



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

ÁLLISSON HENRIQUE LEITE CABRAL

O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS

CAMPINA GRANDE – PARAÍBA

2017

ÁLLISSON HENRIQUE LEITE CABRAL

O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para obtenção do título de graduado no curso de licenciatura em matemática da Universidade Estadual da Paraíba.

Orientadora: Prof^ª. Ms. Thiciany Matsudo Iwano.

CAMPINA GRANDE – PARAÍBA

2017

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

C117t Cabral, Állisson Henrique Leite.
O Teorema de Euler para poliedros [manuscrito] / Állisson Henrique Leite Cabral. - 2017.
69 p. : il. color.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)
- Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação: Prof. Me. Thiciany Matsudo Iwano, Departamento de Matemática".

1. Teorema de Euler. 2. Poliedros. 3. Homeomorfismo. I.
Título.

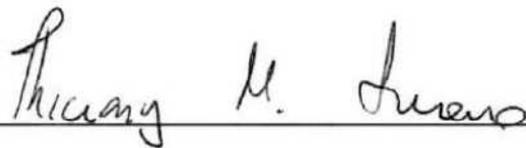
21. ed. CDD 516

ÁLLISSON HENRIQUE LEITE CABRAL

O TEOREMA DE EULER PARA POLIEDROS

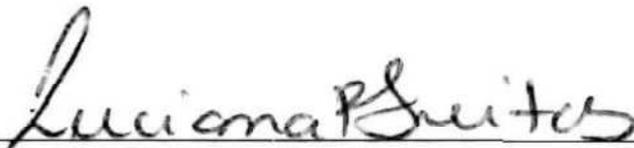
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para obtenção do título de graduado no curso de licenciatura em matemática da Universidade Estadual da Paraíba.

Aprovado em 03/08/2017.



Prof^a. Ms. Thiciany Matsudo Iwano (UEPB)

Orientadora



Prof^a. Dra. Luciana Roze de Freitas (UEPB)

Examinadora



Prof. Ms. Fernando Luiz Tavares da Silva (UEPB)

Examinador

DEDICATÓRIA

Dedico, primeiramente, a Deus, que iluminou meus passos durante toda esta caminhada.

A toda minha família e amigos, que sempre estiveram comigo me dando forças para continuar.

A todos os meus professores, que contribuíram para a construção do conhecimento que tenho hoje.

À minha esposa, que sempre me ensinou a ser confiante e nunca desistir.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por toda a sabedoria concedida e por todas as bênçãos recaídas sobre a minha vida. Foi ele o responsável por motivar em meu coração o amor que tenho pela matemática e por me guiar durante toda esta jornada.

A toda minha família e amigos, que sempre estiveram ao meu lado me incentivando e dando conselhos que foram essenciais para a realização deste trabalho. Sou grato por todo o afeto e consideração que todos sempre tiveram para comigo.

A todos os meus professores, que compartilharam comigo o seu conhecimento e deixaram em mim uma parte do que são, o que foi de fundamental importância para a formação da pessoa que sou hoje. Mais do que conhecimento científico, vocês me passaram experiência de vida e me mostraram o que significa ser íntegro. Sou grato, especialmente, à minha orientadora, que sempre se mostrou ser uma ótima professora e amiga; que durante a realização do trabalho, sempre esteve disponível e disposta a me ajudar no que fosse necessário, contribuindo imensamente para a construção das ideias abordadas, sem falar nos conselhos, que certamente vou levar comigo tanto para a vida profissional como pessoal.

À minha esposa, que me mostrou que quando queremos conquistar algo, devemos enfrentar as batalhas que aparecem em nosso caminho com muita paciência e humildade, mas sempre com a certeza de que vamos conseguir alcançar nossos objetivos; reconhecendo que sem aqueles que estão ao nosso lado nos dando força, nada teria acontecido.

“Como o tecido do universo é o mais perfeito e fruto do trabalho do mais sábio criador, nada acontece no universo sem que alguma lei de máximo e mínimo apareça.”

(Leonhard Euler)

RESUMO

Neste trabalho, fazemos um estudo sobre o Teorema de Euler para poliedros. Mostramos que ele sempre é válido para poliedros convexos, mas nem sempre, para poliedros não convexos. Evidenciamos todas as definições e resultados pertinentes ao estudo. Apresentamos uma demonstração do Teorema de Euler escrita por Cauchy e aperfeiçoada por Elon Lages Lima, feita especialmente para poliedros não convexos. Apresentamos, também, uma generalização do Teorema de Euler, a qual é conhecida como Característica de Euler-Poincaré e aborda o homeomorfismo de figuras. Finalmente, ensinamos a construção do poliedro n -tórico com a utilização do Geogebra.

Palavras-chave: Teorema de Euler, Poliedros, Homeomorfismo.

ABSTRACT

In this work, we study the Euler Theorem for polyhedra. We have shown that it is always valid for convex polyhedra, but not always, for nonconvex polyhedra. We show all definitions and results relevant to the study. We present a demonstration of Euler's Theorem written by Cauchy and perfected by Elon Lages Lima, made especially for non-convex polyhedra. We also present a generalization of Euler's Theorem, which is known as the Euler-Poincaré Characteristic and approaches the homeomorphism of figures. Finally, we teach the construction of the n -toric polyhedron with the use of Geogebra.

Keywords: Euler's Theorem, Polyhedra, Homeomorphism.

Lista de figuras

1 Leonard Euler	14
2 Augustin-Louis Cauchy	15
3 Jules Henri Poincaré	16
4 Elon Lages Lima	17
1.1 Diagonais traçadas de um mesmo vértice	19
1.2 É poliedro	20
1.3 Não é poliedro	20
1.4 Poliedro convexo	20
1.5 Poliedro não convexo	20
1.6 Projeção do poliedro P sobre o plano G	22
1.7 Sombra das faces iluminadas	23
1.8 Planificação do poliedro P	25
1.9 Regiões determinadas	25
1.10 Polígono de n lados determinando duas regiões no plano.	26
1.11 Decomposição inicial acrescida de uma nova região	26
2.1 Prisma sem uma de suas faces laterais	28
2.2 Arestas livres do poliedro destacadas em verde	29
2.3 Subpoliedros do poliedro P	29
2.4 Bordo do subpoliedro Q destacado em verde	30
2.5 Subpoliedro conexo Q	30
2.6 Subpoliedro desconexo	31
2.7 Ciclos destacados em verde	31
2.8 Ciclos em verde fomentando o bordo do poliedro	32
2.9 Poliedros não convexos	32
2.10 Poliedro P	34
2.11 Poliedro P com a face pentagonal retirada, resultando no subpoliedro Q	34
2.12 Poliedro Q achatado	35
2.13 Poliedro plano Q com suas faces decompostas em triângulos.	36
2.14 Os triângulos em vermelho têm apenas uma aresta livre	37
2.15 Os triângulos em vermelho têm duas arestas livres e um vértice livre	38
2.16 Polígonos restantes em vermelho, azul e verde	39

2.17 Subpoliedro A	39
2.18 Subpoliedro formado pelas componentes conexas Q_1 e Q_2	40
2.19 Subpoliedro resultante de aplicações dos itens (1) e (2)	40
2.20 Polígonos restantes em vermelho, azul, amarelo e verde	41
2.21 Subpoliedro B	42
2.22 Subpoliedro formado pelas componentes conexas Q_1, Q_2 e Q_3	42
2.23 Subpoliedro resultante de aplicações dos itens (1) e (2)	43
2.24 Polígonos restantes em vermelho, azul e verde	44
2.25 Subpoliedro C	44
2.26 Subpoliedro resultante de aplicações dos itens (1) e (2)	45
2.27 Subpoliedro resultante de aplicações dos itens (1) e (2)	45
2.28 Polígonos restantes em vermelho e amarelo	46
2.29 Subpoliedro D	47
2.30 Subpoliedro resultante da retirada do triângulo vermelho	47
3.1 Poliedro homeomorfo à esfera	49
3.2 Poliedro homeomorfo ao um toro	50
3.3 Poliedro homeomorfo ao dois toro	50
3.4 1-tórico	51
3.5 2-tórico	51
3.6 3-tórico	52
3.7 N-tórico	53
3.8 N-tórico e 1-tórico sendo unidos	54
3.9 Vértices sobrepostos destacados em vermelho	54
3.10 Arestas acumuladas destacadas em vermelho	55
3.11 Novas arestas destacadas em verde	55
3.12 Faces acumuladas destacadas em vermelho	56
3.13 Novas faces destacadas em verde	56
3.14 (N+1)-tórico.	56
3.15 Janela de visualização inicial do GeoGebra	58
3.16 Malha	59
3.17 Eixos centralizados	59
3.18 Pontos marcados na malha	60
3.19 Construção dos polígonos	60
3.20 Base do n-tórico	61

3.21 Janelas de visualização 2D e 3D	61
3.22 Janela 3D	62
3.23 Processo de extrusão para prisma	62
3.24 Poliedro n-tórico	63
3.25 Eixos e plano retirados	63
3.26 N-tórico “limpo”	64
3.27 N-tórico com segmentos pontilhados	64
3.28 Icosaedro regular junto à sua planificação	65
3.29 Planificação do icosaedro regular	65
3.30 Pirâmide não convexa junta à sua planificação	66
3.31 Planificação da pirâmide não convexa	66
3.32 2-tórico junto à sua planificação	67
3.33 Planificação do 2-tórico	67

Sumário

Introdução	12
1 Teorema de Euler para poliedros convexos	18
1.1 Poliedros Convexos	18
1.2 Demonstração do Teorema de Euler	21
1.2.1 Demonstração por soma dos ângulos internos	21
1.2.2 Ideia da demonstração indutiva sobre o número de faces	24
2 Teorema de Euler para poliedros não convexos	28
2.1 Teorema de Cauchy	33
3 Característica de Euler-Poincaré para poliedros n-tóricos	49
3.1 Apêndice	58
3.1.1 Construção do poliedro n-tórico com o GeoGebra 5.0	58
3.1.2 Planificações	65
Considerações finais	68
Referências	69

Introdução

Desde muitos anos, estudamos o Teorema de Euler e conhecemos a sua importância para o estudo da geometria espacial. Os poliedros de Platão e seus elementos essenciais como face, vértice e aresta já começam a ser apresentados em livros destinados a séries do ensino fundamental, como em [1]; têm seu estudo intensificado no ensino médio, como em [5], em que já são apresentados alguns casos para os quais o teorema não é satisfeito; estendendo-se até o ensino superior, cujos conceitos são abordados sob a ótica da Topologia e, com isso, conseguimos entender como se dá a generalização desse resultado.

Um fato muito intrigante e que me motivou a estudar a expansão do Teorema de Euler para poliedros quaisquer foi o fato de sempre nos depararmos nos livros com o exemplo clássico de um poliedro não convexo que possui um buraco para o qual não é satisfeita a relação de Euler; mais tarde veremos que tal poliedro se chama 1-tórico e entenderemos porque isso ocorre. Sempre senti a falta de uma explicação por que aquilo acontecia, sendo que para outros poliedros não convexos valia a relação. Partiu daí a minha curiosidade em descobrir sobre quais poliedros podemos aplicar tal relação a final.

É indiscutível a “beleza” do Teorema de Euler e a facilidade de compreendermos o seu enunciado, fator que o torna interessante e prazeroso de ser estudado, sem falar nas várias aplicações que podemos considerar, como o estudo dos grafos, por exemplo. Faremos algumas deformações e modificações em alguns poliedros e veremos que a topologia não leva em consideração conceitos como distâncias, ângulos, áreas e volumes. Ou seja, mesmo realizadas deformações nas figuras, serão preservadas as suas características topológicas.

Antes de qualquer coisa, vamos entender como tudo começou. Após ter descoberto a relação entre o número de faces, arestas e vértices de um poliedro, Euler, em 1750, escreve uma carta para o seu amigo Goldbach, para só depois fazer a publicação do trabalho propriamente dita. Nessa carta, Euler afirma não conseguir demonstrar o teorema com todo o rigor matemático necessário, enfatizando a importância daquele resultado. Por outro lado, antes mesmo de Euler, René Descartes (1576 – 1650) já havia percebido algo sobre tal relação, mas não formalizou o seu trabalho como Euler. Apenas oito anos após ter enviado a carta a Goldbach, Euler de fato publica o trabalho sobre as propriedades que os poliedros apresentavam, no entanto, ele ainda apresentava algumas limitações e imprecisões. Mais tarde, Adrien Marie Legendre (1752 – 1833), em seu trabalho *Éléments de Géométrie*, publicado em 1794, faz uma demonstração mais trivial para o Teorema de Euler. E só em

1813, o Teorema de Euler ganha uma generalização, com o artigo intitulado *Recherches Sur Les Polyédres Premier Mèmoire* publicado no *Journal de l'École Polytechnique* por Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857). Nesse mesmo período, Simon Antoine Jean Lhuillier (1750 – 1840) estuda os casos em que a relação de Euler falha, e publica o artigo *Mémoire Sur La Polyédrométrie* em *Annales de Mathématiques 3*. Finalmente, Jules Henri Poincaré (1854 – 1912) se consolida como o primeiro matemático a compreender que o Teorema de Euler era um problema de topologia, considerada uma extensão da geometria e que estuda os espaços topológicos, mas sem deixar de lado a intuição geométrica elementar.

Assim, percebemos que o Teorema de Euler foi discutido por vários matemáticos importantes, contribuindo juntos para um estudo mais geral, a Característica de Euler-Poincaré, que não se limita mais apenas aos poliedros convexos, servindo para todos os homeomorfos à esfera e caracterizando uma constante inteira para os poliedros que apresentam buracos, expandindo o Teorema de Euler para um poliedro qualquer. Veremos que quando formos demonstrar o resultado da Característica de Euler-Poincaré, precisaremos utilizar uma nova definição para poliedros, concedida por Cauchy, e que é um pouco mais geral do que a que normalmente é apresentada em livros didáticos do ensino médio.

Exibimos as definições e os resultados pertinentes que serão utilizados nas demonstrações dos teoremas. Está claro que o principal resultado que iremos demonstrar neste trabalho é a extensão do Teorema de Euler para poliedros não convexos. Essa versão é escrita por Elon Lages Lima em [7], mas procuramos reescrevê-la de uma forma mais lúdica e intuitiva, com figuras, em nosso trabalho. Tal versão é denominada Teorema de Cauchy.

A organização do nosso trabalho se dá da seguinte maneira. No primeiro capítulo, provamos o Teorema de Euler para poliedros convexos sob duas perspectivas distintas: uma utilizando a soma dos ângulos internos das faces do poliedro e outra usando indução sobre o número de faces do poliedro. No segundo capítulo, estudamos a aplicação do Teorema de Euler para poliedros não convexos e mostramos que ele ainda é válido, mas apenas sob algumas hipóteses. E no terceiro capítulo, abordamos a expansão do Teorema de Euler a partir da Característica de Euler-Poincaré e ensinamos a construir o poliedro n -tórico com a utilização do GeoGebra, um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra, permitindo-nos uma melhor compreensão do que estamos estudando a partir da visualização.

A seguir, trazemos a bibliografia de quatro grandes matemáticos que contribuíram para a construção do Teorema de Euler e das mais variadas áreas da matemática, sendo os seus estudos, fundamentais para a escrita deste trabalho.

Euler



Figura 1: Leonhard Euler.

O suíço Leonhard Euler nasceu na Basileia em 1707, ensaiou uma carreira no campo da teologia, mas encontrou sua verdadeira vocação na matemática, tornando-se um dos matemáticos mais produtivos da história, estendendo seus conhecimentos para os campos da física, astronomia e química.

Em 1727, com apenas 20 anos de idade, Euler foi indicado membro da Academia de São Petersburgo pelos irmãos Daniel e Nicolaus Bernoulli. Mais tarde com a volta de Daniel ao seu país de origem, Euler passou a ocupar a cadeira de matemática da Universidade da Basileia, tornando-se o “cabeça” da seção de matemática da Academia. Após permanecer na Academia por 14 anos, Euler aceitou um convite de Frederico, o Grande, para chefiar a seção de matemática da Academia de Berlim, onde permaneceu por mais 25 anos. Porém, com sua simplicidade e modéstia, Euler não correspondeu às expectativas de Frederico de sofisticação, não repetindo o prestígio que tivera alcançado na Rússia.

Mas em 1766, a insatisfação de Euler na Academia de Berlim aliada às boas lembranças vividas na Rússia levaram-no a aceitar o convite de Catarina, a Grande, para retornar à Academia de São Petersburgo, onde ficaria por mais 17 anos, até que falecesse subitamente em 1783, aos 76 anos, enquanto tomava chá na companhia de um de seus netos. O interessante é que sua produtividade não foi completamente prejudicada com a infelicidade de ficar completamente cego quando voltara para São Petersburgo, até mesmo porque ele já estava cego do olho direito desde 1735.

Cauchy



Figura 2: Augustin-Louis Cauchy.

O francês Augustin-Louis Cauchy nasceu em Paris em 1789, recebeu os primeiros ensinamentos de seu pai e depois ingressou na École Centrale du Panthéon, onde mostrou muita facilidade com os estudos clássicos. Em 1805, ganhou a admiração de Lagrange e Laplace após ingressar na Escola Politécnica. Almejando se preparar para se tornar engenheiro civil, dois anos mais tarde, matriculou-se na École des Ponts e Chaussées, porém, orientado por Lagrange e Laplace, decidiu abandonar a engenharia civil em favor da ciência pura e aceitou um cargo de professor na Escola Politécnica.

Cauchy, considerado o mais importante analista da primeira metade do século XIX, escreveu extensiva e profundamente tanto sobre matemática pura como sobre matemática aplicada, equiparando-se com Euler em termos de volume de produção. Apesar da grande quantidade de trabalhos realizados, Cauchy foi bastante criticado por algumas irregularidades apresentadas em suas produções. Um fato curioso é que, em 1835, a Academia de Ciências começou a publicar seus *Comptes Rendus*, jornal para o qual Cauchy começou a escrever artigos, mas em uma quantidade tão exorbitante, que a própria Academia passou a limitar o número de páginas de cada artigo publicado para que houvesse uma diminuição nas despesas com impressão, o que levou Cauchy a procurar outros escoadouros para divulgar seus artigos.

As numerosas contribuições de Cauchy para a matemática avançada incluem pesquisas em convergência e divergência de séries infinitas, teoria das funções reais e complexas, equações diferenciais, determinantes, probabilidade e ainda alguns tópicos de física.

Ele morreu em 23 de maio de 1857, aos 68 anos de idade, logo após ter ido para o campo descansar e sofrer uma febre fatal oriunda das crises nos brônquios que apresentara.

Poincaré



Figura 3: Jules Henri Poincaré.

Jules Henri Poincaré, geralmente reconhecido como o principal matemático de sua época, nasceu em Nancy, na França, em 1854. Após se graduar na Escola Politécnica em 1875, graduou-se também como engenheiro de minas, em 1879, na École des Mines e, no mesmo ano, conseguiu o doutorado em ciências na Universidade de Paris. Depois disso, foi indicado professor da Universidade de Caen, no entanto, decorridos dois anos, retornou para a Universidade de Paris, agora como professor, onde ministrou aula em disciplinas das áreas de matemática e ciências, até sua morte, em 1912.

Poincaré certamente foi um universalista da matemática, publicando diversos trabalhos para a matemática aplicada, como ótica, eletricidade, telegrafia, capilaridade, elasticidade, termodinâmica, teoria do potencial, teoria quântica, teoria da relatividade e cosmogonia. Também contribuiu notavelmente para a teoria das probabilidades e mostrou bastante interesse pela geometria não euclidiana, iniciando estudos sobre topologia.

A cada ano, ele lecionava um tópico diferente da matemática pura ou aplicada, não demorando muito para que os cursos ministrados por ele fossem impressos em apostilas. Suas exposições em folhetos modestos eram compradas rapidamente e lidas de maneira ampla por pessoas das mais diferentes áreas do conhecimento; eram obras-primas que, pela lucidez da comunicação e pelo estilo envolvente, chegando a serem traduzidas para várias línguas estrangeiras. Por sua excelência literária, a Poincaré foi concedida a mais alta honra que um escritor francês pudera alcançar, sendo eleito membro da seção literária do *Institut* francês.

Elon



Figura 4: Elon Lages Lima.

