UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E EXATAS.

***CAMPUS* – VI – POETA PINTO DO MONTEIRO**

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JÉSSICA OLIVEIRA NUNES

O CONCEITO DE FUNÇÕES NO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO NO BIÊNIO 2015 - 2016: UMA ANÁLISE À LUZ DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO.

MONTEIRO – PB

2017

JÉSSICA OLIVEIRA NUNES

O CONCEITO DE FUNÇÕES NO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO NO BIÊNIO 2015 - 2016: UMA ANÁLISE À LUZ DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial a obtenção do título de graduada no curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, *Campus* VI - Poeta Pinto do Monteiro.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Mestre José Luiz Cavalcante.

MONTEIRO – PB

2017

N972c Nunes, Jéssica Oliveira.
O conceito de funções no Exame Nacional do Ensino Médio no biênio 2015 - 2016 [manuscrito] : uma análise à luz da teoria antropológica do didático / Jéssica Oliveira Nunes. - 2017.
50 p. : il.

Digitado.
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em MATEMÁTICA) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2017.
"Orientação: Prof. Me. José Luiz Cavalcante, Departamento de Matemática".

1. Teoria Antropológica do Didático (TAD). 2. Enem. 3. Ensino de Funções. I. Título.

21. ed. CDD 372.7

JÉSSICA OLIVEIRA NUNES

O conceito de funções no exame nacional do ensino médio no Biênio 2015 - 2016: uma análise à luz da teoria antropológica do didático.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Aprovada em 03 de agosto de 2017.

Prof. Ms. José Luiz Cavalcante (UEPB)

Prof. Marcus Bessa de Menezes

Pro. Marília Lidiane Chaves da C. Alcantâra

DEDICATÓRIA

Dedico o presente trabalho aos meus filhos Joaquim e José Pedro, sustento para a coragem e pudor, assim podendo questionar as realidades da vida, propondo sempre um novo mundo de possibilidades.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus nosso pai celestial, por ter concedido garra e pudor para chegar até essa etapa do curso, me mostrando o caminho para nunca desistir dos meus objetivos apesar dos obstáculos conseguindo ultrapassa-los com todos os meus conhecimentos adquiridos na graduação desde educação moral a cientifica.

Agradeço aos meus filhos *Joaquim Vinicius Oliveira Alves e José Pedro Oliveira Alves* um dos principais motivos a nunca desistir dos meus objetivos para assim ser orgulho de mãe no futuro.

Agradeço aos meus pais *Paulo Roberto Campos Nunes e Rejane Oliveira Correia*, que me educaram com os princípios éticos para uma sociedade, a minha família que também se faz presente, mostrando de maneira simples e humilde, que o futuro dos dias de hoje estão nos estudos, assim tentando ajudar da maneira que está ao alcance deles, sendo grata a todo apoio e confiança.

Agradeço ao professor e Orientador José Luiz Cavalcante a quem sou grata pela sua paciência durante este período de orientações.

Agradeço também a toda equipe que compõe a Universidade Estadual Da Paraíba - Campus Monteiro, desde os auxiliares de serviços gerais, a direção e coordenação.

Agradeço em nome de Karoline Freitas a todos os amigos e colegas que de forma direta ou indiretamente me concederam palavras e gestos de apoios nessa caminhada.

O professor mediano
Conta
O bom professor
Explica
O professor superior
Demonstra
O grande professor
Inspira

RUBENS ALVES.

RESUMO

O presente Trabalho de Conclusão de Curso teve como objetivo central analisar as organizações praxeológicas matemáticas em torno do conceito de funções no bloco matemática no exame nacional do ensino médio no biênio 2015-2016. A motivação para realização desta pesquisa surgiu a partir de reflexões durante nossa atuação no Programa Pró-enem do CCHE – UEPB, ação de extensão universitária que tem como objetivo oferecer a comunidade do entorno aulas de preparação para a realização do ENEM. Como monitores do Programa no componente de Álgebra durante cerca de 03 anos, pudemos observar que embora haja atividades de planejamento para ministrar as aulas, muitas vezes esse planejamento não dá conta de analisar em profundidade as questões, ou seja, durante o planejamento o foco é nos conteúdos e na resolução de questões. Assim, quando tivemos acesso a pesquisa de Ferreira (2016), onde a mesma utilizou a Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard e a noção de organização praxeológica para analisar o bloco tecnológico-teórico em relação ao ensino de funções quadráticas, percebemos o potencial da teoria para subsidiar o trabalho no Pró-enem. Assim nossa questão de pesquisa é: quais as organizações praxeológicas em torno do conceito de funções no ENEM nas edições de 2015 e 2016? Para fundamentar nosso trabalho utilizamos os textos de Chevallard (1999), Almouloud (2007) e Ferreira (2016). Desenvolvida como uma pesquisa qualitativa conforme Bogdan e Biklen (1994) e tipificada como uma aproximação da pesquisa exploratória no sentido de Fiorentini e Lorenzato (2006). Fizemos uma reflexão a partir de uma análise praxeológica sobre o conteúdo de funções através das questões relacionados ao conceito de funções. Os resultados apontam para concentração de conteúdos em torno de 5 tipos de tarefas. As tarefas permitem o uso de técnicas variadas cabendo ao candidato a escolha da técnica mais econômica.

Palavras-chave: Teoria Antropológica do Didático - TAD, ENEM, Ensino de Funções.

ABSTRACT

The present work of Course Conclusion had as main objective to analyze as mathematical praxeological organizations around the concept of functions in the mathematical block no national exam of high school without biennium 2015-2016. A motivation to carry out research in the level of reflection during our update. Program for developing an ENEM initiative. As monitors of the Program without a component of Algebra for about 03 years, we could observe that although there are planning activities to teach as classes, often this planning does not account for in-depth analysis as issues, ie during planning the focus is In content and problem solving. Thus, when we have access to the research of Ferreira (2016), where an anthropological theory of the didactic of Yves Chevallard is used and the notion of praxeological organization to analyze the technological-theoretical block in relation to the teaching of quadratic functions, we perceive the potential of the theory Para Subsidize the work in Pro-enem. As well as the praxeological organizations around the concept of non-ENEM functions in the editions of 2015 and 2016. To base our work we use the texts of Chevallard (1999), Almouloud (2007) and Ferreira (2016). Developed as a qualitative research according to Bogdan and Biklen (1994) and as an approximation of exploratory research in the sense of Fiorentini and Lorenzato (2006). We did a reflection on a praxeological analysis of the content of functions through the questions related to the concept of functions. The results point to the concentration of contents in the around 5 types of tasks. As the task is the use of varied techniques, it is up to the candidate to choose the most economical technique.

Key words: Anthropological Theory of Didactic - ATD, ENEM, Teaching Functions.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A importância da Matemática em nossa sociedade é um fato que pode ser observado ao longo da História. Se nos restringirmos a história recente do ensino formal no Brasil vamos perceber que desde a fundação da Academia Real da Marinha em 1832, a matemática ocupa um lugar de destaque nos currículos escolares. Desde 1991 quando Chevallard publicou *Le Transposition Didactique*[1] já destacava que "um saber não existe no vácuo", isso indica dentre outros aspectos, que não é sem razão que matemática ocupa um lugar de importância no currículo escolar brasileiro.

Não vamos nos ater a defesa dos argumentos que legitimam a presença da Matemática na Escola Básica, porém devemos reconhecer que o ensino de Matemática no Brasil, assim como em outras partes do mundo sempre foi um desafio. O que estamos afirmando também é reconhecido em documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Brasil (1998) destaca que são múltiplos os fatores que influenciam para as dificuldades no ensino de Matemática, aqui podemos citar questões como a formação docente e a sua valorização, a ineficiência de algumas políticas públicas educacionais, dentre outros aspectos. Assim percebemos que, ao mesmo tempo, que a Matemática tem seu lugar no Currículo da Educação Básica, a mesma tem sérios entraves quanto ao seu ensino. Nós acrescentamos a essas dificuldades a natureza da própria matemática, como saber que precisa ser analisado e passa por transformações no seu processo de ensino.

Esses entraves renderam a Matemática um status que para aqueles que a conhecem minimamente não condizem com a realidade, o fato, que a Matemática tem sido carregada com muitos mitos sobre seu ensino e sua aprendizagem.

Como monitores do Pró-enem, Programa de Extensão vinculado ao Centro de Ciências Humanas e Exatas da Universidade Estadual da Paraíba, no Campus Monteiro, atendemos anualmente jovens e adultos que desejam prestar o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. Os monitores, coordenados por docentes da Instituição, planejam e ministram aulas sobre diversos componentes, no caso da Matemática, Álgebra, Geometria e Triogonometria com a finalidade ofertar uma preparação para esse público.

No componente de Álgebra percebemos, ao longo de quase 03 anos, que os estudantes, mesmo aqueles que ainda estão cursando o Ensino Médio, apresentam sérias dificuldades,

[1] A Transposição Didática. Ver. CHEVALLARD, Y. La Transposition Didactique. Grenoble, La pensée Sauvage, 1991.

desde operações básicas com objetos algébricos e até mesmo na compreensão do que seja uma função, ou em nível mais elementar uma equação.

Lins e Gimenez (1997) indicam que muitas dessas dificuldades, infelizmente são comuns. Para os autores o ensino baseado na repetição e sem significação das atividades matemáticas contribuem para esse quadro.

