *Como* $\lim_{x\to 0} sen\, px = 0$ *e* $\lim_{x\to 0} sen\, qx = 0$*, o limite é do tipo* $\dfrac{0}{0}$*. Aplicando a Regra* *de L'Hôpital temos:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,px}{sen\,qx}=\lim_{x\to 0}\frac{(sen\,px)'}{(sen\,qx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{p\,cos\,px}{q\,cos\,qx}=\frac{p}{q}.$$

Exemplo 3.5. *Usando a Regra de L'Hôpital, calcule* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}$.

Solução: *Como* $\lim\limits_{x\to 0} senx = 0$ *e* $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, *então o limite é da forma indeterminada* $\dfrac{0}{0}$. *Pela Regra de L'Hôpital temos:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(senx)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{cosx}{1}=cos\,0=1.$$

Exemplo 3.6. *Calcule* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$.

Solução: *Como* $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x-2)=0$ *e* $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+x-3)=0$, *logo o limite é do tipo* $\dfrac{0}{0}$. *Aplicando a Regra de L'Hôpital temos:*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-2)'}{(2x^2+x-3)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{4x+1}=\frac{3}{5}.$$

3.2.1 Indeterminações da forma $\dfrac{\infty}{\infty}$

Quando $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$, dizemos que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ é uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Teorema 3.3. *Sejam f e g funções deriváveis num intervalo aberto I, exceto possivelmente num ponto $a\in I$. Se* $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}|g(x)|=\infty$, $g'(x)\neq 0$ *para* $x\in I\backslash\{a\}$ *e* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe então*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

O mesmo acontece no caso dos limites laterais, no caso dos limites no infinito e no caso em que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\pm\infty$.

Demonstração: Ver referência [2].

Exemplo 3.7. *Calcule* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{3x^2-2x+2}$.

Solução: *Este limite é uma indeterminação do tipo* $\dfrac{\infty}{\infty}$. *Aplicando a Regra de L'Hôpital* *temos:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x-1}{3x^2-2x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x+3}{6x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

3.2.2 Outras formas indeterminadas

A Regra de L'Hôpital pode ser utilizada para resolver outras indeterminações transformando-as em indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Sejam $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, logo, $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ é uma indeterminação do tipo $0\cdot\infty$. Fazendo

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

reduzimos aos casos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, e utilizamos o que for mais conveniente.

Exemplo 3.8. *Calcule o limite* $\lim_{x\to\infty} x\,tan\frac{1}{x}$.

Solução: *Usando a continuidade da função tangente temos que,* $\lim_{x\to\infty} tan\frac{1}{x} = tan \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = tan\,0 = 0$. *Logo,* $\lim_{x\to\infty} x\,tan\frac{1}{x}$ *é uma indeterminação do tipo* $0\cdot\infty$. *Uma solução é a seguinte:*

$$\lim_{x\to\infty} x\,tan\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{tan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}sec^2\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} sec^2\frac{1}{x} = sec^2 0 = 1.$$

Note que transformamos o limite dado na forma indeterminada $\frac{0}{0}$ *e aplicamos a Regra de L'Hôpital.*

Sejam $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ logo, $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))$ é uma indeterminação do tipo $\infty-\infty$. Fazendo

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

reduzimos ao caso $\frac{0}{0}$.

Exemplo 3.9. *Calcule o limite* $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{sen\,x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Solução: *Note que* $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{sen\,x}=\infty$ *e* $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\infty$ *logo, temos uma indeterminação do tipo* $\infty-\infty$. *Mas*

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{sen\,x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-sen\,x}{x\,sen\,x},$$

que é uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. *Aplicando a Regra de L'Hôpital temos*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{x-sen\,x}{x\,sen\,x} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1-cos\,x}{sen\,x+x\,cos\,x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{sen\,x}{cos\,x+cos\,x-x\,sen\,x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{sen\,x}{2cos\,x-x\,sen\,x}=\frac{0}{2}=0.\end{aligned}$$

Note que aplicamos a Regra de L'Hôpital duas vezes.