Elon Lages Lima nasceu em Maceió em 1929, foi aluno do Professor Benedito de Moraes, quem lhe despertou o interesse pela matemática ainda no ginásio. Aos dezessete anos de idade, ingressou e permaneceu na Escola Preparatória de Fortaleza por um ano, iniciando sua carreira como professor no Ginásio Farias Brito e, em seguida, no Colégio Estadual do Ceará, conseguindo o primeiro lugar no concurso com apenas dezenove anos de idade. Estudou por dois anos o curso de Licenciatura em Matemática na Faculdade Católica de Filosofia do Ceará, sendo transferido, em 1952, graças a uma bolsa de estudos do CNPq, para a Universidade do Brasil, onde obteve o Bacharelado em Matemática em dezembro de 1953. Participou da fundação do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Em 1954, foi admitido na Universidade de Chicago, onde obteve os graus de mestre, em 1955, e de doutor, em 1958, escrevendo sua dissertação sobre a Topologia Algébrica. Retornando ao Brasil, foi admitido como pesquisador do IMPA, entretanto manteve seu interesse pelo desenvolvimento da matemática na Universidade Federal do Ceará, colaborando com a organização dos cursos de licenciatura, bacharelado e pós-graduação, ganhando o título de Professor *Honoris Causa*. Posteriormente, realizou alguns estudos em algumas universidades estrangeiras e retornou, em 1968, ao IMPA, onde permaneceu até 2017, ano de seu falecimento.

Seu interesse pela divulgação do conhecimento matemático o levou a escrever diversos livros e criar as coleções "Projeto Euclides" e "Coleção Matemática Universitária", bem como a escrever várias exposições na "*Revista do Professor de Matemática*" e na "*Matemática Universitária*", publicadas pela Sociedade Brasileira de Matemática.

1 Teorema de Euler para poliedros convexos

Preteritamente, apresentamos algumas definições e alguns resultados importantes, dos quais faremos uso ao longo de todo o trabalho. Serão colocadas duas definições para poliedros, pois, mais tarde, veremos que em determinadas situações será mais cabível utilizarmos uma ou outra definição, como, por exemplo, quando tratamos com a prova do Teorema de Euler para poliedros não convexos. Neste capítulo, procuramos fazer a demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos sob duas perspectivas distintas: uma utilizando a soma dos ângulos internos das faces do poliedro e outra usando indução sobre o número de faces do poliedro. Ambas as demonstrações podem ser encontradas em livros voltados para o ensino médio, como em [2].

1.1 Poliedros Convexos

Definição 1.1. (Polígono). *Seja A_1, A_2, \dots, A_n uma sequência de n pontos distintos do plano, sendo $n \geq 3$. Considere que os n segmentos de reta consecutivos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$, definidos por esses pontos, admitam as seguintes condições:*

1. *nenhum desses segmentos se intersectam, senão em seus extremos;*
2. *dois segmentos consecutivos nunca são colineares.*

Neste caso, dizemos que $A_1A_2\dots A_n$ é um polígono de n lados.

Os segmentos de reta construídos são chamados de lados do polígono, a interseção entre os mesmos é um único ponto, denominado vértice do polígono e definimos diagonal do polígono como sendo qualquer segmento de reta que une dois vértices não consecutivos.

O resultado que segue será essencial para a demonstração do Teorema de Euler sob a perspectiva da soma dos ângulos internos das faces do poliedro.

Lema 1.1. *A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é dada por:*

$$S_i = (n - 2)180^\circ.$$

Demonstração. Seja $A_1A_2A_3\dots A_n$ um polígono convexo de n lados. A partir de um vértice qualquer do polígono, trace todas as diagonais possíveis. Com isso, o nosso polígono é dividido em $n - 2$ triângulos, conforme figura 1.1. Mas, sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

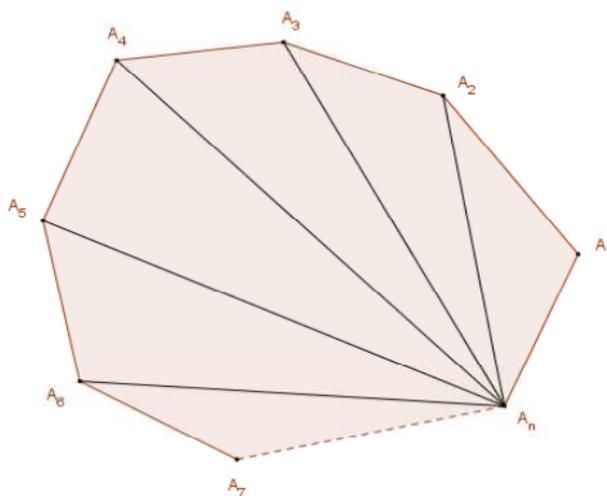


Figura 1.1: Diagonais traçadas de um mesmo vértice.

Daí, obtemos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é dada por:

$$S_i = (n - 2)180^\circ.$$

Definição 1.2. (Poliedro). Chamamos de *poliedro* a toda reunião de um número finito de polígonos, faces do poliedro, satisfazendo as seguintes condições:

1. Cada lado de um desses polígonos, aresta do poliedro, é também lado de um, e somente um, outro polígono;
2. A interseção de duas faces quaisquer ou é uma aresta, ou é um ponto, vértice do poliedro, ou é vazia.

Observe que a figura 1.2 define um poliedro, no entanto, a figura 1.3 não o define, pois note que a aresta destacada em preto é lado apenas do retângulo cinza da face lateral, não satisfazendo o item 1 da definição anterior, e mais, a interseção entre as faces cinzas não é uma aresta comum, um vértice comum ou mesmo vazia, contrariando o item 2 da definição.

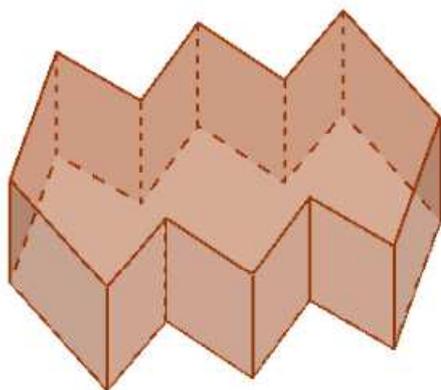


Figura 1.2: É poliedro.

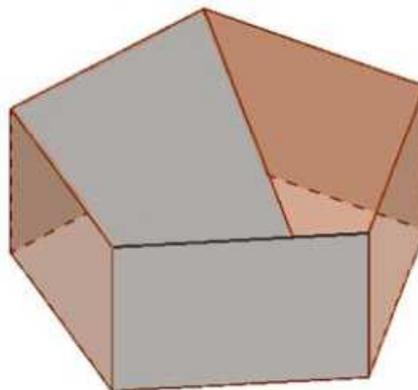


Figura 1.3: Não é poliedro.

Todo poliedro divide o espaço em duas regiões: uma interior, compreendida por entre as faces do poliedro, e outra exterior.

Definição 1.3. *Se o interior de um poliedro é convexo, então dizemos que o poliedro é convexo. Em geral, dado um subconjunto C do plano ou do espaço, denominamo-lo convexo quando todo segmento de reta com extremos em C está completamente contido em C .*

Especificamente em nossos estudos, podemos dizer que: "Um poliedro é convexo, se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos". Tais definições podem ser encontradas em [6].

Observe que o poliedro da figura 1.4 é convexo, mas o da figura 1.5 é não convexo.

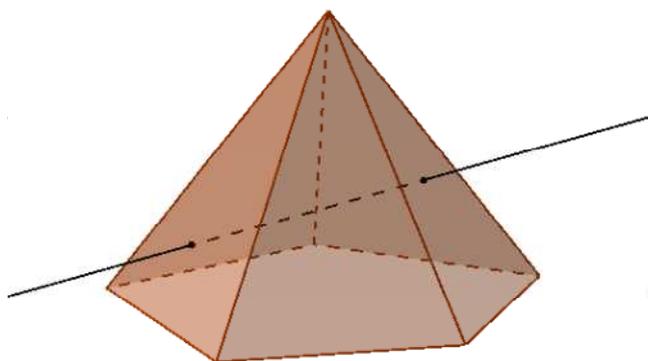


Figura 1.4: Poliedro convexo.

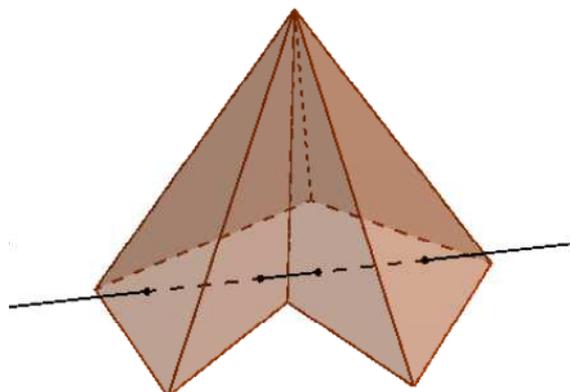


Figura 1.5: Poliedro não convexo.

Observação 1.1. Se ao menos uma das faces de um poliedro for um polígono não convexo, então esse poliedro é não convexo, entretanto, a recíproca não é verdadeira, isto é, o fato do poliedro ser não convexo não implica que alguma de suas faces é um polígono não convexo, conforme 3.4.

1.2 Teorema de Euler

Enunciamos, a seguir, o Teorema de Euler para poliedros convexos. Faremos uma demonstração utilizando a soma dos ângulos internos das faces do poliedro e outra, indução sobre o número de faces do poliedro. Ambas as demonstrações podem ser encontradas em livros voltados para o ensino médio, como em [2].

Teorema 1.1. (Teorema de Euler). *Em todo poliedro convexo é satisfeita a relação*

$$V - A + F = 2,$$

em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.

1.2.1 Demonstração por soma dos ângulos internos

Para não recairmos sobre uma geometria não euclidiana e tornarmos mais elementar a prova do Teorema de Euler, apresentamos uma demonstração feita por Zoroastro Azambuja Filho, que é uma adaptação da demonstração de Legendre e pode ser encontrada em [2].

Demonstração. Primeiramente, devemos calcular a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo, digamos P . Suponhamos que n_1 seja o número de lados do polígono que representa a primeira face do poliedro, n_2 , o número de lados do polígono que representa a segunda face do poliedro, n_3 , o número de lados do polígono que representa a terceira face do poliedro, e assim sucessivamente, até n_f , o número de lados do polígono que representa a f -ésima face do poliedro. Podemos observar que de acordo com a Observação 1.1, como o poliedro P é convexo, então todas as suas faces são polígonos convexos, e pelo Lema 1.1, temos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é dada

por $S_i = (n - 2)180^\circ$. Sendo assim, a soma dos ângulos internos de todas as faces de P é dada pela expressão:

$$S = (n_1 - 2)180^\circ + (n_2 - 2)180^\circ + (n_3 - 2)180^\circ + \dots + (n_f - 2)180^\circ$$

$$S = 180^\circ[(n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_f) - (2 + 2 + 2 + \dots + 2)]$$

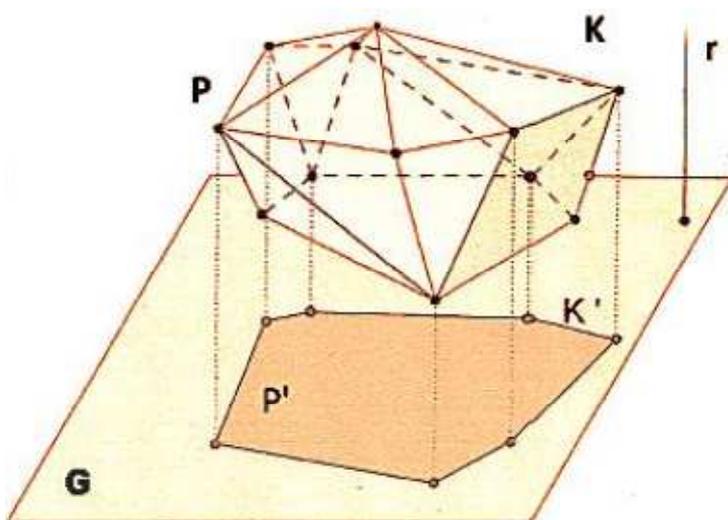
Pelo item 1 da Definição 1.2, vem que cada lado de um desses polígonos, aresta do poliedro, é lado de exatamente duas faces de P. Daí, a soma $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_f$ resulta em $2A$. Note que, também, a soma $2 + 2 + 2 + \dots + 2$ é igual a $2F$, pois o poliedro P tem F faces. Com isso, obtemos o seguinte:

$$S = 180^\circ(2A - 2F)$$

$$S = 360^\circ(A - F)$$

Agora, tome uma reta r que não seja paralela a nenhuma das faces de P. Considere um plano G perpendicular à reta r e que não intercepta P. Chame de plano horizontal ao plano G e de retas verticais, às retas paralelas a r . O plano horizontal G divide o espaço em dois semiespaços. O semiespaço que contém P será denominado semiespaço superior e diremos que seus pontos estão acima de G, de acordo com a figura 1.6.

Figura 1.6: Projeção do poliedro P sobre o plano G.



Fonte: EDER, 2016, p. 19.

Seja P' a sombra obtida a partir da projeção do poliedro P sobre o plano horizontal G . Como P é convexo, cada ponto de P' é sombra de apenas um ou dois pontos de P . Considere, ainda, a poligonal K formada por arestas de P e a poligonal K' , contorno da sombra P' . Cada ponto de K' é sombra de um único ponto de P . A poligonal K é chamada de contorno aparente do poliedro P . Cada ponto interior de P' (portanto não pertencente a K') é sombra de exatamente dois pontos de P . Dados dois pontos de P que têm mesma sombra, denominamos ponto iluminado ao ponto mais alto (mais distante de G) e ponto sombrio, ao ponto mais baixo (mais perto de G).

Mais uma vez, calculemos a soma dos ângulos internos de todas as faces de P , observando que para cada face, a soma dos seus ângulos internos se confunde com a soma dos ângulos internos de sua sombra, visto que ambos os polígonos têm o mesmo número de lados.

Sejam V_1 o número de vértices iluminados, V_2 o número de vértices sombrios e V_0 o número de vértices do contorno aparente K . Logo, para a sombra P' , temos: $V = V_0 + V_1 + V_2$. Perceba, também, que V_0 é o número de vértices e de lados da poligonal K' .

Em um primeiro momento, consideremos a sombra das faces iluminadas, que é um polígono convexo com V_0 vértices em seu contorno e V_1 pontos interiores (sombras dos vértices iluminados).

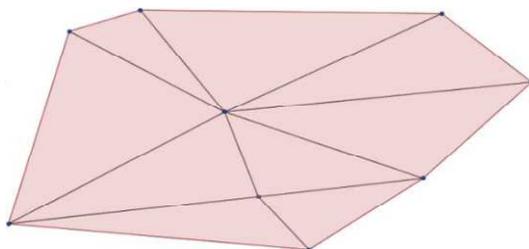


Figura 1.7: Sombra das faces iluminadas.

A soma de todos os ângulos internos do polígono da figura 1.7 é dada por:

$$S_1 = 360^\circ V_1 + 180^\circ (V_0 - 2).$$

Semelhantemente, encontramos a soma de todos os ângulos internos da sombra das faces sombrias, que é um polígono convexo com V_0 vértices em seu contorno e V_2 pontos interiores (sombras dos vértices sombrios). Então:

$$S_2 = 360^\circ V_2 + 180^\circ (V_0 - 2).$$

Somando S_1 e S_2 , conseguimos a soma dos ângulos internos de todas as faces da sombra do poliedro P.

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ S &= 360^\circ V_1 + 180^\circ(V_0 - 2) + 360^\circ V_2 + 180^\circ(V_0 - 2) \\ S &= 360^\circ(V_1 + V_2) + 360^\circ(V_0 - 2) \\ S &= 360^\circ(V_1 + V_2 + V_0 - 2) \\ S &= 360^\circ(V - 2) \end{aligned}$$

Recordando a soma dos ângulos internos de todas as faces de P calculada na primeira parte da demonstração e comparando-a com a expressão acima, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} S &= S \\ 360^\circ(A - F) &= 360^\circ(V - 2) \\ A - F &= V - 2 \\ V - A + F &= 2. \end{aligned}$$

1.2.2 Demonstração por indução sobre o número de faces

Nesta outra prova para o Teorema de Euler, utilizaremos o princípio de indução finita sobre o número de faces do poliedro. Vamos descrever uma situação no plano à qual se aplica o Teorema de Euler.

Seja P um poliedro com V vértices, A arestas e F faces que satisfaz o Teorema de Euler. Façamos o achatamento desse poliedro no plano. Para tanto, imaginemos um poliedro feito de borracha e vamos inflá-lo injetando ar até que ele se transforme em uma esfera. Posteriormente, a partir de um furo feito em uma de suas faces, esticá-lo até que se transforme em um plano.

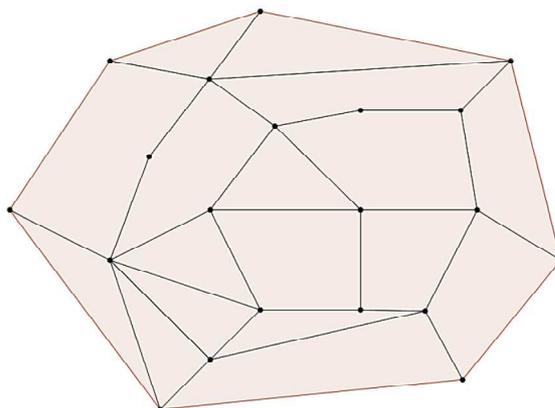


Figura 1.8: Planificação do poliedro P.

Chamemos de nó à projeção de cada vértice, de linha, à projeção de cada aresta e de região, à projeção de cada face. Das F regiões determinadas, uma é ilimitada e será chamada de oceano: a região I da figura 1.9.

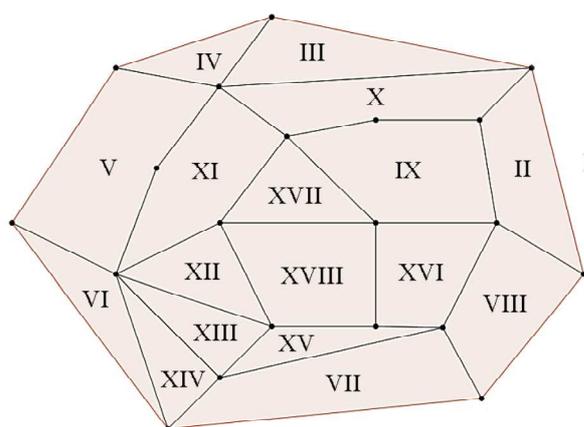


Figura 1.9: Regiões determinadas.

Notemos que ainda na figura 1.9, temos um plano composto por 18 regiões interligadas por 36 linhas que constituem 20 nós.

Assim, para a planificação do poliedro P, vale a relação:

$$V - A + F = 20 - 36 + 18 = 2.$$

De posse disso, ficamos convencidos de que a expressão $V - A + F = 2$ se verifica em situações as quais temos um polígono de n lados disposto no plano. Nesse caso, constatamos

$A = V = n$ e $F = 2$, conforme figura 1.10. De fato, $V - A + F = n - n + 2 = 2$. Ou seja, a relação de Euler vale para uma decomposição do plano em uma quantidade finita de regiões.

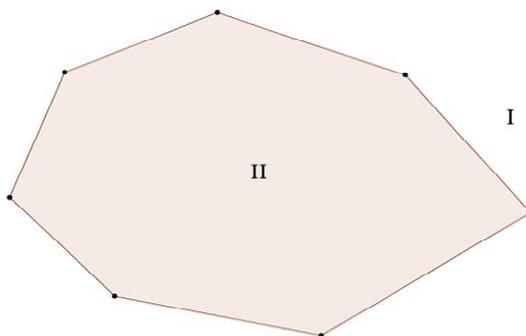


Figura 1.10: Polígono de n lados determinando duas regiões no plano.

Usando indução finita, vamos mostrar que se a relação de Euler vale para uma decomposição do plano em F regiões, então ela também é válida para uma decomposição em $F+1$ regiões.

Devemos prosseguir da seguinte maneira, considerar uma decomposição do plano em F regiões interligadas por A arestas que constituem V vértices satisfazendo a relação de Euler. Em seguida, devemos acrescentar uma nova região ao oceano dessa decomposição, como mostra a figura 1.11.