A monitoria no Pró-enem foi para nós uma oportunidade de por em prática os conhecimentos que adquirimos na Licenciatura, embora a maior parte das aulas sejam expositivas, vivenciamos todo processo pedagógico que compreende o planejamento, a execução e avaliação das aulas ministradas. Durante nossa atuação, sentimos falta de uma discussão mais sistemática sobre as questões as quais os estudantes são submetidos. Muitas vezes, fazemos a resolução de algumas questões, porém sempre do ponto de vista pragmático.

Diante desta constatação tivemos acesso a duas pesquisas que motivaram este estudo. A primeira delas foi o trabalho de Ferreira (2016). Nessa pesquisa a autora realizou um estudo das organizações praxeológicas em torno das funções quadráticas. Na sua análise ela tentou demonstrar o potencial da análise praxeológica como ferramenta para os futuros professores compreenderem as conexões entre a matemática da Educação Básica e a Matemática do Ensino Superior. Chevallard (1999) em sua Teoria Antropológica do Didático destaca que a análise praxeológica é um meio para entendermos as práticas institucionais em torno dos saberes a serem ensinados.

Em seus postulados Chevallard (1999) diz que toda tarefa (T) de qualquer que seja o conteúdo apresenta ao menos uma técnica (t) que é explicada por uma tecnologia (Θ), que por sua vez tem uma teoria que a justificam e dão sustentação. Logo percebemos que a análise praxeológica da organização matemática presente no ENEM, poderia se constituir numa valiosa ferramenta matemática para assessorar o planejamento de atividades do Pró-enem.

Essa hipótese esteve apoiada, principalmente num segundo estudo que tivemos acesso. A pesquisa de mestrado de Goulart (2007) fez uma análise dos discursos institucionais em torno do Ensino de Probabilidade, além de documentos oficiais, o autor fez um estudo das questões que envolviam o conceito de Probabilidade no ENEM no período de 1998 até 2007. As conclusões de Goulart (2007) apontam para o fato que existe uma ausência nos documentos oficiais sobre as praxeológias recomendadas para o ensino de Probabiliade no Ensino Médio, de modo que o ENEM, de certa forma, passa a ser uma política pública que indiretamente cumpri o papel na demarcação dos conteúdos a serem explorados em sala de aula.

Diante desses dois trabalhos nos questionamos sobre: quais as organizações praxeológicas presentes nas questões envolvendo funções no ENEM? Que tarefas são requeridas? Que técnicas são mais econômicas para utilizadas na resolução das questões? Que vestígios tecnológicos podem ser exploradas a partir da análise do bloco tarefa-técnica? Essas questões foram sintetizadas na seguinte questão norteadora: quais as organizações praxeológicas em torno do conceito de funções nas questões do ENEM nas edições de 2015 e 2016?

Diante desta questão, o nosso objetivo principal foi analisar as organizações praxeológicas em torno do conceito de funções no bloco matemática no exame nacional do ensino médio no biênio 2015-2016.

A escolha do biênio 2015 – 2016 seguiu a lógica de que o ENEM é um exame que está em constate evolução, dessa forma, a análise de anos dois consecutivos pode fornecer uma projeção interessante para os próximos anos.

O trabalho está organizado em três capítulos. No primeiro fazemos uma discussão teórica sobre Ensino de Funções e a Teoria Antropológica do Didático. No segundo capítulo trazemos as reflexões sobre o caminhar metodológico da pesquisa e, por fim, apresentamos no terceiro e último capítulo a análise praxeológica sobre o conteúdo funções no ENEM 2015-2016.

CAPÍTULO 1
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste Capítulo iremos apresentar as bases teóricas que fundamentam nosso trabalho. Observamos no objetivo e na questão norteadora que foi proposto, que a nossa problemática passa por dois eixos de investigação. O primeiro é o próprio conceito de função, optamos por uma abordagem da evolução histórica do conceito. O segundo eixo diz respeito a análise praxeológica cuja metodologia e bases teóricas estão presentes nos escritos de Yves Chevallard.

1.1 A NOÇÃO DE FUNÇÃO E SUA EVOLUÇÃO HISTÓRICA.

A evolução histórica do conceito de função é um processo que ocorreu de maneira lenta, ao passar dos séculos, para ser apresentada na forma atual a qual materializados nos livros didáticos. Não há, portanto estudos que determinem a exata época de origem, porém o que se sabe é que nas mais diversas civilizações, a noção ou ideia de função apareceu sob os mais variados aspectos. ROQUE (2015).

Esses indícios nos apresentam alguns períodos que merecem destaque: na antiga mesopotâmia, por exemplos, a registros entre os babilônio de tabelas para associação de valores, além de método empíricos para o calculo de determinação que nos lembram o pensamento funcional. Intuitivamente, se pensarmos em alguns métodos mais rudimentares de contagem, como a contagem biunívoca de rebanhos, podemos ter uma ideia que esta presente também no pensamento funcional. Na Idade Média já se visualizava noções expressas de forma geométrica e mecânica, porém é o contato com as civilizações árabes e também hindus que farão a Matemática ocidental caminhar para a ideia de pensamento funcional. MAGARINUS (2006)

Nomes como Viète (1540-1603), Descartes (1596-1650), Fermant (1601-1665), dentre outros anotaram importantes contribuições para a construção matemática do conceito de função. Porém é no estudo de fenômenos físicos e na necessidade de quantificar os movimentos da natureza que o conceito de função irá se desenvolver, então nomes como Copernico (1473-1543), Kepler (1571-1630), Galileu (1564-1642) e Newton (1643-1727), dentre outros, trazem contribuições importantes para entendermos funções. BOTELHO E REZENDE (2007)

Segundo Maringus (2013) Galileu Galilei (1564-1642) introduziu o aspecto quantitativo nas representações gráficas sobre o movimento de corpos em queda a partir do repouso. Nicole Oresme (1323-1382), matemático francês, desenvolveu a teoria das latitudes e longitudes para descrever os diferentes graus de intensidade das variáveis velocidade e tempo relacionados durante o movimento de um corpo que se desloca com aceleração constante. É a partir do século XVII que estudo das curvas e o fortalecimento cálculo diferencial e integral viriam abrir os caminhos para que o pensamento funcional fosse aceito pela comunidade matemática, de modo que muitas as ferramentas que usamos no cálculo diferencial e integral hoje, já estavam estabelecidos nessa época. EVES (2004).

Das primeiras noções até a famosa definição do grupo Boubarki em 1939 que assume a função em termos de conjuntos e que está transposta em muitos livros didáticos muitas mudanças ocorreram, demonstrando que discutir o ensino de funções não é algo trivial, ao passo que notadamente no currículo escolar essa noção está presente até nos de escolaridade mais elementares, embora não formalizado.

O conceito de função esta presente pode surgir no currículo escolar associados a várias outras noções, como proporção, estudos de figuras geométricas, métodos de tratamento de dados, na justificação de processos aritméticos, dentre outros.

Para Ponte (1990) o conceito de função é fundamental para o ensino, ele descreve a origem e o desenvolvimento deste conceito ao longo da História da Matemática, sua evolução na Educação Matemática e seu surgimento como um instrumento matemático indispensável para o estudo quantitativo dos fenômenos naturais, mostrando que este desenvolvimento histórico foi um processo lento e que precisa de atenção..

Muito se questiona sobre a utilidade do conceito de função, como pode se fazer necessário, pois sua utilização passa despercebida, ate mesmo em assumir diferentes conceitos pra os alunos, por isso não é notada como se produz e desenvolve determinado conceito de função em meio escolar e suas relações em outros campos. Assim destaca Brasil (2006):

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. (Brasil 2006, p.121)

No entanto, o Currículo do Ensino Médio Médio brasileiro se expõe de maneira tradicional, onde o livro didático é principal referência. Essas discussões sobre a evolução do conceito de função não são suficientemente exploradas por esses livros, e consequentemente, esse tipo de discussão é quase ausente.

Para Zuffi (2001) os problemas que ocuparam os matemáticos no decorrer dos tempos exerceram forte influência na elaboração do conceito de função. No início, quando as preocupações eram descrever e compreender os fenômenos naturais, identificamos a dependência entre variáveis de uma maneira qualitativa; posteriormente, evidenciamos o aparecimento das representações gráficas e descrições verbais; mais tarde, com o desenvolvimento da matemática moderna, surgem as funções sendo representadas como expressões analíticas e, finalmente, como uma relação entre conjuntos.

Para nós a evolução do conceito de função e seu papel no ensino, além da nossa experiência como monitores, nos mostra a importância do olhar reflexivo sobre esse conceito e seu ensino. Para tanto o faremos do ponto de vista da Didática da Matemática, através da Teoria Antropológica do Didático (TAD) Chevallard (1996).

1.2 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Levando em consideração que o conceito de função desde a sua evolução histórica até a sua inserção como objeto de ensino passa por diversos estágios, reconhecemos que os processos transpositivos pelos quais passou e passa, e as influências que recebe são importantes. Sendo assim, escolhemos a TAD, por entender que as práticas institucionais em torno do ensino de função são importantes.

A TAD proposta por Chevallard (1992;1996) prioriza alguns aspectos dos fenômenos educacionais através da noção de transposição didática, para que se possa refletir profundamente as práticas institucionais em torno da difusão dos saberes. Ao descrever as práticas institucionais em termos de organizações matemáticas e didáticas, a TAD traz importante contribuição para a compreensão dos fenômenos didáticos (fenômenos ligados aos processos de ensino e de aprendizagem), principal objeto de estudo da Didática da Matemática.