3.3 Aproximações por polinômios

A Série de Taylor de uma função fornece uma aproximação dessa função por meio de polinômios. Na fórmula de Taylor trataremos da $n-\textit{ésima}$ derivada de f, denotada por $f^{(n)}$. (Ver Observação 11, Página 13)

3.3.1 Polinômios de Taylor

Seja $f: I\to\mathbb{R}$ definida no intervalo aberto I e n vezes derivável em $a\in I$. O polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto a é o polinômio

$$p(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+...+c_n(x-a)^n \qquad (3.3)$$

de modo que as derivadas de ordem $k\leq n$ de $p(x)$ em $x=a$ coincidem com as derivadas de mesma ordem de $f(x)$ em $x=a$. Os coeficientes do polinômio de Taylor podem ser determinados facilmente em função das derivadas de f assim,

$$p(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+...+c_n(x-a)^n,$$

fazendo a substituição de x por a, temos

$$f(a) = p(a) = c_0.$$

Derivando p, vamos obter:

$$p'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + ... + nc_n(x-a)^{n-1},$$

o que mostra que

$$f'(a) = p'(a) = c_1.$$

Se $n > 1$, podemos derivar novamente o polinômio para obter

$$p''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2(x-a) + 4 \cdot 3(x-a)^2 + +... + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2},$$

o que mostra que

$$f''(a) = p''(a) = 2c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{f''(a)}{2!}.$$

Agora, derivando mais uma vez e substituindo $x = a$, temos

$$f'''(a) = p'''(a) = 3!c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}.$$

Derivando sucessivamente, obtemos o valor dos coeficientes:

$$c_k = \frac{f^k(a)}{k!}, \text{ para } k \leq n.$$

Exemplo 3.10. *Encontre os polinômios de Taylor da função* $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *em* $x = 0$.

Solução: *Note que, as derivadas de* f *são:*

(i) $\quad f'(x) = ((1-x)^{-1})' = -1(1-x)^{-2}(-1) = (1-x)^{-2}$,

(ii) $\quad f''(x) = ((1-x)^{-2})' = -2(1-x)^{-3}(-1) = 2(1-x)^{-3}$,

(iii) $\quad f'''(x) = (2(1-x)^{-3})' = -2 \cdot 3(1-x)^{-4}(-1) = 2 \cdot 3(1-x)^{-4}$.

Perceba que agora fica fácil ver que a $k-$*ésima derivada de* $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *para* $x \neq 1$ *é*

$$f^k(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Daí, o $k-$ésimo coeficiente do polinômio de Taylor em $x = 0$ é

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\frac{k!}{(1-0)^{k+1}}}{k!} = 1.$$

Logo, o polinômio de Taylor de ordem k em $x = 0$ é o polinômio

$$p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^k.$$

Note que o polinômio $p(x)$ é a soma dos $k+1$ primeiros termos da (PG) de termo inicial 1 e razão x. Se $0 < x < 1$, então a soma dos termos dessa (PG) infinita é

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}.$$

3.3.2 Série de Taylor

Definição 3.1. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função infinitas vezes derivável em I e seja $a \in I$. A série infinita*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + ...$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

é denominada série de Taylor da função f no ponto a.

Observação 3.1. *Quando $x = 0$ a série de Taylor é também chamada série de Maclaurin.*

Exemplo 3.11. *Obtenha a série de Maclaurin da função $f(x) = sen\, x$.*

Solução: *Derivando $sen\, x$ e avaliando em $x = 0$, obtemos:*

(i) $\quad f(x) = sen\, x \Rightarrow f(0) = 0;$

(ii) $\quad f'(x) = cos\, x \Rightarrow f'(0) = 1;$

(iii) $\quad f''(x) = -sen\, x \Rightarrow f''(0) = 0;$

(iv) $\quad f'''(x) = -cos\, x \Rightarrow f'''(0) = -1;$

(v) $\quad f^{(4)}(x) = sen\, x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0.$

Se continuarmos derivando sucessivamente, percebemos que os valores da derivada se repetem em ciclos de período 4 de modo que $f^{(n)}(0) = 0$ para n par e $f^{(n)}(0)$ alterna os *valores* 1 *e* -1 *para* n *ímpar. Logo, a série de Maclaurin da função* $f(x) = sen\, x$ *é*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}}{4!}x^4 + ...$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Assim, concluímos o exemplo.

3.4 Problemas em outras áreas

Nesta seção apresentamos dois problemas envolvendo derivada em outras áreas, mais precisamente, na Física e na Economia.

Definição 3.2. (Velocidade instantânea) *Velocidade obtida a partir da velocidade média reduzindo o intervalo de tempo* Δt *tornando-o próximo de zero. À medida que* Δt *vai diminuindo a velocidade média vai se aproximando de um determinado limite, isto é, a velocidade instantânea.*

$$v = \lim_{t0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

Exemplo 3.12. *Suponha que uma bola é solta a partir de um ponto de observação a* $100m$ *do solo. Determine a velocidade da bola após um segundo da largada.*