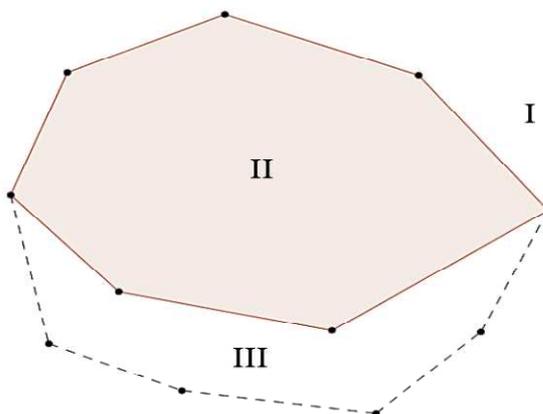


Figura 1.11: Decomposição inicial acrescida de uma nova região.

As linhas tracejadas, ligando dois vértices da decomposição inicial, indicam as arestas utilizadas para fomentar a nova região. Observe que caso sejam acrescentadas r arestas, $r - 1$ vértices surgirão mais a nova região já mencionada. Daí, resulta:

$$(V + r - 1) - (A + r) + (F + 1) = V - A + F + r - r - 1 + 1 = V - A + F = 2.$$

Portanto, verificamos também a validade do Teorema de Euler no plano.

2 Teorema de Euler para poliedros não convexos

Para conseguir provar o Teorema de Euler, Cauchy formulou em sua demonstração algumas hipóteses que deveriam ser seguidas. Porém, a partir de algumas reflexões sobre a importância dessas proposições para a demonstração, Elon, em [7], reescreve tal teorema de uma forma mais clara e objetiva. A essa reescrita, chamaremos Teorema de Cauchy, resultado principal deste capítulo.

Antes de tudo, devemos apresentar as definições necessárias à prova do Teorema de Cauchy, atentando para a definição de poliedro dada por Cauchy, a qual distingue um pouco da apresentada anteriormente, definição 1.2, por ser mais geral.

Definição 2.1. (Definição de Cauchy para poliedros) *Um poliedro P é a reunião de um número finito de polígonos, chamados de faces de P . Os lados desses polígonos são chamados de arestas de P . Os vértices do poliedro são os vértices de suas faces. Exige-se, ainda, que as faces do poliedro P estejam regularmente dispostas, ou seja, que a interseção de duas faces distintas quaisquer de P seja uma aresta comum ou um vértice comum a elas, ou mesmo, vazia.*

Exemplo 2.1. Com base na definição anterior, entendemos que o poliedro não precisa limitar o espaço em duas regiões, uma interior e outra exterior, para existir. Ou seja, não precisamos mais de uma superfície completamente “fechada” para caracterizarmos um conjunto como poliedro. Por exemplo, o prisma sem uma de suas faces laterais da figura 2.1 é um exemplo de um poliedro que não tem sua superfície completamente “fechada”.

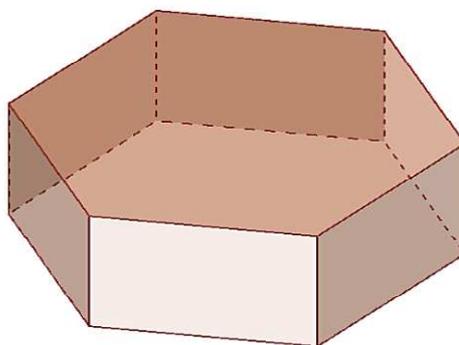


Figura 2.1: Prisma sem uma de suas faces laterais.

Definição 2.2. *A aresta de um poliedro é dita livre quando ela é lado de apenas uma face.*

Exemplo 2.2. As arestas destacadas em verde no prisma sem uma de suas faces laterais da figura 2.2 indicam as arestas livres do poliedro.

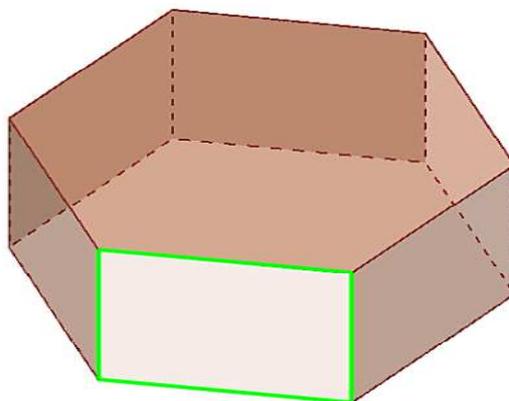


Figura 2.2: Arestas livres do poliedro destacadas em verde.

Definição 2.3. Um subconjunto Q de um poliedro P é denominado subpoliedro deste quando aquele é reunião de ao menos uma das faces de P e ainda é poliedro.

Exemplo 2.3. Caso assumamos como P o poliedro da figura 2.2, então os poliedros Q e T da figura 2.3 são subpoliedros de P .

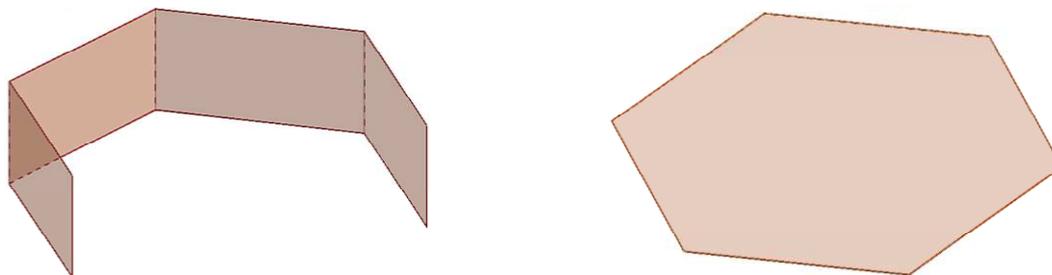


Figura 2.3: Subpoliedros do poliedro P .

Definição 2.4. O bordo de um poliedro é a reunião de suas arestas livres.

Exemplo 2.4. A reunião das arestas livres, destacadas em verde, da figura 2.4 forma o bordo do subpoliedro Q .

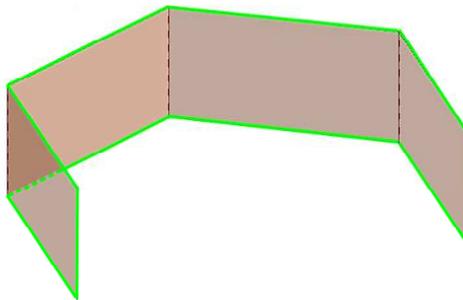


Figura 2.4: Bordo do subpoliedro Q destacado em verde.

Definição 2.5. Um subpoliedro Q de um poliedro P é dito conexo quando não é possível obtê-lo como reunião de dois outros subpoliedros disjuntos de P , isto é, subpoliedros que têm interseção vazia.

Observação 2.1. Em subpoliedros conexos, é sempre possível ligar dois vértices quaisquer por alguma poligonal formada por suas arestas.

Exemplo 2.5. É fácil ver que podemos ligar dois vértices quaisquer do subpoliedro da figura 2.5 por uma poligonal formada por suas arestas. Por exemplo, caso queiramos ligar os vértices A e B do subpoliedro Q, basta considerarmos a poligonal destacada em verde.

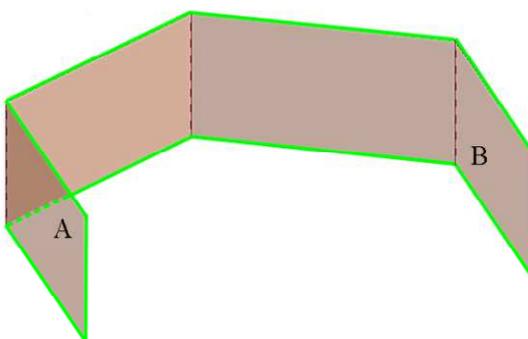


Figura 2.5: Subpoliedro conexo Q.

Já no subpoliedro da figura 2.6, não podemos ligar dois vértices quaisquer por uma poligonal formada por suas arestas, como por exemplo, os vértices A e B destacados. Logo, o mesmo não é conexo.

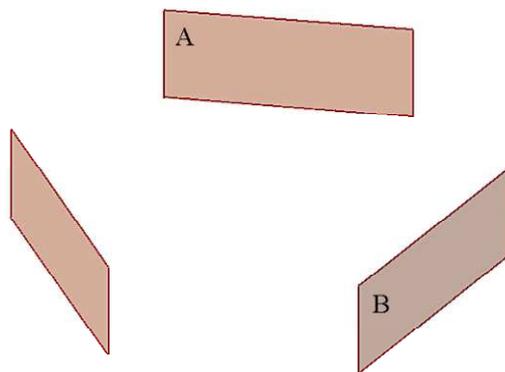


Figura 2.6: Subpoliedro desconexo.

Definição 2.6. Chamamos de *ciclo* de um poliedro a uma linha poligonal fechada formada por algumas de suas arestas.

Exemplo 2.6. No poliedro da figura 2.7, observamos dois ciclos destacados em verde.

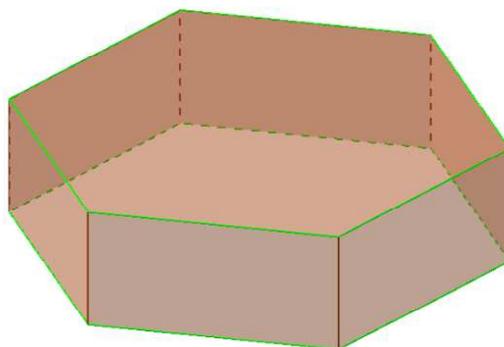


Figura 2.7: Ciclos destacados em verde.

Observação 2.2. É justo que todo bordo seja um ciclo, mas nem todo ciclo seja um bordo.

Exemplo 2.7. O poliedro da figura 2.8 possui todos seus ciclos destacados em verde. O conjunto formado por esses ciclos fomenta o bordo do poliedro.

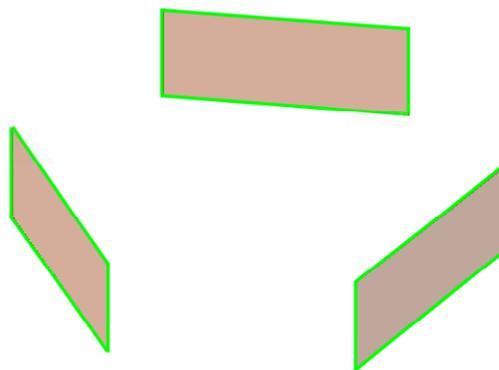


Figura 2.8: Ciclos em verde fomentando o bordo do poliedro.

A seguir, são apresentados dois poliedros não convexos, dos quais apenas um satisfaz a relação de Euler.

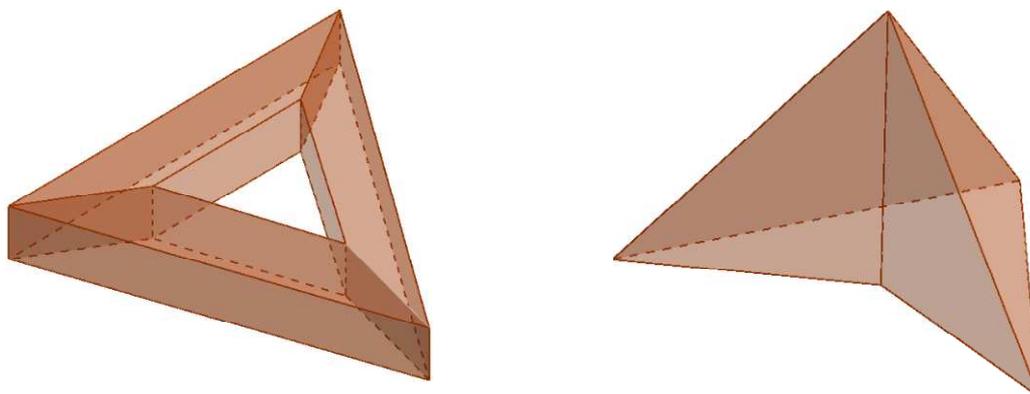


Figura 2.9: Poliedros não convexos.

Com efeito, para o poliedro da esquerda, verificamos a seguinte relação:

$$V - A + F = 12 - 24 + 12 = 0.$$

Enquanto que para o poliedro da direita, vale o seguinte:

$$V - A + F = 5 - 8 + 5 = 2.$$

Portanto, somente o poliedro da direita atendeu à relação de Euler. Logo mais veremos porque isso aconteceu.

Já comprovamos que o Teorema de Euler é sempre válido para poliedros convexos, mas nem sempre para poliedros não convexos. Os poliedros acima são um exemplo disso. Acerca disso, surge uma pertinente pergunta: Quais são as condições necessárias para que um poliedro não convexo atenda à relação $V - A + F = 2$? Tal pergunta passou muitos anos sem ter uma resposta convincente, com vários estudiosos da área tentando resolver o problema; até que Cauchy observou que os únicos poliedros não convexos que satisfazem a relação de Euler são os deformáveis à esfera.

2.1 Teorema de Cauchy

Apresentamos, a seguir, uma versão do Teorema de Euler escrita por Cauchy, a qual continha alguns equívocos em sua demonstração, mas que mais tarde foi reescrita por Elon, dando, assim, mais precisão ao resultado. Tal resultado será chamado de Teorema de Cauchy e sua demonstração pode ser encontrada em [7], contudo, reescrevemo-la cuidadosamente em nosso trabalho. Mas antes, precisamos entender uma última definição.

Definição 2.7. *Duas faces A e B de um poliedro P são ditas encadeadas quando existe uma sequência de faces de P tal que a primeira face é A e a última é B , e a interseção de duas faces consecutivas quaisquer é sempre uma aresta comum.*

Teorema 2.1. (Teorema de Cauchy). *Seja P um poliedro em que:*

- i) toda aresta de P está contida em exatamente duas faces;*
- ii) duas faces quaisquer são encadeadas;*
- iii) todo ciclo em P é um bordo.*

Então, P satisfaz a relação $V - A + F = 2$, em que V é o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces de P .

Demonstração. Aqui, assumiremos a definição de poliedro dada por Cauchy. Sem perda de generalidade e para facilitar os cálculos, iremos considerar um poliedro P com faces de natureza triangular, quadrangular e pentagonal. Porém, é importante que fique claro que não teria problema algum se o nosso poliedro tivesse faces de outra natureza, pois,

posteriormente, todas as suas faces serão decompostas em triângulos. A critério de curiosidade, o poliedro da figura 2.10 é chamado de rombicósidodecaedro.

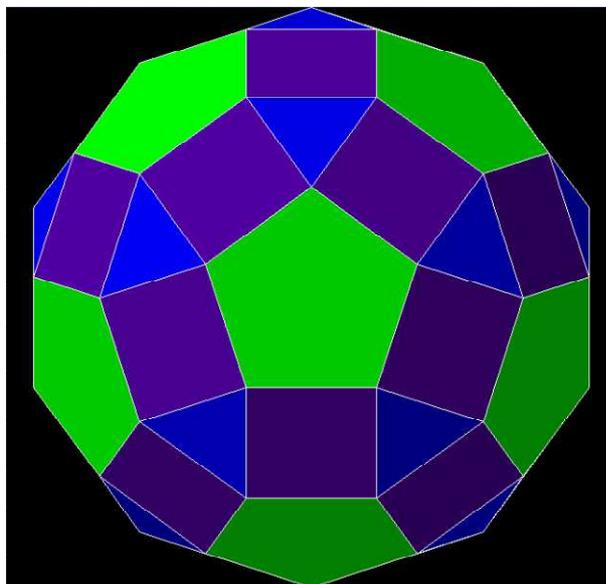


Figura 2.10: Poliedro P.

Retiramos uma face qualquer do poliedro P. Escolheremos uma face pentagonal. Com isso, iremos obter um subpoliedro Q do poliedro P, que também é poliedro, de acordo com a definição de Cauchy. A região cinza da figura 2.11 representa a face pentagonal retirada. Fizemos isso para obtermos as arestas livres, mas é fato que o poliedro P obedecia ao item (i) do Teorema, visto que toda aresta de P estava contida em exatamente duas faces.

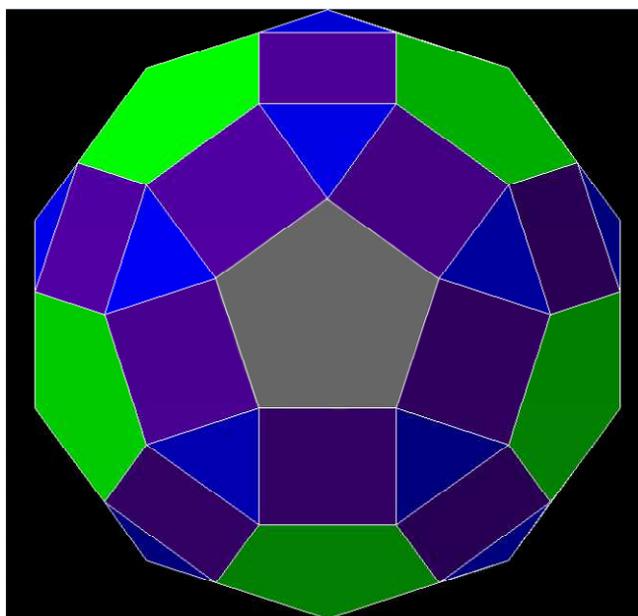


Figura 2.11: Poliedro P com a face pentagonal retirada, resultando no subpoliedro Q.

Em seguida, achataremos o subpoliedro Q a partir de uma projeção em perspectiva sobre a sua face retirada, obtendo o poliedro plano Q da figura 2.12. Chamemos de A_Q o número de arestas, V_Q o número de vértices e F_Q o número de faces do poliedro plano. Para mostrarmos que o poliedro P satisfaz o Teorema de Euler, é suficiente verificarmos a relação $V_Q - A_Q + F_Q = 1$ no subpoliedro Q .

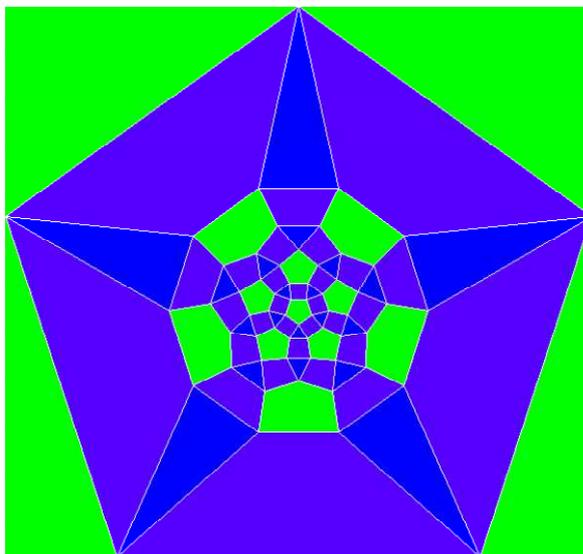


Figura 2.12: Poliedro Q achatado.

Traçando diagonais que não se cortam, decompomos cada face do poliedro plano Q em triângulos. Observe que para cada vértice dos polígonos das faces, pode-se traçar $(n - 3)$ diagonais. Nas faces triangulares, não se pode traçar diagonal, nas quadrangulares, pode-se traçar apenas uma diagonal, e nas pentagonais, duas diagonais. Dessa forma, tivemos as seguintes modificações: nas faces triangulares, o número de arestas não se alterou e o número de vértices também não, bem como o número de faces; nas faces quadrangulares, o número de arestas aumentou em uma unidade, o número de vértices não se alterou e o número de faces aumentou em uma unidade; enquanto que nas faces pentagonais, o número de arestas aumentou em duas unidades, o número de vértices se manteve e o número de faces aumentou em duas unidades. Devemos mostrar que a relação $V_Q - A_Q + F_Q$ não se alterou. De fato, considerando $A_Q = A_3 + A_4 + A_5$ e $F_Q = F_3 + F_4 + F_5$, em que A_3 representa as arestas que constituem as faces triangulares, A_4 , as arestas que constituem as faces quadrangulares e A_5 , as arestas que constituem as faces pentagonais; e F_3 indica o número de faces triangulares, F_4 , o número de faces quadrangulares e F_5 , o número de faces pentagonais. Temos:

$$\begin{aligned}
 V_Q - [A_3 + (A_4 + 1) + (A_5 + 2)] + [F_3 + (F_4 + 1) + (F_5 + 2)] &= \\
 V_Q - 1 - 2 - [A_3 + A_4 + A_5] + 1 + 2 + [F_3 + F_4 + F_5] &= \\
 V_Q - [A_3 + A_4 + A_5] + [F_3 + F_4 + F_5] &= \\
 V_Q - A_Q + F_Q &
 \end{aligned}$$

A figura 2.13 mostra o poliedro plano Q com suas faces decompostas em triângulos.