Partindo da noção de que os saberes sábios (produzidos em sua maior parte na instituições acadêmicas) sofrem transformações até se tornarem saberes a serem ensinados, isto é, passam por um processo de transposição didática, a TAD inaugura na didática um olhar antropológico sobre os fenômenos didáticos, ou seja, reconhece que o estudo das organizações praxeológicas matemática e didáticas pensadas para a difusão do saber matemática é um produto humano, ou seja, situa “a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais". (CHEVALLARD, 1999, p. 1)

Para Almoloud (2007) o estudo do funcionamento dos sistemas didáticos (sistemas formados por estudantes, professores e alunos em torno de um saber) segue a mesma lógica de rupturas propostas na Teoria das situações didáticas (TSD) de Guy Brousseau, de modo que enquanto a TSD se preocupa com a modelagem de situações didáticas, a TAD se preocupa com as relações institucionais que interferem no funcionamento dos sistemas, isto é, na ecologia. Essas rupturas são sintetizadas por Almoloud (2007, p.112):

- Matemática como a essência dos fenômenos didáticos;
- O desejo de elaborar uma ciência da educação desses fenômenos constitui a segunda ruptura e levou a explicar os modelos teóricos utilizados e submetê-los a um esquema experimental para verificar sua confiabilidade;
- Os conhecimentos matemáticos só podem ser compreendidos e aprendidos por meio de atividades e problemas que podem ser resolvidos pela mobilização desses conhecimentos. A matemática é antes de tudo, uma atividade que se desenvolve em situações que pode ser modelada por um jogo cujo oponente é um meio antagônico. Trata-se de uma atividade estruturada, na qual se destacam diferentes fases: ação, formulação e validação, que tem o aluno como ator principal, e as fases de evolução e institucionalização, que acontecem sob responsabilidade do professor.

A TAD, segundo Almoloud (2007) contempla todas essas rupturas, pois reconhece que a condição humana do conhecimento matemático como passível de questionamentos, além da centralidade do saber matemático para o estudo das situações de ensino.

1.2.1 Aspectos introdutórios da TAD[2]

A Teoria Antropológico do Didático tem suas origens na noção e teoria da Transposição Didática. Almouloud (2007).

A noção de Transposição didática inaugura o reconhecimento de que o saber matemático passa por diversas modificações até se tornar um saber a ser ensinado, ao passo que o próprio professor opera mudanças no interior da sala de aula, de modo que aquele saber, o saber a ensinar, geralmente presentes em livros didáticos e manuais, passa por um processo

[2] Nessa descrição nos limitaremos a apresentar algumas das noções essências da TAD, isto é, aquelas que utilizaremos no estudo. Temos ciência de que muitas outras noções poderiam fazer parte, porém nos detendo ao objetivo da pesquisa e ao prazo para sua execução, só descrevemos as noções de maior interesse para o momento.

de transposição interna na sala de aula, esse saber ensinado ainda pode sofrer uma outra transformação, isto é, o saber que foi realmente aprendido.

Assim a matemática transmitida pelos professores segue diferentes matemáticas, ou seja, o que muda na matemática é apenas a maneira de transmitir e interpretar, onde cada mediador apresenta de maneiras diferentes, permitindo a transição do objeto saber ao objeto de ensino a qual chamamos de transposição didática. Partindo dessa noção de processos transpositivos a TAD acrescenta ao quadro teórico de análise a perspectiva ecológica. Nessa perspectiva a noção de relação entre objetos, pessoas e instituições é fundamental para compreensão dos fenômenos didáticos (ALMOULOUD, 2007).

> A didática da matemática vista no campo da antropologia do conhecimento(ou antropologia cognitiva) considera que tudo é objeto, identificando diferentes tipos de objetos particulares: as instituições, os indivíduos e as posições que os indivíduos ocupam nas instituições, tomando indivíduos como sujeitos das instituições. (ALMOLOUD, 2007, p. 113)

Assim para tentar analisar essas relações a TAD parte de uma antropologia cognitiva que se baseia em noções primitivas que são: objetos, pessoas e instituições, relações entre pessoas e objetos, relações entre pessoas e instituições e de instituições com objetos, compõe os termos centrais da axiomática. (CHEVALLARD, 1996).

Os objetos são entidades materiais ou não que existem para, pelo menos, um indivíduo. Na TAD tudo pode ser considerado objeto:

> O alargamento do quadro, levado a cabo por necessidades de análise conduziu-me a propor uma teorização em que todo objeto possa aparecer: a função logarítmica é, evidentemente, um objeto (matemático), mas há também o objeto “escola”, o objeto “professor”, o objeto “aprender, o objeto “saber”, o objeto “dor de dente”, o objeto “fazer pipi”, etc. Assim, passa-se de uma máquina a pensar um universo didático restrito a um conjunto de máquinas de alcance mais amplo, apto, em princípio, a nos permitir situar a didática no seio da antropologia (CHEVALLARD, 1996, p.127).

O conceito de sujeito é um dos mais importantes na teoria de Chevallard. Contudo, muitos não dão esse devido valor, através dos processos de sujeição institucional que passa ao longo de sua vida. Cada um de nós é um individuo que ao longo de sua vida se sujeita a várias instituições. Esse processo de sujeição nos transforma em pessoa, ou seja, a nossa família, a escola, a igreja, um relacionamento são instituições das quais fazemos parte e influenciam nosso modo de ser. Assim quando entro em uma instituição, passo a ser sujeito dela, no interior dela eu mantenho relações com objeto, às relações que um indivíduo X pode manter com um O. Esses conjuntos de interações que o sujeito tem com um objeto são necessários para que O exista e também para podermos afirmar que X conhece O. Esse reconhecimento implica também o que seria a relação de conhecimento na TAD.

Assim além de objeto, pessoa, relação do sujeito e noção de Instituição é central na TAD. Chevallard atribui a instituição a definição de um dispositivo social, ou seja, podemos pensar nas instituições como sendo espaços sociais onde os sujeitos interagem com objetos diversos. Chevallard (1996) destaca que em relação a Matemática como um objeto do saber podemos ter instituições que são produtoras, utilizadoras e de formação do saber matemático. Assim o conceito de função na escola tem uma determinada relação institucional que é diferente na universidade, na escola técnica, numa empresa que usa esse conceito de forma prática, e etc.

A partir dessa descrição podemos agora situar melhor nossa pesquisa. Nossa intenção é investigar as relações instituições entre o ENEM e o conceito de função. O ENEM enquanto o dispositivo social é composto por uma equipe que materializa o processo. O próprio Ministério da Educação, os elaboradores da prova, as universidades que aderem a esse modelo de avaliação. Para ter acesso a muitas universidades e programas específicos as pessoas se sujeitam a essa instituição. O ENEM cobra que esses sujeitos tenham determinadas relações com os diferentes saberes, dentre eles a Matemática e seus conceitos. Nossa pesquisa está preocupada com um objeto em particular “funções”. Queremos saber como esse objeto sobrevive na prova do ENEM, , como ele é tratado. Que tipo de exigências são feitas para considerar que temos um relação suficiente com ele?

Além, de estudar a ecologia do conceito de funções no ENEM pode gerar reflexões interessantes, pois o ENEM é também uma instituição que pode influenciar no currículo da escola, a presença ou a ausência de certos conteúdos na prova diz muito sobre sua importância para a sociedade, a forma como ele é trabalhado pode indicar tendências que são seguidas nas escolas. Pensamos que para o professor, portanto, essa análise parece ainda mais importante.

Essa contextualização nos leva a outra pergunta: como descrever essa prática institucional?

A resposta para essa pergunta reside em outra noção fundamental: a praxeológica ou estudo das organizações praxeológicas.

1.2.2 ESTUDO DAS ORGANIZAÇÕES PRAXEOLÓGICAS

Na TAD as organizações praxeológicas assumem o papel de revelar as relações instituições sociais em torno de um objeto. (Chevallard, 1999)

A praxeologia pressupõe um método para analisar as práticas que ocorrem nas Instituições, tanto pela sua descrição, como também pelas condições em que estas ocorrem. Assim, a organização praxeológica diz respeito ao modo como as práticas instituições são propostas (discurso) e efetivadas (prática).

Almouloud (2007) sugere que no estudo da praxeologia observemos quatro postulados, conforme quadro abaixo:

Postulado	**Simbologia**	**Significado**
Tarefa	T	Tarefas a serem cumpridas, um grupo de (t) tarefas de mesma natureza corresponde a um tipo de tarefa T, assim quando t_1 e t_2 estão agrupadas a mesmo conjuntos dizemos que (t_1 e t_2) pertencem a tipo (T)
Técnica	T	Para o cumprimento das tarefas são necessárias as técnicas
Tecnologia	Θ	As técnicas são legitimadas através das tecnologias.
Teoria	Θ	Justificadas pela teoria.

Quadro 02 – Descrição de Tarefas, Técnicas, Tecnologia e Teoria.

Análise do sistema [T, τ, θ, Θ] compõe uma praxeologia. Esses quatro componentes articulam dois blocos. O bloco [□ , τ] é chamado prático-técnico ou "saber-fazer", o bloco tecnológico-teórico denomina-se "saber" (Chevallard, 1999).

Para nossa análise utilizaremos sobre a descrição do bloco saber-fazer, isto é, apresentaremos o conjunto de tarefas propostas pelo ENEM e suas respectivas técnicas.