Solução: *De acordo com Galileu a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo* t *em que permaneceu em queda:* $s(t) = 4,9t^2$*, onde* t *é medido em segundos,* s *em metros e* $4,9$ *é a constante de proporcionalidade, igual a metade da aceleração da gravidade. Temos dificuldade de encontrar a velocidade no instante* $t = 1s$*. Porém podemos contornar esse problema considerando a velocidade média por breve intervalo de tempo a partir do instante* $t = 1$*:*

$$Velocidade\ média = \frac{distância\ percorrida}{tempo\ decorrido} = \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \frac{4,9t^2 - 4,9(1)^2}{t - 1},$$

passando o limite, com $t \to 1$ *temos, a velocidade instantânea, isto é,*

$$v(t) = \lim_{t \to 1} \frac{4,9t^2 - 4,9(1)^2}{t - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{4,9(t+1)(t-1)}{t - 1} = \lim_{t \to 1} 4,9(t+1) = 9,8\ m/s.$$

Assim, concluímos o exemplo.

Definição 3.3. (Custo marginal) *É a taxa de variação do custo total C, por unidade de variação da quantidade produzida q, isto é,*

$$CM(q) = C'(q).$$

Definição 3.4. (Rendimento marginal) *É a taxa de variação do rendimento total R, por unidade de variação da demanda q, isto é,*

$$RM(q) = R'(q).$$

Exemplo 3.13. *(Custo e rendimento marginais.)*
Vamos supor que o custo seja

$$c(x) = x^3 - 3x^2 + 15x$$

dólares para produzir x aquecedores quando são produzidos de 8 a 30 e que

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

represente o rendimento da venda de x aquecedores. Sua loja produz 10 aquecedores por dia. Qual será o custo adicional aproximado para produzir um aquecedor a mais por dia e qual o aumento estimado no rendimento na venda de 11 aquecedores por dia?
Solução: *O custo para produzir um aquecedor a mais, quando são produzidos 10 por dia, é de aproximadamente $c'(10)$:*

$$c'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 15x) = 3x^2 - 6x + 15,$$

$$c'(10) = 3(100) - 12(10) + 15 = 195.$$

O custo adicional será de aproximadamente 195 dólares. O rendimento marginal é

$$r'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 12x) = 3x^2 - 6x + 12.$$

A função rendimento marginal estima um aumento no rendimento como resultado da venda de uma unidade adicional. Se você vende atualmente 10 *aquecedores por dia, pode esperar que seu rendimento aumente em torno de*

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = 252 \ \text{\textit{dólares}}$$

se a venda aumentar para 11 *aquecedores por dia.*

Considerações Finais

A realização deste trabalho contribuiu ricamente no aprofundamento e amadurecimento de alguns conteúdos estudados durante a graduação, especialmente a derivada de uma função, regras de derivação e as aplicações da derivada, como também limites e continuidade. Possibilitando uma visão mais ampla e, consequentemente, um melhor entendimento a respeito desses conteúdos. O que despertou o interesse em aprofundar nossos estudos a respeito do Cálculo Diferencial, em especial a derivada foi o fato de que a derivada nos possibilita resolver diversos problemas, tanto aqueles mais simples como também aqueles que apresentam um grau de complexidade mais elevado, Não apenas na matemática como também em outras áreas do conhecimento. Assim, observamos que o Cálculo Diferencial é de grande importância para o ensino da Matemática pois, permite diversas aplicações nos mais variados ramos da ciência, possibilitando a resolução de uma grande variedade de problemas e consequentemente, facilitando a compreensão e interpretação desses problemas.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, G. S. S. **Análise matemática para licenciatura**. 3ª ed. rev. e ampl. São Paulo: Blucher, 2006.

[2] BARBONI, Ayrton; PAULETTE, Walter. **Cálculo e análise**: Cálculo diferencial e integral a uma variável. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

[3] CAMINHA, Antonio. **Fundamentos de Cálculo**: Coleção PROFMAT. SBM. 1ª ed.

[4] FINNEY, Ross L. **Cálculo**. Volume 1. Tradução Paulo Boschcov. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2002.

[5] FLEMMING, Diva Marília. **Cálculo A**: funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

[6] LIMA, Elon Lages. **Análise real**. volume 1. Funções de uma variável. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[7] LIMA, Paulo Cupertino de **Fundamentos de análise** 1. Belo Horizonte: CAED - UFMG, 2013.

[8] NERI, Cassio **Curso de Análise Real**. 1 ed. Rio de Janeiro. 163p.

[9] STEWART, James. **Cálculo**, Volume 1. 5. ed. São Paulo; Pioneira Thonson Learning. 2006.

[10] SWOKOWSKI, Earl Willian, 1926 **Cálculo com geometria analítica**. Tradução Alfredo Alves de Farias. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

[11] WEIR, Maurice, D. **Cálculo** (George B. Thomas Jr). Volume 1. Tradução Thelma Guimarães e Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. São Paulo: Addison Wesley, 2009.