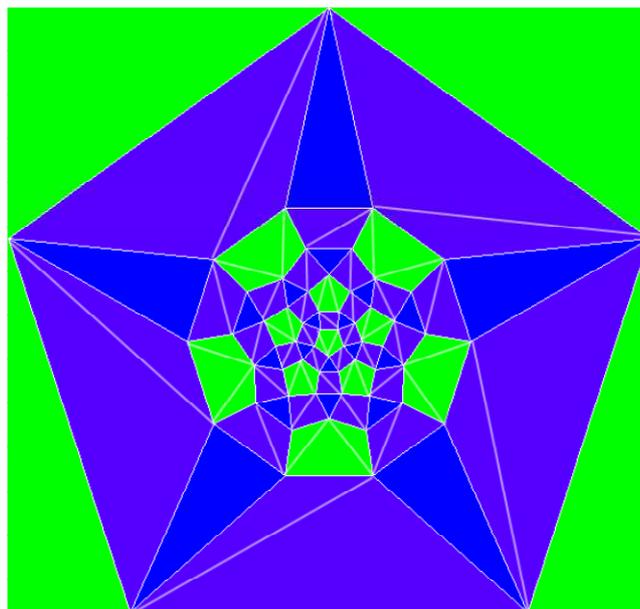
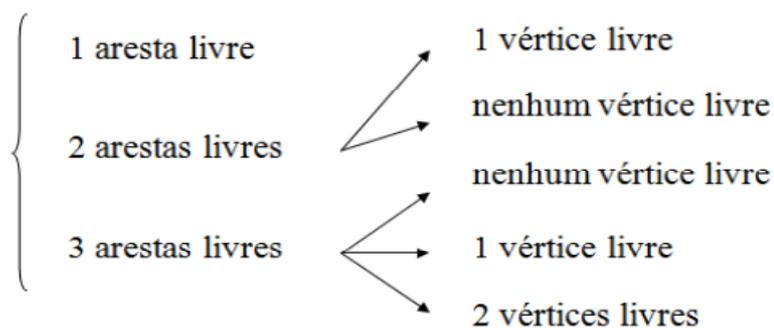


Figura 2.13: Poliedro plano Q com suas faces decompostas em triângulos.

O nosso intuito é realizar sucessivas retiradas de algumas faces “especiais” para reduzirmos nosso poliedro plano Q a um subpoliedro mais “simples”, no qual se verifica constante a relação $V_Q - A_Q + F_Q$. Para tanto, devemos despentalar o poliedro plano Q, isto é, retirar uma a uma as faces que possuem ao menos uma aresta livre.

Há seis possibilidades a serem consideradas ao se retirar uma face triangular com pelo menos uma aresta livre, dependendo do número de arestas livres escolhido.



(1) *O triângulo a ser retirado tem apenas uma aresta livre.*

Vamos retirar uma face triangular com apenas uma aresta livre. Isto é, qualquer um dos triângulos vermelhos (junto com todos os seus pontos interiores) da figura 2.14.

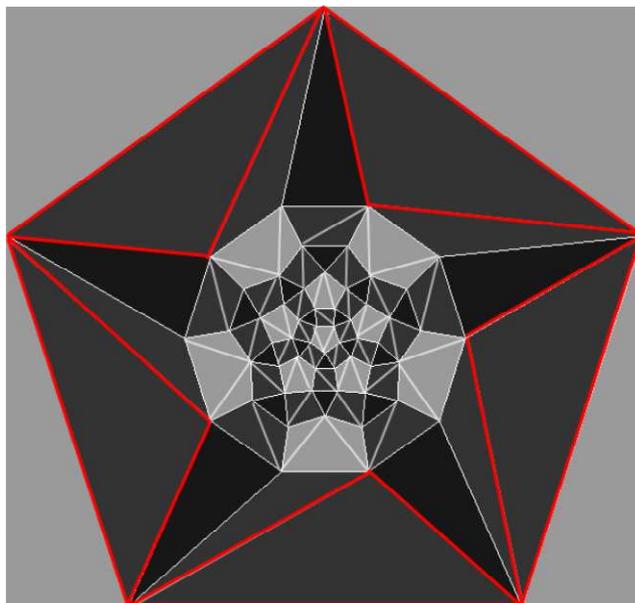


Figura 2.14: Os triângulos em vermelho têm apenas uma aresta livre.

Assim, o número de vértices V_Q não muda e o número de arestas A_Q e o de faces F_Q diminuem ambos uma unidade. Consequentemente, a relação $V_Q - A_Q + F_Q$ é mantida. Com efeito,

$$\begin{aligned} V_Q - (A_Q - 1) + (F_Q - 1) &= \\ V_Q - A_Q + 1 + F_Q - 1 &= \\ V_Q - A_Q + F_Q & \end{aligned}$$

Observemos que o subpoliedro resultante é conexo.

(2) *O triângulo a ser retirado tem duas arestas livres e um vértice livre.*

Vamos retirar uma face triangular com duas arestas livres e um vértice livre. Isto é, qualquer um dos triângulos vermelhos (junto com todos os seus pontos interiores) da figura 2.15.

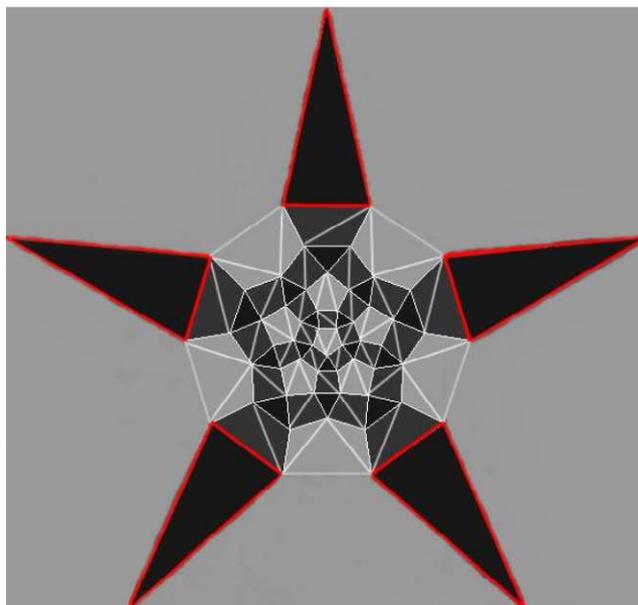


Figura 2.15: Os triângulos em vermelho têm duas arestas livres e um vértice livre.

Assim, o número de vértices V_Q e o de faces F_Q diminuem ambos em uma unidade, enquanto que o número de arestas A_Q diminui em duas unidades. Consequentemente, a relação $V_Q - A_Q + F_Q$ é mantida. Com efeito,

$$\begin{aligned} (V_Q - 1) - (A_Q - 2) + (F_Q - 1) &= \\ V_Q - 1 - A_Q + 2 + F_Q - 1 &= \\ V_Q - A_Q + F_Q & \end{aligned}$$

Observemos que o subpoliedro resultante é conexo.

(3) O triângulo a ser retirado tem duas arestas livres, mas nenhum vértice livre.

Os polígonos com arestas que não são coloridas foram retirados através de sucessivas aplicações dos itens (1) e (2), até chegarmos aos polígonos em azul e amarelo, e aos segmentos vermelhos. Chamemos de A o subpoliedro resultante.

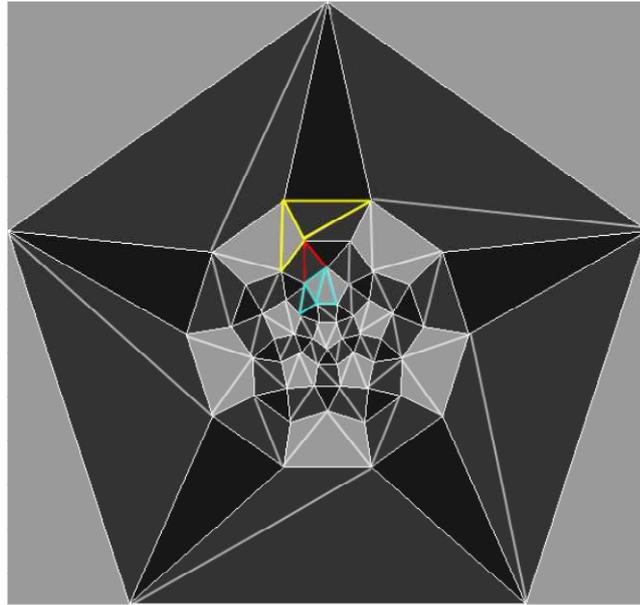


Figura 2.16: Polígonos restantes em azul e amarelo, e segmentos vermelhos.

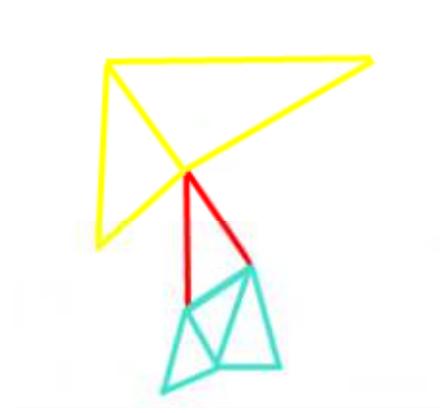


Figura 2.17: Subpoliedro A.

Ao retiramos os segmentos vermelhos em destaque no subpoliedro A, restam-nos os subpoliedros conexos Q_1 e Q_2 com bordos β_1 e β_2 , respectivamente, formados pelos ciclos em destaque amarelo e azul, como observamos na figura 2.18.

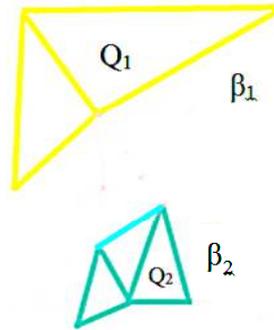


Figura 2.18: Subpoliedro formado pelas componentes conexas Q_1 e Q_2 .

Com a retirada dos segmentos vermelhos, manteve-se o número de vértices V_Q , diminuiu o número de faces F_Q em uma unidade e o número de arestas A_Q em duas unidades. Assim:

$$\begin{aligned} V_Q - (A_Q - 2) + (F_Q - 1) &= \\ V_Q - A_Q + 2 + F_Q - 1 &= \\ V_Q - A_Q + F_Q + 1 & \end{aligned}$$

Ao efetuarmos sucessivas retiradas de faces triangulares dos subpoliedros Q_1 e Q_2 , através de aplicações dos itens (1) e (2), teremos no final uma face triangular em cada componente, conforme a figura 2.19.

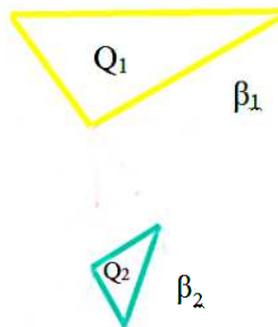


Figura 2.19: Subpoliedro resultante de aplicações dos itens (1) e (2).

Com isso, o número de faces F_Q diminuiu em três unidades, o número de arestas A_Q , em seis unidades, e o número de vértices V_Q , em três unidades. Daí,

$$\begin{aligned}
 (V_Q - 3) - (A_Q - 6) + (F_Q + 1 - 3) &= \\
 V_Q - 3 - A_Q + 6 + F_Q - 2 &= \\
 V_Q - A_Q + F_Q + 1 &
 \end{aligned}$$

Por fim, basta retirarmos uma face triangular qualquer, Q_1 ou Q_2 . Sendo assim, ficaremos com três vértices a menos, três arestas a menos e uma face a menos. A expressão $V_Q - A_Q + F_Q + 1$ passa a ser:

$$\begin{aligned}
 (V_Q - 3) - (A_Q - 3) + (F_Q + 1 - 1) &= \\
 V_Q - 3 - A_Q + 3 + F_Q &= \\
 V_Q - A_Q + F_Q &
 \end{aligned}$$

Ou seja, permaneceu constante a relação $V_Q - A_Q + F_Q$.

(4) O triângulo a ser retirado tem três arestas livres, mas nenhum vértice livre.

Os polígonos com arestas que não são coloridas foram retirados através de sucessivas aplicações dos itens (1) e (2), até chegarmos aos polígonos em vermelho, azul, amarelo e verde. Chamemos de B o subpoliedro resultante.

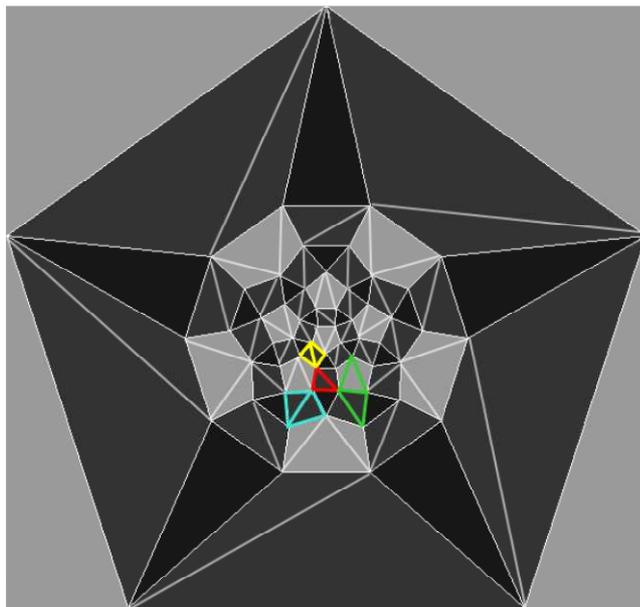


Figura 2.20: Polígonos restantes em vermelho, azul, amarelo e verde.

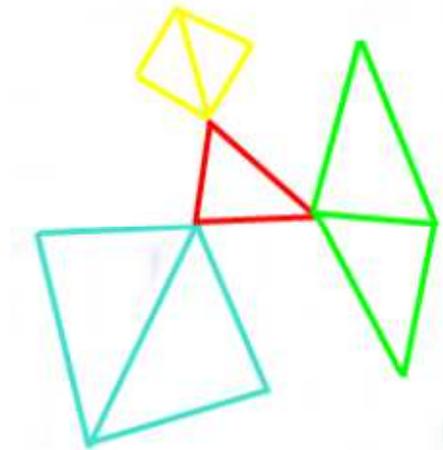


Figura 2.21: Subpoliedro B.

Ao retirarmos o triângulo vermelho em destaque no subpoliedro B, restam-nos os subpoliedros conexos Q_1 , Q_2 e Q_3 com bordos β_1 , β_2 e β_3 , respectivamente, formados pelos ciclos em destaque amarelo, verde e azul, como observamos na figura 2.22.

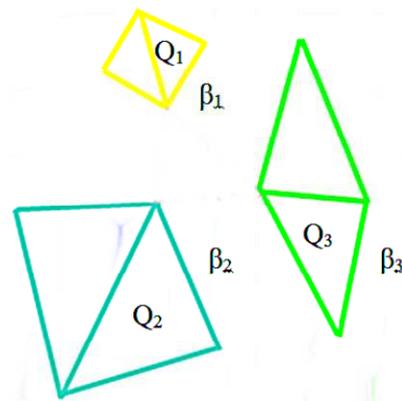


Figura 2.22: Subpoliedro formado pelas componentes conexas Q_1 , Q_2 e Q_3 .

Com a retirada do triângulo vermelho, manteve-se o número de vértices V_Q , diminuiu o número de faces F_Q em uma unidade e o número de arestas A_Q em três unidades. Assim:

$$\begin{aligned} V_Q - (A_Q - 3) + (F_Q - 1) &= \\ V_Q - A_Q + 3 + F_Q - 1 &= \\ V_Q - A_Q + F_Q + 2 & \end{aligned}$$

Ao efetuarmos sucessivas retiradas de faces triangulares dos subpoliedros Q_1 , Q_2 e Q_3 , através de aplicações dos itens (1) e (2), teremos no final uma face triangular em cada componente, conforme a figura 2.23.

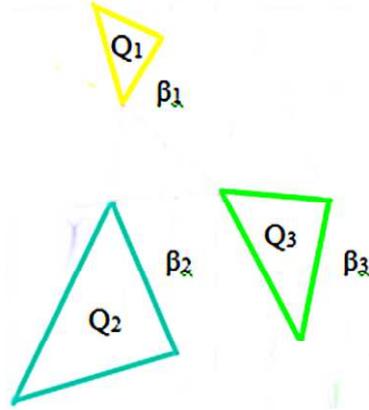


Figura 2.23: Subpoliedro resultante de aplicações dos itens (1) e (2).

Com isso, o número de faces F_Q diminuiu em três unidades, o número de arestas A_Q , em seis unidades, e o número de vértices V_Q , em três unidades. Daí,

$$\begin{aligned} (V_Q - 3) - (A_Q - 6) + (F_Q + 2 - 3) &= \\ V_Q - 3 - A_Q + 6 + F_Q - 1 &= \\ V_Q - A_Q + F_Q + 2 & \end{aligned}$$

Por fim, retiramos duas faces triangulares quaisquer. Sendo assim, ficaremos com seis vértices a menos, seis arestas a menos e duas faces a menos. A expressão $V_Q - A_Q + F_Q + 2$ passa a ser:

$$\begin{aligned} (V_Q - 6) - (A_Q - 6) + (F_Q + 2 - 2) &= \\ V_Q - 6 - A_Q + 6 + F_Q &= \\ V_Q - A_Q + F_Q & \end{aligned}$$

Ou seja, permaneceu constante a relação $V_Q - A_Q + F_Q$.

(5) O triângulo a ser retirado tem três arestas livres e um vértice livre.

Os polígonos com arestas que não coloridas foram retirados através de sucessivas aplicações dos itens (1) e (2), até chegarmos aos polígonos em vermelho, azul e amarelo. Chamemos de C o subpoliedro resultante.

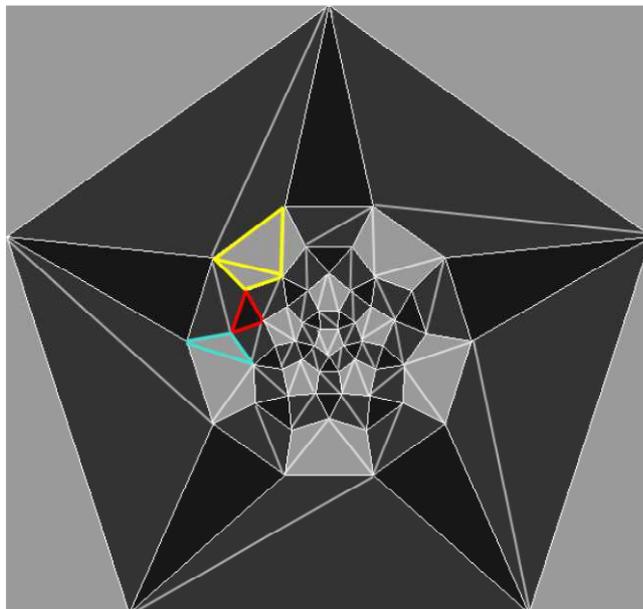


Figura 2.24: Polígonos restantes em vermelho, azul e amarelo.



Figura 2.25: Subpoliedro C .

Ao retirarmos o triângulo vermelho em destaque no subpoliedro C , restam-nos os subpoliedros conexos Q_1 e Q_2 com bordos β_1 e β_2 , respectivamente, formados pelos ciclos em destaque amarelo e azul, como observamos na figura 2.26.

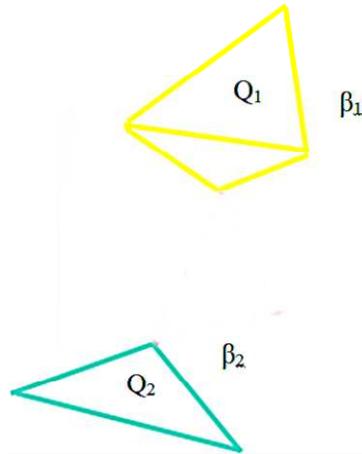


Figura 2.26: Subpoliedro resultante de aplicações dos itens (1) e (2).