As organizações praxeológicas em instituições de ensino, temos que toda organização praxeológicas pressupõe um organização referente ao saber e outra referente a didática, ou seja, na instituições se relacionam organizações matemáticas e organizações didáticas. Em nosso trabalho o recorte é apenas sobre as organizações do saber "funções" nas provas do ENEM.

1.2.1. Objetos ostensivos e objetos não ostensivos

Os objetos matemáticos e seu funcionamento em sua atividade matemática, e considerado como "natureza" do problema levando Bosh e Chevallard (1999) determina uma divisão na qual e diferenciada ostensivo e não ostensivo. Falar em objeto ostensivo que é aquele manipulável na realização da atividade matemática e objeto não ostensivo nada mas é que ideias, conceitos já existente no sujeito algo percebível ou visto por conta própria, a exemplo a palavra probabilidade de um evento A são os objetos ostensivos; já a noção de probabilidade é um objeto não ostensivo. Dessa forma Amouloud (2007) conclui que:

> Na abordagem antropológica, podemos dizer que o cumprimento de toda tarefa envolve necessariamente a *manipulação de ostensivos regulados* pelos *não ostensivos*, fazendo com que os objetos ostensivos tornem-se a parte perceptível da atividade. (AMOULOUD, 2007, p. 126)

Toda analise de atividade matemática constantemente e concedida em termos signos de objetos (ostensivos), sentido ou significação (não ostensivo), consolidando a função semiótica dos ostensivos formulada pela capacidade de produzir sentidos ou significados, sendo adjunta de uma função instrumental não podendo ser separada pois integra-se na capacidade de manuseios técnicos, tecnológicos e teóricos. Pensando nas funções a ideia de função é não-ostensiva, a notação f(x) é um ostensivo.

CAPÍTULO 2
ASPECTOS METODOLÓGICOS

2.1 PROBLEMATIZAÇÃO

A docência em Matemática é um processo complexo cujo a formação perpassa toda nossa vida profissional. Mesmo quando estamos entrando na licenciatura muitos de nós já carregam alguma experiência sobre o ensino e sobre a matemática, ao menos como estudantes, já vivenciamos esta prática. Assim durante a licenciatura cada experiência vivenciada por nós será parte da nossa identidade como futuros professores. Estudar constantemente é uma necessidade da profissão.

O Pró-enem, como programa de extensão, é uma dessas oportunidades de enriquecer o processo de nossa formação, pois como monitores, somos desafiados a ensinar Matemática e seus diversos conteúdos, com intuito de fornecer a clientela atendida pelo programa.

Durante quase 03 anos ministramos a disciplina de álgebra, essa experiência nos levou a diversas reflexões sobre os processos de ensino envolvendo a álgebra e seus conteúdos. Aprendemos também muitas lições sobre a própria docência, já que tínhamos que estudar, planejar e executar as sequências de aula planejadas. Embora o foco estivesse na resolução de questões do ENEM, a clientela atendida necessitava de aulas que dessem conta dos aspectos conceituais.

Percebemos que muitos dos candidatos que estão em fase de preparação para o ENEM, muitos ainda estudando regularmente no Ensino Médio, tem sérias dificuldades com os conteúdos envolvendo álgebra. Muitas vezes operações e procedimentos básicos não são compreendidos pelos estudantes, o que requer de nós um compreensão mais profunda de como atender esse público.

Outro entrave que percebemos ao longo de nossa experiência é que o foco na resolução de questões, somado ao pouco tempo de preparação, cerca de 60 h, demanda uma modalidade de ensino que nos ajude a ganhar tempo, assim a exposição de conteúdos é a principal estratégia de ensino, o que entendemos, que não facilita uma discussão mais ampla dos conceitos.

Diante desta realidade, nos propusemos a refletir sobre que tipo de ferramentas ou estudos poderiam nos ajudar, tanto no processo de planejamento, quanto no processo de ensino. Foi quando conhecemos a Teoria Antropológica do Didático através do trabalho de

Ferreira (2016), a noção de estudo praxeológico se apresentou para nós como uma poderosa ferramenta para o estudo das organizações matemáticas e didáticas em torno do conteúdo matemático.

Como nosso principal foco de interesse era a álgebra, acreditamos que a análise das organizações praxeológicas presentes no ENEM, poderiam nos ajudar no processo de planejamento das aulas e também na compreensão do que ensinar e porquê ensinar.

Dentre os conteúdos abordados na disciplina de álgebra observamos que Funções é o que os estudantes demonstram mais dificuldades, então formulamos a seguinte questão de pesquisa: *quais as organizações praxeológicas matemáticas em torno do conceito de funções nas questões do ENEM referente ao bloco de matemática nas edições de 2015 e 2016?*

Diante deste questionamento, fixamos como objetivo central *analisar as organizações praxeológicas matemáticas em torno do conceito de funções no bloco matemática* no *exame nacional do ensino médio no biênio 2015-2016.*

Assim estabelecemos os seguintes objetivos específicos:

- ✓ Realizar um levantamento de como se apresenta os conteúdos de matemática no bloco matemática das provas do ENEM no biênio 2015-2016.
- ✓ Analisar o bloco "saber-fazer" em relação as funções e seus conceitos no bloco matemática das provas do ENEM no biênio 2015-2016.

Fixados os objetivos passaremos na seção seguinte a discutir a natureza metodológica de nosso estudo.

2.2 ASPECTOS METODOLÓGICOS

2.2.1 NATUREZA DA INVESTIGAÇÃO

Dada a questão norteadora de nossa pesquisa e os objetivos propostos acreditamos que nossa pesquisa está nos moldes de uma pesquisa qualitativa, pois nossa intenção é fazer um estudo interpretativo das organizações praxeológicas matemáticas presentes no ENEM acerca do conceito de funções.

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2009) a pesquisa qualitativa tem como principal característica a interpretação e o contato aprofundado com uma determinada realidade. Nessa modalidade de pesquisa o pesquisador é o principal instrumento de coleta de dados. A pesquisa qualitativa pode ter denominações diversas tais como: estudos de caso, observação participante, pesquisa de intervenção, pesquisas documentais ou bibliográficas e etc.

Como nosso *corpus* de pesquisa é essencialmente a análise das provas do ENEM, entendemos que nossa pesquisa é documental. De acordo com Fiorentini e Lorezanto (2009) a pesquisa documental tem como fonte primordial o trabalho sobre documentos.

Ainda sobre nossa pesquisa, destacamos sua natureza de investigação preliminar, isto é, é um estudo inicial sobre a temática. Para Fiorentini e Lorenzato (2009) esse tipo de estudo pode ser classificado como um estudo exploratório, cuja intenção da pesquisa é fornecer as pesquisadores um panorama inicial sobre um determinado fenômeno. Os autores ainda destacam que esse tipo de pesquisa é fundamental, pois dele podem surgir importantes desdobramentos.

Para nossa pesquisa, imaginamos que conhecer e analisar essa organização praxeológica matemática em torno do conceito de funções, permitirá novos estudos sobre a prática de ensino desse conceito tanto no Pró-enem, como na Educação Básica.

Por se caracterizar como um estudo documental, em nossa pesquisa não há uma definição de sujeitos, no sentido clássico do termo. Assim como também, não faremos uma descrição de instrumentos de coleta de dados, pois a própria análise sobre os documentos se constituem como processo de coleta. Logo para compreensão dos passos metodológicos optamos pela descrição de etapas dessa análise.

1ª Etapa: Planejamento e execução

Nesta etapa, nós iniciamos o estudo sobre a TAD, por se tratar de um referencial amplo, julgamos que precisamos entende-lo de uma forma cuidadosa. Quando compreendemos a finalidade da organização praxeológica decidimos que seria este aspecto a ser considerado na teoria. Para realização desta etapas utilizamos artigos, livros e teses que versam sobre a TAD.

2ª Etapa: mapeamento e reconstrução da organização praxeológica matemática.

O primeiro passo foi buscar na literatura disponível, sobretudo livros didáticos do Ensino Básico as principais Tarefas presentes nestas obras. Consultamos também uma obra de referência[3] em termos de conteúdo matemático. Inicialmente planejamos a apresentação dessa organização nessa obra de referência, no entanto, devido ao prazo de execução da pesquisa, nos detivemos a descrição das tarefas e das técnicas mais usuais, fundamentas nessa obra de referencia e em nossa experiência como monitores do Pró-enem.

3ª Etapa: análise da organização praxeológica matemática do ENEM em torno do objeto funções.

A última etapa da investigação consistiu na análise da organização praxeológica matemática em torno do objeto funções. Esses resultados são abordados no capítulo seguinte.

[3] IEZZI, G. MURAKAMI, C. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol 01 . 8ª Edição 9ª Reimpressão. Editora Atual. São Paulo: 2004.

CAPÍTULO 3
RESULTADOS E ANÁLISES

O objetivo deste capítulo é apresentar os resultados que obtivemos a partir do processo de estudo da organização praxeológica matemática presente no ENEM. O capítulo está dividido em duas partes. Na primeira fazemos apresentação da organização praxeológica matemática realizada e na segunda fazemos nossas considerações sobre a organização.

3.1. ENEM: UM PERFIL SOBRE AS QUESTÕES DE MATEMÁTICA

O Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM) foi criado pela portaria 438 de 28/05/1998 pelo ministério da educação e cultura (MEC) com o objetivo de avaliar os alunos que já estão concluindo ou concluíram a educação básica. Sendo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP) o órgão responsável pela realização.