Com a retirada do triângulo vermelho, diminuiu em uma unidade o número de vértices V_Q , em uma unidade, o número de faces F_Q , e em três unidades, o número de arestas A_Q . Assim:

$$\begin{aligned} (V_Q - 1) - (A_Q - 3) + (F_Q - 1) &= \\ V_Q - 1 - A_Q + 3 + F_Q - 1 &= \\ V_Q - A_Q + F_Q + 1 & \end{aligned}$$

Ao efetuarmos sucessivas retiradas de faces triangulares dos subpoliedros Q_1 e Q_2 , através de aplicações dos itens (1) e (2), teremos no final uma face triangular em cada componente, conforme a figura 2.27.

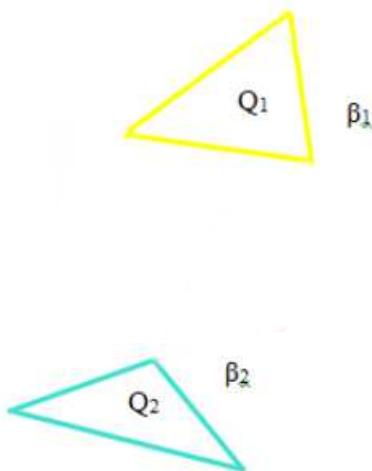


Figura 2.27: Subpoliedro resultante de aplicações dos itens (1) e (2).

Com isso, o número de faces F_Q diminuiu em uma unidade, o número de arestas A_Q , em duas unidades, e o número de vértices V_Q , em uma unidade. Daí,

$$\begin{aligned} (V_Q - 1) - (A_Q - 2) + (F_Q + 1 - 1) &= \\ V_Q - 1 - A_Q + 2 + F_Q &= \\ V_Q - A_Q + F_Q + 1 & \end{aligned}$$

Finalmente, basta retirarmos uma face triangular qualquer, Q_1 ou Q_2 . Sendo assim, ficaremos com três vértices a menos, três arestas a menos e uma face a menos. A expressão $V_Q - A_Q + F_Q + 1$ passa a ser:

$$\begin{aligned} (V_Q - 3) - (A_Q - 3) + (F_Q + 1 - 1) &= \\ V_Q - 3 - A_Q + 3 + F_Q &= \\ V_Q - A_Q + F_Q & \end{aligned}$$

Ou seja, permaneceu constante a relação $V_Q - A_Q + F_Q$.

(6) *O triângulo a ser retirado tem três arestas livres e dois vértices livres.*

Os polígonos com arestas que não são coloridas foram retirados através de sucessivas aplicações dos itens (1) e (2), até chegarmos aos polígonos em vermelho e amarelo. Chamemos de D o subpoliedro resultante.

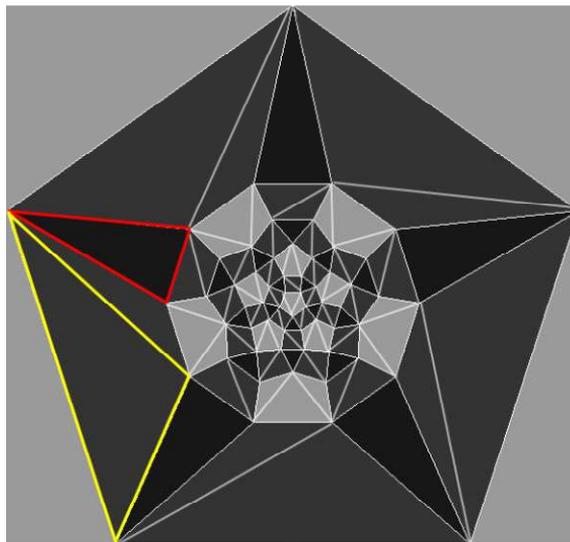


Figura 2.28: Polígonos restantes em vermelho e amarelo.

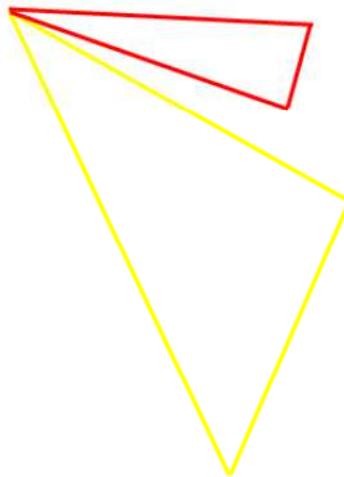


Figura 2.29: Subpoliedro D.

Ao retirarmos o triângulo vermelho em destaque no subpoliedro D, resta-nos o subpoliedro conexo Q_1 com bordo β_1 , formado pelo ciclo em destaque amarelo, como observamos na figura 2.30.

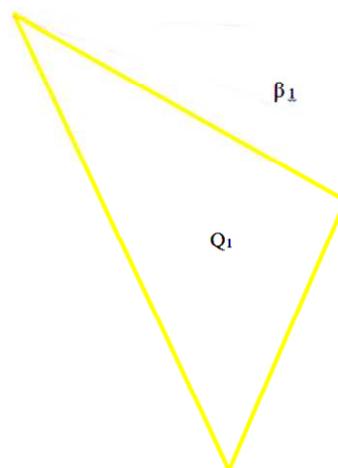


Figura 2.30: Subpoliedro resultante da retirada do triângulo vermelho.

Com a retirada do triângulo vermelho, ficamos com dois vértices a menos, três arestas a menos e uma face a menos. Assim:

$$\begin{aligned}
 (V_Q - 2) - (A_Q - 3) + (F_Q - 1) &= \\
 V_Q - 2 - A_Q + 3 + F_Q - 1 &= \\
 V_Q - A_Q + F_Q &
 \end{aligned}$$

Ou seja, mais uma vez permaneceu constante a relação $V_Q - A_Q + F_Q$.

Em todos os casos, ao final, terminamos com um triângulo em que:

$$V_Q - A_Q + F_Q = 3 - 3 + 1 = 1.$$

Agora, recordemos que inicialmente havíamos retirado uma face do poliedro P, obtendo o subpoliedro Q. Vamos “devolver” essa face, resultando em:

$$V - A + F = V_Q - A_Q + (F_Q + 1) = V_Q - A_Q + F_Q + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Por fim, devemos salientar a desconexão existente entre todas as componentes conexas obtidas a partir da retirada dos segmentos vermelhos no terceiro caso e dos triângulos vermelhos em todos os demais. Tal desconexão é comprovada pela condição de que, por hipótese, todo ciclo é também bordo, aliada ao fato de nunca podermos conectar dois vértices quaisquer das componentes por uma poligonal fechada composta por arestas.

Portanto, conseguimos mostrar que a relação de Euler também é válida para alguns poliedros não convexos, a saber, os homeomorfos à esfera, isto é, deformáveis à esfera.

3 Característica de Euler-Poincaré para poliedros n-tóricos

Neste capítulo, vamos considerar poliedros que possuem buracos, como podemos observar nas figuras 3.3, 3.4 e 3.5. Já vimos que o Teorema de Euler não satisfaz poliedros com essa peculiaridade. Veremos que em poliedros com buracos há uma pequena variação com relação ao termo independente da expressão $V - A + F = 2$.

Deve-se a Poincaré, em 1893, a solução definitiva para o Teorema de Euler. Ele foi o primeiro matemático a compreender que o Teorema de Euler é um resultado de Topologia, e não de Geometria, como se imaginava até então.

Poincaré conseguiu mostrar que em um poliedro P , o número $X(P) = V - A + F$, chamado de característica de Euler-Poincaré, é um invariante topológico, ou seja, ele mostrou que poliedros homeomorfos possuem mesma característica de Euler-Poincaré. Com isso, se imaginarmos poliedros feitos de borracha e os inflarmos, injetando ar, os poliedros que não possuem furos ($n = 0$) serão transformados em esferas. Isto ocorre em todos os casos em que seu invariante topológico é $X(P) = V - A + F = 2$. Já os poliedros que têm um buraco ($n = 1$) serão transformados no toro (câmara de pneu cheia de ar), e seu invariante topológico é $X(P) = V - A + F = 0$; enquanto que os poliedros que possuem dois buracos ($n = 2$) serão transformados no dois toro (algema inflável cheia de ar), possuindo invariante topológico $X(P) = V - A + F = -2$. Podemos seguir com esse pensamento sobre qualquer poliedro com uma quantidade finita de buracos.

Exemplo 3.1. O poliedro da figura 3.1 é homeomorfo à esfera, pois não possui nenhum buraco.

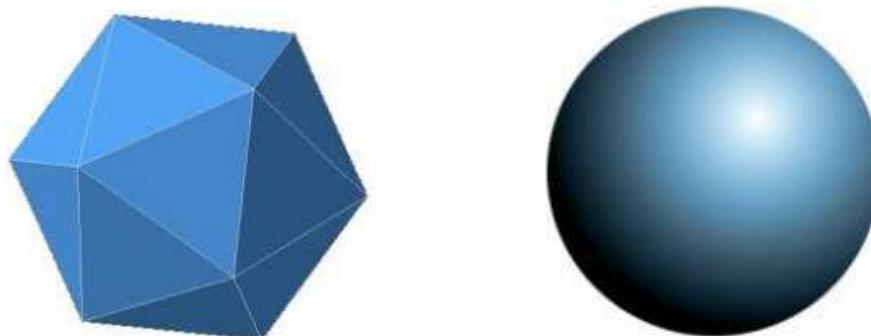


Figura 3.1: Poliedro homeomorfo à esfera.

Exemplo 3.2. O poliedro da figura 3.2 é homeomorfo ao toro, pois possui um buraco.

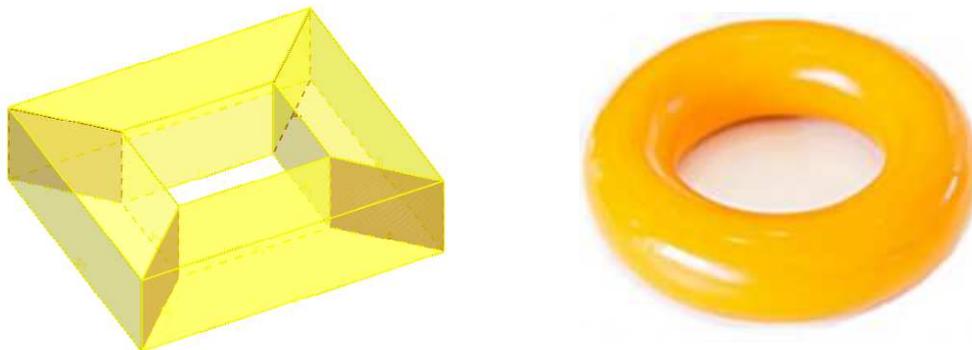


Figura 3.2: Poliedro homeomorfo ao um toro.

Exemplo 3.2. O poliedro da figura 3.3 é homeomorfo ao dois toro, pois possui dois buracos.

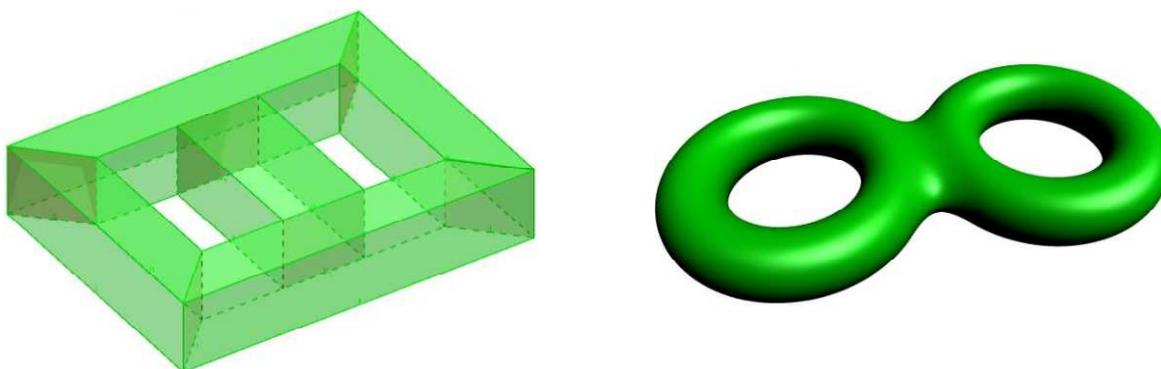


Figura 3.3: Poliedro homeomorfo ao dois toro.

Definição 3.1. *Sejam P e Q duas figuras. Dizemos que P e Q são homeomorfas quando existe uma transformação contínua $f: P \rightarrow Q$ cuja inversa $f^{-1}: Q \rightarrow P$ também é contínua. Neste caso, denotamos f como sendo um homeomorfismo de P em Q .*

Sendo assim, podemos definir como homeomorfismo toda aplicação bijetora, contínua e com inversa contínua.

Definição 3.2. (Poliedros n -tóricos). *Chamamos de poliedros n -tóricos a todos os poliedros com n buracos.*

Exemplo 3.3. Denominamos 1-tórico a poliedros com um buraco, 2-tórico, a poliedros com dois buracos, 3-tórico, a poliedros com três buracos, e assim por diante.

Em primeiro lugar, consideremos o poliedro 1-tórico da figura 3.4.

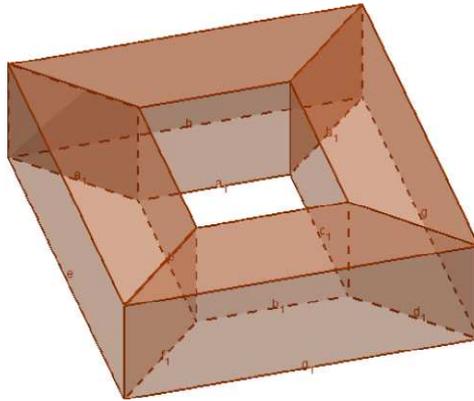


Figura 3.4: 1-tórico.

Percebamos que a sua característica de Euler-Poincaré é:

$$X(P) = V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$$

Agora, considerando o poliedro 2-tórico da figura 3.5, temos o seguinte:

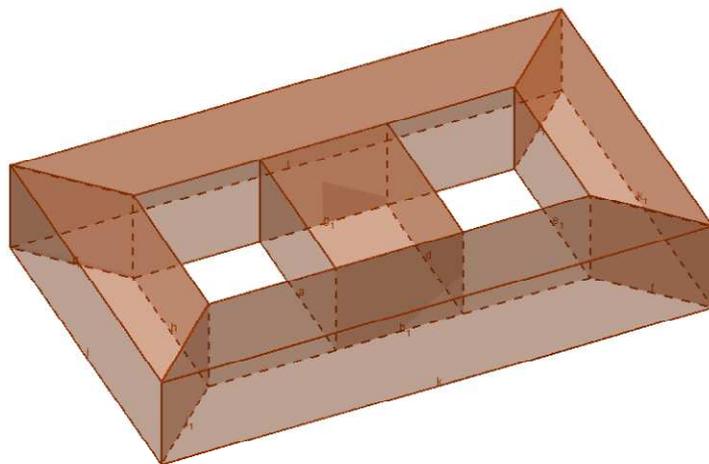


Figura 3.5: 2-tórico.

Sua característica de Euler-Poincaré é:

$$X(P) = V - A + F = 24 - 48 + 22 = -2.$$

Para o poliedro 3-tórico da figura 3.6, temos o seguinte:

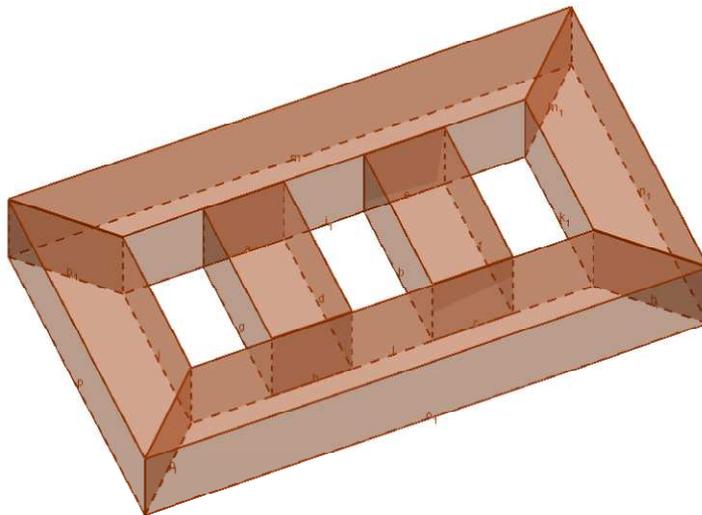


Figura 3.6: 3-tórico.

Sua característica de Euler-Poincaré é dada por:

$$X(P) = V - A + F = 32 - 64 + 28 = -4.$$

A partir disso, observamos que as características de Euler-Poincaré dos poliedros 1-tórico, 2-tórico e 3-tórico formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão -2 e primeiro termo igual a 0 . Para calcularmos a característica de Euler-Poincaré para o poliedro n -tórico, basta determinar o n -ésimo termo dessa progressão aritmética. Para tanto, recordemos da fórmula do termo geral de uma progressão aritmética: $a_n = a_1 + (n - 1) r$. Logo:

$$a_n = a_1 + (n - 1) r$$

$$a_n = 0 + (n - 1)(-2)$$

$$a_n = 2 - 2n$$

Tal resultado será apresentado a seguir na forma de um Teorema.

Teorema 3.1. *Seja P um poliedro n -tórico com V vértices, A arestas e F faces. Então, a Característica de Euler-Poincaré de P é dada por $X(P) = V - A + F = 2 - 2n$, em que $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$.*

Demonstração. Vamos fazer a demonstração utilizando o princípio de indução finita. Para o 1-tórico, conforme figura 3.4, verificamos que:

$$X(P) = V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0 = 2 - 2 \cdot 1 = 2 - 2.$$

Agora, suponhamos que a sentença em questão seja válida para n , ou seja, que no n -tórico vale:

$$X(P) = V_n - A_n + F_n = 2 - 2n.$$

Devemos mostrar que a mesma também é válida para $n+1$, isto é, que para poliedros com $n+1$ buracos vale:

$$X(P) = V_{n+1} - A_{n+1} + F_{n+1} = 2 - 2(n + 1).$$

Para tanto, considere o poliedro n -tórico da figura 3.7.

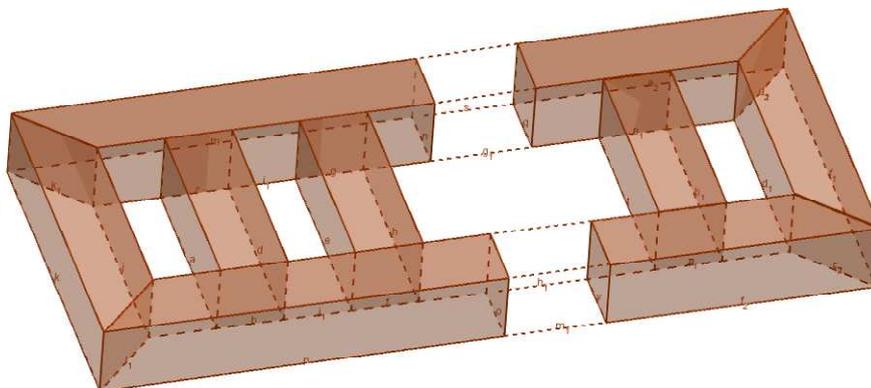


Figura 3.7: N -tórico.

Prosseguimos unindo os poliedros n -tórico e 1-tórico, de acordo com a figura 3.8 a seguir.

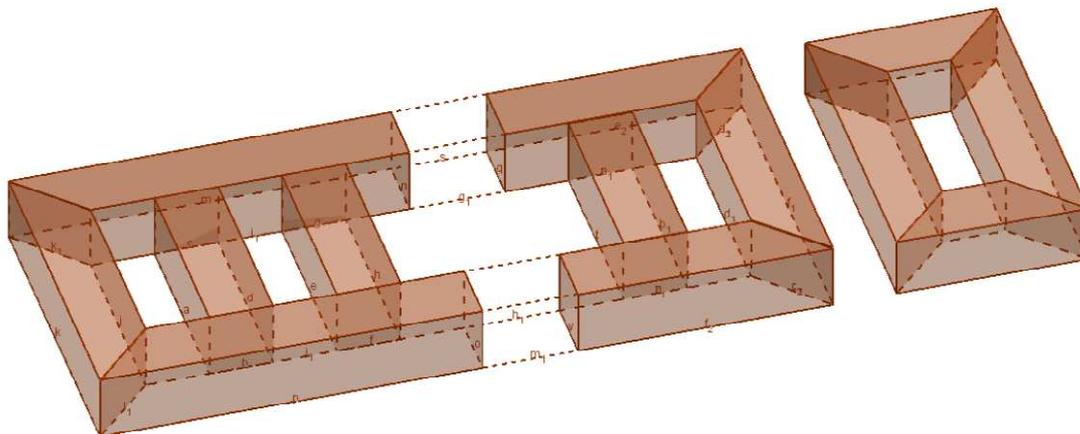


Figura 3.8: N-tórico e 1-tórico sendo unidos.

Haverá a sobreposição e o acúmulo de alguns vértices e de algumas faces e arestas.

Com relação ao número de vértices, haverá o acréscimo de 8 vértices, visto que o 1-tórico possui 16 vértices, mas haverá a sobreposição de 4 vértices de cada um dos poliedros. Ver figura 3.9.

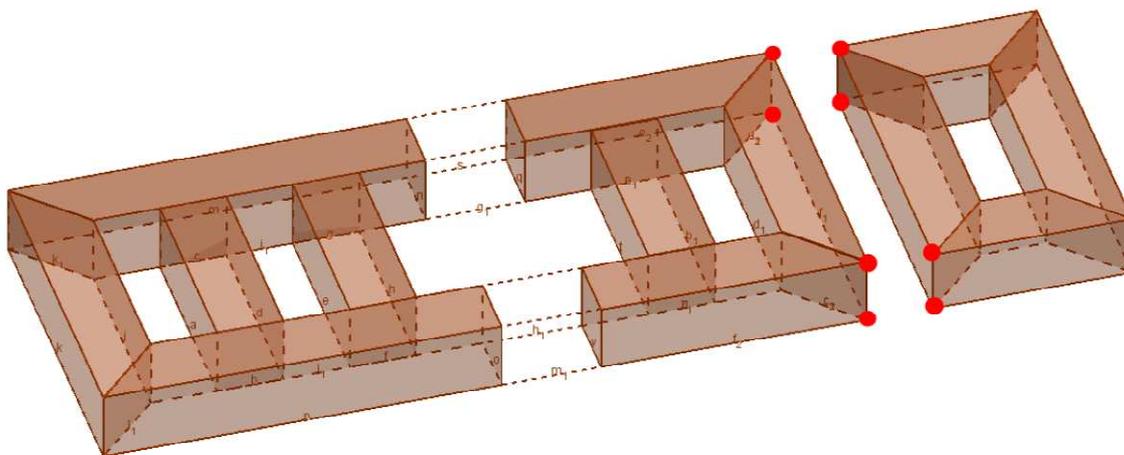


Figura 3.9: Vértices sobrepostos destacados em vermelho.

Assim, ficamos com:

$$V_{n+1} = V_n + 16 - 8 = V_n + 8.$$

Com relação ao número de arestas, houve o acréscimo de 16 arestas, uma vez que o 1-tórico possui 32 arestas, mas houve a sobreposição e o acúmulo de 24 arestas, enquanto que surgiram 8 novas arestas. Ver figuras 3.10 e 3.11.

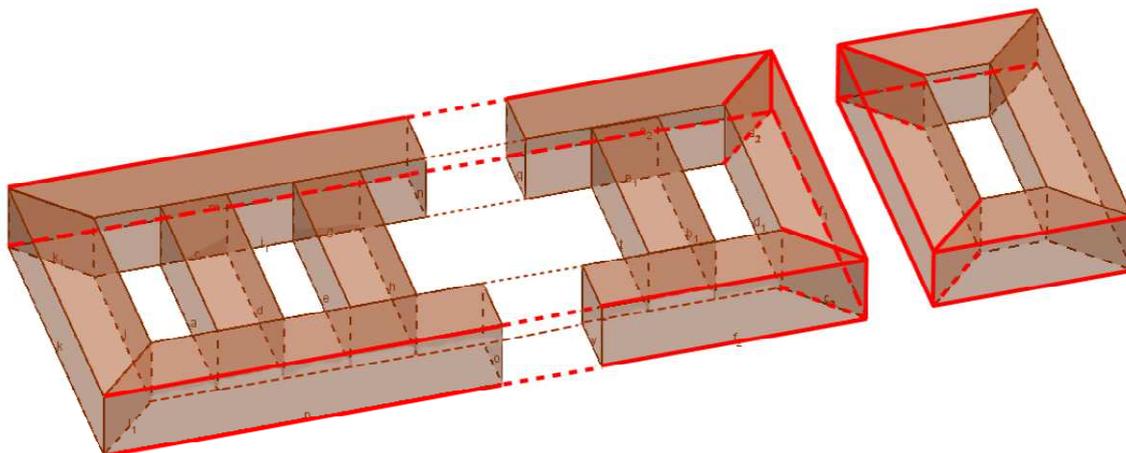


Figura 3.10: Arestas acumuladas destacadas em vermelho.

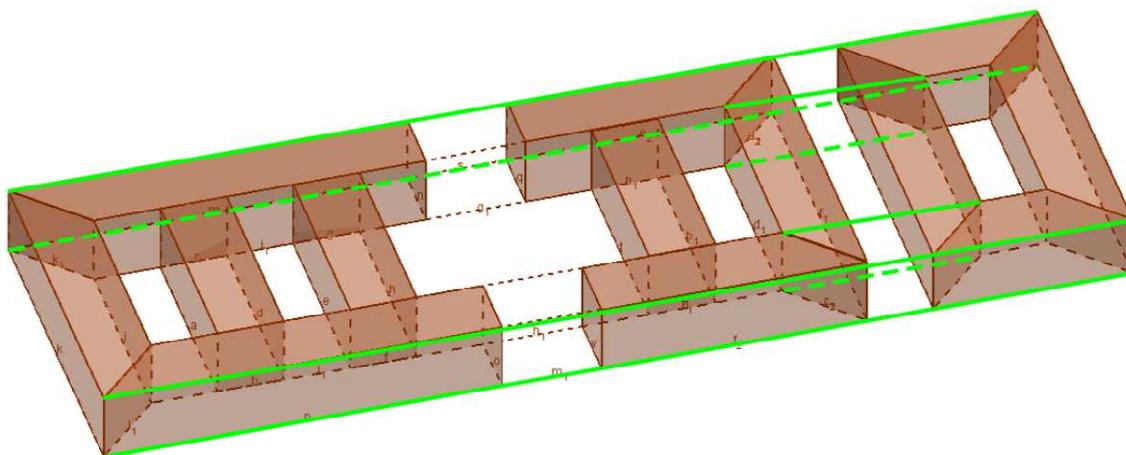


Figura 3.11: Novas arestas destacadas em verde.

Assim, ficamos com:

$$A_{n+1} = A_n + 32 - 24 + 8 = A_n + 16.$$

Já com relação ao número de faces, houve o acréscimo de 6 faces, dado que o 1-tórico possui 16 faces, mas houve a sobreposição e o acúmulo de 18 faces, enquanto que surgiram 8 novas faces. Ver figura 3.12 e 3.13.

Assim, ficamos com:

$$F_{n+1} = F_n + 16 - 18 + 8 = F_n + 6.$$

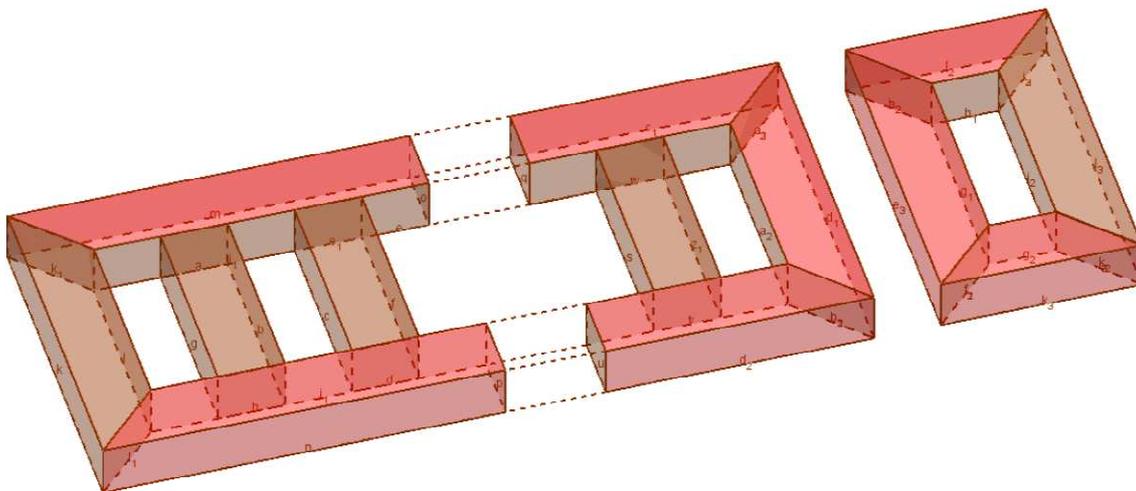


Figura 3.12: Faces acumuladas destacadas em vermelho.

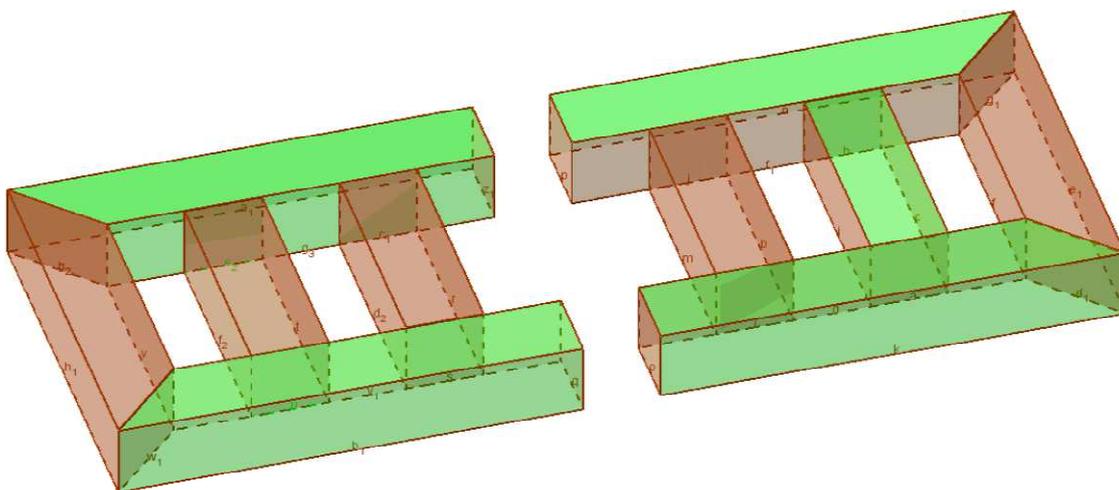


Figura 3.13: Novas faces destacadas em verde.

Tal união resulta no poliedro $(n+1)$ -tórico, conforme a figura 3.14.

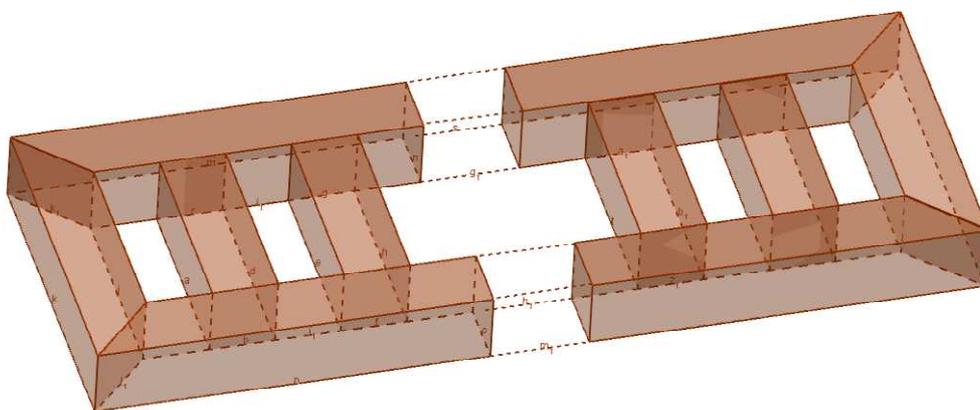


Figura 3.14: $(N+1)$ -tórico.

Dessa forma, conseguimos o seguinte:

$$X(P) = V_{n+1} - A_{n+1} + F_{n+1} = (V_n + 8) - (A_n + 16) + (F_n + 6)$$

$$X(P) = V_{n+1} - A_{n+1} + F_{n+1} = V_n - A_n + F_n + 8 - 16 + 6$$

$$X(P) = V_{n+1} - A_{n+1} + F_{n+1} = 2 - 2n - 2$$

$$X(P) = V_{n+1} - A_{n+1} + F_{n+1} = 2 - 2(n + 1).$$

Portanto, mostramos que a fórmula da Característica de Euler-Poincaré também é válida para poliedros com $n+1$ buracos. E, por conseguinte, provamos que

$$X(P) = V - A + F = 2 - 2n \text{ é satisfeita para } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 1.$$

3.1 Apêndice

3.1.1 Construção do poliedro n-tórico com o GeoGebra 5.0

A seguir, mostraremos minuciosamente como é feita a construção do poliedro n-tórico com a utilização do aplicativo GeoGebra, versão 5.0, permitindo-nos combinar conceitos de geometria e álgebra de modo a facilitar a visualização das figuras e proporcionar uma melhor compreensão do que estamos estudando.

Começamos “abrindo” o GeoGebra e observando uma janela de visualização em duas dimensões, figura 3.15, que é o plano cartesiano.

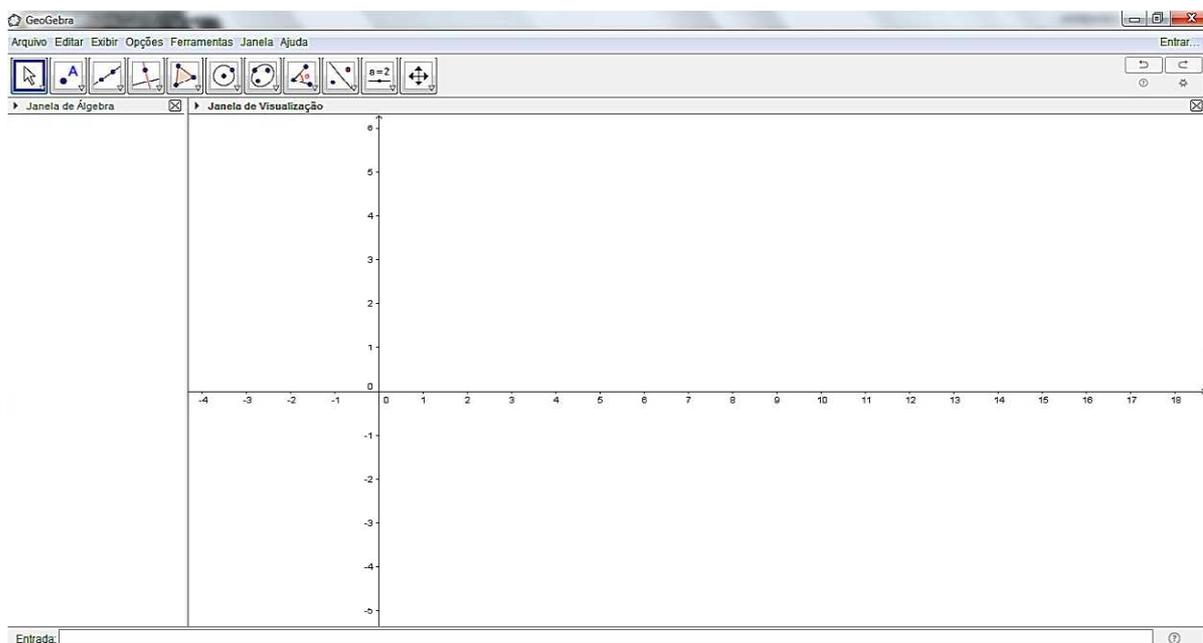


Figura 3.15: Janela de visualização inicial do GeoGebra.

Prosseguimos clicando com o botão direito do mouse sobre o plano cartesiano e selecionando a opção “Malha”. Com isso, poderemos marcar os pontos que, mais tarde, serão os vértices do n-tórico com mais regularidade.

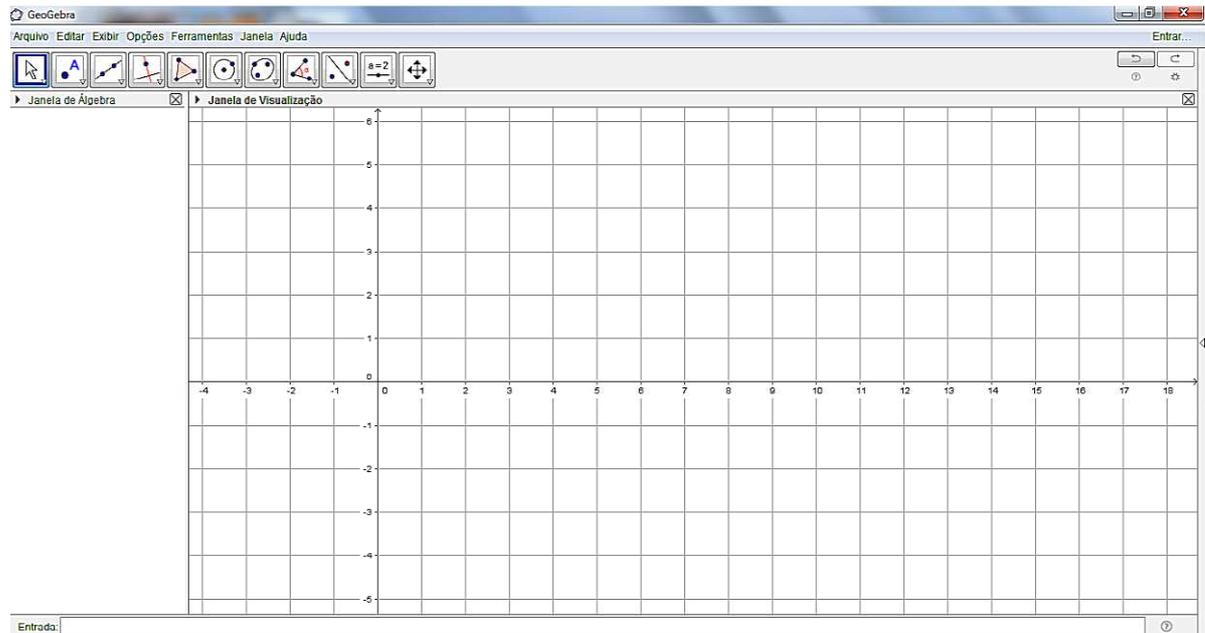


Figura 3.16: Malha.

Para centralizarmos os eixos, basta clicarmos com o botão esquerdo do mouse e movermos a janela até que se centralize.

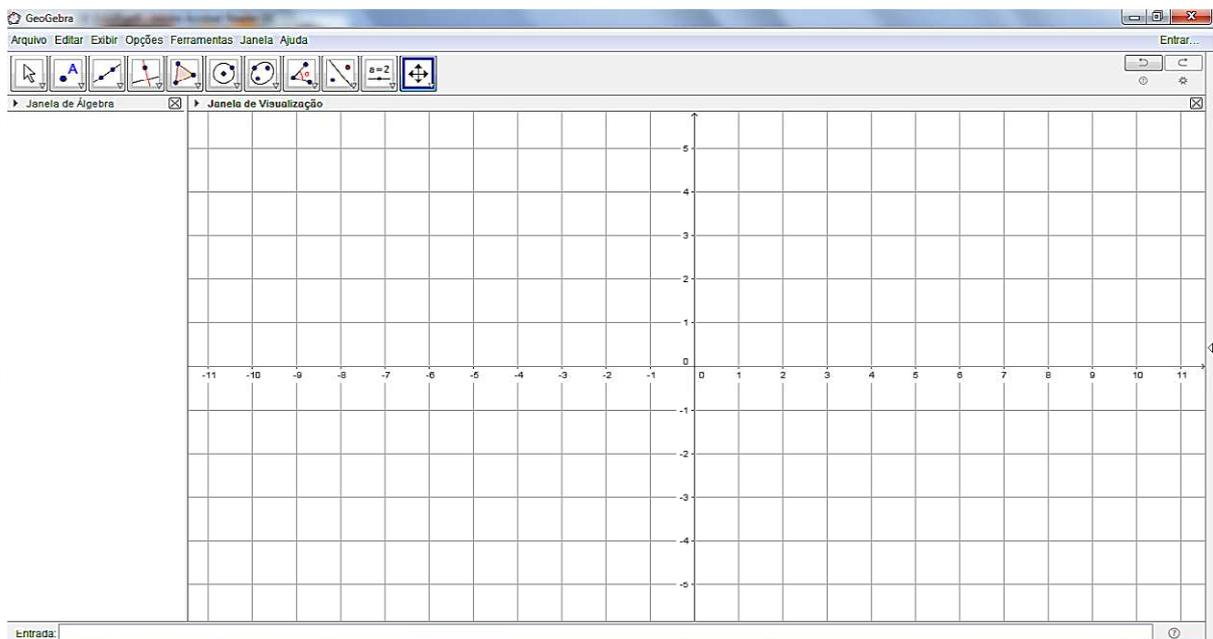


Figura 3.17: Eixos centralizados.