Para Amaurir (2007) o exame é realizado segundo pressuposto dos parâmetros curriculares nacionais , que sugerem que os alunos sejam avaliados por meio de habilidades e das competências construídas ao longo da escola básica. Assim o ENEM passou a ganhar forças na sociedade em dois momentos, primeiro momento, universidade principalmente as publicas, onde passaram a aderir sua nota do exame para egressos. Segundo momento, quando foi criado o (PROUNI), mais conhecido como Programa Universidade para Todos, designados a alunos de baixa renda que cursam universidades privadas.

Nos três últimos anos o ENEM tem perdido forças em relação há anos anteriores, principalmente quando falamos do recordes de inscritos em 2014 com 9.490.952 em relação a 2015 o numero é 10, 67% menor, quebrando uma sequencias de recorde desde 2008, quanto a 2016 aumentou a quantidade de inscritros, já em 2017 teve uma queda inesperada. Sendo bem preocupante a queda de números de inscritos, uma das causas, aumento da taxa de inscrição.
Numero de estudantes inscritos no ENEM, de 2015 a 2017, em todo território nacional.

2015	8.478.096
2016	9.276.328
2017	7.603.290

Fonte: site do INEP: www.inep.gov.br, acesso em 13/07/2017.

A nossa experiência como monitores do Pró-enem nos rendeu ao longo de 03 anos algumas impressões sobre a prova. A prova de matemática do ENEM é composta por quarenta e cinco questões do tipo gráficos, esquemas e enunciados considerados complexos, exigindo do candidato que demonstre leitura na interpretação de textos e informações matemáticas em diversas questões. Essa impressão é confirmada por Passos, Oliveira e Salvi (2011, p. 314):

> No Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), tem-se o exame como forma de avaliação do aprendizado do estudante no Ensino Básico, porém busca-se minimizar a seletividade e o autoritarismo relacionado a esse tipo de avaliação. Para isso, atualmente, tem-se o “Novo ENEM”, em cujas provas é necessário que o estudante demonstre domínio de competências e de habilidades na solução de problemas, fazendo uso dos conhecimentos adquiridos na escola e na sua experiência de vida, estando, assim, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais. (ibid).

Devido a importância do exame é possível encontrar na internet, além de informações oficiais nos sites do governo, estatísticas sobre o perfil das provas, estatísticas dos conteúdos, dicas e resoluções das provas de anos anteriores. Analisando essas informações encontramos um dado interessante. Em determinado site havia um dado sobre a frequência de conteúdos de matemática que mais se apresentavam no ENEM. De acordo com a página que não informava autoria do artigo a análise tinha sido feita de 2009 a 2016 e os resultados estão sintetizados na tabela 01:

Índice de Proporção	Conteúdos
Grandezas Proporcionais (24%)	Proporções e razões.
Geometria Espacial (13%)	Sólidos: prisma, cilindro, pirâmide, cone e esferas. Os exercícios deste tema cobram principalmente o cálculo do volume.
Aritmética (10%)	Progressões aritméticas.
Funções (10%)	As funções de primeiro e segundo graus costumam ser as mais recorrentes, Com menos intensidade também aparecem as funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.
Estatística (9%)	Cálculo de médias, medianas e outras medidas padrões.

Tabela 01 – Índice de proporção dos conteúdos do ENEM – 2009 – 2016. Fonte: https://geekiegames.geekie.com.br/blog/os-5-conteudos-de-matematica-que-mais-caem-no-enem/ acesso em 05/05/2017.

Observamos que com exceção das grandezas proporcionais os demais conteúdos têm uma distribuição com média aproximada de 10%. Analisando esse resultado observamos um equívoco em relação a classificação. Considerando que o ENEM apresenta 45 questões de matemática, isso pode levar o candidato a achar que o conteúdo funções só compreende cerca de 4 questões por edição. Na realidade nossa análise mostrou que o conceito de função aparece transversalmente em quase toda a prova de matemática, ou seja, sendo um conceito importante para compreensão de muitas questões da ENEM, inclusive de questões relacionadas com outras áreas de saber, como a Física e Química, para nós essa observação diz respeito a própria característica integradora que tem o conteúdo de funções, estando inclusive em sintonia com seu desenvolvimento histórico, já que como apontou Roque (2015) e Eves (2004) foram as ciências naturais que impulsionaram o desenvolvimento do conceito matemático de função.

Essa percepção para nós tem duas características importantes: a primeira relacionada a própria prova do ENEM, ou seja, isso mostra o seu caráter interdisciplinar, mas também intradisciplinar, pois há uma possibilidade de interconexões entre os conteúdos da própria matemática, conforme ilustramos na questão seguinte:

QUESTÃO 152

Um casal realiza um financiamento imobiliário de R$ 180 000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R$ 500,00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de

A 2 075,00.
B 2 093,00.
C 2 138,00.
D 2 255,00.
E 2 300,00.

Figura 01: Questão 152 prova amarela 2015 ENEM. Fonte: INEP

A questão 152 embora seja considerada como uma questão envolvendo Matemática Financeira, pode ter uma abordagem funcional, já que as ferramentas matemáticas deste ramo usam se apropriam do conceito de função.

Diante fato a outra constatação foi que metodologicamente precisamos fazer um recorto, pois a ideia funcional permeia praticamente todas as questões do exame, relacionada a matemática, mas também a outras áreas de saber, assim nosso foco será nas questões que usam diretamente no enunciado ou na resolução objetos ostensivos relativo ao conceito de funções.

3.2 FUNÇÕES NO ENEM 2015-2016

(ENEM 2015)

QUESTÃO 136
Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão T(h) = h2 + 22h - 85, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (c°)	**Classificação**
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificado como

a) Muito baixa.
b) Baixa.
c) Média.
d) Alta.
e) Muito alta.

Resolução:

t: Determinar o valor máximo da função $T(h) = -h^2 + 22h - 85$

τ_1: Calculo do ponto máximo $P_{máx} = -\frac{\Delta}{4a}$

Descreve os coeficientes da função a, b, c.

Calcule o Valor de Delta

Substituiu na fórmula do $P_{máx}$

τ_2: Analisar o gráfico de $T(h) = -h^2 + 22h - 85$

Trace o gráfico e análise os parâmetros.

$a < 0$ então a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Para $c = -85$, significa que a parábola toca o eixo y em -85.

Resolução por τ_1.

Se $T(h)= -h^2 + 22h - 85$, a maior temperatura T é dada por

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{22^2-4.(-1).(-85)}{4.(-1)} = -\frac{484-340}{-4} = 36$$

$T = 36 \Rightarrow 30 \leq T \leq 43 \Rightarrow$ classificação: alta   Resposta: D

Comentário

Observamos que essa questão comporta mais de uma técnica, como por exemplo, a análise do gráfico da função, como o ENEM tem um tempo limitado a τ_1 é mais econômica que a técnica τ_2, pois não dispondo de recursos como calculadoras gráficas o gráfico não é viável para construção manual.

Observamos que a questão trata de forma direta do conteúdo funções do segundo grau.

QUESTÃO 138

Após realizar uma pesquisa de mercado, uma operadora de telefonia celular ofereceu aos clientes que utilizavam até 500 ligações ao mês o seguinte plano mensal: um valor fixo de R$ 12,00 para os clientes que fazem até 100 ligações ao mês. Caso o cliente faça mais de 100 ligações, será cobrado um valor adicional de R$ 0,10 por ligação, a partir da 101ª até a 300ª; e caso realize entre 300 e 500 ligações, será cobrado um valor fixo mensal de R$ 32,00. Com base nos elementos apresentados, o gráfico que melhor representa a relação entre o valor mensal pago nesse plano e o número de ligações feitas é:

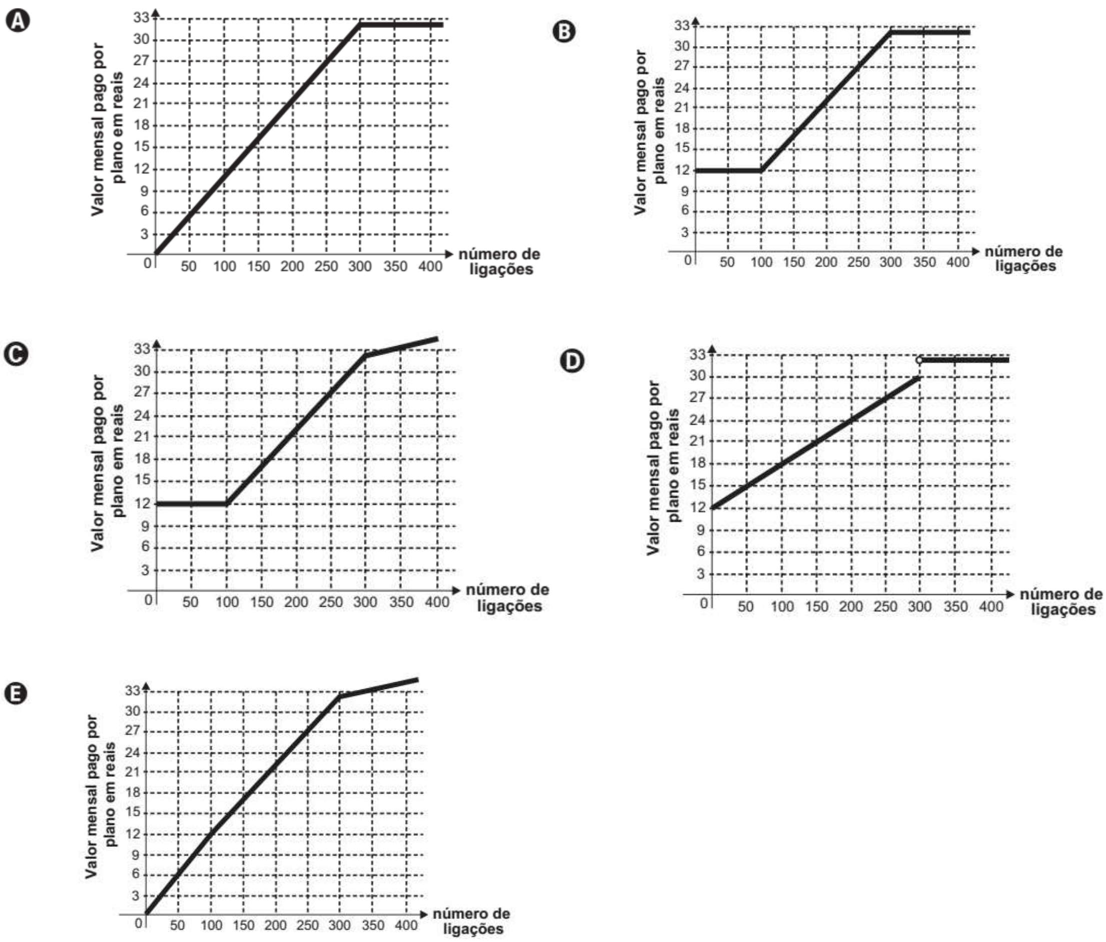


Figura 01. Questão 138 Prova Amarela do ENEM – INEP (2015)

Resolução:

t: Analisar o gráfico o comportamento do gráfico definida por várias sentenças

τ_1: Com base nos elementos apresentados, temos:

Números de ligações	Valor cobrado, em reais
$X \leq 100$	12
$100 < x \leq 300$	$12 + (x - 100) . 0{,}10$ $F(x) = 0{,}1\ x + 2$
$300 < x \leq 500$	32

Podemos inferir que a primeira parte do gráfico é constante, a segunda segue uma função linear com coeficiente angular positivo e a terceira é constante novamente.

Comentário

Verifica-se que essa questão possibilita apenas uma técnica, a análise do gráfico da função, tendo assim uma técnica τ_1 é mais econômica, como o ENEM tem um tempo limitado, fazendo uma analise rápida ao gráfico.

Verifica-se que a questão trata de forma direta do conteúdo funções do primeiro grau.

QUESTÃO 157

Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação q = 400 – 100p, na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais. A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto. O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo

a) R$ 0,50 $\leq$ p < R$ 1,50

b) R$ 1,50 $\leq$ p < R$ 2,50

c) R$ 2,50 $\leq$ p < R$ 3,50

d) R$ 3,50 $\leq$ p < R$ 4,50

e) R$ 4,50 $\leq$ p < R$ 5,50

Resolução:

t: Determinar o $q_{máx,}$ onde q (quantidade de pães) em função de p (preço em reais) na função $p^2 - 4p + 3 = 0$.

τ_1: Se o preço é p e a quantidade de pães vendida é q = 400 – 100p, a arrecadação média, em reais, em função do preço p, é dada por R (p) = (400 – 100p) . p

Para que esta arrecadação seja de R$ 300,00, deve-se ter: $(400 - 100p) \cdot p = 300 \Leftrightarrow 4p - p^2 = 3 \Leftrightarrow p^2 - 4p + 3 = 0$

Calculando Δ, da equação $p^2 - 4p + 3 = 0$, encontraremos a variação de preço com p' e p ";

$\Delta = (-b^2) - 4 \cdot a \cdot c$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$

$\Delta = 16 - 12 = 4$

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2.1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$p' = \frac{6}{2} = 3$

$p'' = \frac{2}{2} = 1$

O preço atual é de R$ 3,00, pois $\frac{R\$300}{100}$ = R$ 3,00.

Para manter a arrecadação, o preço deverá ser baixado para R$ 1,00 (R$ 0,50 ≤ R$ 1,00 < R$ 1,50)

τ_2: Temos que para 100 pães vendidos, arrecada = R$ 300,00

Sabendo que;

$$q = 400 - 100p$$

para sabermos o valor arrecado A, no fim do dia utilizaremos o produto ;

$A = p \cdot q$

$A = p \cdot (400 - 100p)$

$A = 100p \cdot (4 - p)$

$100p\ (4-p) \geq 300$

$p^2 - 4p + 3 \leq 0$

$p^2 - 4p + 3 = 0$

Desse modo analisar o gráfico de $R(p) = p^2 - 4p + 3$

Trace o gráfico e análise os parâmetros.

$a < 0$ então a concavidade da parábola é voltada para baixo.

Tocando no eixo x , com $a = 1$ e $c = 3$, significa dizer q p tem variação de 1,00$ a 3,00$.

Logo o q máximo tem um valor possível quando $1 \leq p \leq 3$

Resposta: A

Comentário

Observamos que essa questão comporta mais de uma técnica, como por exemplo, a análise do gráfico da função, como o ENEM tem um tempo limitado a τ_2 é mais econômica que a técnica τ_1, onde na τ_2 a parti da equação $p^2 - 4p + 3$ basta analisar o gráfico da função quadrática, ao em vez de esta aplicando formulas.

QUESTÃO 158

O HPV é uma doença sexualmente transmissível. Uma vacina com eficácia de 98% foi criada com o objetivo de prevenir a infecção por HPV e, dessa forma, reduzir o número de pessoas que venham a desenvolver câncer de colo de útero. Uma campanha de vacinação foi lançada em 2014 pelo SUS, para um público-alvo de meninas de 11 a 13 anos de idade. Considera-se que, em uma população não vacinada, o HPV acomete 50% desse público ao longo de suas vidas. Em certo município, a equipe coordenadora da campanha decidiu vacinar meninas entre 11 e 13 anos de idade em quantidade suficiente para que a probabilidade de uma menina nessa faixa etária, escolhida ao acaso, vir a desenvolver essa doença seja, no máximo, de 5,9%. Houve cinco propostas de cobertura, de modo a atingir essa meta:

Proposta I: vacinação de 90% do público-alvo.

Proposta II: vacinação de 55,8% do público-alvo.

Proposta III: vacinação de 88,2% do público-alvo.

Proposta IV: vacinação de 49% do público-alvo.

Proposta V: vacinação de 95,9% do público-alvo.

Para diminuir os custos, a proposta escolhida deveria ser também aquela que vacinasse a menor quantidade possível de pessoas.

Disponível em: www.virushpv.com.br. Acesso em: 30 ago. 2014 (adaptado)

A proposta implementada foi a de número

a) I. b) II. c) III. d) IV. e) V.

Resolução:

t: Quantidade máxima de meninas entre 11 a 13 anos

τ_1: Seja p a quantidade de meninas que compõe o público-alvo deste município e x a porcentagem deste público-alvo a ser vacinada. A quantidade de meninas previstas a desenvolver a doença é

$50\% \, . \, (2\% \, . \, x \, . \, p + (1 - x) \, . \, p) = 5{,}9\% \, p$

$\Leftrightarrow 0{,}50 \, . \, (0{,}02\,x + 1 - x) = 0{,}059 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 0{,}98x = \Leftrightarrow 1 - 0{,}98x = 0{,}118 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0{,}90 = 90\%$

τ_2: Construindo tabela com S(pessoas saudáveis), D(pessoas doentes), V (pessoas vacinadas), NV (pessoal não vacinadas)

	S	**D**	**Total**
V	$\frac{99}{100}$	$\frac{1}{100}$	X
NV	$\frac{50}{100}$	$\frac{50}{100}$	Y

$\frac{1}{100} \, . \, x + \frac{50}{100} \, . \, y = \frac{5{,}9}{100} \, . \, (x+y)$

1x+50y=5,9(x+y)

50y-5,9y=5,9x-1x

44,1y=4,9x

$\frac{44,1}{4,9}$y=x

9y=x

$\frac{9}{1}=\frac{x}{y}$

Fazendo assim a cada 9 pessoas vacinadas, 1 pessoa não vacinada, uma relação de 90% pessoas vacinadas, ou seja a cada 10 vacinadas 1 não terá vacinado, parra assim atingir uma meta de 5,9% de meninas que possa vir a desenvolver a doença

τ_3

I. 5,9% pode ter doença
II. $\begin{matrix} 5,9\% \rightarrow & 50\% \\ x & \rightarrow 100\% \end{matrix}$⇒11,8% (pessoas não vacinadas + sem efeito)
III. Vacinas com efeito ⇒100% - 11,8% = 88,2%
IV. $\begin{matrix} 88,2\% \rightarrow & 98\% \\ x & \rightarrow 100\% \end{matrix}$⇒x = 90%
V.

Comentário

Observamos que essa questão comporta mais de uma técnica, como por exemplo, regra de três, como o ENEM tem um tempo limitado a τ_3 é mais econômica que a técnica τ_1 e τ_2.

Observamos que a questão trata de forma direta do conteúdo funções do primeiro grau.

QUESTÃO 159

O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirido novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para t ≥ 1?

a) P(t) = 0,5 . t^{-1} + 8 000

b) P(t) = 50 . t^{-1} + 8 000

c) P(t) = 4 000 . t^{-1} + 8 000

d) P(t) = 8 000 . $(0,5)^{t-1}$

e) P(t) = 8 000 . $(1,5)^{t-1}$

Resolução:

t: Apresentar a função que calcule a estimativa em função de p.