Na parte superior da página, clique na opção “Ponto” e selecione o subitem “Ponto”. Marquemos os pontos na malha de acordo com a figura 3.18.

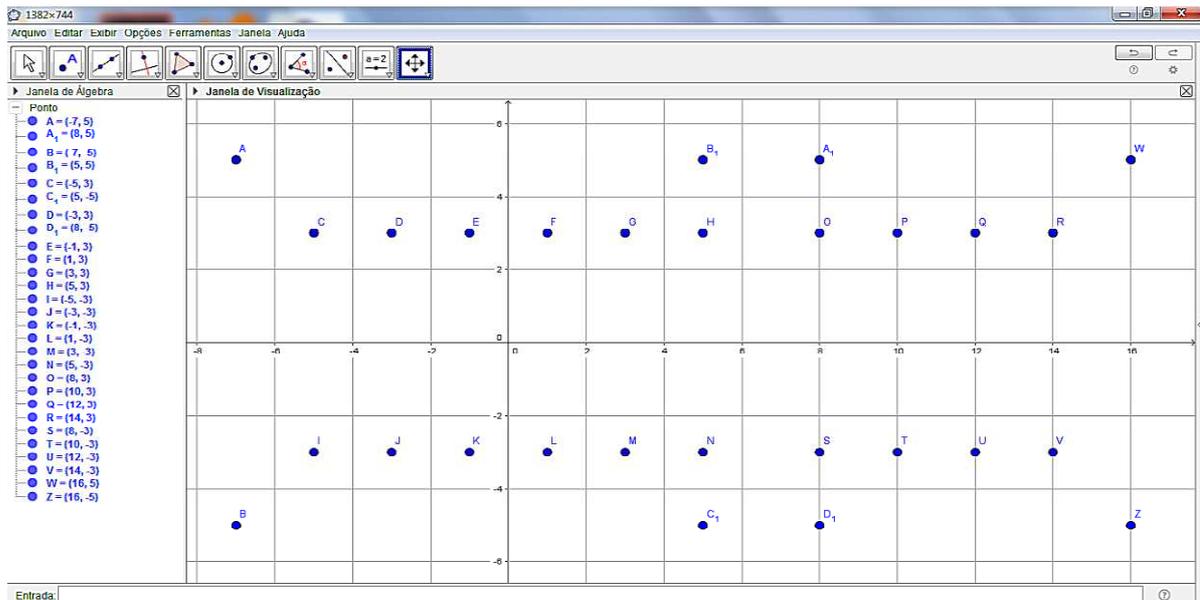


Figura 3.18: Pontos marcados na malha.

Marcados os pontos, agora devemos clicar na opção “Polígonos” e selecionarmos o subitem “Polígonos” para formarmos polígonos simples, isto é, polígonos cujos lados não adjacentes não se interceptam. Mas como queremos que nosso poliedro tenha buracos, então devemos construir os polígonos deixando alguns espaços livres, como na figura 3.19.

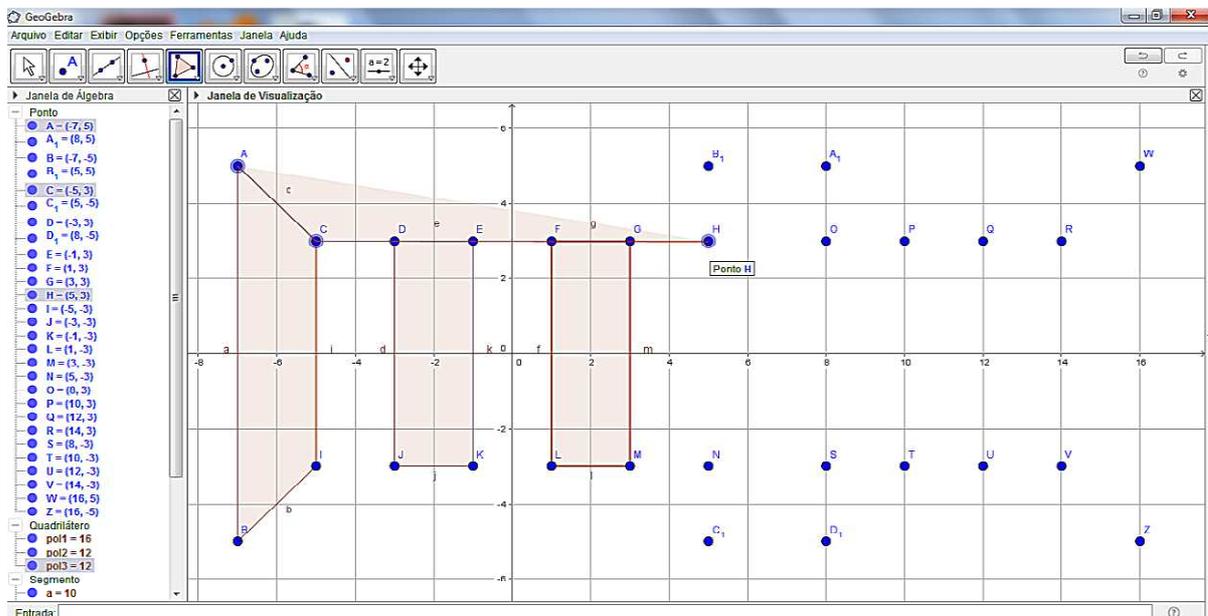


Figura 3.19: Construção dos polígonos.

Para facilitar, podemos construir os polígonos sempre com quatro vértices. Por exemplo, na figura 3.20, uma das faces fomentadas é a face $ACHB_1$. Feito isso, obtemos o que será uma das bases do n-tórico.

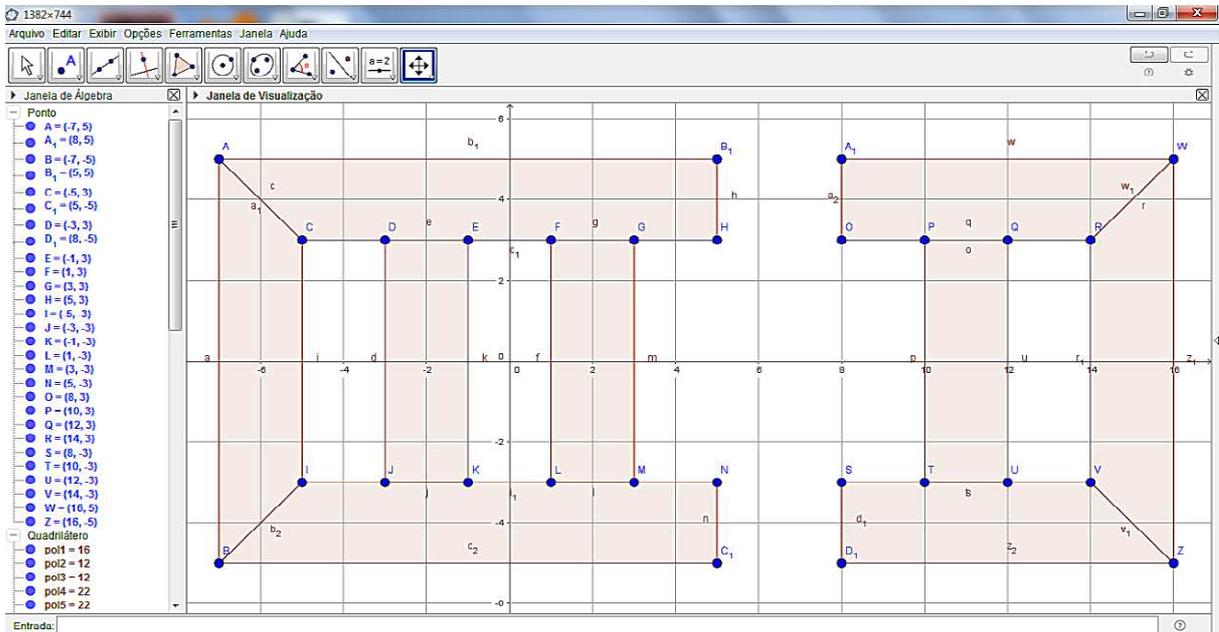


Figura 3.20: Base do n-tórico.

Neste momento, já podemos passar para a página de construção em três dimensões. Cliquemos na opção “Exibir” e selecionemos o item “Janela de Visualização 3D”. Ficaremos com duas janelas de visualização: uma em duas e outra em três dimensões.

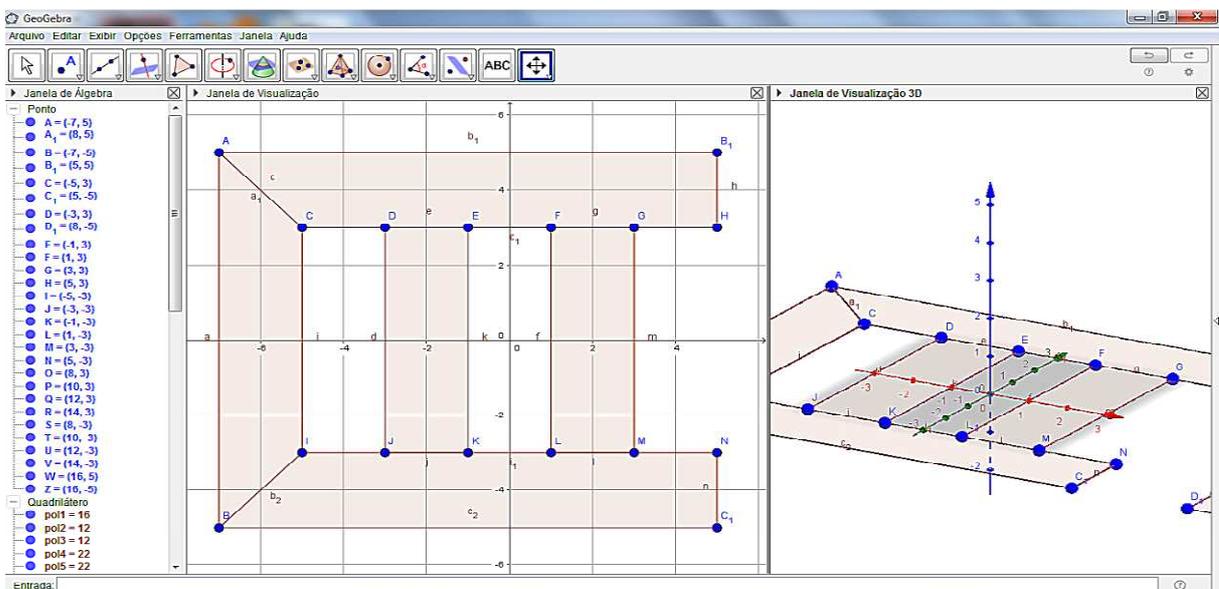


Figura 3.21: Janelas de visualização 2D e 3D.

Já podemos fechar a janela 2D, pois iremos trabalhar apenas com a janela 3D daqui para a frente.

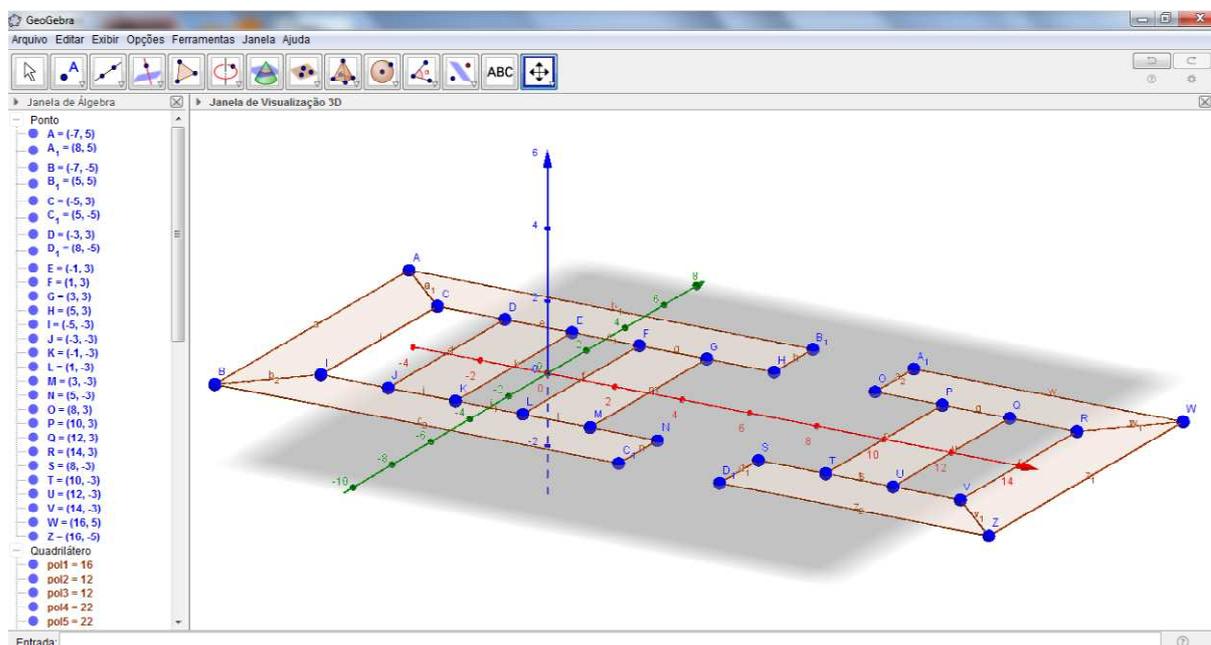


Figura 3.22: Janela 3D.

Para fomentarmos o n-tórico, devemos clicar na opção “Pirâmide” e selecionarmos o subitem “Extrusão para Prisma ou Cilindro”. Agora, basta clicarmos com o botão esquerdo do mouse sobre cada um dos polígonos construídos e arrastarmos para cima.

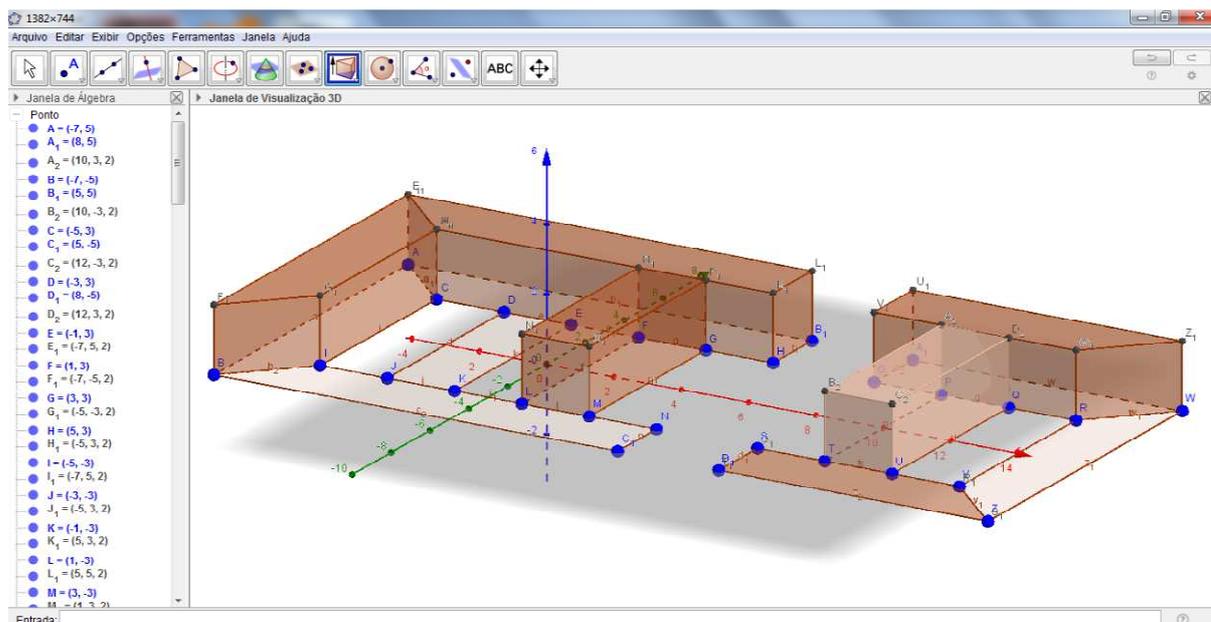


Figura 3.23: Processo de extrusão para prisma.

Para facilitar nossa construção, cliquemos na opção “Mover Janela de Visualização” e selecionemos o subitem "Girar Janela de Visualização 3D". Efetuadas todas as extrusões, obtemos o poliedro n-tórico, que teve seus buracos naturalmente formados.

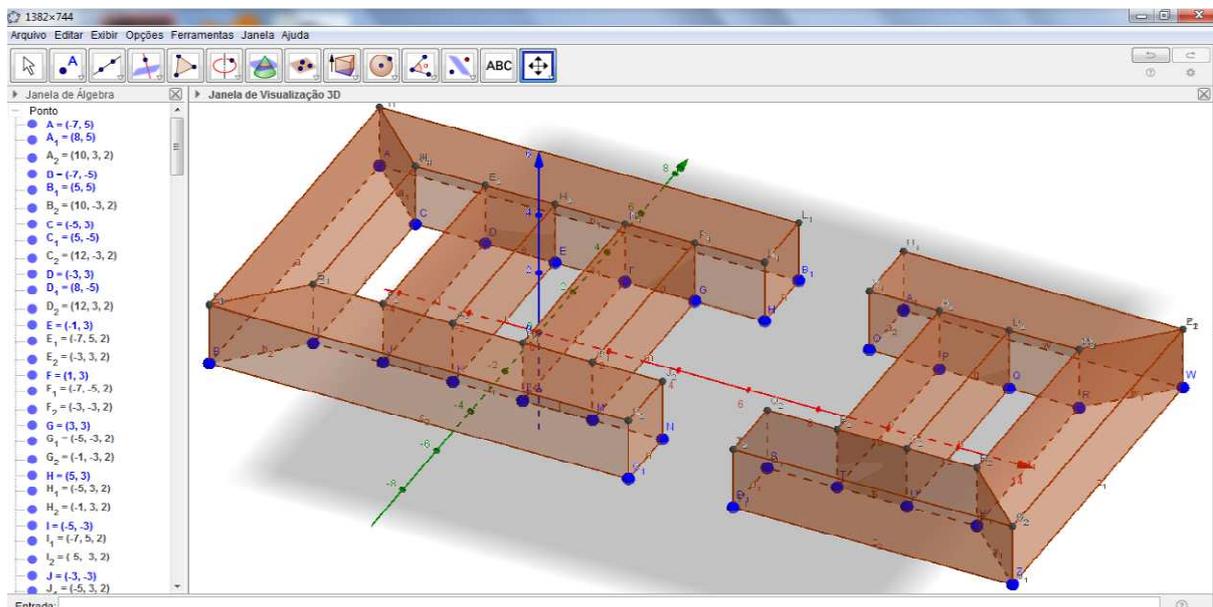


Figura 3.24: Poliedro n-tórico.

Notemos que a figura 3.24 está um tanto quanto “poluída”. Façamos uma “limpeza” prosseguindo da seguinte forma: retirando o plano cinza e os eixos, clicando com o botão direito do mouse ao lado do n-tórico e selecionando os itens “Plano” e “Eixos”.

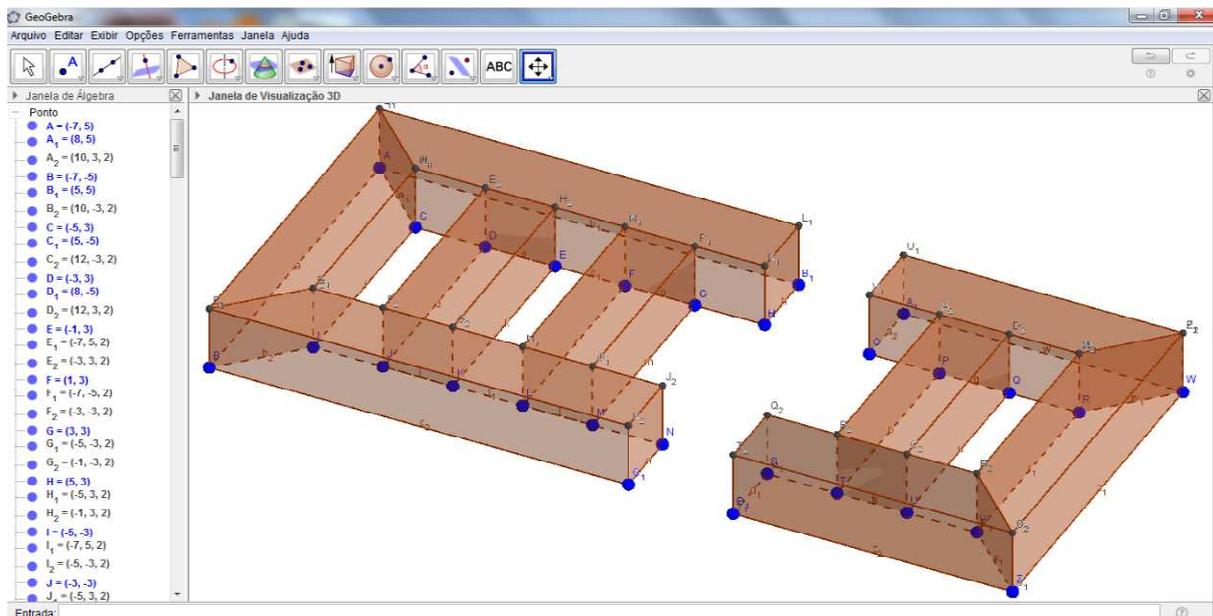


Figura 3.25: Eixos e plano retirados.

Agora, retiremos os pontos que representam os vértices do poliedro, pois eles estão “destacados” demais. Para tanto, selecionemos a opção “Mover”. Em seguida, cliquemos com o botão direito do mouse sobre cada um dos vértices e selecionemos o item “Exibir Objeto”.

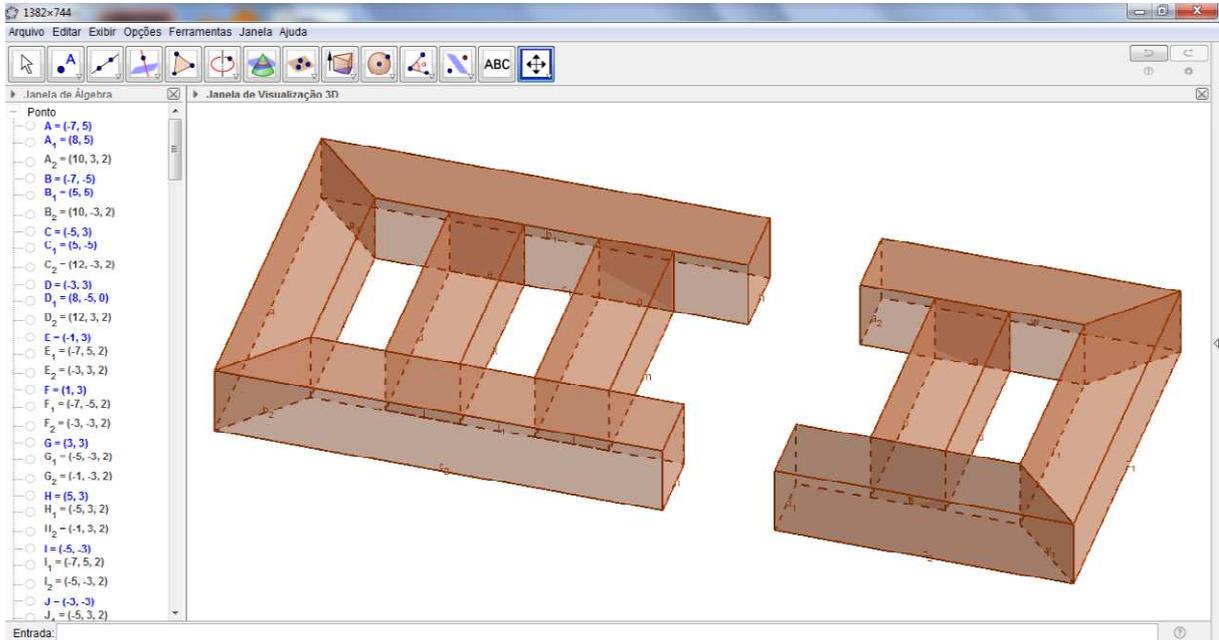


Figura 3.26: N-tórico “limpo”.

Finalmente, tracemos os segmentos pontilhados, conforme figura 3.27, para dar a impressão de que as duas partes vão se ligando e formando buracos, até que se origine um poliedro com n buracos.

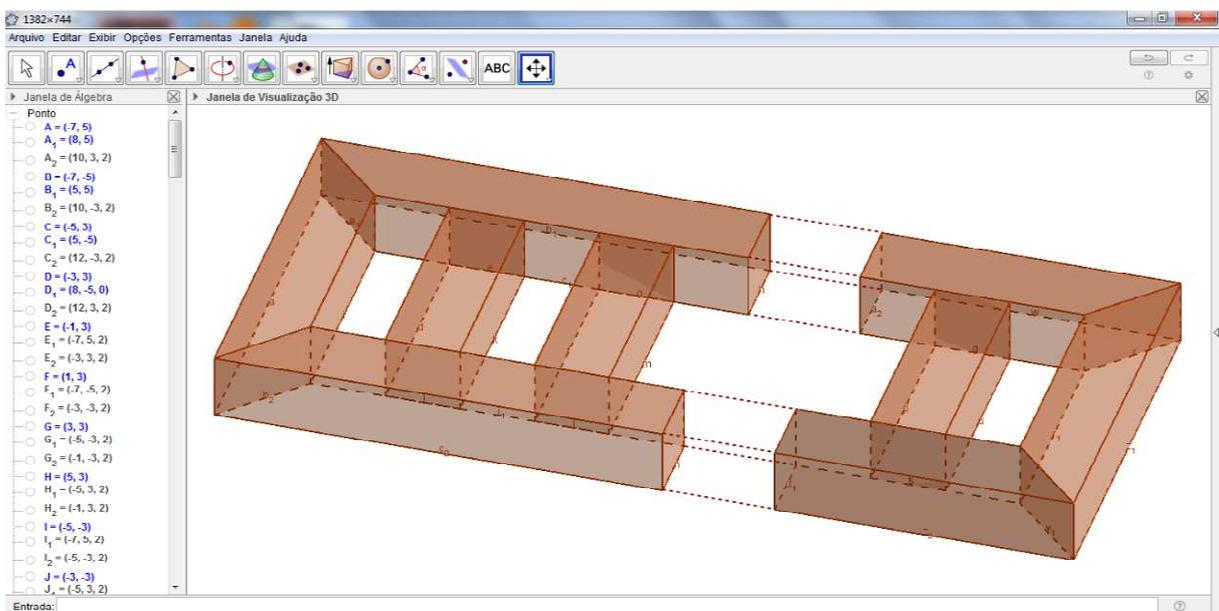


Figura 3.27: N-tórico com segmentos pontilhados.

3.1.2 Planificações

Quando planificamos poliedros homeomorfos à esfera, independentemente de eles serem convexos ou não, conseguimos formas que nos permite construí-los com apenas uma folha de papel. Ou seja, é como se pudéssemos moldar continuamente todas as faces do poliedro a partir de um único plano. Isso acontece porque eles não têm buracos. Por exemplo, observe os casos do icosaedro regular e de uma pirâmide não convexa a seguir.

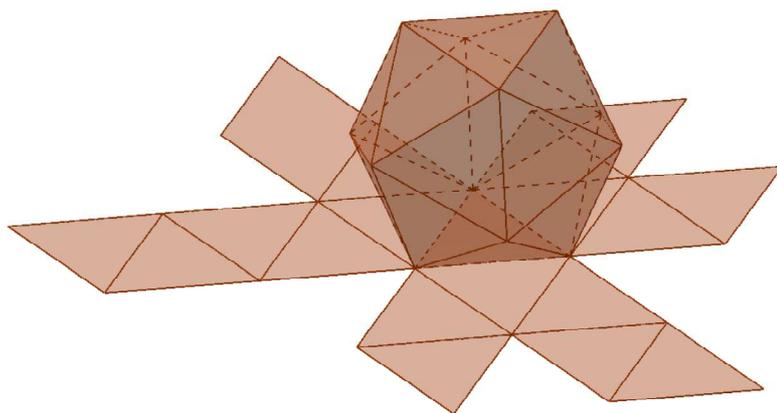


Figura 3.28: Icosaedro regular junto à sua planificação.

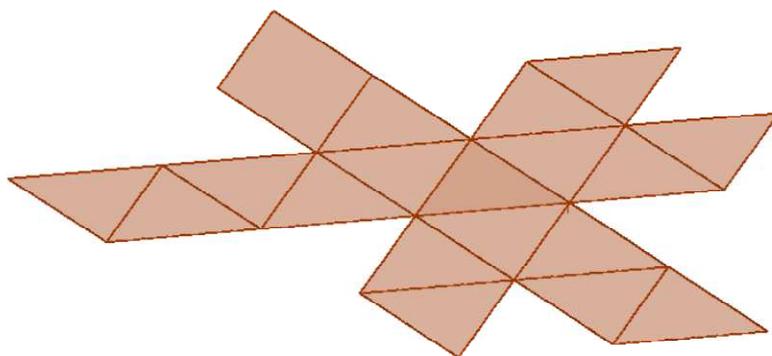


Figura 3.29: Planificação do icosaedro regular.

Observemos que na planificação do icosaedro regular não tivemos a sobreposição de faces. O mesmo acontecerá na planificação da pirâmide não convexa. Veja as figuras 3.30 e 3.31 abaixo.

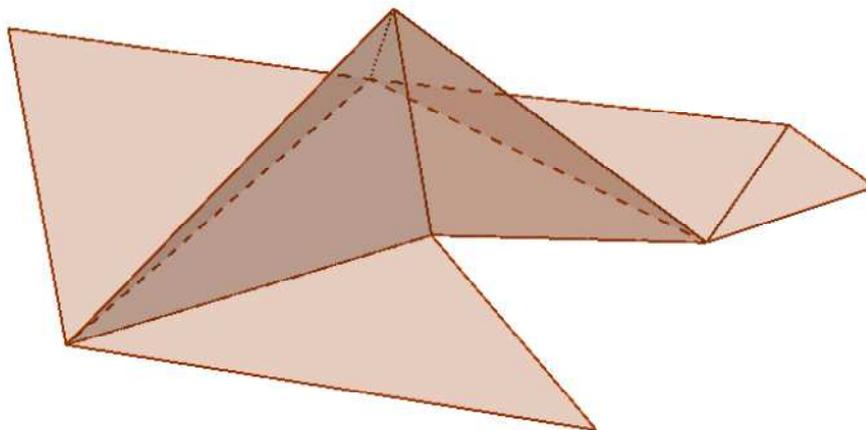


Figura 3.30: Pirâmide não convexa junta à sua planificação.

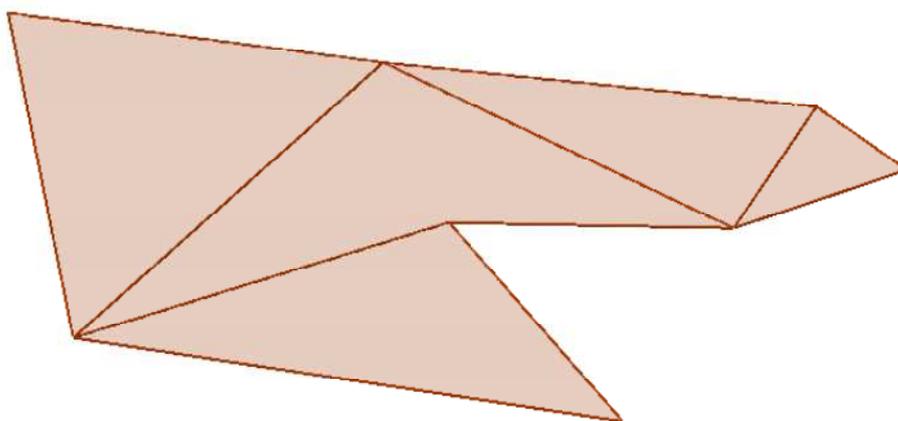


Figura 3.31: Planificação da pirâmide não convexa.

Do contrário ao que aconteceu com os poliedros homeomorfos à esfera, na planificação de poliedros que possuem buracos fomentar-se-ão faces sobrepostas, o que nos leva a crer que não poderíamos construí-los utilizando apenas uma folha de papel. Veja as figuras 3.32 e 3.33.

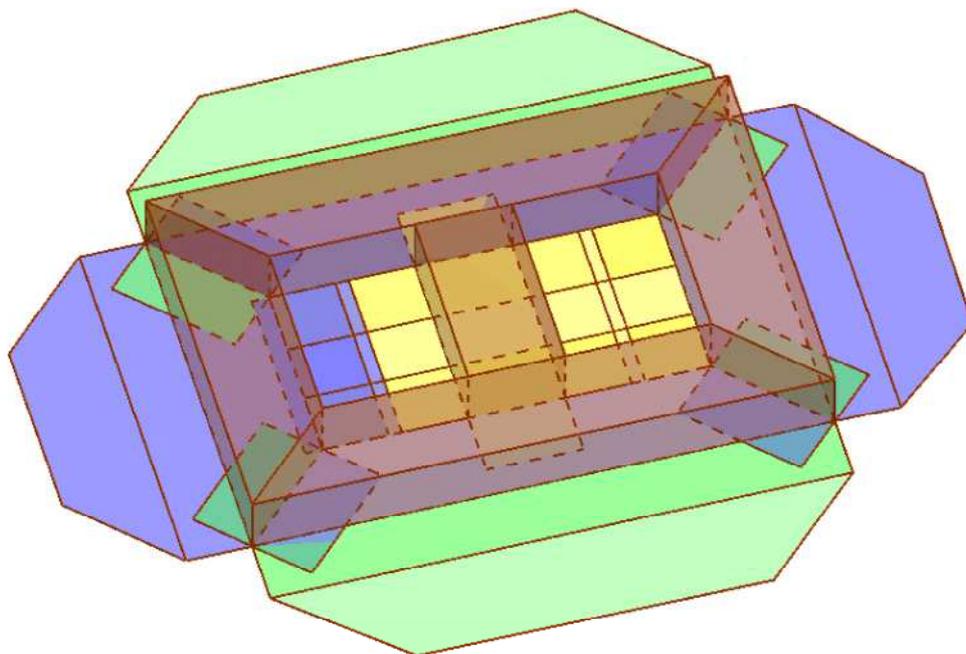


Figura 3.32: 2-tórico junto à sua planificação.

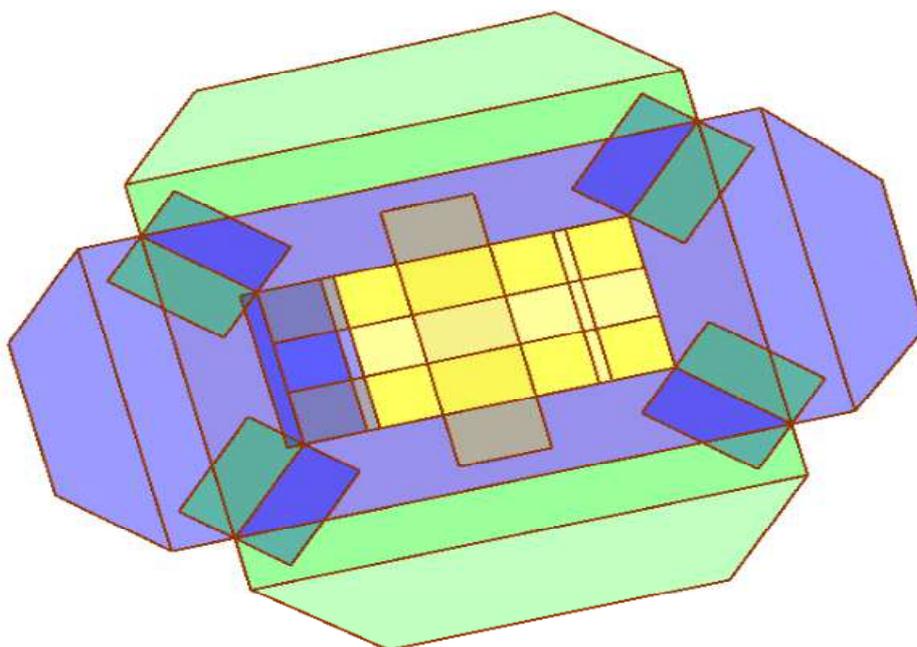


Figura 3.33: Planificação do 2-tórico.

No caso do 2-tórico acima, realmente verificamos que houve sobreposição de faces. Não é difícil nos convencermos de que o mesmo aconteceria com o 1-tórico, 3-tórico, e assim sucessivamente para qualquer poliedro que apresentasse buracos.

Considerações finais

Neste trabalho, entendemos como surgiram os primeiros estudos sobre os poliedros e a relação que eles apresentavam com relação ao seu número de faces, vértices e arestas. Vimos que vários matemáticos importantes contribuíram para que tivéssemos uma solidez para o resultado do Teorema de Euler. É válido salientar que antes da demonstração de fato de qualquer teorema, fizemos toda uma preparação para que chegássemos efetivamente a ele, apresentando definições e dando exemplos, e ainda justificando alguns resultados necessários para as devidas demonstrações.

Mostramos que o Teorema de Euler sempre é válido para poliedros convexos, mas que também pode ser aplicado a poliedros não convexos, desde que estes sejam deformáveis à esfera, como observou Cauchy. Ainda fizemos a generalização desse resultado para um poliedro qualquer, mostrando a relação que há entre o número de buracos e a característica de Euler-Poincaré que cada poliedro apresentara. Destacamos, ainda, a importância da utilização de um aplicativo matemático para facilitar a visualização das figuras e propriedades estudadas, como foi em nosso caso com o GeoGebra.

Finalmente, almejamos que este trabalho possa ser utilizado por professores e alunos para facilitar o estudo do Teorema de Euler, servindo como material de apoio para sanar eventuais dúvidas sobre esse resultado, que é tão importante para a geometria espacial. E como proposta de aplicações do Teorema de Euler, indicamos o estudo dos grafos, cujas estruturas podem representar vários problemas interessantes e que podem ser encontrados facilmente por toda parte. O artigo de Euler, publicado em 1736, sobre o problema das *sete pontes de Königsberg*, é considerado o primeiro resultado da teoria dos grafos, para falar a verdade, é também considerado um dos primeiros resultados topológicos na geometria, ou seja, não dependente de quaisquer medidas, o que nos revela a profunda conexão entre a teoria dos grafos e a topologia. Enfim, são várias e interessantes as aplicações dos resultados abordados neste trabalho.

Referências

- [1] Dante, L. R., *Matemática* - Volume 7, 1ª edição. São Paulo. Editora ÁTICA. 2013.
- [2] Dolce, O., Pompeo, J. N., *Fundamentos de Matemática Elementar* - Volume 10, 4ª edição. São Paulo. Editora ATUAL. 1985.
- [3] Eder, W. P., *Teorema de Euler para poliedros não convexos*. 2016. 63 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Paraná. 2016.
- [4] Eves, H., *Introdução à História da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas. Editora UNICAMP. 2004.
- [5] Iezzi, G., *Conecte Matemática* - Volume 2, 2ª edição. Editora SARAIVA. 2014.
- [6] Lima, E. L., et al, *A Matemática do Ensino Médio* - Volume 2. Rio de Janeiro, SBM. 2006. 308 p.
- [7] Lima, E. L., *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro. SBM. 1991.