τ_1: O numero de unidades produzidas P, em função de t, corresponde, em cada ano, aos termos de uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 =$ 8000 unidades e de razão q = 1,5.

Logo, a expressão que determina esse numero de unidades é p = 8 000 . $(1,5)^{t-1}$

$\tau_{2:}$

Sabendo que a cada ano aumenta 50% na quantidade.

T (ano)	P (t) quantidade
1	8000
2	12000
3	1800

Com isso podemos calcular a razão:

100% + 50% = 150%

Transformando em um numero decimal, R = 1,5.

Bastando multiplicara quantidade de cada ano P(t) por 1,5, porem a cada ano o expoente dessa razão R ira varia em relação a t do ano anterior.

Logo, a expressão e da forma p = 8 000 . $(1{,}5)^{t-1}$

Comentário

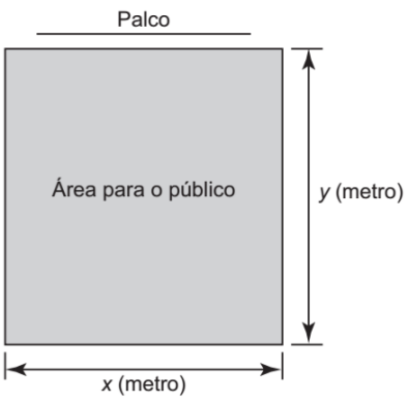
Observamos que essa questão comporta mais de uma técnica, como por exemplo, já tendo condições direta de saber como calcular a razão, como o ENEM tem um tempo limitado a τ_1 é mais econômica que a técnica τ_2.

Observamos que a questão trata de forma direta do conteúdo funções do segundo grau.

(ENEM 2016)

QUESTÃO 138

Dispondo de um grande terreno, uma empresa de entretenimento pretende construir um espaço retangular para shows e eventos, conforme a figura.



A área para o público será cercada com dois tipos de materiais:

- nos lados paralelos ao palco será usada uma tela do tipo A, mais resistente, cujo valor do metro linear é R$ 20,00;
- nos outros dois lados será usada uma tela do tipo B, comum, cujo metro linear custa R$ 5,00.

A empresa dispõe de R$ 5 000,00 para comprar todas as telas, mas quer fazer de tal maneira que obtenha a maior área possível para o público.

A quantidade de cada tipo de tela que a empresa deve comprar é

a) 50,0 m da tela tipo A e 800,0 m da tela tipo B.
b) 62,5 m da tela tipo A e 250,0 m da tela tipo B.
c) 100,0 m da tela tipo A e 600,0 m da tela tipo B.
d) 125,0 m da tela tipo A e 500,0 m da tela tipo B.
e) 200,0 m da tela tipo A e 200,0 m da tela tipo B.

Resolução:

t: Calcular a área máxima, de modo que não ultrapasse do valor x dado.

τ_1: Apresentar a função que representa cada dada lado paralelo ao outro.

- Nos lados paralelos ao palco (tela A), temos um gasto de 2 x . 20 = 40x reais.
- Nos outros dois lados (tela B), temos um gasto de 2y. 5 = 10 y reais.
  Logo, pelo valor total, temos 40 x +10 y = 5000.
- A área do terreno é A = $x.y$

Dai, se $\begin{cases} A = x.y \\ 40x + 10y = 5000 \end{cases}$

Então, isolando y na equação 40 x +10 y = 5000, temos

$y = \frac{5000-40x}{10}$ e, substituindo na outra equação obtemos

$A = x\left(\frac{5000-40x}{10}\right) = \frac{5000x}{10} - \frac{40x^2}{40} = 500 - 4\,y^2$

Como a área deve ser máxima, devemos calcular x do vértice (Xv):

Xv = $\frac{-500}{-8}$ = 62,5

Dai, se x = 62,5 m, então y = 250 m.

Logo, a quantidade de cada tipo de tela que a empresa deve comprar e 125m da tela tipo A e 500 da tela tipo B.

τ_2: Coletando as informação dada no enunciado da questão, assim já podemos construir nossa função.

20. (x + x) + 5 (y+ y) = 5000

40x + 10y = 5000 (÷10)

4x + y = 500

Isolando y temos: y = 500 – 4x

Sabendo que a área, A = x.y

A = x . (500 – 4x)

Ax = - $4x^2$ + 500x

Agora calculando o X do vértice (Xv);

Xv = $\frac{-b}{2a} = \frac{-500}{-8} = \frac{500}{8}$ =62,5 m ; Tela A

Substituindo Xv em y,

Y = 500 – (4. 62,5)

Y = 500 – 250

Y = 250 m

Então,

Gatos em; tela A: 62,2 x 2 = 125 m e tela B: 250 x 2 = 500 m.

Comentário

Nessa questão aborda – se mais de uma técnica, tendo assim uma técnica τ_2 mais econômica, como o ENEM tem um tempo limitado, fazendo uma interpretação e já construindo a função a ser trabalhada.

QUESTÃO 141

O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40.\ 2^{2t}$$

em que t é o tempo, em hora, e p(t) é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será:

A) reduzida a um terço.

B) reduzida à metade.

C) reduzida a dois terços.

D) duplicada.

E) triplicada.

Resolução:

t: Calcular o p(t) para t igual 20 em uma função do tipo p(t) = 40. 2^{2t}

τ_1: População inicial: $p(0) = 40.2^{3.0}$ = 40.

Determinando a pulação ápos 20 min = $\frac{1}{3}$ hora:

$P\left(\frac{1}{3}\right) = 40 \,.\, 2^{3.\frac{1}{3}}$ = 80.

Portanto a população duplicara.

Comentário

Concluiu-se que a questão apresenta apenas uma técnica, tendo assim a técnica a qual basta apenas substitui determinado valor na formula dada.

Verifica-se que a questão trata de forma direta do conteúdo função exponencial.

QUESTÃO 147

Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado pela função f(t) = - $2t^2$ + 120t (em que t é expresso em dia e t 0 é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia.

A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. A segunda dedetização começou no

A) 19º dia.

B) 20º dia.

C) 29º dia.

D) 30º dia.

E) 60º dia.

Resolução:

t: Calcular a tempo máxima em que o numero de infectados não ultrapasse 1600, da equação $F(t) = -2t^2 + 120t$.

τ_1: Sendo assim, basta determinar as raizes da equação ;

$F(t) = -2t^2 + 120t$

$1600 = - 2t^2 + 120t$

$2t^2 - 120t + 1600 = 0$ (÷2)

$t^2 - 60t + 800 = 0$

$\Delta = 3600 - 3200 = 400$

$$t = \frac{60 \pm 20}{2}$$

$t' = 20$ e $t'' = 40$

τ_2: Determinando as raízes da equação usando soma e produto dos termos b e c.

$F(t) = -2t^2 + 120t$

$1600 = - 2t^2 + 120t$

$2t^2 - 120t + 1600 = 0$ (÷2)

$t^2 - 60t + 800 = 0$

$b + c = 60$

$b . c = 800$, como $b = 20$ e $c = 40$

Temos; na soma $20 + 40 = 60$

Produto $20 . 40 = 800$

Logo $t' = 20$ e $t'' = 40$

Como a segunda dedetização será feita no dia em que o numero de infectados atingir 1600 pessoas, dessa forma, concluímos que a primeira vez que isso ocorre e no 20º dia.

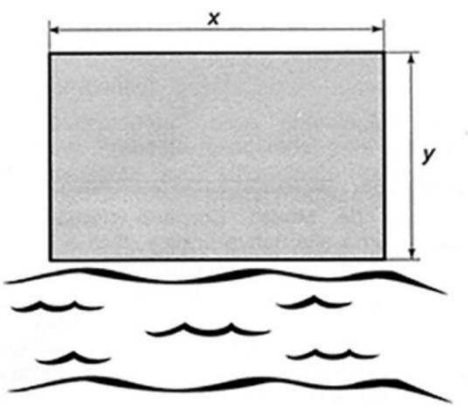
Comentário

No entanto a questão apresenta mais de uma técnica, tendo assim a técnica τ_2 mais econômica, pois o ENEM tem um tempo limitado, onde encontramos as raízes pela soma e produto dos termos a e b da equação.

Verifica-se que a questão trata de forma direta do conteúdo funções do segundo grau.

QUESTÃO159

Um terreno retangular de lados cujas medidas, em metro, são x e y será cercado para a construção de um parque de diversões. Um dos lados do terreno encontra-se as margens de um rio. Observe a figura:



Para cercar todo o terreno, o proprietário gastará R$ 7 500,00. O material da cerca custa R$ 4,00 por metro para os lados do terreno paralelos ao rio, e R$ 2,00 por metro para os demais lados. Nessas condições, as dimensões do terreno e o custo total do material podem ser relacionados pela equação

a) 4 (2x+ y) = 7500
b) 4 (x+ 2y) = 7500
c) 2 (x+ y) = 7500
d) 2 (4x+ y) = 7500
e) 2 (2x+ y) = 7500

t: Representar a equação que esta relacionada as dimensões e custos do total de material.

τ_1: Coletando todos os dados da questão temos ;

- Lado x custa 4,00
- Lado y custa 2,00

Temos ;

$$2x \cdot 4 + 2y \cdot 2 = 7500$$

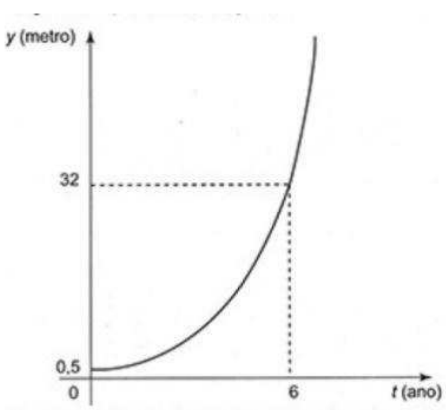
$$4 \cdot (2x + y) = 7500$$

Logo determinamos a função que representa , as dimensões do terreno e o custo total do material 4 . (2x + y) = 7500.

Comentário

Verifica-se que essa questão possibilita uma técnica bem simples, onde fazendo o perímetro e multiplicando cada lado pelo valor de custo de cada um obtemos o que se pede.

QUESTÃO174



Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função y(t) = a^{t-1}, na qual y representa a altura da planta em metro, t é considerado em ano, e a é uma constante maior q 1. O gráfico representa a função y.

Admita ainda que y(0) fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio.

O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a

a) 3.
b) 4.
c) 6.
d) $\log_2 7$.
e) $\log_2 15$.

t: Calcular o tempo em relação a altura quando chega a determinada altura para corte.

τ_1: Como crescem 7, 5 m após plantio e a altura inicial e de 0, 5 m, a altura no momento de corte será de 8 m.

- $y(t) = a^{t-1}$
  $y(0) = a^{0-1}$
  $0,5 = a^{-1}$
  $a = 2$
- $8 = 2^{t-1}$
  $2^3 = 2^{t-1}$
  $t - 1 = 3$
  $t = 4$

Comentário

Denota-se que essa questão possibilita apenas uma técnica, na qual para resolvida precisamos conhecer a constante a calculando a expressão em função de 0.

Verifica-se que a questão trata de forma direta do conteúdo função exponencial.

3.3 ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE A ORGANIZAÇÃO PRAXEOLÓGICA

Nossa análise das questões das duas edições do ENEM mostra que de fato, que se restringirmos a análise aquelas questões que apresentam objetos ostensivos no enunciado ou nas técnicas empregadas, teremos um número que chega próximo a estimativa da estatística que citamos na seção 3.1, no entanto, insistimos que o índice não leva em consideração as aplicações das funções como ferramenta de resolução de várias questões em áreas da matemática e de outras áreas do saber.

Como nosso interesse era nas organizações matemáticas do biênio, analisamos as questões em conjunto. Com relação a descrição das tarefas organizamos organizar as tarefas em ao menos cinco Tipos de Tarefa:

T_1: Determinar o valor máximo de uma função f(x)

T_2:Analisar o comportamento do gráfico de f(x)

T_3: Calcular f(x) para um determinado valor de x.

T_4: Calcular o valor de x para um determinado valor de f(x)

T_5: Escrever sentença de f(x) que modela determinado fenômeno

Notemos que as questões podem ser agrupadas também em relação ao tipo de funções; função polinomial do 1º grau, função polinomial do 2º grau e funções exponenciais. Por razões econômicas intitulamos os Tipos de Tarefas em relação a um f(x) genérico.

Essas informações nos traz informações importantes sobre a ecologia do conceito de funções no exame do ENEM. Observamos que alguns dos temas que são normalmente abordados no Ensino Médio não foram abordados em duas edições seguidas do Enem. O conceito sobrevive sobre a forma de funções lineares, quadráticas e exponenciais.

Outra observação é em relação ao emprego das técnicas na resolução desses tipos de tarefas. Observamos que praticamente todos os Tipos de tarefa comportam mais de uma técnica, sendo que a natureza das tarefas sempre comporta interpretações e possibilidade de utilização de outras ferramentas matemáticas para cumprir a tarefa. Sobre a natureza dos tarefas citamos aqui a pesquisa de Freitas e Almouloud (2013) que ao analisar livros didáticos do ensino médio, observaram que 66% deles privilegiava uma abordagem de resolução de problemas.

As questões analisadas mostra que o emprego das técnicas depende fortemente da interpretação das informações dos problemas. Mesmo pelo contexto das questões e mais pelos dados matemáticos usados para modelar as situações apresentadas.

Outro aspecto importante é que as questões que comportavam mais de uma técnica abriam possibilidade para a escolha de uma técnica mais econômica, essa decisão é chave para sucesso em uma prova considerada longa. Daí a importância de em atividades como pró-enem apresentar não diversidade de técnicas, considerando a natureza do problema e a economia das técnicas.

Sintetizamos essas informações em na tabela 02:

2015	**T_1**	**T_2**	**T_3**	**T_4**	**T_5**
Função Polinomial do 1º grau	158;	138			
Função Polinomial 2º Grau	136 ; 157				
Funções exponenciais					159
2016	**T_1**	**T_2**	**T_3**	**T_4**	**T_5**
Função Polinomial do 1º grau					
Função Polinomial 2º Grau	138				
Funções exponenciais			141	159	174

Tabela 02: Síntese dos tipos de tarefa e conteúdos

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A motivação para nossa pesquisa surgiu no âmbito do projeto de extensão do Pró-enem no componente curricular álgebra do CCHE-UEPB. Notando as dificuldades dos alunos em interpretar as questões contextualizadas e aplicar os conhecimentos técnicos às resoluções das questões propostas, decidimos realizar um estudo sobre as questões do principal exame que os estudantes do Pró-enem enfrentam. Assim, nosso trabalho teve como finalidade fazer uma analise praxeológica nas provas do ENEM no biênio 2015- 2016, que abordam o conteúdo de funções.

O discurso institucional sobre o conceito de funções garante que “O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. (BRASIL 2006, p.121).”

Diante dessa constatação nós optamos pelo uso de uma teoria que tivesse condições de analisar o exame, nos permitindo entender como o saber funções vive nesse ambiente. A TAD, enquanto teoria nos ajudou a compreender fenômenos interessantes sobre o saber funções no ENEM considerando o biênio (2015 – 2016). Observamos primeiramente que as funções mais abordadas, no biênio considerado, são de três tipos: função polinomial do 1º grau, função polinomial do 2º grau e função exponencial. Agrupadas em 5 tipos de tarefas o exame permite o uso de técnicas variadas para resolução das tarefas propostas.

Outra observação importante é que as questões tem um viés de problematização, ou seja, para os alunos aplicarem as técnicas é preciso uma atenção ao tratamento das dados matemáticos. Logo em atividades do Pró-enem não é interessante trabalhar questões de mera aplicação de resultados.

Por fim, destacamos que os conteúdos e técnicas empregadas, no biênio considerado, parecem expressar expectativas em relação ao currículo proposto para Educação Básica. A única questão que tratava de função logarítmica era uma questão que não necessitava entender o conceito de logaritmo. Assim, estudo de sinal de funções, operações com intervalos, inequações foram conteúdos que não figuram entre as técnicas.

Apesar do número de questões por edição, frisamos que analisamos um número reduzido, de modo que, como já dissemos são diversas as questões de outros áreas do saber que requerem conhecimento sobre funções. Assim destacamos como possibilidade de estudo futuro analisar o papel do conceito de funções nessas outras áreas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, SADDO AG. **Fundamentos da Didática da Matemátic**a / Saddo Ag Almouloud. - Curitiba: Ed. UFPR. 2007.

BOGDAN, R. ; BIKLEN, S.**Investigação qualitativa em educação: uma introdução a teoria e aos métodos.** Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto:Porto Editora, 1994.

BRASIL, Secretaria da educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brásila, MEC, 2006.

CHEVALLARD, Y. Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In. Brun, J. **Didática Das Matemáticas** Trad: Maria José Figueredo, Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

_____________L´ analyse des pratiques enseignantes em Théorie Anthropologie Didactique. In: **Recherches em Didactiques de Mathématiques,** 1999. p. 221-266.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004

FERREIRA, M. E. A. **Estudo Praxeológico como instrumento para refletir sobre a formação de professores que ensinam matemática: o caso das funções quadráticas.** Trabalho de Conclusão de Curso. Licenciatura em Matemática CCHE-UEPB. Monteiro. 2016.

FIORENTINI, Dário; LORENZATO. Sérgio. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FREITAS, R. L. ALMOULOUD, S. A. Organizações praxeológicas sobre função exponencial: uma abordagem do livro didático. In. VII CIBEM. Montevideo, Uruguay. 2013.

IEZZI, G. MURAKAMI, C. Fundamentos de Matemática Elementar. Vol 01 . 8ª Edição 9ª Reimpressão. Editora Atual. São Paulo: 2004

MAGARINUS, R. **Estudos de funções: compreensões e aprendizagem de alunos do ensino médio.** 2006. 71 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universsidade de Passo Fundo – Passo Fundo, 2006.

PASSOS, M. M. **As questões de "matemática e suas tecnologias" no "novo ENEM": um olhar com base na análise de conteúdo.** In: Revista Educação Matemática e Pesquisa. V13, nº2. São Paulo. 2011,pp 313-335

PONTE. J. P. **O conceito de função no currículo de matemática**. Revista Educação e Matematica, APN, Portugal. n 15, p. 3 – 9, 1990.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

ZUFFI, I. **A importância da linguagem no ensino da matemática. Educação Matematica em Revista**, São Paulo, n. 16, p. 49 – 55, maio 2004.